

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Ренормгрупповые симметрии для решений нелинейных краевых задач

В.Ф. Ковалев, Д.В. Ширков

Метод ренормгрупповых симметрий в краевых задачах классической математической физики появился около 10 лет назад в результате развития представлений функциональной автомодельности и квантово-полевой ренормализационной группы Боголюбова, рассматриваемой как группа Ли, т.е. группа непрерывных преобразований. В квантовой теории поля метод ренормализационной группы является неотъемлемым ингредиентом подавляющей части практических вычислений. Он составил теоретический фундамент открытия феномена асимптотической свободы сильных ядерных взаимодействий и лежит в основе сценария Великого объединения взаимодействий. В этой статье, основанной на материале лекций, прочитанных на XIII Школе по нелинейным волнам (Нижегород, 1–7 марта 2006 г.) (В.Ф. Ковалев, Д.В. Ширков "Ренормгрупповые симметрии в краевых задачах", в сб. Нелинейные волны 2006 (Под ред. А.В. Гапонова-Грехова) (Н. Новгород: ИПФ РАН, 2007) с. 433), излагаются логическая схема нового алгоритма, основанного на современной теории групп преобразований, а также наиболее интересные результаты, полученные методом ренормгрупповых симметрий в задачах, формулируемых с помощью дифференциальных и интегральных уравнений и использующих линейные функционалы от решений. Приложения алгоритма демонстрируются примерами из нелинейной оптики, кинетической теории и динамики плазмы, в которых его использование позволило найти новые аналитические решения задач нелинейной физики. Эти решения дали возможность описать структуру особенности при самофокусировке пучка в нелинейной среде, изучить генерацию гармоник из слабонеоднородной плазмы и исследовать энергетические спектры ускоренных ионов при разлете плазменных сгустков.

PACS numbers: 02.30.Jr, 11.10.Ni, 42.65.–k

DOI: 10.3367/UFNr.0178.200808d.0849

Содержание

1. Введение (849).
2. Ренормгрупповой алгоритм в математической физике (853).
3. Ренормгрупповые симметрии в локальных задачах математической физики (855).
 - 3.1. Ренормгрупповая симметрия в нелинейной теории плазмы.
 - 3.2. Ренормгрупповые симметрии в задачах газовых и квазичаплыгинских сред.
 - 3.3. Приближенные ренормгрупповые симметрии в задачах квазичаплыгинских сред.

4. Ренормгрупповые симметрии в нелокальных задачах математической физики (861).
 - 4.1. Ренормгрупповые симметрии для функционалов от решений.
 - 4.2. Ренормгрупповая симметрия в задаче о разлете плазменного сгустка.
 5. Заключение (863).
- Список литературы (864).

1. Введение

Предлагаемый материал дает иллюстрацию использования и расширения понятий функциональной автомодельности и ренормализационной группы Боголюбова в краевых задачах математической физики.

Открытая в начале 1950-х годов Штюкельбергом и Петерманом групповая структура (группы преобразований Ли) в результатах вычислений перенормированной квантовой теории поля, а также связанная с этой структурой точная симметрия решений были применены в 1955 г. Боголюбовым и одним из авторов этой статьи для создания регулярного метода уточнения приближенных решений квантово-полевых задач — метода ренормализационной группы (РГ). В основе метода лежит использование инфинитезимальной формы точного группового свойства решения для улучшения пертурбативного (т.е. полученного по теории возмущений)

В.Ф. Ковалев. Институт математического моделирования РАН, Миусская пл. 4а, 125047 Москва, Российская Федерация
Тел. (495) 250-78-87
Факс (499) 972-07-23
E-mail: vfkv@orc.ru

Д.В. Ширков. Объединенный институт ядерных исследований ул. Жолио-Кюри 6, 141980 Дубна, Московская обл., Российская Федерация
Тел. (49621) 65088
Факс (49621) 65084
E-mail: shirkov@theor.jinr.ru,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет,
Воробьевы горы, 119992 Москва, Российская Федерация

Статья поступила 25 февраля 2008 г.

представления этого решения. Улучшение аппроксимационных свойств решения оказывается наиболее плодотворным при наличии сингулярности, так как восстанавливается ее правильная структура.

Наиболее яркими результатами применения метода ренормализационной группы в квантовой теории поля являются открытие свойства асимптотической свободы неабелевых калибровочных теорий (Нобелевская премия 2004 года), приведшего к созданию квантовой хромодинамики, а также построение картины совместной эволюции по энергии трех эффективных функций взаимодействия (электромагнитной, слабой и сильной) Стандартной модели, которая привела к спекулятивной гипотезе Великого объединения взаимодействий и возможной нестабильности протона.

Помимо того, квантово-полевая ренормгруппа образовала основу (см. Нобелевскую лекцию 1982 года К. Вилсона) для конструирования приближенной полугруппы при изучении фазовых переходов в больших спиновых решетках, так называемой ренормализационной группы Вилсона, широко используемой при анализе критических явлений.

В настоящей статье излагаются наиболее интересные результаты, полученные авторами на основе распространения ренормгрупповых представлений квантовой теории поля на краевые задачи классической математической физики. Основным достижением здесь явилось создание регулярного алгоритма для нахождения симметрий ренормгруппового типа средствами современной теории групп преобразований. Наличие этого алгоритма устраняет типичный для квантово-полевых задач недостаток ренормгруппового подхода, который заключается в том, что обнаружение группового свойства решения требует в каждом конкретном случае специального, как правило нестандартного, анализа.

Отметим, что развитый алгоритм построения ренормгрупповых симметрий применим для задач, в которых используются дифференциальные и интегральные уравнения, а также линейные функционалы от решений.

Приложения алгоритма иллюстрируются примерами из нелинейной оптики, кинетической теории и динамики плазмы, в том числе задачей о распространении и самофокусировке волнового пучка в нелинейной среде (разделы 3.2 и 3.3), задачами о динамике плазменного сгустка и ускорении ионов (раздел 4.2), генерации гармоник в лазерной плазме (раздел 3.1). Здесь использование ренормгрупповых симметрий привело к новым, точным и приближенным, аналитическим решениям задач нелинейной физики, которые позволили описать пространственную структуру самофокусирующегося пучка в нелинейной среде при реалистической постановке задачи, существенно продвинуться в установлении зависимостей интенсивностей гармоник, генерируемых слабонеоднородной лазерной плазмой в режиме сильной нелинейности, от параметров излучения и плазмы, а также впервые найти энергетические спектры ускоренных ионов при кинематическом описании адиабатического разлета плазменных сгустков с несколькими сортами ионов.

Мотив для публикации — желание привлечь внимание теоретиков к новому, весьма общему алгоритму, использующему симметрию приближенного решения для улучшения его аппроксимационных возможностей. Использование группового свойства (симметрии) реше-

ния лежит в основе как метода ренормализационной группы в квантовой теории поля, так и аналогичного ему нового ренормгруппового алгоритма в математической физике.

Универсальность ренормгрупповых представлений позволяет с единой точки зрения подходить к анализу свойств решений различных нелинейных задач и дает основания надеяться на продуктивность нового метода при приложении его к другим областям современной физики.

Подобная универсальность, как известно, отличает другой общий метод, использующий представление решения в виде "интеграла по путям" (иначе, функционального интеграла), широко применяемый в квантовой механике, квантовой теории поля, теории больших статистических систем и теории турбулентности.

Классическая математическая физика имеет дело с физическими объектами, описываемыми дифференциальными уравнениями (обыкновенными или в частных производных), которые в большинстве практически интересных случаев оказываются нелинейными, или интегро-дифференциальными уравнениями. Нахождение аналитического решения таких уравнений при произвольных краевых (начальных или граничных) условиях не представляется возможным: точные аналитические решения, как правило, удается найти лишь для краевых данных специального вида, а в остальных случаях приходится довольствоваться приближенными решениями. Обычно способ построения решения конкретной краевой задачи (КЗ) оказывается характерным именно для уравнений данной задачи.

В настоящей заметке излагается метод исследования аналитических решений, основанный на построении и использовании специального вида симметрий решений КЗ, называемых симметриями ренормгруппового типа, или *ренормгрупповыми* (РГ) симметриями. Понятие "симметрия" здесь рассматривается в обычном для теории непрерывных групп преобразований смысле: оно означает, что решение КЗ под действием группы непрерывных преобразований в пространстве всех определяющих это решение переменных снова переходит в решение этой КЗ. Прилагательное "ренормгрупповые" указывает на родственность этих симметрий тем симметриям в квантовой теории поля, которые связывают с операцией перенормировки масс и зарядов (т.е. констант связи) микрочастиц.

Отметим, что связь между симметриями и задачей нахождения решений дифференциальных уравнений впервые была установлена [1, 2] норвежским математиком Софусом Ли (1842–1899), который показал, что большинство результатов по интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений различного типа может быть получено с помощью общего метода, названного впоследствии групповым анализом дифференциальных уравнений. Являясь одной из главных составляющих теории непрерывных групп, групповой анализ дифференциальных уравнений позволяет классифицировать дифференциальные уравнения, используя язык групп симметрий, т.е. указывает полный список уравнений, которые могут быть проинтегрированы или порядок которых может быть понижен при применении группового метода, а также предлагает *регулярную* процедуру отыскания этих симметрий. Существенный прогресс в этой области с начала пятидесятых годов

прошлого века привел к появлению новых понятий и алгоритмов, а также расширил сферы возможных приложений результатов группового анализа (см., например, монографии [3–9] и справочник [10]), но не изменил общей нацеленности современного группового анализа на разработку *регулярных* способов построения и классификации решений нелинейных дифференциальных уравнений на основе симметрий этих уравнений.

В задачах, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, использование группы симметрий дает как общие, так и частные (особые) решения. В задачах с дифференциальными уравнениями в частных производных, типичных для математической физики, знание симметрий позволяет строить частные решения КЗ (инвариантные, т.е. такие, которые под действием преобразований группы переходят сами в себя, и частично-инвариантные) с заранее не определенными краевыми данными, которые уточняются в процессе построения конкретного решения. Поскольку произвольные краевые данные, как правило, не инвариантны при преобразованиях группы, то считается, что использование инвариантных решений, вообще говоря, неэффективно при решении КЗ.

К иному заключению приводят рассуждения, лежащие в основе сформулированного в квантовой теории поля метода ренормализационной группы [11]. Этот метод использует групповое свойство решения (которое в квантовой теории поля формулируется в виде функционального уравнения) для улучшения его аппроксимационных характеристик.

Хотя изначально метод ренормализационной группы был сформулирован для квантово-полевых задач, пояснить его основную идею можно на примере плоской задачи переноса излучения [12]. Пусть полупространство $x > 0$ заполнено однородной материей, а на границу $x = 0$ этой среды падает стационарный поток частиц, характеризуемый числом α . Рассмотрим изменение числа частиц в потоке при движении его вглубь среды. Обозначим через α_1 число частиц на расстоянии $x = l_1$ от границы с пустотой и через α_2 число частиц на расстоянии $x = l_2 = l_1 + \lambda$ от нее. Вследствие однородности среды число частиц, движущихся вглубь среды, на расстоянии l от границы однозначно определяется некоторой функцией $A(l, \alpha)$, зависящей от значения α на границе и расстояния l , т.е. $\alpha_1 = A(l_1, \alpha)$ и $\alpha_2 = A(l_2, \alpha)$. Однако функцию α_2 можно также представить в виде $\alpha_2 = A(\lambda, \alpha_1)$, задав ее той же функцией $A(\lambda, \alpha_1)$ от двух аргументов — расстояния λ от воображаемой границы $x = l_1$ и числа частиц на ней α_1 . Комбинируя два разных определения α_2 , получим для $A(x, \alpha)$ функциональное уравнение

$$A(l + \lambda, \alpha) = A(\lambda, A(l, \alpha)). \quad (1)$$

Природа частиц и свойства среды в данных рассуждениях не играют роли. Разумеется, при решении задачи переноса (т.е. интегро-дифференциального кинетического уравнения) в каждом конкретном случае определяется явный (точный или приближенный) вид функции $A(x, \alpha)$. Однако точное решение задачи в любом случае будет удовлетворять уравнению (1).

