

Локситоны и дипольные страты имеют внутреннюю структуру нанометрового масштаба, причём многие интересные эффекты предполагают радикальные изменения локального поля даже между соседними атомами, т.е. на расстояниях порядка нескольких нанометров или меньших. Оптические методы плохо подходят для разрешения столь малых структур, так что более реалистичными методами для экспериментального обнаружения локситонов могут стать наблюдение предсказанных нами резонансов, определяемых размерами системы, и использование рентгеновского излучения или спектроскопии рассеяния электронов (electron energy loss spectroscopy).

Следует отметить, что локситоны и дипольные наностраты могут открыть новые возможности для создания элементов для молекулярных компьютеров и других наноструктур [19]. Существенным преимуществом локситонов по сравнению с электронами в полупроводниках и металлах является то, что для возникновения локситонов не требуется электрического тока и переноса заряда. Это преимущество могло бы способствовать дальнейшему уменьшению размеров логических элементов компьютеров, поскольку полупроводниковая технология на масштабах менее 10 нм сталкивается со значительными проблемами, связанными с выделением тепла.

Локситоны могли бы работать как в пассивных элементах (например, для передачи данных или создания линий задержки), так и в активных (переключателях или логических устройствах). Наноструктуры, основанные на локситонах, могли бы, таким образом, дополнить спектр альтернативных нанотехнологий, включающий в себя плазмонику (plasmonics) [20, 21], во многом опирающуюся на поверхностные плазмоны [10, 11], и спинтроннику (spintronics) [22]. Кроме того, локситоны могут найти применение при создании наносенсоров биологических молекул и других частиц или примесей. Такой наносенсор можно сконструировать из резонансных молекул-рецепторов, которые избирательно присоединяют к себе интересующую нас молекулы или частицы, или же молекулы-рецепторы могут быть присоединены к частицам, обладающим оптическим резонансом. Используя "магическую" конфигурацию молекул, можно добиться того, что локситон в такой системе не исчезает даже при точном резонансе лазерного излучения с составляющими её молекулами, при этом при присоединении интересующей нас биологической молекулы к наносенсору локситон будет подавлен.

Ещё более захватывающие возможности открываются в цепочках и решётках из атомов с инверсной населённостью резонансного квантового перехода, которую можно создать с помощью какого-либо рода накачки (например, оптической). Такие системы могут открыть путь к манипулированию локситонами, их усилению и, возможно, даже к когерентной генерации локситонов — своего рода "локситонному лазеру" ("locster").

Итак, нами было показано, что подвергая цепочки и решётки из сильно взаимодействующих атомов (в том числе, двухатомную систему) действию лазерного излучения с частотой близкой к частоте атомного резонанса, можно добиться появления дипольных нанострат и коротковолновых возбуждений локального поля — локситонов. Связанные с локситонами эффекты включают в себя гигантские резонансы локального поля, определяемые размерами системы, наличие "магических"

чисел и конфигураций атомов, отмеченных исчезновением резонансного подавления локального поля в системе, а также оптическую бистабильность и гистерезис.

Авторы благодарят Управление по научным исследованиям ВВС США (US AFOSR) за финансирование работы.

## Список литературы

1. Kaplan A E, Volkov S N *Phys. Rev. Lett.* **101** 133902 (2008)
2. Born M, Wolf E *Principles of Optics* 6th ed. (Oxford: Pergamon Press, 1980), глава 2 и содержащиеся в ней ссылки [Борн М, Вольф Э *Основы оптики* 2-е изд. (М.: Наука, 1973)]
3. Aharoni A *Introduction to the Theory of Ferromagnetism* 2nd ed. (Oxford: Oxford Univ. Press, 2000)
4. Kittel Ch *Introduction to Solid State Physics* 7th ed. (New York: Wiley, 1996) [Киттель Ч *Введение в физику твёрдого тела* (М.: Наука, 1978)]
5. Bowden C M, Dowling J P *Phys. Rev. A* **47** 1247 (1993)
6. Maki J J et al. *Phys. Rev. Lett.* **67** 972 (1991)
7. Бутылкин В С, Каплан А Е, Хронополо Ю Г *ЖЭТФ* **59** 921 (1970) [Butylkin V S, Kaplan A E, Khronopulo Yu G *Sov. Phys. JETP* **32** 501 (1971)]
8. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Наука, 1988) [Landau L D, Lifshitz E M *The Classical Theory of Fields* (Oxford: Butterworth-Heinemann, 1980)]
9. Steel D G, Rand S C *Phys. Rev. Lett.* **55** 2285 (1985)
10. Shalaev V M et al. *Opt. Lett.* **30** 3356 (2005)
11. Markel V A, Sarychev A K *Phys. Rev. B* **75** 085426 (2007)
12. Yablonovitch E *Phys. Rev. Lett.* **58** 2059 (1987)
13. Сандомирский В Б *ЖЭТФ* **52** 158 (1967) [Sandomirskii V B *Sov. Phys. JETP* **25** 101 (1967)]
14. Chernyak V, Volkov S N, Mukamel S *Phys. Rev. Lett.* **86** 995 (2001)
15. Kaplan A E et al. *Phys. Rev. A* **61** 032101 (2000)
16. Bowden C M, Sung C C *Phys. Rev. A* **19** 2392 (1979)
17. Hehlen M P et al. *Phys. Rev. Lett.* **73** 1103 (1994)
18. Kaplan A E, Meystre P *Opt. Commun.* **40** 229 (1982)
19. Heath J R, Ratner M A *Phys. Today* **56** (5) 43 (2003)
20. Murray W A, Barnes W L *Adv. Mater.* **19** 3771 (2007)
21. Fainman Y et al. *Opt. Photon. News* **17** (7) 24 (2006)
22. Žutić I, Fabian J, Das Sarma S *Rev. Mod. Phys.* **76** 323 (2004)

