

## ОБОЗРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

## Модификация гравитации на больших расстояниях и массивный гравитон

В.А. Рубаков, П.Г. Тиняков

*Рассматриваются некоторые теоретические и феноменологические аспекты массивной гравитации в четырех измерениях. Обзор начинается с обсуждения теории Фирца–Паули с лоренц-инвариантным массовым членом, затем рассматриваются массовые члены, нарушающие лоренц-инвариантность. В отличие от теории Фирца–Паули, некоторые модели с нарушением лоренцевой симметрии не имеют патологий в спектре на фоне плоского и почти плоского пространства-времени и приводят к интересной феноменологии.*

PACS numbers: 04.50. + h, 11.10.Lm, 95.35. + d

DOI: 10.3367/UFNr.0178.200808a.0785

## Содержание

1. Введение (785).
  2. Модель Фирца–Паули (787).
    - 2.1. Лоренц-инвариантная массивная гравитация на фоне пространства Минковского.
    - 2.2. Дух в формализме Штюкельберга.
    - 2.3. Явление ван Дама – Вельтмана – Захарова.
    - 2.4. Радиус Вайнштейна.
    - 2.5. Сильная связь.
    - 2.6. Теория Фирца–Паули на фоне искривленного пространства: мода Бульвара – Дезера.
  3. Теории с нарушением лоренц-инвариантности: общие соображения (800).
    - 3.1. Массовые члены, нарушающие лоренц-инвариантность.
    - 3.2. Устранение второй скалярной моды.
    - 3.3. Симметрии вместо точной подстройки.
    - 3.4. Скаляры, нарушающие лоренц-инвариантность.
    - 3.5. Пример ультрафиолетово-нестабильной теории.
    - 3.6. Не слишком опасные неустойчивости.
  4. Духовый конденсат: модификация гравитации без массы гравитона (806).
  5. Минимальная модель с массивным гравитоном (808).
    - 5.1. Линеаризованная теория.
    - 5.2. Феноменология.
  6. Заключение (818).
  7. Приложение (819).
- Список литературы (821).

## 1. Введение

В последнее время возродился интерес к попыткам построить модели гравитации, которые отличались бы от общей теории относительности (ОТО) на очень больших пространственных и временных масштабах, т.е. модели с инфракрасной модификацией гравитации. Общий подход состоит в том, чтобы рассматривать эти модели как возможные низкоэнергетические пределы некоторой неизвестной фундаментальной теории и вначале не слишком беспокоиться о таких проблемах, как перенормируемость, ультрафиолетовое пополнение теории и т.д. Несмотря на это уже в низкоэнергетической теории возникают проблемы с самосогласованностью, которые сильно ограничивают класс приемлемых моделей. В то же время приемлемые модели все же существуют и их феноменология оказывается довольно богатой.

Недавнее возрастание активности в этой области было мотивировано, помимо чистого любопытства, несколькими причинами. Одна из них связана с проблемой космологической постоянной и экспериментально установленным ускоренным расширением Вселенной в современную эпоху (обзор с теоретической точки зрения см., например, в [1–7]). Это ускоренное расширение, возможно, связано с космологической постоянной (плотностью энергии вакуума), новым слабозаимодействующим полем или каким-либо еще видом темной энергии, которая согласно [8] дает вклад около 75 % в полную плотность энергии  $\rho_c$  в современной Вселенной. Проблема заключается в том, что значение плотности темной энергии  $\epsilon_A$  очень мало:

$$\epsilon_A \simeq 0,75\rho_c \simeq 4 \times 10^{-6} \text{ ГэВ см}^{-3}.$$

Это значение на много порядков меньше, чем величины, связанные по соображениям размерности с фундаментальными взаимодействиями — сильным, электросла-

**В.А. Рубаков.** Институт ядерных исследований РАН, просп. 60-летия Октября 7а, 117312 Москва, Российская Федерация  
Тел. (499) 135-22-59  
E-mail: rubakov@ms2.inr.ac.ru  
**П.Г. Тиняков.** Институт ядерных исследований РАН, просп. 60-летия Октября 7а, 117312 Москва, Российская Федерация, Service de Physique Théorique, Université Libre de Bruxelles, CP225, bld. du Triomphe, B-1050 Bruxelles, Belgium  
E-mail: petr.tiniakov@ulb.ac.be

Статья поступила 19 марта 2008 г.

