

PACS numbers: 03.65.Ta
DOI: 10.3367/UFNr.0179.200902h.0204

Приложение Модельная нерелятивистская квантовая механика. Размышления *

В.А. Котельников

ВВЕДЕНИЕ

Квантовая механика рассматривает движение очень малых тел, таких как элементарные частицы. Как показали эксперименты, их движение не всегда подчиняется законам классической механики. Квантовая механика оказалась более сложной и абстрактной, нежели классическая. Частицы в "классической" квантовой механике не имеют зрительного образа. Они не имеют траекторий, не могут одновременно иметь определённого положения и скорости и т.п. Движение частиц определяется многими правилами, которые не всегда строго выводятся из основных законов, как это имеет место в классической механике макротел и электродинамике.

Всё это затрудняет изучение и использование квантовой механики, особенно для тех, кому больше присуще образное мышление.

В данной работе предлагается некоторая образная модель квантовой механики, которая соответствует накопленному экспериментальному материалу, но делает её (механику малых тел) более наглядной и более строго логично построенной.

Глава 1

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ

1.1. Основные положения нерелятивистской квантовой механики

Основное положение классической механики заключается в следующем: состояние частицы массой m как точечного тела задается её положением с помощью радиуса-вектора $\mathbf{r}$ и её скоростью $\mathbf{V}$. Зная эти параметры для некоторого момента времени t и силу внешнего поля, которая будет действовать на частицу, мы можем определить, используя закон Ньютона, все параметры её движения для любого момента времени.

В квантовой механике это оказывается не так. Как показали эксперименты и анализ их результатов, состояние частиц в данный момент времени t нельзя полностью охарактеризовать значениями $\mathbf{r}$ и $\mathbf{V}$.

Основное положение нерелятивистской квантовой механики, подтверждённое опытами, заключается в следующем: если не учитывать спин частицы, то её состояние в некоторый момент времени t полностью определяется некоторой комплексной функцией (волновой функцией) в трёхмерном пространстве:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r}, t) \exp(i\beta(\mathbf{r}, t)), \quad (1.1)$$

где $a(\mathbf{r}, t)$ и $\beta(\mathbf{r}, t)$ вещественны. Функция $a(\mathbf{r}, t)$ определяет вероятность положения частицы в момент t в том

или другом месте пространства. Так, вероятность того, что частица будет находиться в момент t в некотором малом объёме dq , содержащем конец радиуса-вектора $\mathbf{r}$, равна

$$dP = a^2(\mathbf{r}, t) dq. \quad (1.2)$$

Функция $\beta(\mathbf{r}, t)$ определяет динамическое состояние частицы.

В отсутствие магнитного поля, зная $\psi(\mathbf{r}, t)$ для начального момента, массу частицы m и силы внешних полей $\mathbf{F}_0(\mathbf{r}, t)$, которые на неё будут действовать, можно найти $\psi(\mathbf{r}, t)$ для других моментов времени с помощью уравнения Шрёдингера. Оно, для нерелятивистского случая, который мы только и будем рассматривать, и отсутствия магнитного поля и спина записывается так:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) + U(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t), \quad (1.3)$$

где $\hbar = 1,05 \times 10^{-27}$ эрг с — постоянная Планка, $U(\mathbf{r}, t)$ — силовая функция поля, действующего на частицу. При этом сила, действующая на частицу, будет равна

$$\mathbf{F}_0 = -\nabla U(\mathbf{r}, t). \quad (1.4)$$

Зная $\psi(\mathbf{r}, t)$ и m , можно с помощью правил квантовой механики найти и другие параметры движения частицы.

Использование вероятностных параметров обусловлено тем, что при проведении совершенно идентичных экспериментов, в которых происходит регистрация малых частиц, мы не имеем одинаковых результатов. Координаты частиц регистрируются с разбросом, и можно лишь говорить о вероятности нахождения частицы в том или другом месте.

Приведённая закономерность является основным положением нерелятивистской квантовой механики.

1.2. Скорость частицы

в нерелятивистской модельной квантовой механике

В общепринятой квантовой механике говорится, что частица не может одновременно находиться в определённом месте и иметь при этом определённую скорость. Но там рассматриваются параметры частицы, взятые из разных реализаций процесса при одной и той же волновой функции.