PACS numbers: **05.40.** – a, **05.45.** – a, 42.25.Dd, **46.65.** + g, 47.27.eb  
DOI: 10.3367/UFNr.0179.200905j.0547

## Современные методы статистического описания динамических стохастических систем

В.И. Кляцкин

### 1. Введение

С.М. Рытов уделял большое внимание развитию функциональных методов анализа стохастических систем на семинарах по статистической радиофизике, возглавляемых им. Эти методы он называл *радиоматематикой*. Я принимал участие в работе этих семинаров с конца 1960-х годов. С.М. Рытов часто задавал, в частности и мне, вопрос: "Что Вы изучаете?" Я традиционно отвечал, что решения стохастических уравнений (обыкновенных дифференциальных и в частных производных или интегральных) являются функционалами от случайных коэффициентов этих уравнений и я изучаю зависимость статистических характеристик этих решений от различных моделей и статистических параметров этих коэффициентов. Примерно 30 лет я считал этот ответ исчерпывающим. И только в последние 10–15 лет, я понял всю актуальность вопроса "что Вы изучаете?" и полную

несостоятельность моего традиционного ответа. Это связано с тем, что в последнее время внимание как теоретиков, так и экспериментаторов привлекает вопрос о связи динамики усреднённых характеристик решения задачи с поведением решения в отдельных реализациях. Это особенно актуально для геофизических проблем, связанных с атмосферой и океаном, в которых, вообще говоря, отсутствует соответствующий ансамбль усреднения и экспериментаторы, как правило, имеют дело с отдельными реализациями. При этом часто результаты статистического анализа не только не имеют ничего общего с поведением решения в отдельных реализациях, но и нередко просто им противоречат. Это я и хочу продемонстрировать в настоящем сообщении.

Сейчас используются три подхода к анализу стохастических динамических систем.

Первый подход, основанный на анализе устойчивости решений детерминированных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = A(t) \mathbf{x}(t)$$

по Ляпунову, традиционно привлекает большое внимание многих исследователей. При этом анализируется верхний предел решения задачи

$$\lambda_{\mathbf{x}(t)} = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln |\mathbf{x}(t)|,$$

который называется его характеристическим показателем. При применении такого подхода к стохастическим динамическим системам часто для интерпретации и упрощения полученных результатов на последней стадии подключают статистический анализ и вычисляют их статистические средние, такие, например, как

$$\langle \lambda_{\mathbf{x}(t)} \rangle = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \langle \ln |\mathbf{x}(t)| \rangle.$$

Недостатки этого подхода для стохастических динамических систем следующие:

1. Такие упрощающие свойства случайных параметров, как стационарность во времени, однородность и изотропность в пространстве, используется лишь на последней стадии анализа.

2. При переходе к континуальным обобщениям обыкновенных дифференциальных уравнений (например, в механике и электродинамике сплошных сред), т.е. к уравнениям в частных производных (к полям), анализ устойчивости по Ляпунову возможен только с помощью разложения решений в ряды по полной системе ортогональных функций. При применении такой методики к стохастическим задачам возникает вопрос о перестановочности операций разложения в ряды и статистического усреднения. В частности, при аппроксимации статистических характеристик случайных процессов и полей сингулярными (обобщёнными) функциями (как, например, в приближении дельта-коррелированных флуктуаций параметров системы) эти операции, как правило, не перестановочны.

Второй подход, также традиционный, основан на анализе моментных и корреляционных функций решений стохастических задач.

Недостатком второго подхода является то, что обычно используемые методы статистического усреднения сглаживают качественные особенности отдельных

реализаций и нередко полученные статистические характеристики не имеют ничего общего с поведением отдельных реализаций.

В ряде случаев существуют, однако, физические процессы и явления, происходящие с вероятностью единица (т.е. почти во всех их реализациях), называемые *когерентными* (см. монографии [1–4] и работу [5], в которых подробно обсуждается этот вопрос). Для описания таких явлений используется третий подход, основанный на *методе статистической топографии*, в котором изучаются не моментные функции, а статистические характеристики некоторых функционалов, описывающих именно когерентные явления.

Далее мы проиллюстрируем применение этих подходов к простейшим физическим задачам.

## 2. Примеры динамических систем

### 2.1. Диффузия пассивной безынерционной примеси в случайном поле скоростей

В качестве первого примера рассмотрим задачу об относительной диффузии безынерционных частиц в случайном гидродинамическом потоке с полем скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  в рамках простейшего кинематического уравнения для каждой частицы

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) = \mathbf{u}(\mathbf{r}(t), t), \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0.$$

Численное моделирование этой задачи показывает, что динамика системы частиц существенно различается в зависимости от того, является ли случайное поле скоростей бездивергентным или дивергентным. Так, на рис. 1а для конкретной реализации бездивергентного стационарного во времени поля скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  схематически изображён фрагмент эволюции системы частиц (двумерный случай) в безразмерном времени, связанном со статистическими параметрами поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ . В начальный момент частицы равномерно располагались в круге. В этом случае частицы относительно равномерно заполняют область, ограниченную деформированным контуром. Возникает лишь сильная изрезанность фрактального характера этого контура.

