

## МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

## Особенности поля переходного излучения

Б.М. Болотовский, А.В. Серов

*С помощью метода изображений рассмотрено переходное излучение на плоской границе раздела между вакуумом и идеально проводящей средой. Рассматривается полное поле (т.е. поле переходного излучения и поля равномерно движущегося заряда и его изображения) и его эволюция во времени и пространстве, т.е. поля представлены не в виде спектральных компонент, а в виде функций от координат и времени. Рассматриваются условия, при которых поле переходного излучения может быть выделено и измерено.*

PACS numbers: 03.50.De, 41.20.-q, 41.60.Dk

DOI: 10.3367/UFNr.0179.200905c.0517

## Содержание

1. Введение (517).
  2. Постановка задачи (518).
  3. Поле, возникающее при мгновенной остановке заряда (518).
  4. Поле переходного излучения (520).
  5. Заключение (524).
- Список литературы (524).

## 1. Введение

Переходное излучение на плоской границе раздела между двумя средами впервые было рассмотрено в работе В.Л. Гинзбурга и И.М. Франка [1] в 1946 г. В этой работе вычислялось электромагнитное излучение, которое генерирует частица при пересечении границы раздела. С тех пор эта задача достаточно подробно изучалась в целом ряде работ (см. монографии [2–4]; много работ также было опубликовано позднее). Интерес к переходному излучению объясняется тем, что оно получило ряд важных применений. В физике высоких энергий переходное излучение используется для детектирования заряженных частиц, причём вспышка переходного излучения не только указывает на прохождение заряженной частицы, но и позволяет определить её энергию, направление движения и другие характеристики. Переходное излучение также может быть использовано для генерации электромагнитных волн высокочастотными электронными пучками и генерации излучения в лазерах на свободных электронах, а также в ускорителях для контроля за пучком ускоряемых частиц.

В большинстве опубликованных работ изучается частотный спектр и угловое распределение переходного

излучения. Однако в задачах о переходном излучении можно поставить и другой вопрос: как ведёт себя электромагнитное поле в выбранной точке пространства в заданный момент времени? Вопрос этот является существенным, потому что в электромагнитном поле присутствуют не только излучаемые волны, но и неизлучаемые (поля, сопровождающие движущийся заряд, — "собственные поля"). Существенно, что в реальных экспериментах необходимо учитывать два типа слагаемых — излучаемые и неизлучаемые поля (свободные и связанные поля). Конечно, задачи этих двух типов — определение спектральных свойств излучения и определение его пространственной и временной зависимости — связаны между собой. Но вторая задача до сих пор пребывала в незаслуженном пренебрежении. В настоящей статье будут рассмотрены временные и пространственные свойства полного поля в простейшем варианте задачи о переходном излучении.

Мы рассмотрим поле, возникающее при падении заряженной частицы на идеально проводящую плоскую поверхность. Предположим, что заряженная частица движется в среде с постоянной скоростью по нормали к плоской границе раздела с идеально проводящей средой и пересекает эту границу. Эволюция поля в такой задаче представляет собой один из примеров переходного процесса. Переходного не в том смысле, что частица переходит через границу раздела, а в смысле обычного определения переходного процесса как явления, сопровождающего переход системы из одного стационарного состояния в другое. В задаче о падении заряда на идеально проводящую плоскость первое стационарное состояние (начальное состояние) — это поле равномерно движущегося заряда. Как известно, равномерно движущийся заряд не излучает, поэтому полёт заряда к поверхности не сопровождается излучением. После соударения с проводящей поверхностью заряд для наблюдателя исчезает, поэтому второе стационарное состояние (конечное состояние) — это пространство без заряда. Переход от начального состояния к конечному сопровождается излучением электромагнитных волн. То поле, которое существовало в начальном состоянии, трансформи-

Б.М. Болотовский, А.В. Серов. Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, Ленинский просп. 53, 119991 Москва, Российская Федерация  
Тел./Факс (499) 135-85-33  
E-mail: bolot@lpi.ru, serov@x4u.lebedev.ru

Статья поступила 21 октября 2008 г.,  
после доработки 26 декабря 2008 г.

руется в излучение и уходит на бесконечность. Ниже мы проследим за эволюцией поля.

## 2. Постановка задачи

Введём в пространстве прямоугольную декартову систему координат  $xuz$ . Пусть в плоскости  $yz$  расположена идеально проводящая поверхность. Можно также считать, что полупространство  $x < 0$  занято идеально проводящей средой. Выберем в полупространстве  $x > 0$  точку наблюдения  $P$ , расположенную на расстоянии  $r_P$  от начала координат под углом  $\theta$  к оси  $x$  (рис. 1). Без нарушения общности можно считать, что точка  $P$  расположена в плоскости  $xu$ . Координаты точки наблюдения  $x_P = r_P \cos \theta$  и  $y_P = r_P \sin \theta$ . Из области  $x > 0$  вдоль оси  $x$  к проводящей плоскости со скоростью  $v$  движется точечная заряженная частица. Заряд частицы обозначим через  $q$ . Частица падает на проводящую поверхность  $x = 0$ , после чего пропадает для наблюдателя. Требуется определить электромагнитное поле при таком законе движения заряда.

Движущийся заряд возбуждает на проводящей поверхности индуцированные заряды и токи, и они становятся источниками электромагнитного поля. Определить эти индуцированные токи и заряды можно из граничных условий на идеально проводящей поверхности. Другой способ выполнения граничных условий состоит в подборе дополнительных вспомогательных зарядов, которые называются изображениями исходного заряда  $q$ .