Попробуем построить модель, которая соответствовала бы приведённому основному положению квантовой механики и, значит, опыту, но в которой частица имела бы траекторию, как в макроскопической механике. При построении модели мы будем рассматривать положение и скорость в одной и той же реализации, где скорость и положение могут существовать одновременно. Для этого сначала найдём скорость и ускорение частицы, если она движется так, как этого требует основное положение квантовой механики, т.е. так, что удовлетворяется уравнение Шрёдингера (1.3).

Предположим, что частица, находясь в момент времени t в точке с радиусом-вектором $\mathbf{r}$, имеет скорость $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$. Найдём вероятность того, что частица за время $t, t + dt$ пересечёт малую площадку dS (см. рис. 1)¹.

* Приводятся введение и главы 1, 2. Полностью работа опубликована в 2008 г. (М.: Физматлит, 2008) 72 с.

¹ К сожалению, рисунки в рукописи и в опубликованной работе (М.: Физматлит, 2008) отсутствуют. (Примеч. ред.)

Частица за время dt передвинется на отрезок $\mathbf{V} dt$. Она пересечёт площадку $d\mathbf{S}$, если в момент t находилась на расстоянии $-\lambda \mathbf{V} dt$ ($0 < \lambda < 1$) от одной из точек этой площадки или, что то же, если она была в момент t в примыкающей к площадке $d\mathbf{S}$ области объёмом $dq = \mathbf{V} d\mathbf{S} dt$. Вероятность этого, согласно (1.2), будет $dP_{d\mathbf{S}} = a^2 \mathbf{V} d\mathbf{S} dt$.

Таким образом, $dP_{d\mathbf{S}}$ — вероятность пересечения частицей площадки $d\mathbf{S}$ за отрезок времени $t, t + dt$. При $\mathbf{V} d\mathbf{S} < 0$ частица будет пересекать площадку $d\mathbf{S}$ в обратном направлении и в этом случае $dP_{d\mathbf{S}}$ будет отрицательно.

Возьмём некоторый объём q , ограниченный замкнутой поверхностью S . Вероятность того, что частица выйдет из этого объёма, т.е. пересечёт поверхность S , за время $t, t + dt$ будет в соответствии с теоремой Гаусса — Остроградского

$$P_- = dt \oint_S a^2 \mathbf{V} d\mathbf{S} = dt \int_q \nabla(a^2 \mathbf{V}) dq.$$

Вероятность того, что частица в момент t была в объёме q , согласно (1.2) равна

$$P_t = \int_q a^2 dq.$$

Вероятность того, что частица в момент $t + dt$ останется в объёме q , равна

$$P_{t+dt} = \int_q \left(a + \frac{\partial a}{\partial t} dt \right)^2 dq = \int_q \left(a^2 + 2a \frac{\partial a}{\partial t} dt \right) dq.$$

Тут слагаемое с dt^2 опущено как бесконечно малая величина более высокого порядка.

Очевидно, что за событием "частица находится в объёме q в момент t ", обязательно последует одно из двух событий: "частица останется в объёме q в момент $t + dt$ " или "частица выйдет из области q за время $t, t + dt$ ". Поэтому

$$P_t = P_{t+dt} + P_-,$$

или

$$P_{t+dt} - P_t = -P_-.$$

Из этого равенства находим

$$\int_q \frac{\partial a^2}{\partial t} dq = - \int_q \nabla(a^2 \mathbf{V}) dq,$$

и так как это равенство должно быть справедливо для любого q , то

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} = -\nabla(a^2 \mathbf{V}). \quad (1.5)$$

Теперь посмотрим, чему должна равняться величина $\partial a^2 / \partial t$, исходя из уравнения Шрёдингера (1.3). Для этого подставим в него значение $\psi(\mathbf{r}, t)$ из (1.1). Получим

$$i\hbar \left(\frac{\partial a}{\partial t} + ia \frac{\partial \beta}{\partial t} \right) \exp(i\beta) = -\frac{\hbar^2}{2m} [\nabla^2 a + 2i\nabla a \nabla \beta + i a \nabla^2 \beta - \alpha(\nabla \beta)^2] \exp(i\beta) + U a \exp(i\beta). \quad (1.6a)$$

Сокращая обе части уравнения на $\hbar \exp(i\beta)$ и приравнявая мнимые части, получим

$$\frac{\partial a}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2m} [2\nabla a \nabla \beta + a \nabla^2 \beta].$$