Тогда как в случае потенциального поля скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  частицы, равномерно расположенные в квадрате в начальный момент, в процессе временной эволюции образуют кластерные области. На рисунке 1б приведён фрагмент результата такой эволюции, полученный численным моделированием. Подчеркнём ещё раз, что образование *кластеров* в этом случае — чисто кинематический эффект. Очевидно, что при усреднении по ансамблю реализаций случайного поля скоростей такая особенность динамики частиц полностью исчезает.

Рассмотрим совместную динамику двух частиц. В этом случае плотность вероятности расстояния между частицами (для малого начального расстояния между ними) является логнормальной и моментные функции расстояния (например, для двумерного случая) экспоненциально возрастают во времени:

$$\langle l^n(t) \rangle = l_0 \exp \left\{ \frac{1}{8} \left[ 2(D^s - D^p) n + 3D^p n^2 \right] \right\},$$

где  $D^s$  и  $D^p$  связаны с соленоидальной и потенциальной составляющими спектральной функции поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ .

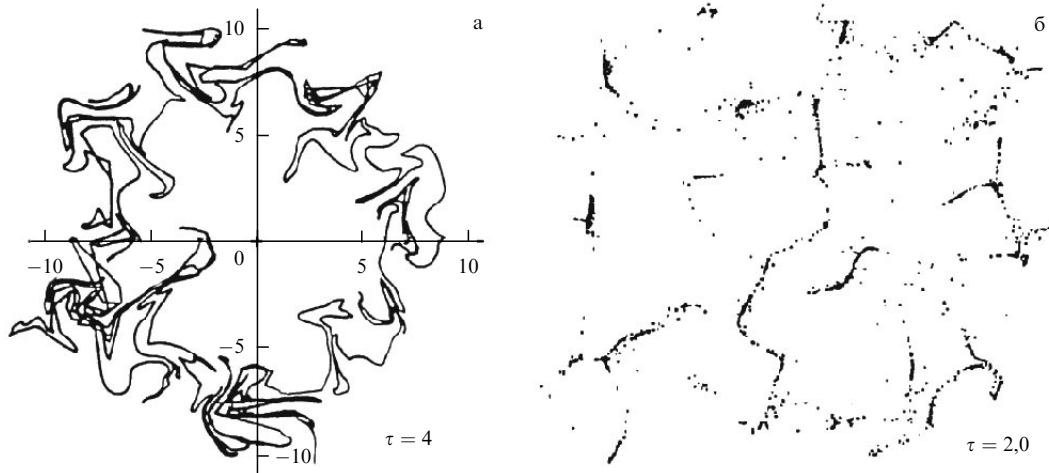


Рис. 1. Результаты моделирования диффузии системы частиц в соленоидальном (а) и потенциальном (б) случайных полях скоростей.

При этом существует детерминированная функция, называемая *кривой типичной реализации* (КТР), которая описывает основную тенденцию поведения случайного процесса  $l(t)$  во времени. Эта функция для данной задачи будет являться также экспоненциальной функцией времени

$$l^*(t) = l_0 \exp \left\{ \frac{1}{4} (D^s - D^p) t \right\},$$

и она связана с *ляпуновской экспонентой*.

КТР существенно зависит от знака разности  $D^s - D^p$ . В частности, для бездивергентного поля скоростей ( $D^p = 0$ ) имеем экспоненциально возрастающую типичную реализацию. В другом предельном случае — потенциальном поле скоростей ( $D^s = 0$ ) — типичной реализацией будет экспоненциально убывающая кривая, т.е. налицо стремление частиц слиться. Это означает, что должны образовываться *кластеры*, т.е. зоны компактного сосредоточения частиц, расположенные в большей степени в разреженных областях, что согласуется с результатами численного моделирования. Таким образом, для кластеризации частиц в данной задаче должно выполняться неравенство  $D^s < D^p$ .

Экспоненциальное возрастание моментов обусловлено выбросами процесса  $l(t)$  относительно кривой типичной реализации  $l^*(t)$  как в сторону больших, так и малых значений  $l$ , т.е. оно является чисто статистическим эффектом, обусловленным усреднением по всему ансамблю реализаций.

Таким образом, мы имеем явное противоречие между характером поведения статистических характеристик процесса  $l(t)$  и поведением процесса в конкретных реализациях. Сделаем два уточняющих замечания.

**Замечание 1.** *Кривая типичной реализации (КТР)*

Статистические характеристики случайного процесса  $z(t)$  описываются плотностью вероятности  $P(t; z) = \langle \delta(z(t) - z) \rangle$  и интегральной функцией распределения

$$F(t; z) = \text{Prob}(z(t) < z) = \langle \theta(z(t) - z) \rangle = \int_{-\infty}^z dz' P(t; z'),$$

где  $\delta(z)$  — дельта-функция Дирака,  $\theta(z)$  — функция Хевисайда, равная 1 при  $z > 0$  и 0 при  $z < 0$ .