Рассмотрим в свободном пространстве два точечных заряда, которые движутся навстречу друг другу по оси  $x$  с равными по величине скоростями  $v$ . Первый заряд,  $q$ , движется из  $+\infty$  в отрицательном направлении оси  $x$ , а второй заряд,  $-q$ , движется из  $-\infty$  в положительном направлении  $x$ . Заряд  $-q$  будем называть зарядом-изображением. Закон движения первого заряда определим уравнением  $x = -vt$ . Положение второго заряда зададим уравнением  $x = vt$ . Таким образом, заряды

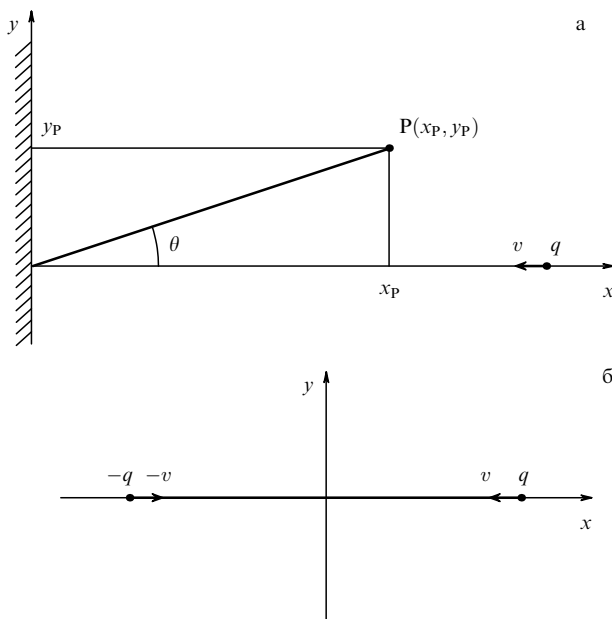


Рис. 1. Геометрия задачи.

всегда расположены симметрично относительно плоскости  $x = 0$ . Очевидно, что в момент  $t = 0$  эти заряды встретятся и погасят друг друга.

Нетрудно убедиться в том, что при таком расположении зарядов тангенциальные компоненты электрического поля на плоскости  $x = 0$  обращаются в нуль, т.е. выполняются условия, которые выполнялись бы на плоской идеально проводящей границе. Магнитные поля на плоскости  $x = 0$  имеют только тангенциальные компоненты и складываются (удваиваются). Таким образом, идеально проводящая плоскость  $x = 0$  создает в полупространстве  $x > 0$  такое же поле, какое создают два заряда: заряд  $q$  и движущийся симметрично по отношению к нему заряд-изображение  $-q$ .

Мы рассматриваем случай, в котором скорости зарядов направлены перпендикулярно зеркальной границе раздела. Этот случай впервые был рассмотрен в задаче о переходном излучении В.Л. Гинзбургом и И.М. Франком [1]. В действительности справедливо даже более общее утверждение. Если при любом законе движения исходного заряда, заряд-изображение движется по симметричной кривой (т.е. если траектории исходного заряда и заряда-изображения зеркально симметричны), то на плоскости симметрии выполняются такие же условия, как и на границе с идеально проводящей поверхностью.

Исходный заряд и заряд-изображение движутся навстречу друг другу и встречаются в момент  $t = 0$  в точке  $x = 0$  на идеально проводящей плоскости. Мы можем считать, что каждый из зарядов двигался с постоянной скоростью до точки  $x = 0$  и в ней остановился. Таким образом, задача определения поля сводится к задаче об излучении равномерно движущейся заряженной частицы при мгновенной остановке. В разделе 3 мы рассмотрим эту задачу.

## 3. Поле, возникающее при мгновенной остановке заряда

Поле в пространстве, возникающее при мгновенной остановке заряда можно определить таким же способом, каким Э. Парселл определял поле, возникающее при мгновенном старте [5] (см. также [6]). Напомним, как Э. Парселл рассматривал поле, возникающее при мгновенном старте заряда.

Пусть заряженная частица находится в начале декартовой системы координат (рис. 2а). До момента  $t = 0$  частица покоится, а при  $t = 0$  начинает двигаться в положительном направлении оси  $x$  со скоростью  $v$ .

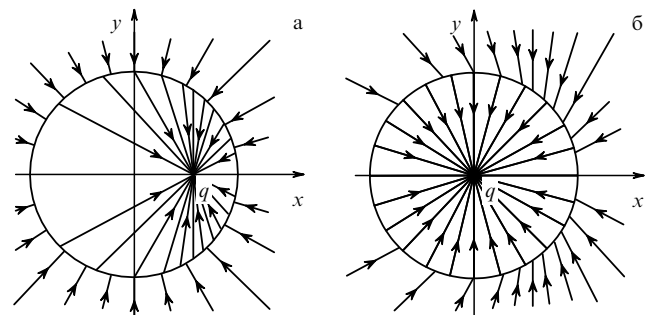


Рис. 2. Пространственное распределение электрического поля при мгновенном старте (а) и мгновенной остановке (б) заряда.

Требуется определить поле заряженной частицы при таком законе движения.

Предположение о мгновенном старте представляет собой определённую идеализацию. В реальных случаях для конечного изменения скорости требуется конечное время. Однако если мы будем рассматривать излучение с достаточно малыми частотами, то приближение мгновенного скачка скорости будет оправданным.

Окружим точку старта сферой радиусом  $r = ct$ . Внутри этой сферы решение уравнений Максвелла даёт поле заряда, движущегося равномерно со скоростью  $v$ :

$$E_x^q = q(1 - \beta^2) \frac{x - vt}{[(1 - \beta^2)(y^2 + z^2) + (x - vt)^2]^{3/2}}, \quad (1)$$

$$E_y^q = q(1 - \beta^2) \frac{y}{[(1 - \beta^2)(y^2 + z^2) + (x - vt)^2]^{3/2}}, \quad (2)$$

где  $\beta = v/c$  — приведённая скорость заряда.

Вне сферы радиусом  $r = ct$  поле равно кулоновскому полю заряда, покоящегося в начале координат. Сфера радиусом  $r = ct$  по мере своего расширения проходит через точку наблюдения  $P$ . Поэтому, как бы далеко ни находился наблюдатель от точки старта, в момент  $t = r/c$  кулоновское поле покоящегося заряда заменяется полем равномерно движущегося заряда, находящегося в точке  $x = vt$ . Такая структура поля определяется эффектом запаздывания, который связан с конечным значением скорости света. Если наблюдатель находится далеко от точки старта, то в течение длительного времени поле в точке наблюдения является полем покоящегося заряда, хотя заряд давно уже находится в состоянии равномерного движения. Аналогичными особенностями обладает поле заряда в случае остановки: если наблюдатель находится далеко от точки остановки заряда, то в течение длительного времени после остановки поле в точке наблюдения является полем движущегося заряда.