Функциональное уравнение вида (1) естественным образом возникает при рассмотрении однопараметрической группы G точечных преобразований T_a на плос-

кости,

$$\begin{aligned} T_a: \quad \bar{x} &= f(x, u, a), \quad \bar{u} = g(x, u, a), \\ f(x, u, 0) &= x, \quad g(x, u, 0) = u, \end{aligned} \quad (2)$$

трансформирующей точку $P = (x, u)$ в другую точку $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{u}) = T_a(P)$. Напомним, что множество G обратимых преобразований T_a образует группу, если для этих преобразований выполняется ряд условий: а) множество G содержит тождественное преобразование, T_0 ; б) для любого T_a существует обратное преобразование $T_{a^{-1}}$; в) композиция двух преобразований $T_b T_a$ снова принадлежит множеству G :

$$\begin{aligned} T_{a^{-1}}(\bar{P}) &= P; \quad T_0(P) = P; \\ \bar{\bar{P}} &\stackrel{\text{def}}{=} T_b(\bar{P}) = T_b T_a(P) = T_{a+b}(P). \end{aligned} \quad (3)$$

Последнее условие в (3), записанное с помощью функций f и g из (2), выражается в виде двух функциональных уравнений:

$$\begin{aligned} f(x, u, a + b) &= f(f(x, u, a), g(x, u, a), b), \\ g(x, u, a + b) &= g(f(x, u, a), g(x, u, a), b). \end{aligned} \quad (4)$$

Из теории Ли известно, что любая непрерывная однопараметрическая группа полностью задается бесконечно малым (инфинитезимальным) преобразованием

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x + a\xi(x, u) + O(a^2), \quad \bar{u} = u + a\eta(x, u) + O(a^2), \\ \xi(x, u) &= \left. \frac{\partial f}{\partial a} \right|_{a=0}, \quad \eta(x, u) = \left. \frac{\partial g}{\partial a} \right|_{a=0}, \end{aligned} \quad (5)$$

которое принято записывать с помощью *инфинитезимального оператора* (генератора) группы

$$X = \xi(x, u) \partial_x + \eta(x, u) \partial_u. \quad (6)$$

Конечные преобразования непрерывной группы взаимно однозначно связаны с инфинитезимальным преобразованием посредством уравнений Ли — уравнений характеристик для сопряженного с оператором (6) дифференциального уравнения в частных производных первого порядка,

$$\frac{d\bar{x}}{da} = \xi(\bar{x}, \bar{u}), \quad \bar{x}|_{a=0} = x, \quad \frac{d\bar{u}}{da} = \eta(\bar{x}, \bar{u}), \quad \bar{u}|_{a=0} = u. \quad (7)$$

Для обсуждаемой здесь задачи переноса излучения $f = x$, $g = A(x, \lambda)$, $a = \lambda$, $u = \alpha$ и функциональное уравнение (1) совпадает со вторым уравнением в (4) (первое функциональное уравнение отражает очевидный аддитивный закон преобразования координаты $\bar{x} = \lambda$), а генератор группы имеет вид

$$X = \partial_x + \eta(\alpha) \partial_\alpha, \quad \eta(\alpha) \equiv \partial_\lambda A(x, \lambda)|_{\lambda=0}. \quad (8)$$

Согласно (7), для нахождения A на большом удалении от границы, т.е. при большом значении параметра λ , должно быть известно поведение $\bar{\alpha} = A(x, \lambda)$ в малой окрестности границы при $\lambda \rightarrow 0$, т.е. фактически должна быть известна производная этой функции на границе. Обычно такую информацию можно извлечь из приближенного решения по теории возмущений. Далее, интегрирование уравнений Ли дает формулы конечных пре-

образований:

$$\Psi(\bar{x}) = \Psi(x) + \lambda, \quad \Psi(x) = \int^x \frac{da}{\eta(a)}, \quad \bar{x} = \lambda. \quad (9)$$

В предположении, что функция Ψ имеет обратную, Ψ^{-1} , решения функционального уравнения (1) находятся в общем виде:

$$\bar{x} \equiv A(\alpha, \lambda) = \Psi^{-1}(\Psi(x) + \lambda), \quad \bar{x} = \lambda. \quad (10)$$

Описанные построения составляют суть метода ренормализационной группы. Приведем два примера реализации этого метода.

Пусть в среде происходит поглощение частиц, пропорциональное их числу, т.е. из теории возмущений известно приближенное решение

$$A_{\text{pt}}(\alpha, \lambda) \approx \alpha - v\alpha\lambda, \quad v = \text{const}. \quad (11)$$

Вычисляя с помощью (11) координату $\eta(\alpha) = -v\alpha$ генератора группы (8) и используя ее в соотношениях (9), получим решение (10):

$$A_{\text{rg}}(\alpha, \lambda) = \alpha \exp(-v\lambda), \quad (12)$$

которое является справедливым во всем пространстве, заполненном средой, вплоть до $x \rightarrow \infty$.

Предположим теперь, что механизм поглощения является нелинейным и коэффициент поглощения пропорционален потоку частиц, $v(\alpha) = \beta\alpha$, где $\beta = \text{const}$. Тогда в окрестности границы

$$A_{\text{pt}}(\alpha, \lambda) \approx \alpha - \beta\alpha^2\lambda \quad (13)$$

и использование (13) в (9) приводит к решению (10) в виде суммы геометрической прогрессии

$$A_{\text{rg}}(\alpha, \lambda) = \frac{\alpha}{1 + \beta\alpha\lambda}. \quad (14)$$

Полученный результат, подобно предыдущему, является справедливым во всем полупространстве $x > 0$ и, в частности, описывает асимптотическое поведение проникающего потока при $x \rightarrow \infty$.

В приведенных выше примерах эффективность группового (ренормгруппового) подхода выразилась в том, что, используя информацию о поведении решения функционального уравнения в окрестности границы с пустотой, мы получили для него явные выражения на всем интервале $0 \leq x \leq \infty$. Заметим, что если разложить выражение (14) в степенной ряд по плотности числа частиц α , т.е. вернуться к теории возмущений, то в каждом отдельном порядке по n получим возрастающие пропорционально λ^n выражения, т.е. искаженное представление асимптотики решения. Достоинство метода ренормализационной группы заключено в том, что он восстанавливает истинную, находящуюся в согласии с функциональным уравнением (1) структуру решения, которая искажена в приближении, полученном согласно теории возмущений¹.

Для плоской задачи теории переноса излучения наглядность метода ренормализационной группы обуслов-

лена учетом свойств симметрии решения (т.е. формулировкой функционального уравнения) в реальном конфигурационном пространстве: РГ-преобразование плотности числа частиц при движении вглубь среды связано с преобразованием сдвига по пространственной координате.

Возвращаясь к методу ренормализационной группы в его изначальной (квантово-полевой) формулировке [11, 13–15]), именуемой также *боголюбовской ренормгруппой*², отметим, что в его основе лежит функциональное уравнение, которое в наиболее простом случае совпадает по виду с (1) после замены $x \rightarrow \ln t$, т.е. РГ-преобразованию пространственного сдвига по координате в теории переноса соответствует изменение масштаба шкалы импульсов или частот в квантовой теории поля, а величина \bar{x} в квантовой теории поля называется инвариантной связью. В частности, решение вида (14) с $\lambda = \ln x$ возникает в квантово-полевых вычислениях в однопетлевом приближении. При использовании более сложного приближения теории возмущений, отличающегося от (13) наличием квадратичного и кубического по α вкладов, что соответствует двухпетлевому приближению в квантовой теории поля, РГ-улучшенное решение находится из уравнения вида (10), не разрешимого в элементарных функциях [17]. Обычно его решают приближенно, используя однопетлевое приближение РГ-выражения.

Сопоставление РГ-улучшенного решения, найденного из двухпетлевого приближения, с результатом, полученным из однопетлевого приближения, выявляет характерную для метода ренормализационной группы возможность последовательного улучшения точности, что указывает на устойчивость асимптотического поведения решения. Подобным образом можно учитывать в теории возмущений поправки и более высоких порядков, что последовательно улучшает соответствующие РГ-решения.

Таким образом, процедура систематического (последовательного) улучшения набора приближенных решений, найденных в квантовой теории поля в рамках теории возмущений по известному малому параметру, полностью аналогична описанной выше. Улучшение аппроксимационных свойств оказывается наиболее существенным в окрестности сингулярности решения. В квантово-полевом случае — это сингулярности в инфракрасной (см. [13, 14, 18]) и ультрафиолетовой областях. К последнему случаю относится наиболее яркий физический результат, полученный с помощью метода РГ, — открытие свойства асимптотической свободы неабелевых калибровочных теорий [19].

Приведенные примеры использования метода ренормализационной группы для улучшения аппроксимационных характеристик решений основаны на наиболее простой форме функционального уравнения с одной зависимой и одной независимой переменными. Однако часто число независимых и зависимых переменных и параметров в задаче превышает этот минимальный набор.

Так, вариант функционального уравнения (1) с $x = \ln t$ соответствует безмассовой модели в квантовой теории поля с одной константой связи. Усложнение этой модели

¹ Следует отметить, что формулы (12), (14) в теории переноса могут быть получены и другими способами, в частности, в результате решения кинетического уравнения, однако описанный здесь метод, использующий групповые дифференциальные уравнения, является самым простым. Более того, в ряде важных случаев он оказывается единственно возможным — с его помощью удается получать результаты, недостижимые каким-либо другим путем.

² Это название было введено с целью отличить РГ Боголюбова от иных конструкций, тоже называемых в других разделах физики ренормгруппами. Их краткое перечисление можно найти, например, в [16].

может идти по двум направлениям. Во-первых, можно увеличивать число аргументов, от которых зависит величина эффективной связи. Например, рассматриваемая полевая модель может содержать одну или несколько масс (как это имеет место, например, в квантовой хромодинамике), тогда у константы связи появится несколько массовых аргументов с соответствующим законом преобразования, вследствие чего изменится вид группового преобразования и функционального уравнения. Во-вторых, возможно увеличение числа функциональных уравнений, что соответствует квантово-полевой модели с несколькими константами связи. Это означает, что группа непрерывных преобразований независимых $x = \{x^1, \dots, x^n\}$ и зависимых $u = \{u^1, \dots, u^m\}$ переменных с оператором (6) рассматривается теперь в пространстве R^{n+m} , при этом координаты генератора группы (6) являются векторами $\xi = \{\xi^1, \dots, \xi^n\}$ и $\eta = \{\eta^1, \dots, \eta^m\}$, так что соответствующие вклады в инфинитезимальный оператор следует понимать как результат вкладов по отдельным переменным, например $\xi \partial_x \equiv \xi^1 \partial_{x^1} + \dots + \xi^n \partial_{x^n}$. С возрастанием числа аргументов у функции, подчиняющейся функциональному уравнению, а также с увеличением числа самих уравнений обнаружение группового свойства решения в виде функционального уравнения (при использовании метода ренормализационной группы в его изначальной формулировке [13]) в каждом конкретном случае требует специального, часто нестандартного, анализа (см., например, обсуждение в [16, 20]), что является алгоритмическим недостатком техники РГ.

С целью преодоления этого недостатка при распространении РГ-представлений на задачи математической физики был развит (см. [21, 22], а также обзоры [23, 24, с. 232; 25, 26]) иной РГ-алгоритм. Он имеет то же назначение, что и алгоритм метода РГ Боголюбова, т.е. получение улучшенного (по сравнению с исходным приближенным) решения, но при этом для нахождения симметрии решения КЗ применяет вычислительную процедуру, подобную используемой в современном групповом анализе. Именно с последним обстоятельством и связано возникновение термина "РГ-симметрия".

В настоящей заметке дается описание РГ-алгоритма в математической физике и иллюстрируются его возможности на примерах различных КЗ. Содержание заметки структурировано следующим образом. В разделе 2 излагается суть РГ-алгоритма на примере построения РГ-симметрии для решения КЗ уравнения Хопфа. Иллюстрациям различных подходов к построению РГ-симметрии посвящены разделы 3 и 4, причем в разделе 4 рассматривается ряд постепенно усложняющихся задач, получающихся путем изменения и дополнения уравнения Хопфа из раздела 2. Раздел 4 сохраняет тот же принцип, однако дополняет изложение рассмотрением нелокальных задач, не всегда связанных с приведенными в разделе 3. Сфера возможных приложений РГ-алгоритма и краткое перечисление результатов, полученных с его использованием, даны в разделе 5.

2. Ренормгрупповой алгоритм в математической физике

Предварим описание РГ-алгоритма следующими наглядными рассуждениями. Известно, что если рассматривать все входящие в дифференциальное уравне-

ние переменные, т.е. независимые и зависимые (в обычном смысле), и их производные (в групповом анализе называемые дифференциальными переменными) как независимые, то дифференциальное уравнение можно трактовать как алгебраическое соотношение между этими переменными. В случае одного уравнения это соотношение задает "поверхность" в расширенном пространстве всех определяющих уравнение переменных (если уравнений несколько, то говорят о многообразии), а любое решение уравнения задает "линию" на этой поверхности. Проекция на "плоскость" $\{x, u\}$ определяет семейство кривых, среди которых есть и кривая, проходящая через "точку" $\{x_0, u_0\}$, соответствующую граничному условию рассматриваемой КЗ.

Под действием преобразования группы G точки на поверхности (многообразии) смещаются вдоль этой поверхности, так что в преобразованных переменных уравнение сохраняет свой вид, а любое решение уравнения снова переходит в решение. При этом любая точка на плоскости $\{x, u\} \in R^{n+m}$ под действием преобразований T_a группы G переходит в точку $\{\bar{x}, \bar{u}\}$ и геометрическое место этих точек представляет собой непрерывную кривую (называемую траекторией группы G), проходящую через точку $\{x, u\}$. Геометрическое место образов $T_a(\{x, u\})$ также называется G -орбитой точки $\{x, u\}$. В общем случае движение вдоль траектории группы соответствует переходу от одной кривой семейства к другой, т.е. процедуре "размножения" решений.

Возвращаясь к "ренормгрупповой" точке зрения, будем рассматривать лишь такие преобразования группы, при которых точки на кривой, проходящей через $\{x_0, u_0\}$, смещаются вдоль этой кривой. Это означает, что решение КЗ является РГ-орбитой точки $\{x_0, u_0\}$ (в общем случае — краевого многообразия) и представляет собой инвариантное РГ-многообразие (подобно инвариантному заряду в квантовой теории поля [15]). Инфинитезимальная формулировка этого свойства будет использована при построении РГ-симметрии.