*Кривой типичной реализации* случайного процесса  $z(t)$  называется детерминированная кривая  $z^*(t)$ , которая является *медианой интегральной функции распределения* и определяется как решение алгебраического уравнения

$$F(t; z^*(t)) = \frac{1}{2}.$$

Основанием для этого является свойство медианы, заключающееся в том, что для любого интервала времени  $(t_1, t_2)$  случайный процесс  $z(t)$  как бы обвивает кривую  $z^*(t)$  таким образом, что среднее время, в течение которого выполняется неравенство  $z(t) > z^*(t)$ , совпадает со средним временем, в течение которого выполняется обратное неравенство  $z(t) < z^*(t)$  (рис. 2), т.е.

$$\langle T_{z(t) > z^*(t)} \rangle = \langle T_{z(t) < z^*(t)} \rangle = \frac{1}{2} (t_2 - t_1).$$

Кривая типичной реализации, полученная с помощью одновременной плотности вероятности, определена, тем не менее, на всём интервале времени  $t \in (0, \infty)$ .

Для гауссова случайного процесса  $z(t)$  КТР совпадает со средним значением процесса, т.е.  $z^*(t) = \langle z(t) \rangle$ .

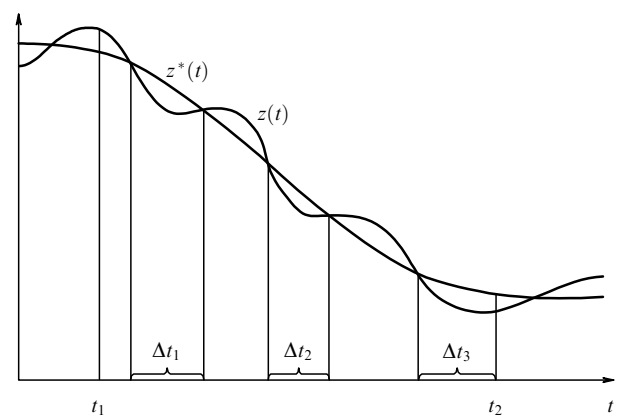


Рис. 2. К определению кривой типичной реализации случайного процесса.

**Замечание 2.** Логарифмически нормальный случайный процесс

Определим логнормальный случайный процесс стохастическим уравнением

$$\frac{d}{dt} y(t; \alpha) = [-\alpha + z(t)] y(t; \alpha), \quad y(0; \alpha) = 1,$$

где  $z(t)$  — гауссов процесс с параметрами  $\langle z(t) \rangle = 0$ ,  $\langle z(t) z(t') \rangle = 2D\delta(t - t')$ . Его одновременная плотность вероятностей описывается уравнением Фоккера–Планка

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \alpha \frac{\partial}{\partial y} y \right) P(t; y, \alpha) = D \frac{\partial}{\partial y} y \frac{\partial}{\partial y} y P(t; y, \alpha),$$

$$P(0; y, \alpha) = \delta(y - 1).$$

Характерная особенность решения этого уравнения — появление длинного пологого хвоста при  $Dt \gg 1$ , означающего усиление роли больших выбросов процесса  $y(t; \alpha)$  в формировании одновременной статистики. Следствием этого является то, что его моментные функции

$$\langle y^n(t; \alpha) \rangle = \exp \left[ n \left( n - \frac{\alpha}{D} \right) Dt \right],$$

$$\left\langle \frac{1}{y^n(t; \alpha)} \right\rangle = \exp \left[ n \left( n + \frac{\alpha}{D} \right) Dt \right], \quad n = 1, 2, \dots$$

экспоненциально возрастают во времени при  $n > \alpha/D$ .

Для логнормального процесса  $\langle \ln y(t) \rangle = -\alpha t$  и, следовательно, параметр  $-\alpha = (1/t) \langle \ln y(t) \rangle$  является лангуновским характеристическим показателем, а КТР процесса  $y(t; \alpha)$  оказывается экспоненциально спадающей кривой во времени:

$$y^*(t) = \exp(\langle \ln y(t) \rangle) = \exp(-\alpha t).$$

Рассмотрим теперь континуальное обобщение задачи о диффузии безынерционной пассивной примеси. Для этой задачи поле плотности примеси  $\rho(\mathbf{r}, t)$  описывается уравнением непрерывности

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \right) \rho(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \rho(\mathbf{r}, 0) = \rho_0(\mathbf{r}). \quad (1)$$

При этом общая масса её сохраняется в процессе эволюции, т.е.

$$M = M(t) = \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r} \rho_0(\mathbf{r}) = \text{const}.$$

Для описания локального поведения реализаций поля примеси в пространстве в случайном поле скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  нужно знать вероятностное распределение её плотности. Исходя из стохастического уравнения (1), получим уравнение для плотности вероятностей поля плотности (концентрации) примеси:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - D_0 \Delta \right) P(\mathbf{r}, t; \rho) = D_\rho \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \rho^2 P(\mathbf{r}, t; \rho),$$

где коэффициент диффузии в  $\rho$ -пространстве  $D_\rho = D^p$  связан только с потенциальной составляющей поля

$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ . Решение этого уравнения имеет вид

$$P(\mathbf{r}, t; \rho) = \frac{1}{2\rho\sqrt{\pi Dt}} \exp \left( D_0 t \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} \right) \times \exp \frac{\ln^2 [\rho \exp(\alpha t) / \rho_0(\mathbf{r})]}{4Dt}. \quad (2)$$