Далее, умножая обе части на $2a$ и преобразовывая, получим

$$2a \frac{\partial a}{\partial t} = \frac{\partial a^2}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2m} [4a \nabla a \nabla \beta + 2a^2 \nabla^2 \beta], \quad (1.6b)$$

или

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} = -\frac{\hbar}{m} \nabla(a^2 \nabla \beta). \quad (1.6)$$

Приравнявая действительные части в (1.6a) и сокращая на $a \exp(i\beta)$, получим

$$-\hbar \frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} \left[-\frac{\nabla^2 a}{a} + (\nabla \beta)^2 \right] + U. \quad (1.7)$$

Мы видим, что уравнения (1.5) и (1.6) будут совпадать, если принять

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hbar}{m} \nabla \beta(\mathbf{r}, t). \quad (1.8)$$

Таким образом, если частица в момент времени t оказалась в точке с радиусом-вектором $\mathbf{r}$, то её скорость, для того чтобы удовлетворялось уравнение Шрёдингера и соотношение (1.2), должна соответствовать уравнению (1.8).

1.3. Силы в нерелятивистской модели квантовой механике

Найдём теперь силы, которые должны действовать на частицу, чтобы она имела эти скорости. Для этого определим из полученных скоростей ускорение частицы. Ускорение и скорость при движении частицы по некоторой траектории, когда надо учитывать изменение $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ за счёт $\mathbf{r}$ и t , будут, как известно, связаны уравнением (см. приложение 1)

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{V}^2) - \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V}) + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}. \quad (1.9)$$

Согласно уравнению (1.8), скорость $\mathbf{V}$ является градиентом, поэтому векторное произведение $\nabla \times \mathbf{V} = 0$ и, значит,

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{V}^2) + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}. \quad (1.10)$$

Обратим внимание на разницу между $d\mathbf{V}/dt$ и $\partial \mathbf{V} / \partial t$. Производная $d\mathbf{V}/dt$ — это ускорение частицы при её движении по траектории, в то время как $\partial \mathbf{V} / \partial t$ — это частная производная $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ по времени, когда $\mathbf{r}$ считается постоянным.

Если принять, что движение частицы подчиняется закону Ньютона, то для возникновения ускорения на неё должна подействовать сила

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{m}{2} \nabla(\mathbf{V}^2) + m \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}, \quad (1.11)$$

или, учитывая (1.8), получим

$$\mathbf{F} = \frac{m}{2} \nabla \left(\frac{\hbar^2}{m^2} (\nabla \beta)^2 \right) + m \frac{\hbar}{m} \frac{\partial \nabla \beta}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} \nabla(\nabla \beta)^2 + \hbar \frac{\partial}{\partial t} \nabla \beta. \quad (1.12)$$

Выражение, стоящее в правой части (1.12), можно также получить из равенства (1.7). Действительно, если взять градиент от правой и левой частей равенства (1.7), получим

$$-\hbar \frac{\partial \nabla \beta}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} \left[-\nabla \frac{\nabla^2 a}{a} + \nabla (\nabla \beta)^2 \right] + \nabla U,$$

или

$$\frac{\hbar^2}{2m} \nabla (\nabla \beta)^2 + \hbar \frac{\partial}{\partial t} \nabla \beta = \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \frac{\nabla^2 a}{a} - \nabla U.$$

Принимая это во внимание, выражение (1.12) можно переписать так:

$$\mathbf{F} = \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \frac{\nabla^2 a}{a} - \nabla U = \mathbf{F}_q + \mathbf{F}_o = m \frac{d\mathbf{V}}{dt}. \quad (1.13)$$

Здесь

$$\mathbf{F}_o = -\nabla U, \quad (1.14)$$

в соответствии с условием (1.4), — сила внешнего поля, действующая на частицу;

$$\mathbf{F}_q = \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \frac{\nabla^2 a}{a} \quad (1.15)$$

— добавочная сила, которая должна действовать на частицу для того, чтобы она перемещалась так, как этого требует уравнение Шрёдингера, и, значит, было бы совпадение с экспериментами. Эта сила определяется модулем волновой функции $a(\mathbf{r}, t)$.