Групповое свойство решения КЗ проявляется в том, что вместо параметризующей решение граничной точки $\{x_0, u_0\}$ можно выбрать другую точку на этой кривой, связанную с ней РГ-преобразованием. Подобное свойство "универсальности" решения КЗ при изменении способа его параметризации получило название "функциональной автомодельности" [27]. Для нахождения РГ-преобразований, которые осуществляют трансформацию решения КЗ снова в решение той же КЗ, используем то обстоятельство, что физическая задача формулируется с использованием дифференциальных (или интегро-дифференциальных) уравнений, симметрии которых могут быть найдены с помощью техники группового анализа.

Проиллюстрируем характерные особенности алгоритма построения РГ-симметрии на примере КЗ для уравнения Хопфа [26], которое широко применяется в физике для описания начальных возмущений на нелинейной стадии их эволюции:

$$\partial_t v + v \partial_x v = 0, \quad v(0, x) = \varepsilon U(x), \quad (15)$$

где U — обратимая функция x , а параметр ε задает "амплитуду" начального возмущения "на границе" $t = 0$. Когда удаление от границы незначительно,

$t \ll 1/\varepsilon$, решение задачи (15) по теории возмущений, которое представимо в виде отрезка степенного ряда,

$$v = \varepsilon U - \varepsilon^2 t U \partial_x U + O(t^2), \quad (16)$$

является непригодным при больших t . Применение РГ-симметрии позволяет улучшить результат теории возмущений и восстановить правильное поведение решения в окрестности сингулярности (при условии, что такая сингулярность в решении появляется при некоторых значениях t).

При построении РГ-симметрии алгоритм использует группу симметрии уравнений, задающих КЗ. Определяющее частное решение краевые данные вовлекаются в РГ-преобразования посредством расширения пространства переменных, в которых действует группа. В случае КЗ (15) такое пространство включает в себя три независимые переменные, $x = \{t, x, \varepsilon\}$. При этом дифференциальное уравнение (15) удобно переписать для функции $u = v/\varepsilon$, вводя ее таким образом, чтобы перенести "амплитуду" ε из краевого условия в дифференциальное уравнение,

$$\partial_t u + \varepsilon u \partial_x u = 0, \quad u(0, x) = U(x). \quad (17)$$

Общий элемент группы преобразований G для уравнения (17) (в общем случае — исходного многообразия) находится с применением стандартной техники Ли (см., например, [4]) и задается суммой четырех инфинитезимальных операторов:

$$X = \sum_i X_i, \quad X_1 = \psi^1 (\partial_t + \varepsilon u \partial_x), \quad X_2 = \psi^2 \partial_x, \\ X_3 = \psi^3 (x \partial_x + u \partial_u), \quad X_4 = \psi^4 (\varepsilon \partial_\varepsilon + x \partial_x), \quad (18)$$

где ψ^i ($i = 2, 3, 4$) являются произвольными функциями ε , u и $x - \varepsilon u t$, а ψ^1 — произвольная функция всех групповых переменных $\{t, x, \varepsilon, u\}$. Воспользуемся условием РГ-инвариантности частного решения КЗ (17), заданного соотношением

$$S \equiv u - W(t, x, \varepsilon) = 0 \quad (19)$$

с неизвестной пока функцией W , т.е. условием того, что под действием РГ-преобразования решение КЗ преобразуется в решение той же КЗ. В инфинитезимальной форме это условие записывается в виде

$$XS|_{[S]} \equiv \psi^3 (W - x \partial_x W) - \psi^2 \partial_x W - \\ - \psi^4 (\varepsilon \partial_\varepsilon W + x \partial_x W) = 0, \quad (20)$$

где $|_{[S]}$ означает, что результат действия оператора берется на многообразии, задаваемом уравнением $S = 0$ и всеми его дифференциальными следствиями. Член, содержащий ψ^1 , из (20) выпал, поскольку он пропорционален величине $\partial_t W + \varepsilon W \partial_x W$, тождественно обращаясь в нуль на решениях уравнения (17). Условие (20) справедливо для всех t , в том числе и для $t \rightarrow 0$, когда W заменяется приближенным решением, полученным в рамках теории возмущений (16):

$$W = U - \varepsilon t U \partial_x U + O(t^2). \quad (21)$$

В этом пределе (20) дает связь между функциями ψ^i ($i = 2, 3, 4$), которая очевидным образом продолжается

на значения $t \neq 0$,

$$\psi^2 = -\chi(\psi^3 + \psi^4) + \frac{u}{\partial_\chi U} \psi^3, \quad \chi = x - \varepsilon u t, \quad (22)$$

где производная $\partial_\chi U$ должна быть выражена в соответствии с краевыми условиями в терминах χ или u . Используя (22) в (18), мы приходим к группе меньшей размерности с операторами

$$R = \sum_i R_i, \quad R_1 = \psi^1 (\partial_t + \varepsilon u \partial_x), \\ R_2 = u \psi^3 \left[\left(\varepsilon t + \frac{1}{\partial_\chi U} \right) \partial_x + \partial_u \right], \quad R_3 = \varepsilon \psi^4 (t u \partial_x + \partial_\varepsilon). \quad (23)$$

Описанная выше процедура, которая сводит (18) к (23), представляет собой *сужение группы* (18) на *частном решении*, а набор операторов R_i (23) определяет искомую РГ-симметрию. Решение КЗ получается с помощью использования соответствующих уравнений Ли (аналогичных (7)) для любого из генераторов (23). Без ограничения общности можно взять генератор R_3 с $\varepsilon \psi^4 = 1$ и получить конечные РГ-преобразования

$$x' = x + a t u, \quad \varepsilon' = \varepsilon + a, \quad t' = t, \quad u' = u. \quad (24)$$

Здесь a — параметр группы, t и u являются инвариантами, а преобразования ε и x представляют собой преобразования сдвига, которые для переменной x зависят также от t и u . При $\varepsilon = 0$ и учете (17) величины x и u связаны соотношением $x = H(u)$, где $H(u)$ — функция, обратная к $U(x)$. Исключая a, t, u из (24) и опуская штрихи у переменных, мы приходим к искомому решению КЗ (17) в неявной форме (подобной неявной форме решения функционального уравнения (10)):

$$x - \varepsilon t u = H(u). \quad (25)$$

По сути, это улучшенное решение по теории возмущений (16), которое пригодно не только для малых $t \ll 1/\varepsilon$, разумеется, при условии, что связь (25) определена однозначным образом. В зависимости от $H(u)$ это решение либо 1) указывает правильное асимптотическое поведение при $t \rightarrow \infty$, либо 2) дает правильное поведение решения вблизи конечных значений $t \rightarrow t_{\text{sing}}$. Примером варианта 1 служит решение КЗ при задании линейной функции $U(x) = x$, что дает для функции $v = \varepsilon x (1 + \varepsilon t)^{-1}$ выражение, остающееся конечным при $t \rightarrow \infty$, как и в решении (14). Для варианта 2 можно выбрать, например, синусоидальное распределение на границе, $U(x) = -\sin x$. В этом случае решение (25) описывает хорошо известное искажение с возрастанием t начального профиля синусоидальной волны и превращение ее в пилообразную [28, гл. 6, § 1] с образованием особенности на конечном расстоянии от границы $t_{\text{sing}} = 1/\varepsilon$. Подчеркнем, что для получения решения КЗ (25) использовалось *только* знание симметрии решения и соответствующая теория возмущений (ТВ).

Рассмотренный выше пример построения РГ-симметрий является иллюстрацией общего алгоритма, детальное описание которого применительно к КЗ для дифференциальных уравнений можно найти, например, в обзорах [23, 24], а его обобщение для нелокальных задач — в [26, 25]. Условно схема реализации РГ-алгоритма может быть представлена в виде последовательности четырех шагов (см. рисунок):

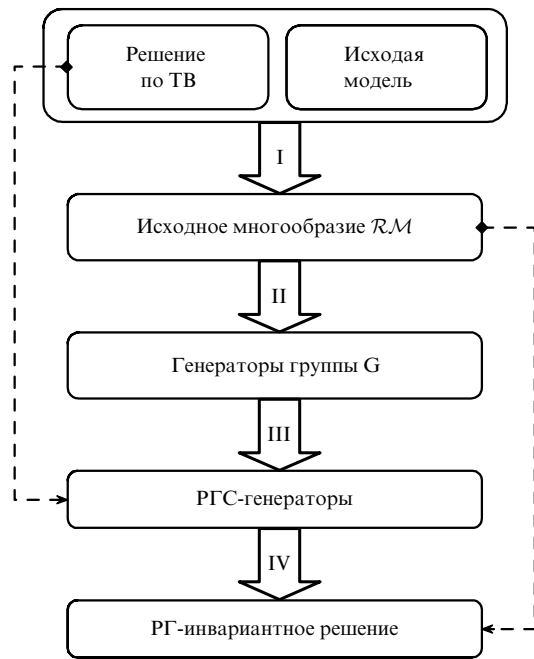


Рисунок. Схема РГ-алгоритма.

- (I) построение исходного многообразия $\mathcal{R}\mathcal{M}$;
 (II) нахождение допускаемой $\mathcal{R}\mathcal{M}$ группы симметрий G ;
 (III) сужение группы симметрий G на частном решении КЗ и нахождение РГ-симметрии (РГС);
 (IV) отыскание отвечающего РГ-симметрии аналитического решения.

Особенностью процедуры построения РГ-симметрии является многовариантность шага I алгоритма, назначение которого состоит в том или ином способе вовлечения в групповые преобразования параметров, входящих как в уравнения задачи, так и в краевые условия, от которых зависит частное решение задачи. Выбор конкретной реализации первого шага чаще всего диктуется видом как исходных уравнений и краевых условий к ним, так и приближенного ТВ-решения. Подобная многовариантность, присущая только первому шагу алгоритма, нацелена на охват наиболее широкого круга задач, исследуемых данным методом. Последующие шаги алгоритма выполняются в рамках хорошо разработанных теоретико-групповых методов.

Эта многовариантность проявляется и в вышеприведенном наглядном примере КЗ для уравнения Хопфа. В основе построения РГ-симметрии для КЗ (17) лежал наиболее очевидный вариант: построение РГ-симметрии из группы точечных симметрий уравнения Хопфа в пространстве переменных, расширенном за счет включения параметра ε в число независимых переменных. Такой способ конструирования исходного многообразия $\mathcal{R}\mathcal{M}$ не является единственно возможным.

Можно также построить РГ-симметрии для КЗ (17), используя дополнительную дифференциальную связь, которая совместна как с краевыми условиями, так и с исходными уравнениями³. Например, для граничных

³ Способ построения такой дифференциальной связи здесь подробно не обсуждается. Для примера можно указать на использование условия инвариантности исходного уравнения относительно не

условий в (17) в виде линейных функций $U(x) = x$ можно выбрать дифференциальную связь вида $\partial_{xx}u = 0$. Использование в качестве исходного многообразия $\mathcal{R}\mathcal{M}$ объединенной системы, состоящей из этой связи и уравнения Хопфа, также позволяет вычислить РГ-симметрии для КЗ (17). Допускаемая многообразием $\mathcal{R}\mathcal{M}$ группа G при этом будет отличаться от (18), но вид решения (25) останется прежним. Описание других примеров реализации первого шага алгоритма приведено в [23].

3. Ренормгрупповые симметрии в локальных задачах математической физики

Пример построения РГ-симметрии решения КЗ для уравнения Хопфа (17) показывает, что конкретная форма реализации общей схемы РГ-алгоритма зависит как от вида уравнений КЗ, так и от способа задания краевых данных. Поскольку построение РГ-симметрии происходит посредством сужения группы симметрии G исходного многообразия (шаг III), то РГ обычно имеет меньшую размерность, чем группа G . Например, для КЗ (17) группа симметрии G определена четырьмя генераторами X_i , а РГ — тремя генераторами R_i . Очевидно, что для построения РГ-симметрии желательно иметь наиболее широкую группу G . Однако, как правило, чем сложнее исходные уравнения, тем уже оказывается допускаемая группа преобразований. Например, добавляя в уравнение Хопфа член vu_{xx} , учитывающий диссипацию, получим после замены переменной $u_x = w$ модифицированное уравнение Бюргерса. Для уравнения Бюргерса допускаемая группа симметрии оказывается бесконечной, однако эта бесконечность характеризуется одной произвольной функцией, а не четырьмя, как для уравнения Хопфа, и после процедуры сужения получаем уже конечномерную (восьмимерную) РГ [29].

Возможна также ситуация, когда не удастся построить РГ-симметрию, используя только группу точечных симметрий для исходного многообразия, т.е. при ее сужении на частном решении мы получаем группу нулевой размерности. В таком случае следует либо изменить (упростить) систему уравнений, применяемую для описания физического процесса, либо использовать для построения РГ не только симметрии Ли.

Продемонстрируем различные подходы к построению РГ-симметрии для КЗ, получаемых в результате усложнения задачи (17), на примере которой рассматривалось построение РГ-симметрий в разделе 2.

3.1. Ренормгрупповая симметрия в нелинейной теории плазмы

Рассмотрим задачу, которая послужила первым объектом для практического применения РГ-алгоритма — задачу взаимодействия р-поляризованного электромагнитного излучения с частотой ω и "умеренной" (по современным меркам) интенсивностью с неоднородной плазмой [21]. Это взаимодействие описывается системой

точечных, а так называемых высших симметрий (или симметрий Ли – Беклунда). В отличие от координат генератора точечной группы, координаты генератора группы высших симметрий зависят не только от независимых и зависимых переменных, но и от высших производных. Условие инвариантности относительно группы высших симметрий, записанное в инфинитезимальной форме, дает искомого дифференциальную связь (подробнее см. [23]).