На рисунке 2а изображена картина силовых линий внутри и вне сферы радиусом  $r = ct$ . Видно, что внутренние и наружные силовые линии не стыкуются, т.е. испытывают разрыв на поверхности сферы. Но такой разрыв противоречит физическим условиям задачи. Силовые линии могут начинаться и кончаться только на зарядах. Поэтому разрыв силовых линий на сферической поверхности означал бы, что поверхность сферы заряжена. Но мы рассматриваем заряд  $q$ , находящийся в точке  $x = vt$ , и никакие другие заряды появиться не могут. Отсюда следует, что силовые линии должны быть непрерывны, т.е. каждая силовая линия внутри сферы должна переходить в линию снаружи сферы. Этот переход осуществляется с помощью силовых линий, расположенных на поверхности сферы радиусом  $r = ct$ . Именно эти силовые линии, лежащие на поверхности расширяющейся сферы, и определяют излучение в рассматриваемой задаче.

Действительно, сфера радиусом  $r = ct$  расширяется со скоростью света. Силовые линии, расположенные на сфере, перпендикулярны направлению распространения. Таким образом, поле, описываемое силовыми линиями, лежащими на сфере, удовлетворяет всем требованиям, которым должна удовлетворять электромагнитная волна. Отметим, что в рассматриваемой задаче поле внутри сферы не содержит излучения, а является полем

равномерно движущегося заряда. Поле вне сферы также не содержит излучения — это поле покоящегося заряда. Поле излучения отличается от нуля только на сфере радиусом  $r = ct$ .

Рассмотренная структура поля излучения следует также из соотношения для поля движущегося заряда, выраженного через потенциалы Лиенара–Вихерта. Поле движущегося заряда имеет вид [5]

$$\mathbf{E} = q \frac{1 - \beta^2}{(R - \mathbf{R}\mathbf{v}/c)^3} \left( \mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}}{c} R \right) + \frac{q}{c^2 (R - \mathbf{R}\mathbf{v}/c)^3} \left[ \mathbf{R} \left[ \left( \mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}}{c} R \right) \dot{\mathbf{v}} \right] \right], \quad (3)$$

где  $\mathbf{R}$  — расстояние от точки наблюдения до движущегося заряда,  $\mathbf{v}$  — скорость заряда,  $\dot{\mathbf{v}}$  — его ускорение. Все величины в правой части (3) берутся в момент  $t' = t - R/c$ . Член, содержащий  $\dot{\mathbf{v}}$ , определяет поле излучения движущегося заряда. Если рассматривается мгновенная остановка заряда, движущегося со скоростью  $v$ , то  $\dot{\mathbf{v}} = -v\delta(t)$ . Таким образом, в случае мгновенной остановки заряда поле излучения пропорционально множителю  $\delta(t - R/c)$ , т.е. представляет собой сферическую волну, поле которой отлично от нуля только на сферической поверхности радиусом  $R = ct$ .

В рассматриваемой задаче существует взаимно однозначное соответствие между силовыми линиями поля внутри сферы и поля вне сферы. Если для определённости рассматривать задачу мгновенной остановки, то силовая линия внутри сферы, образующая угол  $\theta$  с направлением движения, переходит в силовую линию вне сферы, составляющую угол  $\theta'$  с тем же направлением, причём

$$\tan \theta' = \gamma \tan \theta, \quad (4)$$

где  $\gamma = [1 - (v/c)^2]^{-1/2}$  — так называемый лоренц-фактор (приведённая энергия частицы). Обе эти линии соединяются отрезком силовой линии, лежащей на сфере, и, таким образом, представляют собой различные части одной и той же силовой линии.

Величину поля излучения можно определить следующим образом. Введём сферическую систему координат с центром в точке старта заряда и осью, направленной по вектору скорости заряда. Рассмотрим участок сферической поверхности, расположенный под углом к скорости заряда. Вычислим поток электрического поля через этот участок. Очевидно, что этот поток будет равен разности потоков внутреннего и внешнего полей. Поток внешнего поля легко определяется. Именно, поток внешнего поля через участок сферической поверхности, соответствующий телесному углу  $d\Omega$ , равен  $q d\Omega$ . Вычислим поток внутреннего поля. Для этого в формулах (1), (2) положим  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ ,  $r = ct$ . Отсюда мы получим выражения для полей  $E_x$ ,  $E_y$  на сфере:

$$E_x^q|_{r=ct} = \frac{q(1 - \beta^2)}{t^2} \frac{c \cos \theta - v}{[(1 - \beta^2)c^2 \sin^2 \theta + (c \cos \theta - v)^2]^{3/2}}, \quad (5)$$

$$E_y^q|_{r=ct} = \frac{q(1 - \beta^2)}{t^2} \frac{c \sin \theta}{[(1 - \beta^2)c^2 \sin^2 \theta + (c \cos \theta - v)^2]^{3/2}}, \quad (6)$$

где  $\beta = v/c$ .