Если начальная плотность примеси всюду одинакова,  $\rho_0(\mathbf{r}) = \rho_0 = \text{const}$ , то вероятностное распределение плотности не зависит от  $\mathbf{r}$  и описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t; \rho) = D_\rho \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \rho^2 P(t; \rho). \quad (3)$$

Из уравнения (3), в частности следует, что распределение вероятностей является логнормальным и моментные функции поля плотности, начиная со второй, экспоненциально возрастают со временем  $\tau = D_\rho t$ :

$$\langle \rho^n(\mathbf{r}, t) \rangle = \rho_0^n \exp [n(n-1)\tau].$$

С точки зрения одноточечных характеристик поля плотности  $\rho(\mathbf{r}, t)$  в этом случае задача статистически эквивалентна случайному процессу  $\rho(t)$ , плотность вероятностей для которого описывается уравнением Фоккера–Планка (3), и при этом КТР экспоненциально убывает во времени для любой фиксированной точки пространства:

$$\rho^*(t) = \rho_0 \exp(-\tau),$$

что свидетельствует о наличии кластерного характера флуктуаций плотности среды в произвольных дивергентных потоках.

Распределение вероятностей (2) даёт также возможность выяснить некоторые характерные особенности пространственно-временной структуры реализаций поля плотности.

**Замечание 3.** Статистическая топография случайного поля плотности

Для наглядности ограничимся здесь также двумерным случаем. В статистической топографии важные сведения о пространственном поведении реализаций даёт анализ линий уровня, определяемых равенством

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho = \text{const}.$$

В частности, средние значения таких функционалов поля плотности, как общая площадь, где  $\rho(\mathbf{r}, t) > \rho$ ,

$$S(t, \rho) = \int d\mathbf{r} \theta(\rho(\mathbf{r}, t) - \rho) = \int d\mathbf{r} \int_\rho^\infty d\tilde{\rho} \delta(\rho(\mathbf{r}, t) - \tilde{\rho}),$$

и общая масса примеси, заключённая в этой области,

$$\begin{aligned} M(t, \rho) &= \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}, t) \theta(\rho(\mathbf{r}, t) - \rho) = \\ &= \int d\mathbf{r} \int_\rho^\infty d\tilde{\rho} \tilde{\rho} \delta(\rho(\mathbf{r}, t) - \tilde{\rho}), \end{aligned}$$

определяются одноточечной плотностью вероятности и описываются равенствами

$$\langle S(t, \rho) \rangle = \int_{\rho}^{\infty} d\tilde{\rho} \int d\mathbf{r} P(\mathbf{r}, t; \tilde{\rho}),$$

$$\langle M(t, \rho) \rangle = \int_{\rho}^{\infty} d\tilde{\rho} \tilde{\rho} \int d\mathbf{r} P(\mathbf{r}, t; \tilde{\rho}).$$

Отсюда видно, в частности, что при  $\tau \gg 1$  средняя площадь областей, в которых плотность превышает заданный уровень  $\rho$ , убывает со временем по закону

$$\langle S(t, \rho) \rangle \approx \frac{1}{\sqrt{\pi\rho\tau}} \exp\left(-\frac{\tau}{4}\right) \int d\mathbf{r} \sqrt{\rho_0(\mathbf{r})},$$

в то время как заключённая в этих областях средняя масса примеси

$$\langle M(t, \rho) \rangle \approx M - \sqrt{\frac{\rho}{\pi\tau}} \exp\left(-\frac{\tau}{4}\right) \int d\mathbf{r} \sqrt{\rho_0(\mathbf{r})}$$

монотонно стремится к полной массе. Это ещё раз подтверждает сделанный ранее вывод о том, что частицы примеси со временем стремятся собраться в кластеры — компактные области повышенной плотности, окружённые разрежёнными областями.

Отметим, что для пространственно однородного поля  $\rho(\mathbf{r}, t)$  эти выражения упрощаются и для удельных величин, приходящихся на единицу площади, получаем выражения

$$\langle s(t, \rho) \rangle = \int_{\rho}^{\infty} d\tilde{\rho} P(t; \tilde{\rho}), \quad \langle m(t, \rho) \rangle = \int_{\rho}^{\infty} d\tilde{\rho} \tilde{\rho} P(t; \tilde{\rho}),$$

связанные с решением уравнения (3).

**2.2. Волны в случайно-неоднородной среде**

В качестве второго примера рассмотрим задачу о распространении волн в случайных средах.

Прежде всего рассмотрим одномерную задачу, соответствующую волнам в слоистых средах.

Пусть слой хаотически неоднородной среды занимает часть пространства  $L_0 < x < L$  и из области  $x > L$  на неё падает плоская волна  $u_0(x) = \exp[-ik(x-L)]$ . Из-за наличия неоднородностей возникает отражённая от слоя волна с коэффициентом отражения  $R_L = u(L) - 1$  и выходящая из слоя волна с коэффициентом прохождения  $T_L = u(L_0)$ . Внутри слоя волновое поле описывается краевой задачей

$$\frac{d^2}{dx^2} u(x) + k^2[1 + \varepsilon(x)]u(x) = 0,$$

$$u(L) + \frac{i}{k} \frac{du(x)}{dx} \Big|_{x=L} = 2, \quad u(L_0) - \frac{i}{k} \frac{du(x)}{dx} \Big|_{x=L_0} = 0,$$

где функция  $\varepsilon(x)$ , которую мы считаем случайной, описывает неоднородности среды.