нестационарных двумерных дифференциальных уравнений (уравнений бесстолкновительной гидродинамики электронной плазмы с самосогласованным электромагнитным полем) для шести функций — компонент магнитного B_z и электрического E_x, E_y полей, двух компонент скорости V_x, V_y электронов и их плотности n , зависящих от трех переменных: координат x, y и времени t . Наша цель — получить приближенное аналитическое решение этой системы уравнений в произвольном порядке нелинейности, не ограничиваясь рамками теории возмущений.

Система исходных уравнений допускает лишь конечную группу точечных преобразований, а именно группу трансляций по осям t и y при произвольной зависимости ионной плотности $n^i(x)$. При постоянной плотности ионов $n^i \equiv N = \text{const}$ дополнительно появляются группа трансляций по оси x и группа одновременных вращений в трех плоскостях, задаваемых координатами $\{x, y\}$ и соответствующими x - и y -компонентами скорости электронов и электрического поля. Таким образом, если рассматривать исходные уравнения как многообразие \mathcal{RM} , то допускаемая им группа оказывается достаточно узкой, не позволяющей найти желаемую РГ-симметрию.

С целью построения многообразия \mathcal{RM} , которое допускает более широкую группу точечных преобразований, учтем тот факт, что наибольший вклад в нелинейные эффекты обсуждаемого взаимодействия электромагнитной волны с неоднородной по x плазмой определяется компонентами электрического поля и скорости электронов вдоль градиента плотности. При этом благодаря естественным параметрам малости (плавная неоднородность плотности ионов $n^i(x)$ вдоль оси x и малость углов падения θ лазерных лучей на плазму) зависимость этих компонент от поперечной к градиенту плотности координаты y оказывается вблизи плазменного резонанса более плавной, чем зависимость от x . Поэтому при построении многообразия \mathcal{RM} можно выделить из полной системы шести исходных уравнений более простую систему двух одномерных нелинейных уравнений в частных производных для x -компоненты электрического поля E_x и скорости V_x электронов вблизи плазменного резонанса:

$$\begin{aligned} \omega \partial_\tau v + av \partial_x v - p &= 0, & \omega \partial_\tau p + av \partial_x p + \omega_L^2 v &= 0, \\ \tau &\equiv \omega t - \frac{\omega y}{c} \sin \theta. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь v и p — нормированные на параметр a значения V_x и E_x соответственно, параметр $a \propto q$ определяется потоком q падающего на плазму излучения и коэффициентом линейной трансформации, $\omega_L(x)$ — плазменная частота (по заданной плотности ионов), c — скорость света.

Бесконечная группа точечных преобразований в пространстве пяти переменных $\{\tau, x, a, v, p\}$, допускаемая (26), задается оператором, который определяется суммой трех операторов:

$$\begin{aligned} X &= \sum_{i=1}^3 X_i, & X_1 &= \mu_1 Y, \\ X_2 &= \mu_2 \partial_x + \frac{1}{a} Y(\mu_2) \partial_v + \frac{1}{a} Y^2(\mu_2) \partial_p, \\ X_3 &= \frac{\mu_3}{a} (a \partial_a - v \partial_v - p \partial_p), \\ Y &= \omega \partial_\tau + av \partial_x + p \partial_v - \omega_L^2 v \partial_p. \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь каждый из трех операторов содержит произвольную функцию μ_i групповых переменных, причем на μ_2 и μ_3 наложены дифференциальные связи

$$Y^3(\mu_2) + Y(\omega_L^2 \mu_2) = 0, \quad Y(\mu_3) = 0. \quad (28)$$

Для конкретизации вида функций μ_1, μ_2 и μ_3 в координатах оператора X используем процедуру сужения группы точечных преобразований (27) на приближенном по степеням параметра a решении краевой задачи. Это решение строится таким образом, что нулевое приближение для функций v и p определяется решением линеаризованной системы шести исходных уравнений с учетом соответствующих граничных условий (падение на плазму электромагнитной волны из вакуума) и выбранным профилем плотности $n^i(x)$ в области плазменного резонанса, а поправки к нему, пропорциональные a , возникают при линеаризации системы (26). Проверка условий РГ-инвариантности, сходных с (20), на этом приближенном частном решении определяет выбор функций $\mu_1 = 0, \mu_2 = -p/\omega^2, \mu_3 = 1$ и дает искомым оператор РГ-симметрии (при этом первое из уравнений (28) выполняется с точностью до замены $\omega_L^2 \rightarrow \omega^2$):

$$R = X_2 + X_3 = -\frac{p}{\omega^2} \partial_x + \partial_a. \quad (29)$$

Величины τ, v и p являются инвариантами РГ-преобразования с оператором (29), а преобразование координаты x , определяемое решением уравнения Ли для (29), дается линейной зависимостью от параметра a :

$$x = \eta - \frac{p}{\omega^2} a. \quad (30)$$

Групповой закон сложения для x с очевидностью получается из функционального уравнения вида (1) при замене $A \rightarrow x, l \rightarrow a_2, \lambda \rightarrow a_1$ и $\alpha \rightarrow \eta$. Отметим, что, в отличие от задачи теории переноса, здесь групповым параметром является не входящая в уравнение независимая переменная, а параметр a , привнесенный в уравнение из краевых условий.

Построенное с помощью (29) решение уравнений (26) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{ap}{\omega^2 \Delta} &= -\varepsilon (f_1 \sin \tau + f_2 \cos \tau), & \varepsilon &\equiv \left(\frac{q}{q_0} \right)^{1/2}, \\ \frac{av}{\omega \Delta} &= \varepsilon (f_1 \cos \tau - f_2 \sin \tau), & x &= \eta + \varepsilon (f_1 \sin \tau + f_2 \cos \tau). \end{aligned} \quad (31)$$

Здесь параметр $\varepsilon \propto a \propto \sqrt{q}$, зависящий от потока q_0 опрокидывания плазменной волны в критической точке, не превосходит единицы, а функции $f_{1,2}(\eta)$ определяются хорошо изученной линейной структурой поля, явный вид которой может быть различным, в зависимости от профиля плотности и теплового движения электронов плазмы. В холодной плазме с линейным профилем плотности

$$f_1 = (1 + \eta^2)^{-1}, \quad f_2 = \eta(1 + \eta^2)^{-1}. \quad (32)$$

Учет слабого теплового движения электронов модифицирует соотношения (32):

$$f_1 = \int_0^\infty d\xi \cos \left(\eta \xi + \frac{\xi^3}{3} \right), \quad f_2 = \int_0^\infty d\xi \sin \left(\eta \xi + \frac{\xi^3}{3} \right). \quad (33)$$

Решение (31) является точным решением уравнений (26) при $\omega_L = \omega$. В соотношениях (31)–(33) координаты x и η вследствие нормировки на ширину плазменного резонанса Δ представляют собой безразмерные величины. Уравнения для недостающих четырех нормированных величин (электрического поля E_y , магнитного поля B_z , y -компоненты V_y скорости электронов и плотности n) в переменных (η, τ) имеют вид

$$\begin{aligned} \partial_\eta E_y &= -\frac{\omega\Delta}{c} \sin\theta \partial_\tau E_x, \quad \omega\partial_\tau V_y = E_y, \\ \partial_\eta B_z &= \frac{V_x}{c} \partial_\eta E_y - \frac{V_y}{c} \partial_\eta E_x, \quad n \approx \omega^2 \frac{1}{\partial_\eta x}. \end{aligned} \quad (34)$$

Интегрирование уравнений (34) элементарно. Формулы (31), (34) представляют собой искомое решение КЗ. В пренебрежении сильно нелинейными эффектами с помощью (31), (34) могут быть получены результаты теории генерации гармоник произвольной кратности в холодной [30] и горячей [31] неоднородной плазме (при использовании соответственно формул (32) и (33) для $f_{1,2}$). Учет сильной нелинейности (влияния высших гармоник на низшие) существенно изменяет зависимость коэффициента преобразования в излучаемые из плазмы гармоники от плотности потока падающего на плазму электромагнитного излучения [21, 32] и температуры плазмы [33, 34].

Результат (31), (34) решения КЗ для исходных шести уравнений учитывает как граничное условие, так и наиболее сильную нелинейность и является точным в той мере, в какой групповая симметрия уравнений (26) отражает симметрию полной системы шести исходных уравнений при сделанных выше предположениях. Приближенный характер найденной группы с оператором (29) по отношению к породившей ее группе (27) определяется степенью неоднородности плазмы (напомним, что при получении оператора (27) в уравнениях (26) не делалось никаких предположений о характере неоднородности плотности плазмы). Такая ситуация подобная имеющей место в квантовой теории поля: точное групповое свойство решения используется для последовательного уточнения набора его аппроксимационных характеристик, при этом каждое следующее приближение уточняет предыдущее, не разрушая его. С точки зрения РГ-симметрии, для обсуждаемой здесь КЗ это означает, что оператор (29) можно уточнять путем учета малых параметров задачи, которые использовались при переходе к уравнениям (26). В этом случае говорят, что симметрия системы (26) наследуется [35] более общей системой уравнений. Пример РГ-симметрии для системы (26) при учете поправок, связанных с неоднородностью плазмы, приведен в [21].

3.2. Ренормгрупповые симметрии в задачах газовых и квазичапльгинских сред

Ситуация, в которой наличие бесконечной точечной группы преобразований гарантирует построение РГ-симметрии, как это было в примерах с КЗ для уравнения Хопфа и уравнений (26), не является универсальной. Ниже мы приведем пример такой КЗ, для которой группа симметрии для исходного многообразия (системы дифференциальных уравнений) оказывается бесконечномерной, но для построения РГ-симметрий приходится использовать не группу точечных преобра-

зований, а высшие симметрии, иначе называемые симметриями Ли–Беклунда [5].

Рассмотрим КЗ для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка для функций v и $n > 0$:

$$\begin{aligned} \partial_t v + v\partial_x v &= \alpha\varphi(n)\partial_x n, \quad \partial_t n + v\partial_x n + n\partial_x v = 0, \\ v(0, x) &= \alpha W(x), \quad n(0, x) = N(x), \end{aligned} \quad (35)$$

с постоянной α и функцией нелинейности φ , которая зависит только от n . В зависимости от знака $\alpha\varphi(n)$ уравнения относятся либо к гиперболическому ($\alpha\varphi(n) < 0$), либо к эллиптическому ($\alpha\varphi(n) > 0$) типу. В первом случае (35) соответствуют обычным газодинамическим уравнениям для одномерных плоских изэнтропических движений газа с плотностью n и скоростью v . Второй случай относится к уравнениям квазичапльгинских сред⁴.

Следствием линейности уравнений (35) в переменных годографа $\tau = nt$ и $\chi = x - vt$,

$$\partial_\tau \psi - \psi(n)\partial_n \chi = 0, \quad \partial_v \chi + \partial_n \tau = 0, \quad \psi = \frac{n}{\alpha\varphi}, \quad (36)$$

является наличие инфинитезимального оператора бесконечной подгруппы $X_\infty = \xi^1 \partial_\tau + \xi^2 \partial_\chi$ с координатами ξ^1, ξ^2 , которые заданы произвольными решениями уравнений в частных производных, совпадающими с (36) при замене $\tau \rightarrow \xi^1, \chi \rightarrow \xi^2$. Это означает, что РГ-симметрия формально может быть построена путем сужения бесконечной группы точечных преобразований, но при этом должно быть известно решение (36) при произвольных краевых данных, т.е. фактически такая процедура эквивалентна нахождению решения исходной КЗ.

Другим вариантом построения РГ-симметрий для рассматриваемой задачи может служить использование группы высших симметрий (симметрий Ли–Беклунда [37]). В отличие от групп точечных преобразований с генераторами вида (6), симметрии Ли–Беклунда характеризуются оператором, координаты которого зависят от независимых переменных x и дифференциальных переменных u с последовательными производными $u_{(1)} = \{\partial_x u^\alpha\} \equiv \{u_i^\alpha\}, \quad u_{(2)} = \{\partial_{x_i x_j} u^\alpha\} \equiv \{u_{ij}^\alpha\}, \dots$, где $\alpha = 1, \dots, m; i, j = 1, \dots, n$. Связь между этими переменными задана с помощью оператора полного дифференцирования D_i системой следующих равенств:

$$\begin{aligned} u_i^\alpha &= D_i(u^\alpha), \quad u_{ij}^\alpha = D_j(u_i^\alpha) = D_j D_i(u^\alpha), \dots, \\ D_i &= \partial_{x_i} + u_i^\alpha \partial_{u^\alpha} + u_{ij}^\alpha \partial_{u_j^\alpha} + \dots \end{aligned} \quad (37)$$

Теория групп Ли–Беклунда позволяет ограничиться рассмотрением только канонических операторов, для которых все независимые переменные являются инвариантами. Это обстоятельство оказывается важным,

⁴ Термин "квазичапльгинская среда" [36] употребляется при обсуждении таких нелинейных явлений, которые разыгрываются по математическому сценарию газа Чапльгина — газа с отрицательным показателем адиабаты. На первый взгляд такая модель выглядит как обычная газодинамическая, но отвечает отрицательному значению первой производной "давления" по "плотности". Квазичапльгинским средам свойственна универсальность математической формулировки разнообразных нелинейных эффектов, сопровождающихся развитием неустойчивости.