Поток поля  $\mathbf{E}$  через элемент  $dS$  поверхности сферы равен  $\mathbf{E} \mathbf{n} dS$ , т.е.  $(n_x E_x + n_y E_y) dS$ , где  $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$  — нормаль к поверхности сферы. Из формул (5), (6) с учётом  $n_x = \cos \theta$ ,  $n_y = \sin \theta$  получаем выражение для потока  $P$  через элемент поверхности сферы, отвечающий элементу телесного угла  $d\Omega$ :

$$dP = E_x \cos \theta + E_y \sin \theta = q(1 - \beta^2) \frac{1}{(1 - \cos \theta)^2} d\Omega. \quad (7)$$

Отметим, что в соотношении (7) не входит радиус сферы, т.е. поток электрического поля определяется только элементом телесного угла  $d\Omega$ . Это вполне понятно, так как электрическое поле с возрастанием радиуса  $r$  убывает как  $r^{-2}$ , а площадь элемента поверхности, соответствующая телесному углу  $d\Omega$ , пропорциональна  $r^2$ . Отсюда, в частности, следует, что поле равномерно движущегося заряда не может быть полем излучения. Действительно, для поля излучения характерно то, что поток электромагнитной энергии в телесный угол  $d\Omega$  не зависит от радиуса  $r$ . Но поток электромагнитной энергии представляет собой билинейную комбинацию электрического и магнитного полей (вектор Пойнтинга  $\mathbf{P} = 4\pi c \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ ), и, следовательно, в этом случае квадрат поля (а не его первая степень) должен убывать с возрастанием  $r$  как  $r^{-2}$ , а само поле излучения убывает с расстоянием как  $r^{-1}$ . Нетрудно показать, что поток электрического поля через полную поверхность сферы радиусом  $r = ct$ , содержащей заряд, согласно теореме Гаусса равен  $4\pi q$ . Это означает, что и внутренние, и внешние поля изображаются одинаковым числом силовых линий.

Разность потоков от внешнего и внутреннего полей через элемент поверхности сферы даёт приращение числа силовых линий, лежащих на данном участке сферы. Обозначим напряжённость поля излучения на сфере через  $E_\theta^{\text{rad}}$ . Из симметрии задачи следует, что поле излучения зависит только от  $\theta$ . Тогда условие сохранения числа силовых линий (или равносильное условие  $\text{div } \mathbf{E} = 0$ ) приводит к соотношению

$$\frac{dE_\theta^{\text{rad}}}{d\theta} = \frac{q}{r} \left[ \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta \cos \theta)^2} - 1 \right] \sin \theta. \quad (8)$$

Соотношение (8) можно рассматривать как дифференциальное уравнение для тангенциальной компоненты электрического поля  $E_\theta^{\text{rad}}$ , отличной от нуля на расширяющейся сфере. Но ещё до решения уравнения (8) можно отметить некоторые характерные особенности поля  $E_\theta^{\text{rad}}$ . Силовые линии этого поля лежат на поверхности сферы с центром в точке, из которой стартовал заряд. Эта сфера расширяется со скоростью света, т.е. заряд всегда находится внутри неё. Важной особенностью поля  $E_\theta^{\text{rad}}$  является то, что с возрастанием радиуса сферы это поле убывает пропорционально  $r^{-1}$ . Таким образом, поле  $E_\theta^{\text{rad}}$  обладает свойством поля излучения. Оно распространяется со скоростью света и в каждой точке является перпендикулярным направлению распространения.

Отметим во избежание недоразумений, что поле равномерно движущегося заряда (5), (6) также имеет на сфере тангенциальную компоненту, выражение для которой мы здесь не приводим. Однако, в отличие от поля излучения  $E_\theta^{\text{rad}}$ , тангенциальная составляющая поля (5), (6) убывает как  $r^{-2}$ .

Решение дифференциального уравнения (8), удовлетворяющее условию  $E_\theta^{\text{rad}} = 0$  при  $\theta = 0$ , записывается в виде

$$E_\theta^{\text{rad}} = \frac{q}{r} \delta(r - ct) \frac{\beta \sin \theta}{1 - \beta \cos \theta}, \quad (9)$$

где дельта-функция от аргумента  $r - ct$  учитывает то обстоятельство, что поле  $E_\theta^{\text{rad}}$  отличается от нуля только на сфере радиусом  $r = ct$ , расширяющейся со скоростью света.

Таким образом, в приближении мгновенного старта поле излучения формируется в момент старта и в дальнейшем волновой пакет поля излучения распространяется по закону (8), который даёт выражение для единственной отличной от нуля компоненты электрического поля излучения при мгновенном старте заряда.

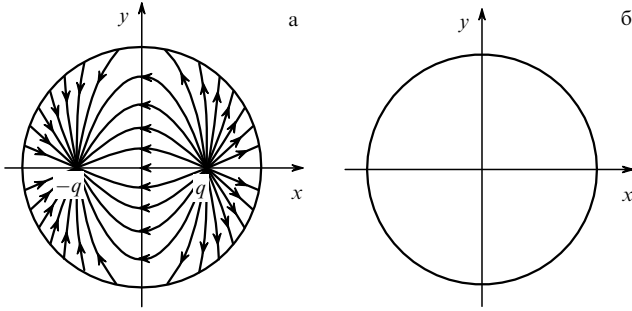
Рассмотрим теперь поле излучения, возникающее при мгновенной остановке заряда. Предположим, что заряд  $q$  двигался равномерно в положительном направлении оси  $x$  со скоростью  $v$  и в момент  $t = 0$  остановился в точке  $x = 0$ . В этом случае решение уравнения Максвелла внутри сферы радиусом  $r = ct$  с центром в точке  $x = 0$  даёт кулоновское поле заряда, покоящегося в начале координат. Поле вне сферы радиусом  $r = ct$  является полем равномерно движущегося заряда, скорость которого равна  $v$  (поскольку до точек, расположенных вне световой сферы, сигнал об остановке заряда не дошёл). Нетрудно видеть, что тогда разность потоков поля изнутри и снаружи сферы равна по величине и противоположна по знаку той величине, которая была получена для случая мгновенного старта. Отсюда следует, что поле излучения  $E_\theta$  в случае остановки равно по величине и противоположно по знаку полю излучения при мгновенном старте (9).

На рисунке 2б изображено электрическое поле заряженной частицы, которая двигалась по оси  $x$  с постоянной скоростью  $v$  и резко остановилась в точке  $x = 0$ . Если в случае старта внутри сферы  $r = ct$  поле представляет собой поле равномерно движущегося заряда, а вне сферы — поле неподвижного заряда, находящегося в точке  $x = 0$ , то при остановке заряда эти поля меняются местами: внутри сферы существует поле покоящегося заряда, а снаружи сферы — равномерно движущегося.