В предположении, что статистические характеристики функции  $\varepsilon(x)$  являются известными, статистическая задача состоит в нахождении статистических характеристик интенсивности волнового поля  $I(x) = |u(x)|^2$  внутри неоднородной среды и на границах слоя.

Статистический анализ решения задачи показывает, что для достаточно толстого слоя среды, а именно

$D(L-L_0) \gg 1$  (где величина  $D$  связана со статистическими характеристиками  $\varepsilon(x)$ ), с вероятностью единица  $|T_L| \rightarrow 0$  и, следовательно,  $|R_L| \rightarrow 1$ , т.е. полупространство ( $L_0 \rightarrow -\infty$ ) случайно-неоднородной среды полностью отражает падающую волну. Таким образом, имеет место *динамическая локализация волнового поля* в этом слое.

Однако среднее значение интенсивности волнового поля для полупространства случайной среды постоянно, а более высокие моменты, нормированные на их значения на границе слоя, описываются выражением

$$\langle I^n(L-x) \rangle = \exp[Dn(n-1)(L-x)],$$

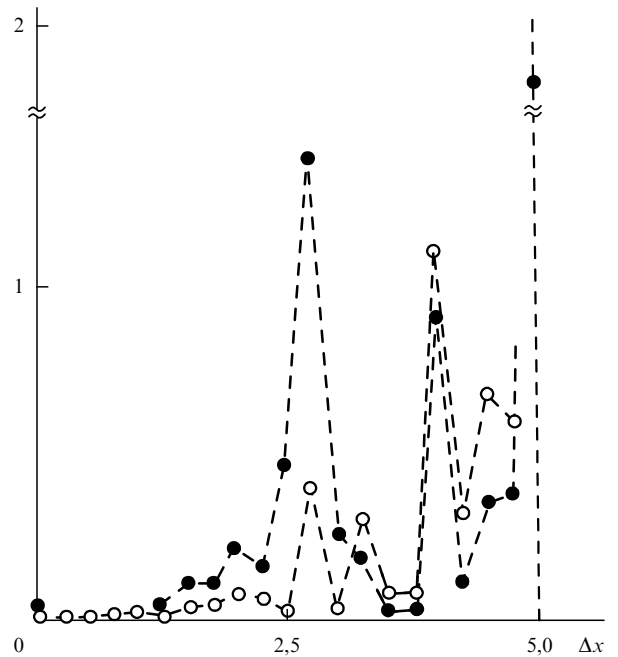
т.е. интенсивность волнового поля имеет логарифмически нормальное распределение вероятностей, а моментные функции экспоненциально возрастают по направлению вглубь среды.

При этом кривая типичной реализации интенсивности волны в среде описывается экспоненциально спадающей кривой

$$I^*(x) = 2 \exp[-D(L-x)]$$

и совпадает с ляпуновской экспонентой, а величина  $l_{loc} = 1/D$ , которая называется *длиной локализации*, определяет пространственный масштаб затухания интенсивности волнового поля в среде в отдельных его реализациях.

Таким образом, видим, что формирование статистики осуществляется за счёт больших выбросов относительно кривой типичной реализации. На рисунке 3 приведены две реализации интенсивности волнового поля в достаточно толстом слое среды, полученные численным моделированием. На этом рисунке явно просматривается тенденция резкого экспоненциального убывания (с большими выбросами как в сторону увели-



**Рис. 3.** Численное моделирование динамической локализации для двух реализаций неоднородностей среды.

чения величины интенсивности, так и в сторону значений, близких к нулю).

Рассмотрим теперь распространение волн в случайно-неоднородной трёхмерной среде на основе скалярного параболического уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x} U(x, \mathbf{R}) = \frac{i}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} U(x, \mathbf{R}) + \frac{ik}{2} \varepsilon(x, \mathbf{R}) U(x, \mathbf{R}),$$

$$U(0, \mathbf{R}) = U_0(\mathbf{R}). \quad (4)$$

Здесь  $x$  — координата в направлении распространения волны,  $\mathbf{R}$  — координаты в поперечной плоскости,  $\varepsilon(x, \mathbf{R})$  — отклонение диэлектрической проницаемости от единицы.

Если ввести амплитуду и фазу волнового поля как

$$U(x, \mathbf{R}) = A(x, \mathbf{R}) \exp \{iS(x, \mathbf{R})\},$$

то уравнение переноса для интенсивности волнового поля  $I(x, \mathbf{R}) = |U(x, \mathbf{R})|^2$  можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} I(x, \mathbf{R}) + \frac{1}{k} \nabla_{\mathbf{R}} \{ \nabla_{\mathbf{R}} S(x, \mathbf{R}) I(x, \mathbf{R}) \} = 0,$$

$$I(0, \mathbf{R}) = I_0(\mathbf{R}). \quad (5)$$

Откуда следует, что в общем случае произвольного падающего волнового пучка сохраняется мощность волны в плоскости  $x = \text{const}$ :

$$E_0 = \int I(x, \mathbf{R}) d\mathbf{R} = \int I_0(\mathbf{R}) d\mathbf{R}.$$

Уравнение (5) по форме совпадает с уравнением (1), поэтому его можно трактовать как уравнение переноса консервативной примеси в потенциальном поле скоростей. Следовательно, реализации поля интенсивности имеют кластерный характер, и эта кластеризация проявляется в виде *каустических структур*. Так, на рис. 4 приведены фотографии поперечного сечения лазерного пучка, распространяющегося в турбулентной среде в лабораторных исследованиях при различных интенсивностях флуктуаций диэлектрической проницаемости. Из рисунка ясно видно возникновение каустической структуры волнового поля.