бым и гравитационным:

$$\epsilon_A \sim 10^{-46} \epsilon_{\text{QCD}} \sim 10^{-54} \epsilon_{\text{EW}} \sim 10^{-123} \epsilon_{\text{grav}}.$$

Другими словами, масштаб энергий, характерный для темной энергии<sup>1</sup>,  $M_A = \epsilon_A^{1/4} \sim 10^{-3}$  эВ, много меньше, чем энергетические масштабы известных взаимодействий,  $\Lambda_{\text{QCD}} \simeq 200$  МэВ,  $M_W \simeq 80$  ГэВ,  $M_{\text{Pl}} \simeq 10^{19}$  ГэВ. Неестественно малая величина  $\epsilon_A$  (или  $M_A$ ) и составляет проблему космологической постоянной.

У этой проблемы есть две стороны. Во-первых, вклады сильного (обусловленного квантовой хромодинамикой (КХД)), электрослабого и гравитационного секторов в энергию вакуума должны были бы быть порядка  $\epsilon_{\text{QCD}} \simeq \Lambda_{\text{QCD}}^4$ ,  $\epsilon_{\text{EW}} \sim M_W^4$  и  $\epsilon_{\text{grav}} \sim M_{\text{Pl}}^4$  соответственно<sup>2</sup>. Таким образом, первая часть проблемы космологической постоянной состоит в том, чтобы объяснить, почему  $\epsilon_A$  практически равна нулю. Вторая часть состоит в том, чтобы понять, почему в действительности  $\epsilon_A$  не равна нулю, и выяснить, какая физика стоит за энергетическим масштабом  $M_A$ .

Ясно, что первая часть проблемы космологической постоянной может быть решена с помощью того или иного механизма, который позволяет свести космологическую постоянную к нулю (в качестве обзора см., например, [9]); такой механизм, скорее всего, должен был бы действовать в космологическую эпоху, предшествующую любой известной стадии космологической эволюции; в указанную эпоху состояние Вселенной должно было бы быть довольно близким к современному<sup>3</sup> [10, 11].

С другой стороны, несмотря на многочисленные попытки, до сих пор не было предложено никакой привлекательной и правдоподобной идеи, объясняющей, каким образом значение  $M_A$  может быть связано с другими известными энергетическими масштабами. Одна из возможных точек зрения заключается в том, что  $\epsilon_A$  — это действительно космологическая постоянная (величина, не зависящая от времени на протяжении известной истории нашей части Вселенной) и что ее значение определяется антропным принципом (см., например, [1, 12]): заметно большие значения  $|\epsilon_A|$  были бы несовместны с нашим существованием. Эта точка зрения подразумевает, что Вселенная значительно больше, чем ее видимая часть, и  $\epsilon_A$  принимает различные значения в разных космологически больших областях, а измеряемое нами значение  $\epsilon_A$  мало просто потому, что в остальных областях измерять космологическую "постоянную" (и получать большие значения) некому.

Другая возможность состоит в том, что причиной ускоренного расширения Вселенной может быть новая

физика при низких энергиях (в инфракрасной (ИК) области). Возможно, наиболее известным примером являются модели квинтэссенции (см., например, [2–6]), в которых гравитация описывается ОТО, тогда как ускоренное расширение обеспечивает энергия (темная) нового сверхслабовзаимодействующего поля (обычно, хотя и необязательно, это поле — лоренцев скаляр). Первоначальная идея модификации гравитации в ИК-области состоит в том, чтобы вместо введения космологической постоянной или новых полей изменить законы гравитации на космологических масштабах расстояний и времен, что, как можно надеяться, приведет к ускоренному расширению вообще без темной энергии. Эта возможность определенно явилась бы интересной альтернативой темной энергии и даже могла бы быть проверена экспериментально.

Другая изначальная мотивировка модификации гравитации на больших расстояниях исходит от теории мира на бране и идеи о дополнительных измерениях большого или бесконечного размера (см., например, [13]). В таких теориях обычная материя локализована на трехмерной гиперповерхности (бране), вложенной в пространство большего числа измерений. Идея [14–16] состоит в том, что гравитоны могут распространяться по "нашей" бране в течение конечного (хотя и большого) времени, уходя затем в дополнительные измерения. Пропагатор, описывающий распространение гравитона вдоль браны, поменялся бы на больших временах и расстояниях, что означало бы изменение гравитационного взаимодействия между частицами на "нашей" бране. Если бы удалось построить самосогласованную модель с такими свойствами, то она явилась бы конкретным и поддающимся расчету примером модификации гравитации на больших расстояниях. Эту идею, однако, очень сложно реализовать непротиворечивым образом, и модели, построенные до сих пор, имеют внутренние проблемы. В связи с этим стоит отметить, что, возможно, имеются и исключения: утверждается [17], что модель Двали–Габададзе–Поррати с гравитацией, индуцированной на бране [18] (см. в качестве обзора [19]), может быть полностью самосогласованной, несмотря на тот факт, что на первый взгляд она попадает в область сильной связи на неприемлемо больших расстояниях [20–22]. Интересно, что в этой модели имеется семейство космологических решений с ускоренным расширением [23–25]. Неприятность, однако, состоит в том, что среди возмущений над этими решениями есть феноменологически запрещенные духи [20, 26].