1.4. Модель малой частицы

в нерелятивистской модельной квантовой механике

На основании сказанного предлагается следующая модель малой частицы. Модель частицы состоит из совокупности некоторого объёмного образования в виде скалярного поля $a^2(\mathbf{r}, t)$, равного квадрату модуля волновой функции (1.1), и движущейся в нём точечной частицы. Поле модели назовём квазиполем, точечную частицу — Т-частицей, а совокупность квазиполя и Т-частицы — квантоном.

Динамика квазиполя определяется уравнением Шрёдингера (1.3). Движение Т-частицы подчиняется закону Ньютона (1.13), т.е. она движется как точечная частица в классической механике под действием суммы двух сил: классической — $\mathbf{F}_o$ (1.14) и квантовой — $\mathbf{F}_q$ (1.15). Наличие силы $\mathbf{F}_q$ обуславливает отличие квантовой механики от классической.

В случае, когда силой $\mathbf{F}_q$ можно пренебречь по сравнению с внешними силами $\mathbf{F}_o$, действуют законы классической механики. Вероятность того, что частица будет находиться в малом объёме dq , содержащем конец радиуса-вектора $\mathbf{r}$, в момент t даётся выражением (1.2). Скорость Т-частицы в этом случае будет определяться выражением (1.8). При повторении в точности одного и того же эксперимента волновая функция, а значит, и квазиполе будут повторяться, но Т-частица будет занимать разные положения с вероятностью, даваемой выражением (1.2), и, соответственно, для разных положений Т-частицы её скорость будет определяться выраже-

нием (1.8). В уравнение Шрёдингера положение Т-частицы не входит, таким образом, она на своё квазиполе не действует. Т-частица может иметь электромагнитные и другие поля и действовать с помощью внешних сил на другие элементарные частицы.

Мы рассмотрели случай, когда элементарная частица имеет одну волновую функцию. Это так называемый чистый случай. Может быть и более сложная ситуация, когда элементарная частица может иметь одну из нескольких волновых функций $\psi_1(\mathbf{r}, t), \psi_2(\mathbf{r}, t), \dots, \psi_n(\mathbf{r}, t)$ с вероятностями $P_1, P_2, \dots, P_n$. Это будет так называемый смешанный случай, когда надо рассматривать ситуацию с каждой волновой функцией отдельно и затем складывать результаты с учётом вероятностей $P_1, P_2, \dots, P_n$.

Нерелятивистскую квантовую механику можно построить, декларируя предложенную модель элементарной частицы, сославшись на то, что она не противоречит опытам, и выводя всё остальное, включая уравнение Шрёдингера, логическими построениями из неё.

Глава 2

КВАЗИПОЛЕ

2.1. Рассмотрим подробнее свойства квазиполя. В соответствии с (1.2) вероятность того, что Т-частица будет находиться в момент t в некоторой области q , будет

$$P_q(t) = \int_q a^2(\mathbf{r}, t) dq, \quad (2.1)$$

где интеграл берётся по этой области. Будем называть $a^2(\mathbf{r}, t)$ **плотностью** квазиполя в точке $\mathbf{r}$ в момент t , а величину интеграла (2.1) — **количеством** квазиполя в объёме q . Тогда будет справедливо положение: вероятность нахождения Т-частицы в некоторой области равна количеству квазиполя в ней.

Квазиполе, которое можно представить как некоторый газ или сжимаемую жидкость с плотностью $a^2(\mathbf{r}, t)$, не возникает со временем и не исчезает, а только перемещается со скоростью $V(\mathbf{r}, t)$. При этих условиях для квазиполя должно выполняться соотношение

$$dt \frac{\partial}{\partial t} \int_q a^2 dq = -dt \oint_S a^2 \mathbf{V} d\mathbf{S}. \quad (2.2)$$

Левый интеграл в (2.2) берётся по некоторой области q , правый — по замкнутой поверхности S , охватывающей эту область. За время dt количество квазиполя в области q уменьшится на величину левой части выражения (2.2). Это уменьшение произойдёт только за счёт того, что поле выйдет через поверхность S . Через элемент этой поверхности $d\mathbf{S}$ за время dt выйдет количество квазиполя, равное $a^2 \mathbf{V} d\mathbf{S} dt$, а через всю поверхность выйдет количество квазиполя, равное правой части равенства (2.2).