например, при исследовании симметрий интегро-дифференциальных уравнений и построении РГ-симметрий для задач с нелокальными уравнениями. Для обсуждаемой здесь КЗ (35) генераторы группы Ли–Беклунда удобно записать для уравнений в переменных годографа (36):

$$X = \sum_i c_i X_i \equiv \sum_i c_i (f_i \partial_\tau + g_i \partial_\chi). \quad (38)$$

Координаты f_i , g_i генераторов (38), которые являются линейными функциями от дифференциальных переменных [38], связаны системой рекуррентных соотношений

$$L_k \begin{pmatrix} f_j \\ g_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{j+1} \\ g_{j+1} \end{pmatrix}, \quad (39)$$

где элементы матричных операторов рекуррентности L_k являются линейными функциями от оператора полного дифференцирования D_n по переменной n . Число операторов L_k зависит от вида функции нелинейности $\varphi(n)$; в наиболее типичном случае $\varphi(n) = n(n+b)^l$, где b , $l = \text{const}$, это число равно трем: $k = 1, 2, 3$. Действие операторов рекуррентности на координаты $f_1 = \tau$ и $g_1 = \chi$ "очевидного" с физической точки зрения оператора растяжений в пространстве переменных годографа $\tau = nt$ и $\chi = x - vt$ дает три оператора с линейной зависимостью координат f_i , g_i ($i = 2, 3, 4$) от производных $\tau_n = \partial_n \tau$ и $\chi_n = \partial_n \chi$, т.е. они эквивалентны операторам точечной группы. Действие операторов рекуррентности L_1, \dots, L_3 на симметрии первого порядка f_i, g_i ($i = 2, 3, 4$) порождает пять операторов, координаты которых в переменных годографа даются линейными функциями от этих переменных и их производных второго порядка, — симметрии Ли–Беклунда второго порядка. Многократное повторение этой процедуры даст $2s + 1$ симметрий в заданном порядке s [38].

Бесконечный набор операторов (38) (полученный на шаге II РГ-алгоритма) для уравнений (36) (трактуемых как многообразие \mathcal{RM}) позволяет построить операторы РГ-симметрий и найти соответствующие РГ-инвариантные решения. Операция сужения группы Ли–Беклунда (шаг III РГ-алгоритма) сводится к проверке условий инвариантности $f = 0$, $g = 0$ (аналогичных (20), но обобщенных для симметрии Ли–Беклунда) на конкретном решении краевой задачи, где функции f и g являются произвольными линейными комбинациями отдельных координат f_i и g_i канонических операторов группы и выбираются таким образом, чтобы удовлетворить заданным граничным условиям при $t = 0$. Для примера укажем значения координат двух операторов РГ-симметрии Ли–Беклунда второго порядка.

Пример 1.

$$\begin{aligned} f &= 2n(1-n)\tau_m - n\tau_n - 2nv(\chi_n + n\chi_{nm}) + \frac{nv^2\tau_m}{2}, \\ g &= 2n(1-n)\chi_{nm} + (2-3n)\chi_n + \\ &\quad + v(2n\tau_m + \tau_n) + \frac{v^2}{2}(n\chi_{nm} + \chi_n). \end{aligned} \quad (40)$$

Пример 2.

$$\begin{aligned} f &= -n^2 \ln n \tau_m - \frac{n}{2} \tau_n + \frac{\tau}{2} + v \left(n^3 \chi_{nm} + \frac{3}{2} n^2 \chi_n \right), \\ g &= -n^2 \ln n \chi_{nm} + \frac{n}{2} (1 + 4 \ln n) \chi_n + \frac{\chi}{2} + v \left(n \tau_m + \frac{\tau_n}{2} \right). \end{aligned} \quad (41)$$

Оператор R с координатами (40) соответствует решению КЗ для уравнений (35) с $\alpha = 1$, $\varphi(n) = 1$ при $V(x) = 0$ и $N(x) = \cosh^{-2}(x)$, а оператор R с координатами (41) — решению КЗ для уравнений (35) с $\alpha = -1$, $\varphi(n) = 1/n$ при $V(x) = 0$ и $N(x) = \exp(-x^2)$. Для получения решений КЗ на основе РГ-симметрий (40) и (41) следует добавить условие инвариантности $f = g = 0$ к исходному \mathcal{RM} и решить полученную систему уравнений (шаг IV РГ-алгоритма).

Для РГ-симметрии (40) решение существует на ограниченном интервале, $0 \leq t \leq t_{\text{sing}}$, вплоть до возникновения особенности на оси $x = 0$ при $t = t_{\text{sing}} = 1/2$, при которой $\partial_x v(t_{\text{sing}}, 0) \rightarrow \infty$, а значение n остается конечным, $n(t_{\text{sing}}, 0) = 2$:

$$v = -2nt \tanh(x - vt), \quad n^2 t^2 = n \cosh^2(x - vt) - 1. \quad (42)$$

С физической точки зрения решение (42), полученное ранее в работе [39], описывает эволюцию плоского светового пучка в среде с кубической нелинейностью (квазичаплыгинская среда) при граничном условии $N(x) = \cosh^{-2}(x)$. При этом величины n и v задают интенсивность и производную эйконала пучка.

Для РГ-симметрии (41) решение описывает монотонное изменение (убывание) плотности n с возрастанием времени $t \geq 0$ при сохранении линейной зависимости скорости частиц от координаты:

$$\begin{aligned} v &= x\sqrt{2}q \exp\left(-\frac{q^2}{2}\right), \\ n &= \exp\left(-\frac{q^2}{2}\right) \exp[-x^2 \exp(-q^2)], \quad t = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfi} \frac{q}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (43)$$

Решение (43), обсуждавшееся в [40], описывает разлет слоя плазмы с начальным распределением плотности $N(x) = \exp(-x^2)$.

Приведенные два примера показывают, что использование РГ-симметрии Ли–Беклунда достигает той же цели, что и в случае точечной РГ-симметрии, — позволяет правильно описать структуру решения при наличии особенности или дает его асимптотическое поведение. Хотя РГ-симметрии (41), (42) найдены для уже известных решений, РГ-подход вскрывает групповую природу этих решений. Ранее для получения этих результатов использовались некие априорные предположения о структуре решения. Пример решения КЗ с помощью РГ-симметрии Ли–Беклунда для (35) при более сложных краевых данных, не представимых в элементарных функциях, когда распределение интенсивности светового пучка на границе имеет вид сглаженной ступеньки, дан в [41].

3.3. Приближенные ренормгрупповые симметрии в задачах квазичаплыгинских сред

Построение РГ-симметрии на основе высших симметрий оправдано, если уравнения, задающие РГ-инвариантное решение, могут быть проанализированы аналитически. Обычно сложность дифференциальных уравнений возрастает с увеличением их порядка. Поэтому использование в условиях инвариантности РГ-симметрии Ли–Беклунда высокого порядка часто ограничивает возможности применения подобных симметрий при произвольных краевых данных. С другой стороны, ограничение на порядок применяемой симметрии сужает круг вариан-

тов построения РГ-симметрии при произвольных краевых условиях. Например, для КЗ (35) группа симметрий исходного многообразия (36) в заданном порядке s допускает лишь $2s + 1$ симметрий, не гарантирующих в случае невысоких номеров s построение РГ-симметрии для любых $N(x)$. Для расширения группы симметрий исходного многообразия можно воспользоваться аппаратом приближенных симметрий [35].

Основная идея здесь состоит в использовании естественных параметров малости (мы отличаем их от параметра, по которому строится приближение теории возмущений, применяемое затем в РГ-преобразованиях), имеющих в том или ином виде в большинстве физических задач и входящих в уравнения в качестве коэффициентов. Например, в уравнениях (35) таким параметром является коэффициент α при функции нелинейности $\varphi(n)$. Наличие естественных малых параметров позволяет представить искомую симметрию в виде степенного ряда по этим параметрам и ограничиться конечным числом членов этого ряда. Поскольку при пренебрежении малыми параметрами задающие \mathcal{RM} уравнения оказываются проще исходных и допускают более широкую группу преобразований, то и вариантов построения РГ-симметрии для произвольных краевых данных тоже становится больше. Здесь существенной является возможность последовательного учета поправок к найденной РГ-симметрии для системы дифференциальных уравнений упрощенного многообразия: когда эта возможность реализуется, то говорят о построении симметрии, наследуемой в заданном порядке по степеням малого параметра.

Покажем возможность построения приближенной РГ-симметрии для КЗ (35) с малым $\alpha \ll 1$. Вводя функцию $w = v/\alpha$, перепишем систему уравнений (36) в виде

$$\partial_w \tau - \frac{n}{\varphi(n)} \partial_n \chi = 0, \quad \partial_w \chi + \alpha \partial_n \tau = 0. \quad (44)$$

При $\alpha \rightarrow 0$ отбрасывание второго слагаемого во втором уравнении дает более простую подсистему дифференциальных уравнений — приближенное исходное многообразие \mathcal{RM} . В отличие от симметрии уравнений (36), допускающих лишь конечную группу симметрий Ли–Беклунда заданного порядка, симметрия уравнений (44) при $\alpha = 0$ бесконечномерна, т.е. согласуется с теорией возмущений для КЗ с произвольными краевыми данными. Поэтому будем искать РГ-симметрии в виде комбинации симметрий уравнений "нулевого" приближения (т.е. уравнений (44) при $\alpha = 0$) и поправок к ним по степеням параметра α . Представим координаты f и g канонического оператора группы для (44) в виде ряда по степеням α :

$$X = f \partial_\tau + g \partial_\chi, \quad f = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i f^i, \quad g = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i g^i. \quad (45)$$

Использование техники современного группового анализа [10], обобщающей алгоритм Ли для высших симметрий, дает для функций f^i и g^i систему рекуррентных соотношений:

$$\begin{aligned} f^i &= F^i + \int dw \left\{ (1 - \delta_{i,0}) Z f^{i-1} + \frac{n}{\varphi} Y g^i \right\}, \\ g^i &= G^i + (1 - \delta_{i,0}) \int dw \{ Z g^{i-1} - Y f^{i-1} \}. \end{aligned} \quad (46)$$

Здесь

$$\begin{aligned} Y &= \partial_n + \sum_{s=0}^{\infty} (\tau_{s+1} \partial_{\tau_s} + \chi_{s+1} \partial_{\chi_s}), \quad Z = \sum_{s=0}^{\infty} \tau_{s+1} \partial_{\chi_s}, \\ w &= \frac{v}{\alpha}, \quad \tau_s = \frac{\partial^s \tau}{\partial n^s}, \quad \chi_s = \frac{\partial^s \chi}{\partial n^s}, \\ \tilde{\tau}_s &= \tau_s - w \sum_{p=0}^s \binom{s}{p} \frac{\partial^p (n/\varphi)}{\partial n^p} \chi_{s-p+1}, \end{aligned} \quad (47)$$

$F^i(n, \chi_s, \tilde{\tau}_s)$ и $G^i(n, \chi_s, \tilde{\tau}_s)$ — произвольные функции; подынтегральные выражения записаны в переменных $\tilde{\tau}_s, \chi_s, n, w$. Непосредственно из (46) следует, что при малом значении параметра α симметрия уравнений "нулевого" приближения наследуется системой уравнений (44) в любом конечном порядке по параметру α , т.е. поправки не разрушают симметрию f^0, g^0 "нулевого" приближения. При этом вид наследуемой симметрии (т.е. вид функций f и g) целиком определяется соотношениями (46): она может быть как точечной симметрией, так и симметрией Ли–Беклунда.

Произвольная зависимость функций F^i, G^i от своих аргументов позволяет строить РГ-симметрии для КЗ с любыми краевыми данными: процедура сужения приближенной группы (46) на решении КЗ (шаг III РГ-алгоритма) осуществляется, как и для точной РГ-симметрии Ли–Беклунда в разделе 3.2, посредством проверки условия $f = g = 0$ на конкретном решении КЗ. При этом функции F^i, G^i выбираются таким образом, чтобы удовлетворить заданным краевым условиям при $t = 0$. В частности, для КЗ (35) с $W(x) = 0$ можно полагать F^i, G^i ($i \geq 1$) равными нулю и удовлетворять краевым данным за счет F^0 и G^0 .

Приведем два примера РГ-симметрий, построенных с использованием соотношений (46). Первый пример связан с КЗ для уравнений (35) с $\varphi(n) = 1$ при $V(x) = 0$ и $N(x) = \cosh^{-2}(x)$. Для этих краевых условий функции f^0 и g^0 можно взять в виде

$$\begin{aligned} f^0 &= 2n(1-n)\tau_2 - n\tau_1 - 2nw(\chi_1 + n\chi_2), \\ g^0 &= 2n(1-n)\chi_2 + (2-3n)\chi_1. \end{aligned} \quad (48)$$

Подставляя f^0 и g^0 в (46), найдем следующие члены ряда (45), функции f^1 и g^1 :

$$f^1 = \frac{nw^2\tau_2}{2}, \quad g^1 = w(2n\tau_2 + \tau_1) + \frac{w^2}{2}(n\chi_2 + \chi_1), \quad (49)$$

а подстановка f^1 и g^1 в (46) дает для всех f^i и g^i с $i \geq 2$ нулевые значения. Это означает, что РГ-симметрия в данном случае представляется в виде биномов $f = f^0 + \alpha f^1, g = g^0 + \alpha g^1$, т.е. бесконечные ряды (45) обрываются, превращаясь в конечные суммы, а запись РГ-симметрии в виде биномов является точной, справедливой при произвольном значении параметра α . В частности, полагая $\alpha = 1$, приходим к соотношениям (40).