#### 4. Поле переходного излучения

Как было сказано в разделе 2, поле переходного излучения при нормальном падении заряда на идеально проводящую поверхность является суммой полей излучения заряда и его изображения, которые движутся навстречу друг другу и встречаются в точке, находящейся на поверхности. Из проведённого рассмотрения нетрудно определить вид поля переходного излучения как при падении заряда на проводящую поверхность, так и при вылете заряда из неё.

На рисунке 3а изображено поле переходного излучения, возникающего при вылете заряда по нормали к идеально проводящей поверхности. Заряд вылетает из точки  $x = 0$ . Внутри сферы радиусом  $r = ct$  ( $t = 0$  — момент вылета) поле, которое равно сумме полей заряда и его изображения, разлетающихся со скоростью  $v$  в противоположные стороны, описывается выраже-



**Рис. 3.** Пространственное распределение электрического поля при мгновенном старте (а) и мгновенной остановке (б) двух противоположно заряженных частиц. Частицы стартуют из одной точки (рис. а) и останавливаются в одной точке (рис. б).

ниями

$$E_x^q = q(1 - \beta^2) \left\{ \frac{r_P \cos \theta - vt}{[(1 - \beta^2)r_P^2 \sin^2 \theta + (r_P \cos \theta - vt)^2]^{3/2}} + \frac{r_P \cos \theta + vt}{[(1 - \beta^2)r_P^2 \sin^2 \theta + (r_P \cos \theta + vt)^2]^{3/2}} \right\}, \quad (10)$$

$$E_y^q = q(1 - \beta^2) \left\{ \frac{r_P \sin \theta}{[(1 - \beta^2)r_P^2 \sin^2 \theta + (r_P \cos \theta - vt)^2]^{3/2}} + \frac{r_P \sin \theta}{[(1 - \beta^2)r_P^2 \sin^2 \theta + (r_P \cos \theta + vt)^2]^{3/2}} \right\}. \quad (11)$$

Поле переходного излучения лежит на поверхности сферы радиусом  $r = ct$ . Нетрудно видеть, что в этом случае поле переходного излучения складывается из полей излучения, возникающих при старте заряда и его изображения. Заряд вылетает в область  $x > 0$ , а изображение находится в области  $x < 0$ . Мы рассматриваем поле в том полупространстве, в котором движется заряд. Поле излучения, генерируемое при мгновенном старте заданного заряда и заряда-изображения, описывается выражениями

$$E_x^{\text{rad}} = \frac{q}{r_P} \delta(r_P - ct) \left( \frac{\beta \sin^2 \theta}{1 - \beta \cos \theta} - \frac{\beta \sin^2 \theta}{1 + \beta \cos \theta} \right) = \frac{q}{r_P} \delta(r_P - ct) \frac{\beta \sin^2 \theta}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta}, \quad (12)$$

$$E_y^{\text{rad}} = \frac{q}{r_P} \delta(r_P - ct) \left( \frac{\beta \sin \theta \cos \theta}{1 - \beta \cos \theta} - \frac{\beta \sin \theta \cos \theta}{1 + \beta \cos \theta} \right) = \frac{q}{r_P} \delta(r_P - ct) \frac{\beta \sin \theta \cos \theta}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta}. \quad (13)$$

На рисунке 3б изображена картина поля, возникающего при падении заряженной частицы на идеально проводящую поверхность. Внутри сферы с центром в точке падения поле равно нулю. При встрече заряда и его изображения поле во всем пространстве обращается в нуль. Таким образом, после падения заряда на границу с идеально проводящей средой поле в пространстве  $x > 0$  оказывается отличным от нуля только на сферической оболочке радиусом  $r = ct$ , расширяющейся со скоростью

света от точки перехода. На поверхности сферы лежат силовые линии поля переходного излучения. В рассматриваемом случае переходное излучение представляет собой сумму полей излучения, возникающих при остановке заряда и его изображения. Напомним, что мы рассматриваем поле в том полупространстве, в котором движется частица. В эту область  $x > 0$  попадает излучение заряда, распространяющееся назад, и излучение заряда-изображения, распространяющееся вперед относительно направления движения.

На рисунке 3 показаны картины поля после вылета заряда из полупространства  $x < 0$  (рис. 3а), и после "аннигиляции" заряда и его изображения на поверхности раздела  $x = 0$  (рис. 3б). Моменты времени, отвечающие влёту ("аннигиляции") и вылету, мы обозначали как  $t = 0$ . До этого момента (если имеется в виду падение заряда на границу с идеальным проводником) в полупространстве  $x > 0$  имеется поле равномерно движущегося заряда и его заряда-изображения. До момента  $t = 0$  поле в полупространстве  $x > 0$  равно нулю, если речь идёт о вылете заряда, а в случае падения заряда на границу  $x = 0$  поле становится подобным полю диполя, момент которого стремится к нулю по линейному закону.

При выводе формул (12) и (13) предполагалось, что поверхность, на которую падает заряд, является идеально проводящей. В действительности металлическая поверхность может рассматриваться как идеально проводящая только на оптических частотах и радиочастотах. При более коротких длинах волн (например, в области мягкого рентгеновского излучения) коэффициент отражения уменьшается и с возрастанием частоты стремится к нулю. Это обстоятельство приближённо можно учесть следующим образом. Перепишем выражение для дельта-функции  $\delta(r_P - ct)$  в следующем виде:

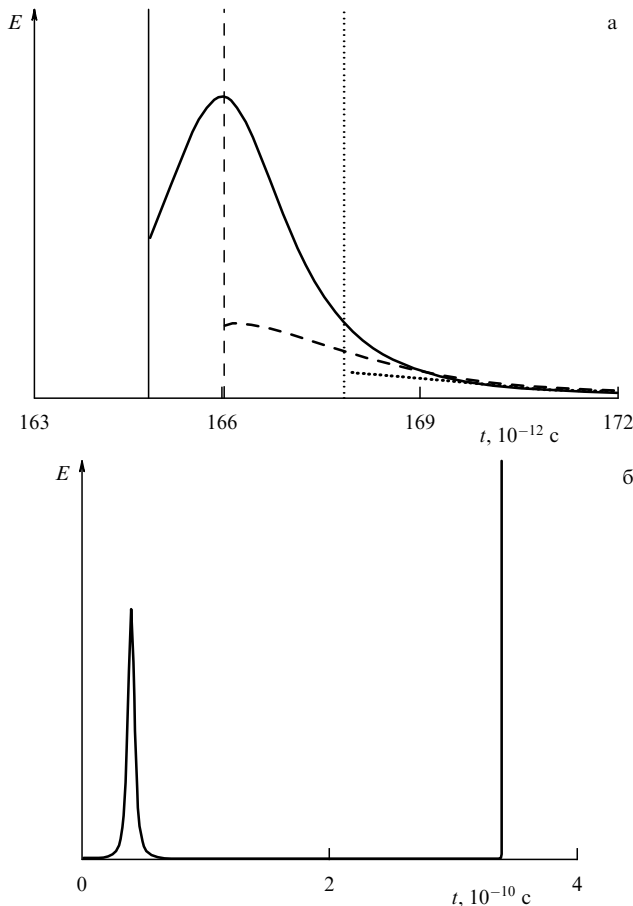
$$\delta(r_P - ct) = \frac{1}{c} \delta\left(t - \frac{r_P}{c}\right). \quad (14)$$

Разложим дельта-функцию в интеграл Фурье:

$$\delta\left(t - \frac{r_P}{c}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i\omega\left(t - \frac{r_P}{c}\right)\right] d\omega. \quad (15)$$

Интеграл в правой части (15) берётся по всем частотам от  $-\infty$  до  $\infty$ . Но в действительности нам надо учесть только те частоты, для которых граница может рассматриваться как идеально проводящая. Предположим, что плоскость можно рассматривать как идеально проводящую при частотах вплоть до значения  $\omega_0$ . Выберем частоту  $\omega_0$  так, чтобы волны с меньшими частотами испытывали зеркальное отражение, а волны с большими частотами проходили через границу, не отражаясь. Понятно, что такой резкой границы в действительности не существует и частота  $\omega_0$  может быть определена только по порядку величины. Из сказанного следует, что в разложении (15) нужно учитывать частоты в интервале  $|\omega| < \omega_0$ . Тогда интеграл в правой части (15) принимает вид

$$\begin{aligned} \delta_{\omega_0}\left(t - \frac{r_P}{c}\right) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \exp\left[i\omega\left(t - \frac{r_P}{c}\right)\right] d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{\sin \omega_0(t - r_P/c)}{t - r_P/c}. \end{aligned} \quad (16)$$



**Рис. 4.** Зависимость от времени электрического поля при вылете заряда из проводящей плоскости (а) и при падении заряда на проводящую плоскость (б).  $\gamma = 10$ ,  $x_p = 5$  см. На рисунке а сплошной линией показана зависимость  $E(t)$  для угла наблюдения  $\theta = 1/2\gamma$ , штриховой — для  $\theta = 1/\gamma$ , пунктирной — для  $\theta = 3/2\gamma$ .

Заменяя  $\delta(r - ct)$  в формулах (12) и (13) выражением  $(1/c)\delta_{\omega_0}(t - r_p/c)$ , находим

$$E_x = \frac{q}{ct r_p} \frac{\sin \omega_0(t - r_p/c)}{t - r_p/c} \frac{\beta \sin^2 \theta}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta}, \quad (17)$$

$$E_y = \frac{q}{ct r_p} \frac{\sin \omega_0(t - r_p/c)}{t - r_p/c} \frac{\beta \sin \theta \cos \theta}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta}. \quad (18)$$

Выберем в полупространстве  $x > 0$  точку наблюдения  $P$  с координатами  $x_p$  и  $y_p$  так, чтобы радиус-вектор, соединяющий эту точку с началом координат, образовывал с осью  $x$  угол  $\theta$  (рис. 1а). Будем считать, что точка наблюдения  $P$  находится достаточно близко к границе раздела и линии движения заряда. "Достаточно близко" здесь означает, что в точке наблюдения поле равномерно движущегося заряда и поле переходного излучения сравнимы по величине.

Рассмотрим, как меняется поле в точке  $P$  в зависимости от времени. Если рассматривается поле, генерируемое частицей, вылетевшей из металлической поверхности, то в точку наблюдения вначале попадает радиационное поле, а затем собственные поля вылетевшего заряда и его заряда-изображения. На рисунке 4а показаны зависимости напряжённости электрического поля от времени  $E(t)$  при различных расстояниях от точки наблюдения до траектории движения. Зависимости построены для

электрона с энергией  $\gamma = 10$ , вылетевшего перпендикулярно к поверхности металла. Расстояние от плоской поверхности металла до плоскости измерений принималось равным  $x_p = 5$  см, а угол наблюдения принимал значения  $\theta = 1/2\gamma$ ,  $1/\gamma$ ,  $3/2\gamma$  (сплошная, штриховая и пунктирная кривые соответственно).

Начальный скачок напряжённости электрического поля, описываемый дельта-функцией в выражении (9), соответствует моменту прихода в точку наблюдения поля переходного излучения. В последующие моменты зависимость определяется полями разлетающихся зарядов — заданного заряда и заряда-изображения. Из рисунка видно, что увеличение угла, под которым ведётся наблюдение, приводит не только к изменению амплитуды поля, но и к изменению формы импульса собственных полей зарядов. С возрастанием угла наблюдения увеличивается асимметрия формы импульса. Из рисунка следует, что в точке наблюдения  $P$ , расположенной под углом  $\theta = 1/\gamma$  к направлению движения частицы, собственные поля частиц будут формировать только половину колоколообразного импульса, создаваемого одиночной частицей, пролетающей мимо точки наблюдения в свободном пространстве. Видно, что увеличение угла наблюдения  $\theta$  приводит к резкому уменьшению амплитуды и длительности импульса собственного поля частицы.