2.2. Найдём далее, какова должна быть скорость движения квазиполя $V(\mathbf{r}, t)$, чтобы выполнялось и соотношение (2.2), и условие того, что плотность квазиполя $a^2(\mathbf{r}, t)$ соответствует волновой функции $\psi(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r}, t) \exp(i\beta(\mathbf{r}, t))$, которая является решением уравнения Шрёдингера. Для этого воспользуемся теоре-

мой² из приложения 2, полагая в выражении (П2.3)

$$\psi_1 = \psi_2 = a \exp(i\beta).$$

Тогда, с учётом того, что $\nabla\psi_{1,2} = (\nabla a) \exp(i\beta) + i(\nabla\beta)a \exp(i\beta)$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_Q a \exp(i\beta) a \exp(-i\beta) dq = \\ = i \frac{\hbar}{2m} \oint_S \left\{ a \exp(-i\beta) [(\nabla a) \exp(i\beta) + i(\nabla\beta)a \exp(i\beta)] - \right. \\ \left. - a \exp(i\beta) [(\nabla a) \exp(-i\beta) - i(\nabla\beta)a \exp(-i\beta)] \right\} dS. \end{aligned}$$

Проведя упрощение, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_Q a^2 dq = -\frac{\hbar}{m} \oint_S (\nabla\beta) a^2 dS.$$

Сравнивая это выражение с (2.2), видим, что оно будет совпадать с ним, если принять скорость движения квазиполя равной

$$\mathbf{V}(r, t) = \frac{\hbar}{m} \nabla\beta(r, t). \quad (2.3)$$

Таким образом, можно в модели принять, что квазиполе не может исчезать и появляться, а только перемещаться со скоростью, даваемой выражением (2.3).

Если взять в качестве области интегрирования всё пространство, охватываемое квазиполем, где $a \neq 0$, то интеграл правой части выражения (2.2) будет равен нулю, так как в этом случае на поверхности S $a = 0$.

Таким образом, полное количество квазиполя элементарной частицы всегда постоянно. Это количество будет равно вероятности того, что Т-частица находится где-то в квазиполе, а эта вероятность равна единице. Отсюда следует, что полное "количество" квазиполя элементарной частицы всегда равно единице, т.е. интеграл (2.1), если его взять по всему полю, должен быть равен единице:

$$\int_Q a^2(\mathbf{r}, t) dq = 1. \quad (2.4)$$

Здесь и далее индекс Q у интеграла означает, что интегрирование производится по всему пространству, где $a^2 \neq 0$.

2.3. Сравнивая выражения (1.8) и (2.3), видим, что скорость движения Т-частицы равна скорости движения квазиполя в той точке, где находится Т-частица, т.е. она увлекается квазиполем и движется вместе с ним.

Поскольку скорости квазиполя и Т-частицы равны, то должны быть равны и их ускорения. Поэтому элемент

² Эта теорема утверждает: "Если $\psi_1(\mathbf{r}, t)$ и $\psi_2(\mathbf{r}, t)$ меняются со временем согласно одному и тому же уравнению Шрёдингера, т.е.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_1 = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi_1 + U\psi_1, \quad (П2.1)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi_2 + U\psi_2, \quad (П2.2)$$

то

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_Q \psi_1^* \psi_2 dq = i \frac{\hbar}{2m} \int_S (\psi_1^* \nabla \psi_2 - \psi_2 \nabla \psi_1^*) dS. \quad (П2.3)''$$

(Примеч. ред.)

поля, двигаясь по некоторой траектории, будет иметь ускорение, в соответствии с (1.13) равное

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\hbar^2}{2m^2} \nabla \frac{\nabla^2 a}{a} - \frac{1}{m} \nabla U_0. \quad (2.5)$$

Второе слагаемое правой части этого уравнения определяется внешними силами, первое — силами самого поля. Оно зависит от плотности поля и его производных в точке нахождения Т-частицы — от параметра $\nabla^2 a/a$, который у нас далее будет часто встречаться. Поэтому рассмотрим его подробнее.