Введём амплитуду и фазу волнового поля, а также комплексную фазу волны:

$$U(x, \mathbf{R}) = A(x, \mathbf{R}) \exp (iS(x, \mathbf{R})) = \exp (\phi(x, \mathbf{R})),$$

где

$$\phi(x, \mathbf{R}) = \chi(x, \mathbf{R}) + iS(x, \mathbf{R}),$$

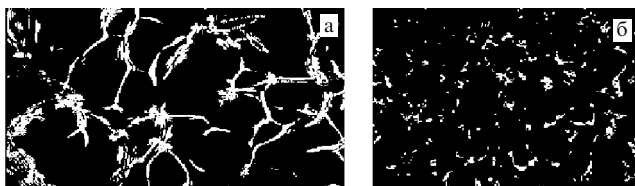


Рис. 4. Поперечное сечение лазерного пучка при распространении в турбулентной среде в лабораторных условиях (а) в области сильных фокусировок и (б) в области сильных (насыщенных) флуктуаций.

$\chi(x, \mathbf{R}) = \ln A(x, \mathbf{R})$  — уровень амплитуды волны,  $S(x, \mathbf{R})$  — флуктуации фазы волны относительно фазы падающей волны  $kx$ . Исходя из параболического уравнения (4) можно получить для комплексной фазы нелинейное уравнение так называемого *метода плавных возмущений* (МПВ) Рытова:

$$\frac{\partial}{\partial x} \phi(x, \mathbf{R}) = \frac{i}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} \phi(x, \mathbf{R}) + \frac{i}{2k} [\nabla_{\mathbf{R}} \phi(x, \mathbf{R})]^2 + i \frac{k}{2} \varepsilon(x, \mathbf{R}).$$

Для случая плоской падающей волны, который и будет рассматриваться далее, без ограничения общности можно считать, что  $U_0(\mathbf{R}) = 1$  и, следовательно,  $\phi(0, \mathbf{R}) = 0$ . В этом случае случайное поле  $\phi(x, \mathbf{R})$  является статистически однородным в плоскости  $\mathbf{R}$  и все его одноточечные статистические характеристики не зависят от параметра  $\mathbf{R}$ .

**Замечание 4.** О методе плавных возмущений С.М. Рытова. Метод плавных возмущений был предложен С.М. Рытовым при анализе задачи о дифракции света на ультразвуковых волнах в 1938 г. Этот метод А.М. Обухов применил в 1953 г. для учёта дифракционных эффектов при распространении волн в случайных средах в рамках теории возмущений. Ранее аналогичные исследования проводились в приближении геометрической оптики (акустики). Эта методика не потеряла актуальности и сейчас, являясь основным математическим аппаратом для различных технических приложений.

В первом приближении МПВ статистические свойства амплитудных флуктуаций описываются дисперсией уровня амплитуды, т.е. параметром  $\sigma_0^2(x) = \langle \chi_0^2(x, \mathbf{R}) \rangle$ , при этом  $\langle \chi_0(x, \mathbf{R}) \rangle = -\sigma_0^2(x)$ . Что касается дисперсии интенсивности волны, которая называется *индексом мерцания*, то для неё в первом приближении имеем

$$\beta_0^2(x) = \langle I^2(x, \mathbf{R}) \rangle - 1 = \langle \exp [4\chi_0(x, \mathbf{R})] \rangle - 1 \approx 4\sigma_0^2(x).$$

В этом случае интенсивность волнового поля является логарифмически нормальным случайным полем и все статистические моменты интенсивности волнового поля возрастают с увеличением параметра  $\beta_0(x)$ , т.е. с расстоянием, пройденном волной. Теперь можно рассмотреть статистически эквивалентный случайный процесс  $I(x)$ , для которого кривой типичной реализации интенсивности волнового поля является экспоненциально спадающая с увеличением дистанции кривая

$$I^*(x) = \exp \left( -\frac{1}{2} \beta_0(x) \right)$$

в любой фиксированной точке пространства  $\mathbf{R}$ , что свидетельствует о начале возникновения кластерной (каустической) структуры поля интенсивности. Формирование статистики (например, моментных функций  $\langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle$ ) осуществляется за счёт больших выбросов процесса  $I(x)$  относительно этой кривой.

Полученное описание флуктуаций интенсивности на основе первого приближения МПВ справедливо при значениях параметра  $\beta_0(x) \leq 1$ . При дальнейшем увеличении параметра  $\beta_0(x)$  это приближение становится

несправедливым и необходимо принимать во внимание нелинейный характер уравнения для комплексной фазы волнового поля. Эта область флуктуаций, называемая *областью сильных фокусировок*, очень трудна для аналитических исследований. При дальнейшем увеличении параметра  $\beta_0(x)$  статистические характеристики интенсивности выходят на режим насыщения, в котором  $\beta(x) \rightarrow 1$  при  $\beta_0^2(x) \rightarrow \infty$ , эта область изменения параметра  $\beta_0(x)$  называется *областью сильных флуктуаций интенсивности*.