При произвольных краевых данных бесконечные ряды в (45) не обрываются автоматически и ограничение конечным числом членов ряда означает, что построенная с использованием (45), (46) РГ-симметрия является приближенной в смысле [42]. Второй пример соответствует приближенной РГ-симметрии для КЗ для уравне-

ний (35) с $\varphi(n) = 1$ при $V(x) = 0$ и $N(x) = \exp(-x^2)$:

$$f = 1 + 2n\chi\chi_n + \alpha \left(-2\tau\tau_n + \frac{\tau^2}{n} \right), \quad g = -2\alpha(\tau\chi_n + \chi\tau_n). \quad (50)$$

Здесь опущены все вклады в f и g , которые пропорциональны высоким степеням α^i с $i \geq 2$.

Проведенные выше построения РГ-симметрий легко обобщаются для случая, в котором наряду с "естественными" переменными задачи в групповых преобразованиях участвует также параметр α . При этом, как правило, происходит расширение набора возможных РГ-симметрий. Укажем, например, на приближенную РГ-симметрию для той же КЗ, которая использовалась во втором примере, но в отличие от (50) содержащую производные по параметру α :

$$\begin{aligned} f &= 2n(\tau\chi_n + \tau_n\chi) + 2\alpha\chi\tau_\alpha, \\ g &= 1 + 2n\chi\chi_n + 2\alpha(\chi\chi_\alpha - \tau\tau_n). \end{aligned} \quad (51)$$

В отличие от точных РГ-симметрий, которые позволяют получить точное решение КЗ вне зависимости от выбора конкретного РГ-генератора, приближенные симметрии дают решение КЗ, которое существенно зависит от вида оператора РГ-симметрии, как это следует, например, из применения генераторов (50) и (51) (см. [41]). Использование нескольких приближенных аналитических решений или сравнение решения на основе точной РГ-симметрии (рассматриваемого в качестве теста) с решением на основе приближенной РГ-симметрии позволяет оценить точность соответствующего приближенного РГ-инвариантного решения [43].

Для нахождения приближенных РГ-симметрий в физической задаче может использоваться не один, а несколько малых параметров. Такая ситуация реализуется, например, при построении РГ-симметрии для КЗ для системы уравнений светового пучка в нелинейной среде, которые могут рассматриваться как естественное обобщение уравнений (35):

$$\begin{aligned} v_t + vv_x - \alpha\varphi(n)n_x - \beta\partial_x \left[\frac{x^{-v}}{\sqrt{n}} \partial_x (x^v \partial_x \sqrt{n}) \right] &= 0, \\ n_t + nv_x + vn_x + v\frac{nv}{x} &= 0, \quad v(0, x) = V(x), \\ n(0, x) &= N(x). \end{aligned} \quad (52)$$

Параметры α и β определяют вклад процессов нелинейной рефракции и дифракции; $v = 0$ для плоского (двумерного) волнового пучка и $v = 1$ для трехмерного (осесимметричного) волнового пучка.

Построение РГ-симметрии для КЗ (52) осуществляется по схеме, аналогичной использованной выше: координаты f и g канонического оператора для многообразия \mathcal{RM} , задаваемого уравнениями (52), представляются в виде двойных рядов по степеням параметров нелинейности α и дифракции β :

$$X = f\partial_v + g\partial_n, \quad f = \sum_{i,j=0}^{\infty} \alpha^i \beta^j f^{(i,j)}, \quad g = \sum_{i,j=0}^{\infty} \alpha^i \beta^j g^{(i,j)}, \quad (53)$$

а для вычисления коэффициентов $f^{(i,j)}$ и $g^{(i,j)}$ применяется стандартная техника группового анализа. Ограничи-

ваясь рассмотрением конечного числа членов рядов (53), приходим в общем случае к приближенной симметрии, из которой после процедуры сужения и возникает искомая РГ-симметрия. В качестве примера [44] укажем явный вид координат f, g оператора РГ-симметрии для КЗ (52) для коллимированного цилиндрического ($v = 1$) пучка в среде с кубической нелинейностью ($\varphi = 1$):

$$\begin{aligned} f &= D_x \left[S - \left(\alpha n + \frac{\beta}{x\sqrt{n}} D_x (x D_x \sqrt{n}) \right) \right], \\ g &= \frac{1}{x} D_x \{ (xn)[v - tS_\chi] \}, \end{aligned} \quad (54)$$

где функция S зависит от переменной $\chi = x - vt$:

$$S(\chi) = \alpha N(\chi) + \frac{\beta}{\chi\sqrt{N(\chi)}} \partial_\chi (\chi \partial_\chi \sqrt{N(\chi)}). \quad (55)$$

Каноническому РГ-оператору с координатами (54) эквивалентен следующий оператор точечной РГ-симметрии:

$$\begin{aligned} R &= (1 + t^2 S_{\chi\chi}) \partial_t + S_\chi \partial_v + (tS_\chi + vt^2 S_{\chi\chi}) \partial_x - \\ &- nt \left[\left(1 + \frac{vt}{x} \right) S_{\chi\chi} + \frac{1}{x} S_\chi \right] \partial_n, \end{aligned} \quad (56)$$

с помощью которого легко находятся конечные преобразования группы (шаг IV РГ-алгоритма), связывающие значения n (интенсивность пучка) и v (производная эйконала) при $t > 0$ с аналогичными величинами на границе $t = 0$ нелинейной среды, т.е. строится искомое решение КЗ [44].

При получении (55) и (56) рассматривались вклады в (53) вида $f^0 \equiv f^{(0,0)}$ и $g^0 \equiv g^{(0,0)}$, т.е. не зависящие от α и β , и вклады, линейные по этим параметрам, $f^1 \equiv \alpha f^{(1,0)} + \beta f^{(0,1)}$, $g^1 \equiv \alpha g^{(1,0)} + \beta g^{(0,1)}$. Отбрасывание пропорциональных $O(\alpha^2, \beta^2, \alpha\beta)$ слагаемых означает, что в общем случае симметрия (56) является приближенной по указанным параметрам. Конечно, как и в случае КЗ для уравнений квазипланинских сред, существуют такие распределения $N(x)$, при которых ряды (53) обрываются, превращаясь в конечные суммы. Такая ситуация отвечает не приближенной, а точной РГ-симметрии (54) и точному решению КЗ, справедливому при произвольных значениях параметров α и β . В частности, симметрия (53) является точной, когда $S(x)$ представляет собой бином: $S(x) = s_0 + s_2 x^2/2$. Такой вид $S(x)$ отвечает вполне определенной зависимости от координаты x интенсивности пучка N на границе среды. Например, при $s_2 = 0$ и $s_0 > 0$ из (56) возникает решение КЗ, описывающее самоканализованный "таунсов" пучок [45]; другие точные локализованные, убывающие при $x \rightarrow \infty$ решения КЗ при $s_2 \neq 0$ обсуждались в [46].

В общем случае функция $S(x)$ не является биномом и использование РГ-симметрии (56) приводит к приближенному аналитическому решению КЗ, детально исследованному в [44, 46] для гауссова пучка с $N = \exp(-x^2)$. Найденное решение КЗ позволяет проследить эволюцию гауссова пучка при удалении от границы, вплоть до образования особенности в решении, которая имеет двумерный характер: как интенсивность пучка n , так и производные v_x и n_x обращаются в бесконечность в точке $t_{\text{sing}}^{\text{Gauss}} = 1/\sqrt{2(\alpha - \beta)}$ при $\alpha > \beta$. Подробное обсуждение найденного аналитического решения и его сравнение с результатами других подходов (безабберрационное

приближение [39] и метод моментов [47, 48]) проведено в [46].

4. Ренормгрупповые симметрии в нелокальных задачах математической физики

Реализация РГ-алгоритма в задачах математической физики с нелокальными (интегральными или интегродифференциальными) соотношениями зависит от того, в какой форме проявляется нелокальность. С одной стороны, нелокальные соотношения могут составлять основу системы исходных уравнений, как это имеет место, например, в кинетической теории плазмы, согласно которой в уравнениях Власова–Максвелла с самосогласованным полем нелокальной является связь плотности тока и заряда в среде с функцией распределения частиц плазмы. Применение РГ-алгоритма к таким нелокальным задачам математической физики проводится по общей схеме, изложенной в разделе 3, различие проявляется в способе вычисления симметрии для нелокальных объектов (см. [43] и цитированную там литературу). Отметим, что в случае задач, описываемых сложными уравнениями, такими, например, как в теории переноса (интегродифференциальное уравнение Больцмана), достаточно простой симметрией обладают лишь некоторые составляющие (компоненты) решения или его интегральные характеристики. Так, в простейшей плоской односкоростной задаче переноса свойством РГ-инвариантности обладает асимптотика "плотности частиц, движущихся вглубь среды" $n_+(x)$, $x \rightarrow \infty$, входящей в уравнение Больцмана⁵.

С другой стороны, физический интерес часто представляет не само решение во всем диапазоне изменения переменных и параметров, а некая его интегральная характеристика — функционал от решения. Эта характеристика может появляться, например, в результате усреднения (интегрирования) по одной из независимых переменных или перехода к новому интегральному представлению, например представлению Фурье. В этом случае РГ-алгоритм может быть применен не для уточнения частного решения с последующим вычислением его интегральной характеристики, а непосредственно для улучшения значения функционала от приближенного решения.

Приведем примеры реализации РГ-алгоритма для задач математической физики с нелокальными соотношениями, иллюстрирующими оба варианта.

4.1. Ренормгрупповые симметрии для функционалов от решений

Пусть сформулирована КЗ для локальных уравнений и нас интересует интегральная характеристика решения, имеющая вид линейного функционала от решения:

$$J(u) = \int \mathcal{F}(u(z)) dz. \quad (57)$$

Будем считать, что для частного решения u этой краевой задачи с помощью РГ-алгоритма найдена РГ-симметрия с генератором R . Нас будет интересовать группа РГ-

преобразований не самого решения, а его интегральной характеристики (57). Для того чтобы найти генератор этой группы, продолжим действие оператора РГ-симметрии R на нелокальную переменную (57), для чего представим этот оператор в каноническом виде, т.е. сделаем замену $R \rightarrow Y = \kappa \partial_u$, и продолжим его на нелокальную переменную J :

$$Y + \kappa^J \partial_J \equiv \kappa \partial_u + \kappa^J \partial_J. \quad (58)$$

Координата κ^J связана с κ интегральным соотношением [49] (для краткости здесь указан лишь один аргумент координаты генератора — тот, по которому ведется интегрирование),

$$\begin{aligned} \kappa^J &= \int \frac{\delta J(u)}{\delta u(z)} \kappa(z) dz \equiv \\ &\equiv \int \frac{\delta \mathcal{F}(u(z'))}{\delta u(z)} \kappa(z) dz dz' = \int \mathcal{F}_u \kappa(z) dz. \end{aligned} \quad (59)$$

Рассматривая оператор (59) в суженном пространстве лишь тех переменных, от которых зависит функционал, получаем искомый оператор РГ-симметрии для интегральной характеристики (57).

4.1.1. РГ-симметрия функционалов в уравнении Хопфа.

Демонстрацию действия формул (58), (59) для функционалов от решений КЗ начнем с иллюстративного примера КЗ для уравнения Хопфа. Алгебра РГ-симметрий этой задачи представлена тремя операторами (23). Предположим, что интерес представляет не решение КЗ (25) во всем диапазоне изменения переменных и параметров, а некая его характеристика в определенной точке, которая может быть задана линейным функционалом вида (57), например значение первой пространственной производной при $x = 0$,

$$\partial_x u(t, x)|_{x=0} \equiv u_x^0 = - \int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta'(x) u(t, x). \quad (60)$$

Применение теории возмущений (21) в правой части (60) дает поведение u_x^0 при малых $t \ll 1$:

$$\begin{aligned} (u_x^0)_{\text{pt}} &= U_x^0 - \varepsilon t [(U_x^0)^2 + U(0) U_{xx}^0] + O(t^2), \\ U_x^0 &\equiv \partial_x U|_{x=0}, \quad U_{xx}^0 \equiv \partial_{xx} U|_{x=0}. \end{aligned} \quad (61)$$

Исправление асимптотического поведения функционала от решения, нарушаемого теорией возмущений (61), может быть достигнуто с помощью использования РГ-симметрии для (60). Как и при получении решения (25), воспользуемся последним из генераторов (23) в наиболее простом представлении с $\varepsilon \psi^4 = 1$ и запишем его в пространстве переменных $\{t, \varepsilon, u_x^0\}$. Например, при $U = x$ этот оператор имеет вид

$$R = \partial_\varepsilon - t(u_x^0)^2 \partial_{u_x^0}. \quad (62)$$

Информация о поведении функции $u_x^0 = 1/(1 + \varepsilon t)$ во всем интервале значений переменной t , в том числе и асимптотическое поведение при $t \rightarrow \infty$, может быть получена с помощью либо конечных преобразований группы для (62), аналогичных (24), либо очевидного инварианта РГ-генератора (62), $J^0 = \varepsilon t - 1/u_x^0$, с начальным условием $u_x^0(t=0) = 1$. Подчеркнем, что этот

⁵ И представимой в виде интеграла $\int_0^1 n(x, \vartheta) d \cos \vartheta$ от решения односкоростного кинетического уравнения $n(x, \vartheta)$.

результат получен без построения решения (25) в явном виде, а только с помощью РГ-симметрии. На первый взгляд проведенное построение выглядит довольно громоздким, но в более сложных ситуациях явный вид решения обычно неизвестен, тогда как РГ-симметрию удается построить (см., например, [50]).