2.4. Поместим начало координат в интересующую нас точку. Представим a рядом Тейлора, ограничив область рассмотрения так, чтобы было достаточно квадратичных членов. Будем иметь

$$\begin{aligned} a(x, y, z) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} x^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} y^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} z^2 + \frac{\partial^2 a}{\partial x \partial y} xy + \\ + \frac{\partial^2 a}{\partial y \partial z} yz + \frac{\partial^2 a}{\partial z \partial x} zx + \frac{\partial a}{\partial x} x + \frac{\partial a}{\partial y} y + \frac{\partial a}{\partial z} z + a, \end{aligned}$$

где производные и функция a берутся в точке $(0, 0, 0)$. Найдем среднее значение a на расстоянии δ от точки $(0, 0, 0)$, подразумевая под этим величину

$$\begin{aligned} \langle a_\delta \rangle = \frac{1}{6} [a(\delta, 0, 0) + a(-\delta, 0, 0) + a(0, \delta, 0) + \\ + a(0, -\delta, 0) + a(0, 0, \delta) + a(0, 0, -\delta)]. \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned} a(\delta, 0, 0) + a(-\delta, 0, 0) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} \delta^2 + \frac{\partial a}{\partial x} \delta + a + \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} \delta^2 - \frac{\partial a}{\partial x} \delta + a = \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} \delta^2 + 2a. \end{aligned}$$

Аналогично, и для $a(0, \delta, 0) + a(0, -\delta, 0)$ и $a(0, 0, \delta) + a(0, 0, -\delta)$.

Подставив эти выражения в $\langle a_\delta \rangle$, получим

$$\langle a_\delta \rangle = \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} \right) \delta^2 + a = \frac{1}{6} \delta^2 \nabla^2 a + a.$$

Откуда

$$\frac{\nabla^2 a}{a} = 6 \frac{\langle a_\delta \rangle - a}{a\delta^2}. \quad (2.6)$$

Таким образом, величина (2.6) показывает, на сколько поле в центре меньше, чем в ближайшем окружении. Эту величину будем называть **разрежённостью** квазиполя.

Отметим, что разрежённость не зависит от интенсивности поля. Она также не зависит от поворота осей координат, так как $\nabla^2 a$, как известно, от него не зависит.

В (2.5) первое слагаемое в выражении для ускорения квазиполя и Т-частицы направлено по градиенту разрежённости квазиполя в направлении большей разрежённости и пропорционально этому градиенту. Поэтому квазиполе будет стремиться двигаться так, чтобы разрежённость уменьшить и сделать её равномерно распределённой по пространству.

Поскольку скорости движения элементов квазиполя определяются в соответствии с (1.8) градиентом от скаляра β , то $\text{rot } \mathbf{V} = 0$, т.е. квазиполе не должно иметь вихрей.

2.5. Как уже говорилось, состояние элементарной частицы полностью определяется её волновой функцией

(1.1). Она также полностью определяет и параметры квазиполя: его плотность a^2 и скорость движения $\mathbf{V} = (\hbar/m)\nabla\beta$. Но обратно, зная только плотность и скорость движения квазиполя, нельзя полностью определить волновую функцию. Действительно, при этом мы будем знать только модуль волновой функции и градиент её аргумента в соответствии с (1.8), т.е. производные аргумента по координатам. При этом можно к аргументу добавить ещё произвольную функцию времени, не зависящую от координат, при этом градиент не изменится.

Чтобы найти β , надо ещё знать производную $\partial\beta/\partial t$. Её можно найти из уравнения (1.7), зная U , поскольку волновая функция должна удовлетворять уравнению Шрёдингера. Тогда получим

$$\beta(\mathbf{r}, t) = \beta(\mathbf{r}_0, t_0) + \int_{t_0}^t \frac{\partial\beta(\mathbf{r}_0, t)}{\partial t} dt + \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \nabla\beta(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}. \quad (2.7)$$

Таким образом, квазиполе совместно с U определяют волновую функцию с точностью до постоянной $\beta(\mathbf{r}_0, t_0)$, которая на состоянии квантона не сказывается.

Так же, как не всякая комплексная функция может быть волновой — она должна удовлетворять уравнению Шрёдингера, так и не всякое поле $a^2(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ могут представлять квазиполе — они должны соответствовать некоторой волновой функции.