Если рассматривается поле, генерируемое частицей, падающей на идеально проводящую поверхность (рис. 1а, заряд  $q$ ), то вначале регистрируется собственное поле частицы, а затем — поле излучения. На рисунке 4б показана зависимость напряжённости поля  $E$  от времени. Максимальная амплитуда импульса соответствует моменту  $t_0$  — времени пролёта заряда через точку  $x_p$ , находящуюся на наименьшем расстоянии от точки наблюдения  $P$ . При своём дальнейшем движении заряд достигает проводящей поверхности и генерирует импульс переходного излучения. Этот импульс попадёт в точку наблюдения в момент  $t = t_0 + \Delta t$ , где  $\Delta t = x_p/v + (x_p^2 + y_p^2)^{1/2}/c$  — время задержки. Время задержки складывается из  $x_p/v$  — времени движения частицы от точки  $x_p$  до проводящей поверхности, и  $(x_p^2 + y_p^2)^{1/2}/c$  — времени распространения импульса переходного излучения от точки  $x = 0$  до точки наблюдения.

Отметим, что в этом случае поле в пространстве  $x > 0$  после того, как частица достигла проводящей поверхности, состоит только из поля переходного излучения. Само поле переходного излучения представляет собой сферическую волну вида (12) и (13), причём соотношения (12), (13) справедливы при любом значении  $r_p$ . Сферическая волна переходного излучения формируется непосредственно в момент соударения частицы с поверхностью.

Полное поле в рассматриваемой задаче представляет собой сумму трёх составляющих: поля равномерно движущегося заряда, поля его изображения и поля переходного излучения. Эти поля по-разному зависят от координат. Собственное поле заряда и поле его изображения убывают с расстоянием по закону  $1/r^2$ . Поле переходного излучения спадает как  $1/r$ . Поэтому, когда  $r$  превышает некоторое значение, поле переходного излучения становится больше, чем собственное поле заряда.

Оценим расстояние от границы раздела, на котором поле переходного излучения становится равным собственному полю. Сравним компоненты электрического поля  $E_y$ . Поле переходного излучения определяется формулой (18), а собственное поле заряда — формулой (11). Приравняем эти поля, чтобы определить расстояние от точки перехода, на котором эти поля становятся равными друг другу. Мы будем рассматривать поля на расстоянии  $r = ct$  от точки перехода, причём радиус-вектор в точку наблюдения ориентирован под углом  $\theta$  к направлению движения заряда. При этих условиях собственное поле в точке наблюдения принимает вид

$$E_y^q = \frac{q(1-\beta^2)}{c^2 t^2} \frac{\sin \theta}{(1-\beta \cos \theta)^3}, \quad (19)$$

а поле переходного излучения записывается как

$$E_y^{\text{tr}} = \frac{2q}{\lambda_0 ct} \frac{\beta \sin \theta \cos \theta}{1-\beta^2 \cos^2 \theta}. \quad (20)$$

Здесь  $\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0$  — длина волны, соответствующая максимальной частоте  $\omega_0$ , на которой ещё имеет место зеркальное отражение. Приравнивая поля друг другу, получаем соотношение

$$\frac{1-\beta^2}{ct} \frac{1}{(1-\beta \cos \theta)^2} = \frac{2\beta}{\lambda_0} \frac{\cos \theta}{1+\beta \cos \theta}, \quad (21)$$

из которого можно определить расстояние  $r = ct$  от точки перехода. Из равенства (21) можно определить  $r$ :

$$r = \lambda_0 \frac{1-\beta^2}{2\beta \cos \theta} \frac{1+\beta \cos \theta}{(1-\beta \cos \theta)^2}. \quad (22)$$

Из формулы (22) видно, что с возрастанием угла  $\theta$  расстояние  $r$ , на котором собственное поле и поле переходного излучения равны друг другу, уменьшается. Если проводить измерение под углом  $\theta = 1/\gamma$ , при котором переходное излучение имеет наибольшую амплитуду, то при больших значениях  $\gamma$  мы можем считать, что  $1-\beta \cos \theta \simeq 1/\gamma^2$ . Тогда соотношение (22) даёт

$$r \simeq \lambda_0 \gamma^2. \quad (23)$$

Величина, стоящая в правой части (23), представляет собой путь формирования излучения на частоте  $\omega_0$ , т.е. на максимальной частоте в спектральном составе переходного излучения. По грубым оценкам для металлов, частота  $\omega_0$  имеет порядок  $10^{16}$ . Соответствующая длина волны  $\lambda_0 \simeq 2 \times 10^{-5}$  см.

В своих рассуждениях мы полагали, что регистрирующий прибор имеет постоянную величину чувствительности во всём спектральном диапазоне переходного излучения. Иными словами, мы предполагали, что регистрирующий прибор может фиксировать изменение поля за достаточно малые промежутки времени (в данном случае за промежутки порядка  $\Delta t \simeq 1/\omega_0$ ). Однако если измерительный прибор обладает достаточной чувствительностью лишь в ограниченной спектральной области, то необходимо сравнивать спектральные характеристики полей в этой же самой ограниченной области.

На практике измерения электромагнитных полей обычно проводят в ограниченном спектральном интервале. Поэтому перейдём от описания зависимости полей от времени к представлениям Фурье. Фурье-компоненты поля переходного излучения  $E_x^{\text{rad}}(\omega)$ ,  $E_y^{\text{rad}}(\omega)$  записываются в виде

$$E_x^{\text{rad}}(\omega) = \frac{q}{\pi c r_P} \frac{\beta \sin^2 \theta}{1-\beta^2 \cos^2 \theta} \exp\left(i \frac{\omega}{c} r_P\right), \quad (24)$$

$$E_y^{\text{rad}}(\omega) = \frac{q}{\pi c r_P} \frac{\beta \sin \theta \cos \theta}{1-\beta^2 \cos^2 \theta} \exp\left(i \frac{\omega}{c} r_P\right). \quad (25)$$

Поля переходного излучения, как и должно быть для полей излучения, изменяются обратно пропорционально радиусу  $r_P$ .