4.1.2. РГ-симметрия функционалов в квазичаплыгинских средах. Пример более сложной ситуации дает поведение функционала от решения КЗ для уравнений квазичаплыгинских сред (35), а именно значения $n(x)$ и $v(x)$ на оси $x = 0$, вплоть до точки, в которой образуется сингулярность. Покажем, что этот эффект может быть исследован посредством применения РГ-алгоритма к двум функционалам от решений КЗ (35), а именно к плотности $n^0(t) \equiv n(t, 0)$ и производной от скорости $W^0(t) \equiv v_x(t, 0)$, вычисленных на оси пучка и связанных с этим решением формальными соотношениями:

$$n^0(t) = \int dx \delta(x) n(t, x), \quad W^0(t) = \int dx \delta(x) v_x(t, x). \quad (63)$$

Граничные условия для функционалов (63) записываются в виде

$$n^0(0) = 1, \quad W^0(0) = 0. \quad (64)$$

Несмотря на то, что условия (64) не содержат сведений о зависимости плотности n от координаты x , такая информация заключается в операторе РГ-симметрии, явный вид которого определяется распределением плотности $N(x)$ при $t = 0$.

Рассмотрим пример плоской геометрии задачи с "солитонным" профилем распределения плотности на границе, $N(x) = \cosh^{-2}(x)$ в случае, при котором оператор РГ-симметрии дается соотношениями (38), (40). Продолжение этого оператора на нелокальные переменные (63) дает в пространстве $\{t, n^0\}$ более простой оператор [26]:

$$R = \kappa^{n^0} \partial_{n^0}, \quad \kappa^{n^0} = 4 - 5n^0 - tn_t^0 + 2(n^0 - 1)n^0 n_{tt}^0 (n_t^0)^{-2}, \\ n_t^0 \equiv \partial_t n^0, \quad n_{tt}^0 \equiv \partial_{tt} n^0. \quad (65)$$

Условие РГ-инвариантности $\kappa^{n^0} = 0$ для оператора (65) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка для функции $n^0(t)$, которое следует решать с начальными условиями (64) и дополнительным условием, налагаемым на первую производную, $(n_t^0 / \sqrt{n^0 - 1})|_{t=0} = 2$, следующим из исходных уравнений (35) при $x = 0$. Это решение $t = \sqrt{n^0 - 1} / n^0$ воспроизводит результат (42), полученный здесь, однако более простым способом, без нахождения решения (42) в явном виде.

Отметим универсальность процедуры продолжения РГ-генераторов, представленных либо в виде операторов точечной группы, либо операторов группы Ли – Беклунда, что позволяет с единых позиций описать поведение характеристик решений при использовании сокращенного описания на языке функционалов от решений для КЗ как (15), так и (35).

4.2. Ренормгрупповая симметрия в задаче о разлете плазменного сгустка

Рассмотрим теперь вариант построения РГ-симметрии для задачи, в которой нелокальные соотношения входят в исходное многообразие. Остановимся на задаче о

разлете плазменного сгустка в квазинейтральном приближении [51]. В этом приближении динамика частиц плазмы в плоской геометрии определяется решениями кинетических уравнений для функций распределений $f^{\alpha}(t, x, v)$ частиц различных сортов (электронов и ионов):

$$\partial_t f^{\alpha} + v \partial_x f^{\alpha} + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} E(t, x) \partial_v f^{\alpha} = 0, \quad (66)$$

с наложенными на них дополнительными нелокальными связями, возникающими из условий равенства нулю плотности тока и заряда (условия квазинейтральности):

$$\int dv \sum_{\alpha} e_{\alpha} f^{\alpha} = 0, \quad \int dv v \sum_{\alpha} e_{\alpha} f^{\alpha} = 0. \quad (67)$$

При этом электрическое поле E выражается через моменты функций распределения:

$$E(t, x) = \left(\int dv v^2 \partial_x \sum_{\alpha} e_{\alpha} f^{\alpha} \right) \left(\int dv \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} f^{\alpha} \right)^{-1}. \quad (68)$$

Начальные условия для системы (66) и (67) отвечают заданным в момент времени $t = 0$ функциям распределения электронов и ионов,

$$f^{\alpha}|_{t=0} = f_0^{\alpha}(x, v). \quad (69)$$

Для построения РГ-симметрии будем рассматривать совокупность локальных (66) и нелокальных (67) уравнений в качестве \mathcal{RM} (шаг I РГ-алгоритма), в котором электрическое поле $E(t, x)$ фигурирует как некоторая произвольная, подлежащая определению функция. Вычисление допускаемой этим многообразием группы точечных преобразований Ли (шаг II РГ-алгоритма) определяет конечную алгебру, задаваемую операторами переноса по времени и координате, оператором галилеевских преобразований, тремя операторами растяжений, оператором квазинейтральности и оператором проективной группы. Процедура сужения группы (шаг III РГ-алгоритма) на частном решении задачи (66), (67) и (69), обладающем пространственно-симметричной начальной функцией распределения с нулевой средней скоростью, выделяет линейную комбинацию оператора сдвига по времени и оператора проективной группы. Эта комбинация оставляет инвариантным приближенное решение начальной задачи $f^{\alpha} = f_0^{\alpha}(x, v) + O(t)$ по теории возмущений при $t \rightarrow 0$, т.е. является оператором РГ-симметрии:

$$R = (1 + \Omega^2 t^2) \partial_t + \Omega^2 t x \partial_x + \Omega^2 (x - vt) \partial_v. \quad (70)$$

Постоянную Ω можно трактовать как отношение характерной скорости звука c_s к начальному масштабу неоднородности электронной плотности L_0 .

Инвариантами РГ-оператора (70) являются функции распределения частиц f^{α} , а также комбинации $x/\sqrt{1 + \Omega^2 t^2}$ и $v^2 + \Omega^2 (x - vt)^2$. Поэтому построение решения КЗ (шаг IV РГ-алгоритма) сводится к заданию функций распределения в любой момент времени $t \neq 0$ с помощью этих инвариантов через начальные значения (69),

$$f^{\alpha} = f_0^{\alpha}(I^{(\alpha)}), \quad I^{(\alpha)} = \frac{1}{2} [v^2 + \Omega^2 (x - vt)^2] + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \Phi_0(x'), \quad (71)$$

где зависимость Φ_0 от переменной $x' = x/\sqrt{1 + \Omega^2 t^2}$ определяется условиями квазинейтральности (67). Конкретный пример, иллюстрирующий эти формулы для плазменного слоя, состоящего из группы горячих и холодных электронов и ионов двух сортов, приведен в [51].

Применение оператора РГ-симметрии не ограничивается только построением решений начальной задачи для уравнений (66), (67) и нахождением соответствующих функций распределения частиц. Для практических приложений часто нужна более грубая характеристика динамики плазмы, например, плотность частиц (ионов) данного сорта $n^q(t, x)$, которая находится интегрированием функции распределения:

$$n^q(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} dv f^q(t, x, v). \quad (72)$$

Прямое интегрирование функции распределения по скорости в аналитическом виде не всегда удается провести ввиду ее сложной зависимости от инварианта $I^{(2)}$, и тогда можно воспользоваться продолжением оператора РГ-симметрии на функционал от решения, поскольку плотность $n^q(t, x)$ является линейным функционалом от f^q . Процедура продолжения оператора (70) на функционал (72) дает в суженном пространстве переменных $\{t, x, n^q\}$ следующий РГ-оператор:

$$R = (1 + \Omega^2 t^2) \partial_t + \Omega^2 t x \partial_x - \Omega^2 t n^q \partial_{n^q}. \quad (73)$$

Решение уравнений Ли для оператора (73) с учетом начальных условий (69) дает связь инвариантов этого оператора — один из них, $J_3 = x/\sqrt{1 + \Omega^2 t^2}$, совпадает с уже приведенным выше инвариантом для оператора (70), а другой инвариант имеет вид $J_4^q = n^q \sqrt{1 + \Omega^2 t^2}$ — в произвольный момент времени $t \neq 0$ с их значениями в начальный момент времени $t = 0$: $J_3|_{t=0} = x'$, $J_4^q|_{t=0} = \mathcal{N}_q(x')$. Эта связь сразу приводит к формулам, описывающим пространственно-временное распределение плотности ионов данного сорта через начальное распределение плотности:

$$n^q = \frac{1}{\sqrt{1 + \Omega^2 t^2}} \mathcal{N}_q\left(\frac{x}{\sqrt{1 + \Omega^2 t^2}}\right),$$

$$\mathcal{N}_q(x') = \int_{-\infty}^{\infty} dv f_0^q(I^{(q)}). \quad (74)$$

Отметим, что функция \mathcal{N}_q также характеризует спектральное распределение ионов по энергиям на больших временах $\Omega^2 t^2 > 1$ [51]. Таким образом, применение РГ-алгоритма позволяет не только построить решение задачи (66), (67) и (69) при различных начальных функциях распределения частиц [51], но и найти закон изменения их плотности и энергетический спектр без вычисления в явном виде самих функций распределения частиц. Аналогичные результаты получены не только в рамках модели плоского одномерного разлета, но и, например, для сферически-симметричного разлета плазменного сгустка [52].

5. Заключение

Остановимся на нескольких важных моментах, связанных с развитием и применением РГ-алгоритма к КЗ в математической физике.

Во-первых, отметим его универсальность в том смысле, что процедура построения и использования РГ-симметрий реализуется в виде предложенной и описанной в разделе 3 схемы. Конечно, в зависимости от вида анализируемой задачи могут меняться способы реализации того или иного шага алгоритма, но общая концепция в виде четырех последовательных шагов остается неизменной. Метод позволяет не только регулярным образом воспроизводить уже известные ранее решения, но и получать новые.

Во-вторых, приведенные здесь примеры не исчерпывают все возможные способы реализации РГ-алгоритма. Особенно большой простор связан с первым шагом алгоритма, т.е. построением исходного многообразия. Мы ограничились описанием лишь наиболее типичных подходов (расширение списка независимых переменных, использование высших симметрий, применение техники приближенных симметрий). За пределами настоящей заметки осталось, в частности, детальное описание способа конструирования исходного многообразия, использующего дополнительные дифференциальные связи, а также способа получения этих связей на основе высших симметрий [23]. Частным случаем дифференциальной связи, задающей краевое условие, является уравнение погружения, что представляет особый интерес в приложениях к математическим моделям на основе обыкновенных дифференциальных уравнений, для которых задача вычисления симметрии является нетривиальной [22–24]. Также детально не обсуждалось использование многопараметрических ренормгрупп [22], построение приближенной РГ-симметрии, при котором малый параметр вовлекается в преобразование [41], интегрирование по параметру РГ-преобразования [22]. Подробное обсуждение этих вопросов и приложений РГ-симметрий можно найти в обзорах [23–26, 50, 53] и цитированной там литературе.

В-третьих, следует обратить внимание на возможность привлечения для построения РГ-симметрий методов компьютерной алгебры. В рамках общей схемы РГ-алгоритма одной из основных вычислительных процедур является процедура отыскания наиболее широкой группы симметрий многообразия \mathcal{RM} . При этом возникает необходимость построения и решения системы определяющих уравнений — линейных (по координатам инфинитезимальных операторов) дифференциальных уравнений (обыкновенных или в частных производных). Эта процедура обычно связана с рутинными вычислениями, объем которых становится достаточно большим для симметрий высоких порядков и которые практически не могут быть выполнены "вручную" за ограниченное время, что может служить психологически сдерживающим фактором в использовании РГ-алгоритма. Однако применение на втором шаге алгоритма методов компьютерной алгебры часто существенно ускоряет процесс построения РГ-симметрий, что было продемонстрировано на примере вычисления РГ-симметрий для уравнений квазичаплыгинских сред [38]. Наибольшего выигрыша можно достичь при совместном использовании аналитических и символьных вычислений, когда привлечение априорной, найденной из аналитического исследования, информации о виде РГ-симметрии, позволяет существенно сократить время символьных расчетов. Методы символьных вычислений могут применяться как для точных, так и для приближенных РГ-симмет-

рий, что значительно повышает возможности РГ-алгоритма в целом. В то же время аналитические подходы, используемые при построении РГ-симметрий, могут оказаться полезными при разработке новых алгоритмов для систем компьютерной алгебры.

Наконец, укажем возможные способы расширения сферы приложения РГ-алгоритма. Это расширение может происходить как за счет охвата новых объектов, для которых применение РГ-алгоритма пока еще не является стандартной процедурой, так и за счет модификации самого алгоритма. Примером нового объекта могут служить бесконечные системы зацепляющихся интегро-дифференциальных уравнений, подобные системам для корреляционных функций статистической физики или системам уравнений для обобщенных функций Грина — пропагаторов и вершинных функций — в квантовой теории поля.

Что касается модификации алгоритма, то она естественным образом связана с общим прогрессом в современном групповом анализе. Именно таким образом оказалось возможным распространить РГ-алгоритм, изначально разработанный для физических задач, описываемых дифференциальными уравнениями, на нелокальные задачи. Определенные надежды в этом направлении связаны с прогрессом в групповом анализе в приложении к обобщенным функциям [54], с дальнейшим развитием теории приближенных симметрий [55], установлением новых связей между понятием симметрии и законами сохранения [56], развитием теории частично-инвариантных решений [57, 58], приложением группового анализа к разностным [59] и функциональным [60] уравнениям.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантами МНТЦ 2289, РФФИ (06-02-16103, 08-01-00291) и НШ-1027.2008.2.