2.6. Если в уравнение Шрёдингера (1.3) подставить волновую функцию $\psi(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r}, t) \exp(i\beta(\mathbf{r}, t))$ и учесть соотношение для скорости квазиполя (2.3), то выражения для мнимой (1.6) и действительной (1.7) частей уравнения Шрёдингера приобретают простой физический смысл. Действительно, с учетом (2.3) соотношение (1.6) переходит в

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} = -\nabla(a^2 \mathbf{V}), \quad (2.8)$$

а соотношение (1.7), если взять градиент от обеих его частей, переходит в

$$-m \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla \frac{\nabla^2 a}{a} + \frac{m}{2} \nabla V^2 + \nabla U. \quad (2.9)$$

Уравнение (2.8) равносильно уравнению (2.2) и говорит о том, что квазиполе не может возникать и исчезать, а только перемещаться. Уравнение (2.9), с учётом (1.10) и (2.3), будет эквивалентно уравнению (2.5), т.е. тому положению, что ускорение элементов квазиполя равно сумме сил — внешней и силе самого квазиполя, делённой на массу частицы. Таким образом, уравнение Шрёдингера для квазиполя соответствует уравнению газодинамики с той разницей, что сила, с которой квазиполе действует на самого себя и которую мы обозначили F_q , в корне отличается от аналогичной силы в газодинамике.

основ связи (знаменитая теорема отсчётов, теория потенциальной помехоустойчивости, теоремы в теории криптографии). О его роли в советских космических исследованиях говорится значительно меньше. Между тем вклад Владимира Александровича и руководимых им коллективов — Особого конструкторского бюро Московского энергетического института (ОКБ МЭИ) и Института радиотехники и электроники (ИРЭ) РАН — в эту область не менее велик. Другая сторона его "космической" деятельности связана с работой на постах вице-президента АН СССР и председателя Совета "Интеркосмос".

В этом небольшом докладе мы кратко расскажем об основных этапах деятельности В.А. Котельникова, выдающегося учёного, инженера, политика и руководителя.

2. В.А. Котельников и космическая радиолокация

Побудительным мотивом к становлению космической радиолокации были вполне практические потребности. В 1960-х годах состояние космической техники в СССР и США позволяло планировать научные космические миссии для исследования ближайших к Земле планет: Венеры и Марса. Для того чтобы обеспечить полёт космических аппаратов к этим планетам на расстояния порядка нескольких сотен километров, требовалось знать их положение относительно Земли с большой точностью. Оказалось, что астрономические наблюдения, проведённые ранее, с хорошей точностью установили только относительное положение этих небесных тел. Что касается абсолютных значений взаимных расстояний, то они являлись весьма грубыми с точки зрения навигационных требований, предъявляемых к управлению полётом космического аппарата.

Все расстояния между планетами выражаются через астрономическую единицу (а.е.), которая равняется среднему расстоянию от Земли до Солнца и оценивается в 150 млн км. По данным астрономических наблюдений эта величина была определена с точностью порядка 10000 км. Это означает, что расстояние, например, до Венеры было известно с точностью в несколько тысяч километров. Ясно, что указанная точность не могла рассматриваться как удовлетворительная.

Возможность с необходимой точностью измерить расстояние между Землёй и какой-либо ближайшей планетой предоставляла радиолокация. Достаточно послать радиоимпульсы длительностью порядка 6 мкс, для того чтобы снизить погрешность измерения расстояния примерно до 1 км. Весь вопрос заключался в необходимой мощности этих импульсов — такой, при которой отражённый планетой сигнал превышал бы уровень шумов приёмника радиолокатора, установленного на поверхности Земли. Если учесть, что в радиолокации действует закон "обратной четвёртой степени расстояния", а расстояния между планетами составляют в лучшем случае несколько десятков миллионов километров, то легко понять, что для успешной радиолокации планет необходимы антенны площадью в несколько тысяч квадратных метров и передатчики с мощностью в несколько десятков киловатт. Такое "удовольствие" было доступно лишь странам с хорошо развитой промышленностью. Поэтому естественно, что планетная радиолокация получила развитие прежде всего в США, СССР и частично в Англии.

В СССР в то время вблизи г. Евпатория (Крым) создавался Центр дальней космической связи (ЦДКС), предназначенный для связи с теми космическими аппаратами, которые предполагалось послать для изучения

PACS numbers: 01.65.+g, 95.55.-n, 96.30.-t
DOI: 10.3367/UFNr.0179.200902i.0208

Владимир Александрович Котельников и исследования Солнечной системы

Л.М. Зелёный, Н.А. Арманд

1. Введение

В биографических описаниях деятельности академика Владимира Александровича Котельникова обычно говорят о его выдающихся трудах в области теоретических