В указанной области статистические характеристики волнового поля перестают зависеть от дистанции и

$$\langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle = n!, \quad P(x, I) = \exp(-I).$$

В этом случае средняя удельная площадь областей, внутри которых  $I(x, \mathbf{R}) > I$ , и средняя удельная мощность, сосредоточенная в этих областях, являются постоянными и не описывают поведение интенсивности волнового поля в отдельных реализациях. Также в этом случае не информативен и переход к статистически эквивалентному случайному процессу, так как кривой типичной реализации для него будет также постоянная величина. Понимание структуры волнового поля в этом случае в отдельных реализациях можно получить только исходя из анализа таких величин, как удельная средняя длина контуров и удельное среднее число контуров интенсивности волнового поля. Эти величины продолжают возрастать с увеличением параметра  $\beta_0(x)$ , и, следовательно, происходит дробление контуров (см. рис. 4).

### 3. Заключение

В завершение, хочу ещё раз подчеркнуть основной тезис доклада. Подход к анализу стохастических динамических задач на основе идей статистической топографии, позволяющий по одноточечным статистическим характеристикам случайных процессов и полей определять количественные и качественные характеристики поведения конкретных реализаций этих величин на всём интервале времён (во всём пространстве), возник в процессе дискуссий с экспериментаторами, которые в основном имеют дело с отдельными реализациями. Для достаточно полного описания стохастических динамических систем недостаточно сформулировать основные уравнения и начальные или краевые условия для них. Необходимо прежде всего понимать, какие когерентные явления (происходящие с вероятностью единица, т.е. почти во всех реализациях их решений) содержатся в этих системах, и соответствующим образом строить статистический анализ.

Работа проводилась при поддержке РФФИ (проекты 07-05-0006а и 07-05-92210-НЦНИЛ.а).

### Список литературы

1. Кляцкин В И *Стохастические уравнения глазами физика: Основные положения, точные результаты и асимптотические приближения* (М.: Физматлит, 2001) [Klyatskin V I *Stochastic Equations through the Eye of the Physicist: Basic Concepts, Exact Results and Asymptotic Approximations* (Amsterdam: Elsevier, 2005)]
2. Кляцкин В И *Динамика стохастических систем* (М.: Физматлит, 2002) [Klyatskin V I *Dynamics of Stochastic Systems* (Amsterdam: Elsevier, 2005)]

3. Кляцкин В И *Диффузия и кластеризация пассивной примеси в случайных гидродинамических потоках* (М.: Физматлит, 2005)
4. Кляцкин В И *Стохастические уравнения. Теория и ее приложения к акустике, гидродинамике и радиофизике* Т. 1, 2 (М.: Физматлит, 2008)
5. Кляцкин В И *УФН* 178 419 (2008) [Klyatskin V I *Phys. Usp.* 51 395 (2008)]

PACS numbers: 42.25.Dd, 42.68.Ay, 42.68.Xy  
DOI: 10.3367/UFNr.0179.200905k.0553

## Развитие теории переноса излучения в приложении к задачам инструментального видения в мутных средах

Л.С. Долин

### 1. Введение

В докладе излагаются основные положения теории инструментального видения в средах с сильно анизотропным рассеянием и методика расчёта изображений диффузно отражающих объектов с учётом эффектов поглощения и многократного рассеяния света в среде. Обсуждаются особенности различных вариантов уравнения переноса в малоугловом приближении, используемых в теории видения и оптической когерентной "томографии" (ОКТ) мутных сред. Описан новый способ вычисления временных моментов импульсного светового пучка, прошедшего через слой мутной среды. Приводятся результаты теоретического и экспериментального исследования теневого шума в ОКТ-изображениях мутных сред с флуктуирующими оптическими параметрами.

Мутная среда, рассеивая свет, ограничивает дальность видимости находящихся в ней объектов и при этом сама становится видимой. Поэтому развитие методов и теории инструментального видения в мутных средах было направлено на решение двух взаимосвязанных задач — устранение негативного влияния среды на видимость объектов и дистанционное измерение оптических характеристик самой среды.

К числу основополагающих результатов теории видения в мутных средах относится уравнение Кошмидера [1], которое устанавливает связь между контрастом изображения чёрного объекта (наблюдаемого на фоне неба вблизи горизонта) с показателем ослабления света в атмосфере. Соотношения для оценки контраста изображения и дальности визуальной видимости подводных объектов в условиях естественного освещения были получены в классической работе Дантли [2]. При этом предполагалось, что угловые размеры наблюдаемого объекта малы и поэтому его видимая яркость ослабляется средой по закону Бугера. Потребность в более универсальной теории видения появилась в связи с развитием лазерных методов подводного наблюдения.

Пионерские исследования по этой тематике были выполнены в 1960-е годы под руководством А.В. Гапонова-Грехова в Научно-исследовательском радиофизическом институте (НИРФИ) (г. Горький). Эти исследования привели к созданию первого макета лазерно-импульсной системы подводного видения, с помощью