Список литературы

1. Lie S *Math. Ann.* **16** 441 (1880) [Translated into English: *Lie Groups: History, Frontiers, and Applications* Vol. 1 *Sophus Lie's 1880 Transformation Group Paper* (Ed. R Hermann) (Brookline, Mass.: Math. Sci. Press, 1975)]
2. Lie S *Gesammelte Abhandlungen* (Leipzig–Oslo: B.G. Teubner; H. Aschehoug, 1922–1937)
3. Овсянников Л В *Групповые свойства дифференциальных уравнений* (Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962)
4. Овсянников Л В *Групповой анализ дифференциальных уравнений* (М.: Наука, 1978) [Translated into English: *Ovsyannikov L V Group Analysis of Differential Equations* (New York: Academic Press, 1982)]
5. Ибрагимов Н Х *Группы преобразований в математической физике* (М.: Наука, 1983) [Translated into English: *Ibragimov N Kh Transformation Groups Applied to Mathematical Physics* (Dordrecht: D. Reidel, 1985)]
6. Olver P J *Applications of Lie Groups to Differential Equations* (New York: Springer-Verlag, 1986) [Олвер П *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям* (М.: Мир, 1989)]
7. Бочаров А В и др. *Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики* (Под ред. А М Виноградова, И С Красильщика) (М.: Факториал, 1997) [Translated into English: *Bocharov A V et al. Symmetries and Conservation Laws for Differential Equations of Mathematical Physics* (Eds A M Vinogradov, I S Krasil'shchik) (Providence, RI: Am. Math. Soc., 1999)]
8. Ibragimov N H *Elementary Lie Group Analysis and Ordinary Differential Equations* (Chichester: Wiley, 1999)
9. Фущич В И, Никитин А Г *Симметрия уравнений квантовой механики* (М.: Наука, 1990) [Translated into English: *Fushchich V I, Nikitin A G Symmetries of Equations of Quantum Mechanics* (New York: Allerton Press, 1994)]
10. Ibragimov N H (Ed.) *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations* Vols 1–3 (1996) (Boca Raton, Fl.: CRC Press, 1994–1996)
11. Боголюбов Н Н, Ширков Д В *Докл. АН СССР* **103** 391 (1955)
12. Мнацаканян М А *Докл. АН СССР* **262** 856 (1982) [*Sov. Phys. Dokl.* **27** 123(1982)]
13. Bogoliubov N N, Shirkov D V *Nuovo Cimento* **3** 845 (1956)
14. Боголюбов Н Н, Ширков Д В *ЖЭТФ* **30** (1) 77 (1956) [Bogoliubov N N, Shirkov D V *Sov. Phys. JETP* **3** 57 (1956)]
15. Bogoliubov N, Shirkov D *Introduction to the Theory of Quantized Fields* (New York: Wiley-Interscience, 1959, 1980)
16. Ширков Д В *Успехи мат. наук* **49** (5) 147 (1994) [Shirkov D V *Russian Math. Surveys* **49** (5) 155 (1994)]; Препринт P2-94-310 (Дубна: ОИЯИ, 1994); см. также hep-th/9602024
17. Соловцов И Л, Ширков Д В *ТМФ* **120** 482 (1999) [Solovtsov I L, Shirkov D V *Theor. Math. Phys.* **120** 1220 (1999)]
18. Логунов А А *ЖЭТФ* **30** 793 (1956) [Logunov A A *Sov. Phys. JETP* **3** 766 (1956)]
19. Gross D J, Wilczek F *Phys. Rev. Lett.* **30** 1343 (1973); Politzer H D *Phys. Rev. Lett.* **30** 1346 (1973)
20. Chen L-Y, Goldenfeld N, Oono Y *Phys. Rev. E* **54** 376 (1996)
21. Ковалев В Ф, Пустовалов В В *ТМФ* **81** 69 (1989) [Kovalev V F, Pustovalov V V *Theor. Math. Phys.* **81** 1060 (1989)]
22. Shirkov D V, in *Renormalization group '91: Proc. of Second Intern. Conf., 3–6 September 1991, Dubna, USSR* (Eds D V Shirkov, V B Priezzhev) (Singapore: World Scientific, 1992) p. 1; Kovalev V F, Krivenko S V, Pustovalov V V, in *Renormalization group '91: Proc. of Second Intern. Conf., 3–6 September 1991, Dubna, USSR* (Eds D V Shirkov, V B Priezzhev) (Singapore: World Scientific, 1992) p. 300
23. Kovalev V F, Pustovalov V V, Shirkov D V *J. Math. Phys.* **39** 1170 (1998); hep-th/9706056
24. Shirkov D V, Kovalev V F *Phys. Rep.* **352** 219 (2001); Препринт E2-2000-9 (Дубна: ОИЯИ, 2000); hep-th/0001210
25. Kovalev V F, Shirkov D V, in *Proc. of the 5th Intern. Conf. on Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics, Kiiv, Ukraine, June 23–29, 2003* (Proc. of the Inst. of Math. of the Natl. Acad. Sci. of Ukraine. Math. and its Appl., Vol. 50, Pt. 2, Ed. A G Nikitin) (Kiiv: Inst. of Math. of NAS Ukraine, 2004) p. 850
26. Kovalev V F, Shirkov D V *J. Phys. A: Math. Gen.* **39** 8061 (2006)
27. Ширков Д В *Докл. АН СССР* **263** 64 (1982) [Shirkov D V *Sov. Phys. Dokl.* **27** 197 (1982)]
28. Руденко О В, Солуян С И *Теоретические основы нелинейной акустики* (М.: Наука, 1975) [Translated into English: *Rudenko O V, Soluyan S I Theoretical Foundations of Nonlinear Acoustics* (New York: Consultants Bureau, 1977)]
29. Kovalev V F, Pustovalov V V *Lie Groups Appl.* **1** (2) 104 (1994)
30. Владимирский А Б, Силян В П *Физика плазмы* **6** 354 (1980) [Vladimirskii A B, Silin V P [*Sov. J. Plasma Phys.* **6** 196 (1980)]
31. Троценко Н П "Сильно нелинейная теория плазмы без столкновений на основе нелинейных диэлектрических проницаемостей", Дисс. ... канд. физ.-мат. наук (М.: МФТИ, 1983)
32. Ковалев В Ф, Пустовалов В В *Физика плазмы* **15** 47 (1989) [Kovalev V F, Pustovalov V V *Sov. J. Plasma Phys.* **15** 27 (1989)]
33. Ковалев В Ф, Пустовалов В В *Физика плазмы* **15** 563 (1989) [Kovalev V F, Pustovalov V V *Sov. J. Plasma Phys.* **15** 327 (1989)]
34. Ковалев В Ф, Пустовалов В В *Квантовая электроника* **16** 2261 (1989) [Kovalev V F, Pustovalov V V *Sov. J. Quantum Electron.* **19** 1454 (1989)]
35. Байков В А, Газизов Р К, Ибрагимов Н Х *Матем. сб.* **136** (178) 435 (1988) [Baikov V A, Gazizov R K, Ibragimov N Kh *Math. USSR-Sbornik* **64** 427 (1989)]
36. Жданов С К, Трубников Б А *Квазигазовые неустойчивые среды* (М.: Наука, 1991)
37. Ибрагимов Н Х, Андерсон Р Л *Докл. АН СССР* **227** 539 (1976) [Ibragimov N Kh, Anderson R L *Sov. Math. Dokl.* **17** 437 (1976)]
38. Kovalev V F, Pustovalov V V *Math. Comput. Modelling* **25** (8/9) 165 (1997)

39. Ахманов С А, Сухоруков А П, Хохлов Р В *ЖЭТФ* **50** 1537 (1966) [Akhmanov S A, Sukhorukov A P, Khokhlov R V *Sov. Phys. JETP* **23** 1025 (1966)]
40. Murakami M et al. *Phys. Plasmas* **12** 062706 (2005)
41. Ковалев В Ф *ТМФ* **111** 369 (1997) [Kovalev V F *Theor. Math. Phys.* **111** 686 (1997)]
42. Байков В А, Газизов Р К, Ибрагимов Н Х, в сб. *Итоги науки и техники. Современные проблемы математики* Т. 34 (М.: ВИНТИ, 1989) с. 85 [Baikov V A, Gazizov R K, Ibragimov N Kh *J. Sov. Math.* **55** (1) 1450 (1991)]
43. Kovalev V F *Nonlinear Dyn.* **22** 73 (2000)
44. Ковалев В Ф *ТМФ* **119** 405 (1999) [Kovalev V F *Theor. Math. Phys.* **119** 719 (1999)]
45. Chiao R Y, Garmire E, Townes C H *Phys. Rev. Lett.* **13** 479 (1964); **14** 1056 (1965); Garmire F, Chiao R Y, Townes C H *Phys. Rev. Lett.* **16** 347 (1966)
46. Kovalev V F, Bychenkov V Yu, Tikhonchuk V T *Phys. Rev. A* **61** 033809 (2000)
47. Власов С Н, Петрищев В А, Таланов В И *Изв. вузов, Радиофизика* **14** 1353 (1971) [Vlasov S N, Petrishchev V A, Talanov V I *Radiophys. Quantum Electron.* **14** 1062 (1971)]
48. Власов С Н, Таланов В И *Самофокусировка волн* (Н. Новгород: ИПФ РАН, 1997)
49. Ibragimov N H, Kovalev V F, Pustovalov V V *Nonlinear Dyn.* **28** 135 (2002); math-ph/0109012
50. Shirkov D V, Kovalev V F, math-ph/0508055; см. также Ширков Д В, Ковалев В Ф, Препринт Р-5-12-2004 (Дубна: ОИЯИ, 2004)
51. Ковалев В Ф, Быченков В Ю, Тихончук В Т *ЖЭТФ* **122** 264 (2002) [Kovalev V F, Bychenkov V Yu, Tikhonchuk V T *JETP* **95** 226 (2002)]
52. Kovalev V F, Bychenkov V Yu *Phys. Rev. Lett.* **90** 185004 (2003)
53. Shirkov D V "Renormalization group in different fields of theoretical physics", КЕК Report 91 – 13 (Tsukuba: Natl. Lab. for High Energy Physics, 1992)
54. Аксенов А В *Докл. РАН* **342** 151 (1995) [Aksenov A V *Dokl. Math.* **51** 329 (1995)]
55. Baikov V A, Ibragimov N H *Nonlinear Dyn.* **22** (1) 3 (2000)
56. Ibragimov N H *J. Math. Anal. Appl.* **318** 742 (2006)
57. Овсянников Л В *Докл. РАН* **343** 156 (1995) [Ovsyannikov L V *Dokl. Math.* **52** 23 (1995)]
58. Овсянников Л В *ПМТФ* **36** (3) 45 (1995) [Ovsyannikov L V *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **36** 360 (1995)]
59. Дородницын В А *Групповые свойства разностных уравнений* (М.: Диалог-МГУ; МАКС Пресс, 2000)
60. Tanthanuch J, Meleshko S V *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **9** (1) 117 (2004)

Renormgroup symmetries for solutions of nonlinear boundary value problems

V.F. Kovalev

Institute for Mathematical Modelling, Russian Academy of Sciences,

Miusskaya pl. 4a, 125047 Moscow, Russian Federation

Tel. (7-495) 250-78 87. Fax (7-499) 972 -07-23

E-mail: vfkv@orc.ru

D.V. Shirkov

Joint Institute for Nuclear Research,

ul. Zholio-Kyuri 6, 141980 Dubna, Moscow region, Russian Federation

Tel. (7-49621) 65088. Fax (7-49621) 65084

E-mail: shirkov@theor.jinr.ru

Physics Department, M.V. Lomonosov Moscow State University

Vorob'evy gory, 119992 Moscow, Russian Federation

About 10 years ago, the method of renormgroup symmetries entered the field of boundary value problems of classical mathematical physics, stemming from the concepts of functional self-similarity and of the Bogoliubov renormalization group treated as a continuous transformation Lie group. Overwhelmingly dominating practical quantum field theory calculations, the renormalization group method formed the basis for the discovery of the asymptotic freedom of strong nuclear interactions as well as underlying the Grand Unification scenario. This paper draws on lectures delivered at the XIII School for Nonlinear Waves, Nizhnii Novgorod, Russia, 1 – 7 March, 2006 ((see V.F. Kovalev, D.V. Shirkov "Renormgroup symmetry for solutions of boundary value problems", in *Nonlinear Waves 2006* (Ed. by A.V. Gaponov-Grekhov) (N. Novgorod: IAP RAS, 2007) p. 433)) to describe the logical framework of a new algorithm based on the modern theory of transformation groups, and to present the most interesting results of application of the method to differential and/or integral equation problems and also to problems that utilize linear functionals of solutions. Examples from nonlinear optics, kinetic theory and plasma dynamics are given, where new analytical solutions obtained with this algorithm have made it possible to describe the singularity structure for self-focusing of a laser beam in a nonlinear medium, to study harmonics generation in weakly inhomogeneous plasma and to investigate the energy spectra of accelerated ions in expanding plasma bunches.

PACS numbers: 02.30.Jr, 11.10.Hi, **42.65. – k**

DOI: 10.3367/UFNr.0178.200808d.0849

Bibliography — 60 references

Received 25 February 2008

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **178** (8) 849 – 865 (2008)

Physics – Uspekhi **51** (8) (2008)