Рассмотрим теперь фурье-компоненты собственного поля заряда. Из выражения (10) видно, что составляющая  $E_x$  меняет свой знак в тот момент, когда заряд находится в точке  $x = x_P$ ,  $y = 0$ . Интеграл по времени от этой составляющей поля равен нулю. Импульс поля  $E_x$  при  $t \simeq x_P/v$  близок по форме к синусоиде с частотой  $\omega \simeq \gamma v/y_P$ , поэтому его спектр состоит из узкой области частот, близких к частоте  $\omega = \gamma v/y_P$ . Составляющая  $E_y$  собственного поля заряда представляет собой импульс колоколообразной формы с амплитудой  $E_y \simeq q\gamma/y_P^2$  и характерной шириной  $\tau \simeq y_P/\gamma v$ . Спектр импульса содержит все частоты вплоть до  $\omega \simeq \gamma v/y_P$ .

Собственное поле заряда существенно отличается от поля излучения. Поле излучения разлагается по волнам, которые распространяются по всевозможным направлениям. В отличие от этого поле равномерно движущегося заряда содержит волны, направление распространения которых совпадает со скоростью распространения заряда. Разложение собственного поля в интеграл Фурье даёт следующие выражения для компонент  $E_x^q(\omega)$  и  $E_y^q(\omega)$ :

$$E_x^q(\omega) = -i \frac{q\omega}{\pi v^2 \gamma^2} K_0\left(\frac{\omega r \sin \theta}{\gamma v}\right) \exp\left(i \frac{\omega}{v} x_P\right), \quad (26)$$

$$E_y^q(\omega) = \frac{q\omega}{\pi v^2 \gamma^2} K_1\left(\frac{\omega r \sin \theta}{\gamma v}\right) \exp\left(i \frac{\omega}{v} x_P\right), \quad (27)$$

где  $K_0$ ,  $K_1$  — модифицированные функции Бесселя от мнимого аргумента (функции Макдональда),  $r = (y_P^2 + z_P^2)^{1/2}$  — расстояние точки наблюдения P от линии движения заряда (от оси  $x$ ).

Волны собственного поля распространяются вдоль оси  $x$ . Величина поля быстро уменьшается по мере удаления от линии движения заряда (т.е. с возрастанием  $r$ ). Формулы (26) и (27) относятся к полю одного равномерно движущегося в свободном пространстве заряда. Напомним, что в задаче о переходном излучении полное поле представляет собой сумму полей заданного заряда и заряда-изображения.

При сравнении полей переходного излучения (формулы (24) и (25)) с собственными полями движущихся зарядов (формулы (26) и (27)) следует иметь в виду, что фурье-компоненты полей отличаются как по амплитуде, так и по фазе. Этот факт необходимо учитывать.

Отметим, что в работе [7] была произведена оценка расстояния от точки перехода, на котором формируется волновая зона переходного излучения. Автор работы [7] предполагал, что вокруг точки перехода в плоскости

границы раздела образуется излучающая область с конечным размером. В этом случае можно определить расстояние  $r_p$  от точки перехода, на котором поле переходного излучения имеет вид расходящейся сферической волны, т.е. зависит от  $r_p$  по закону  $\exp(ikr_p)/r_p$ .

## 5. Заключение

Из приведённого нами рассмотрения следует, что переходное излучение формируется в виде сферической волны, расходящейся непосредственно из точки перехода. В этом смысле переходное излучение представляет собой сферическую волну на сколь угодно малом расстоянии от точки перехода. Волновая зона начинается там, где поле переходного излучения становится больше, чем суммарное сопровождающее поле заряда и изображения. Следует, однако, иметь в виду, что этот вывод справедлив в случае плоской идеально проводящей границы.

## Список литературы

1. Гинзбург В Л, Франк И М *ЖЭТФ* **16** 15 (1946); Ginzburg V L, Frank I M *J. Phys. USSR* **9** 353 (1945), brief version
2. Тер-Микаелян М Л *Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях* (Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1969) [Ter-Mikaelian M L *High-Energy Electromagnetic Processes in Condensed Media* (New York: Wiley-Intersci., 1972)]
3. Гарибян Г М, Ши Я *Рентгеновское переходное излучение* (Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1983)
4. Гинзбург В Л, Цытович В Н *Переходное излучение и переходное рассеяние* (М.: Наука, 1984) [Ginzburg V L, Tsytovich V N *Transition Radiation and Transition Scattering* (Bristol: A. Hilger, 1990)]
5. Purcell E M *Electricity and Magnetism* (Berkeley Physics Course, Vol. 2) (New York: McGraw-Hill, 1965) [Парселл Э *Электричество и магнетизм* (Берклевский курс физики, Т. II) (М.: Наука, 1971) Гл. 5]
6. Болотовский Б М, Серов А В *УФН* **167** 1107 (1997) [Bolotovskii B M, Serov A V *Phys. Usp.* **40** 1055 (1997)]
7. Verzilov V A *Phys. Lett. A* **273** 135 (2000)

### Features of the transition radiation field

**B.M. Bolotovskii, A.V. Serov**

*P.N. Lebedev Physical Institute, Russian Academy of Sciences,  
Leninskii prosp. 53, 119991 Moscow, Russian Federation  
Tel./Fax (7-499) 135-85 33  
E-mail: bolot@lpi.ru, serov@x4u.lebedev.ru*

Method of images is used to calculate Transition Radiation (TR) at the plane boundary between vacuum and an ideally conducting medium. The total field is considered (that is, the field of TR plus the fields of the uniformly moving charge and its image) and its evolution in space and time is traced, considering the fields as functions of space coordinates and time rather than represented by spectral components. Conditions are considered under which the separation and measurement of the TR field are possible.

PACS numbers: 03.50.De, **41.20.**–q, 41.60.Dk

DOI: 10.3367/UFNr.0179.200905c.0517

Bibliography — 7 references

*Received 21 October 2008, revised 26 December 2008*

*Uspekhi Fizicheskikh Nauk* **179** (5) 517–524 (2009)

*Physics–Uspekhi* **52** (5) (2009)