Из других подходов отметим теории на основе MOND (Modified Newtonian Dynamics) [27–31] — в них гравитация модифицируется для объяснения кривых вращения галактик без привлечения темной материи — и релятивистскую теорию гравитации (РТГ) [32, 33], появление которой было мотивировано желанием полностью восстановить общность законов сохранения энергии и импульса. Пока неясно, можно ли сделать эти теории непротиворечивыми и феноменологически приемлемыми.

В последнее время изучение гравитонов с отличной от нуля массой было мотивировано совсем другими соображениями [34]. Именно, весьма распространен взгляд, что квантовая хромодинамика может быть сформулирована в терминах некоторой теории струн. Однако известные струнные теории часто имеют в спектре

<sup>1</sup> Здесь и далее  $\hbar = c = 1$ .

<sup>2</sup> Например, вакуум КХД обладает сложной структурой — в нем имеются кварковые и глюонные конденсаты, значения которых определяются очень сложной (и во многом неизвестной) динамикой и зависят от параметров КХД ( $\Lambda_{\text{QCD}}$  и масс кварков) сложным образом. Различие между плотностью энергии в этом вакууме и в том, который возникает по теории возмущений, определенно имеет порядок  $\epsilon_{\text{QCD}}$ , так что не существует никаких оснований ожидать, что плотность энергии физического вакуума окажется на 46 порядков меньшей, чем  $\epsilon_{\text{QCD}}$ .

<sup>3</sup> Г. Росс предложил для этого сценария название "Вселенная дежавю".

безмассовое состояние со спином 2, тогда как в КХД его нет. Поэтому желательно было бы убрать это состояние из безмассового сектора струнной теории, придав ему ненулевую массу. В терминах эффективной четырехмерной низкоэнергетической теории такое решение проблемы выглядит очень близким к введению массы гравитона.

Естественно ожидать, что модификация гравитации на больших расстояниях может проявляться, в частности, в изменении закона дисперсии для возмущений метрики  $\omega = \omega(\mathbf{p})$  при малых пространственных импульсах  $\mathbf{p}$ ; простейшая возможность здесь — введение массы гравитона. В настоящем обзоре в основном речь будет идти именно о таких теориях, при этом мы ограничимся теориями в четырех измерениях. Подчеркнем, однако, что они никоим образом не исчерпывают всех возможных типов теорий с инфракрасной модификацией гравитации. Среди других можно назвать, например, скалярно-тензорные теории, в которых гравитация модифицируется с помощью введения помимо метрики дополнительных скалярных полей, которые существенны в ИК-области. Есть примеры моделей последнего типа, которые не только феноменологически приемлемы, но и приводят к интересной космологической динамике, включая ускоренное расширение Вселенной [35–37]. Другой класс моделей использует конденсаты векторных и/или тензорных полей. Однако обсуждение таких и близких к ним моделей выходит за рамки данного обзора.

Как часто случается, независимо от исходных соображений, развитие теории приводит к новому пониманию целого ряда вопросов. В случае модификации гравитации на больших расстояниях и модифицированного закона дисперсии для гравитона — это, с одной стороны, новое понимание проблем самосогласованности, а с другой — новые возможности с точки зрения феноменологии. Причина проблем с самосогласованностью — потеря явной инвариантности относительно общекоординатных преобразований (или нетривиальная реализация этих преобразований). В самом деле, если не добавлять в гравитационном секторе новых полей, требование калибровочной инвариантности единственным образом приводит к ОТО (с космологической постоянной), возможно, с добавлением членов высшего порядка, несущественных в ИК-области. Как только эта инвариантность нарушается, явно или спонтанно, гравитация в ИК-области изменяется, но среди возмущений метрики помимо гравитонов со спином 2 могут появиться новые легкие степени свободы. Эти новые степени свободы могут быть духами или тахионами, что часто неприемлемо. Другая опасная возможность состоит в том, что новые степени свободы могут сильно взаимодействовать на энергетических масштабах, превышающих некоторый "ультрафиолетовый" масштаб  $L_{UV}$ . Это означало бы, что теории гравитации нельзя доверять при энергиях, превышающих  $L_{UV}$ . Если значение  $L_{UV}$  слишком мало и если новые степени свободы эффективно не отщепляются, то теорию нельзя считать феноменологически приемлемой. Мы увидим, что проблемы такого рода присущи теориям на фоне пространства Минковского, обладающим на этом фоне явной лоренц-инвариантностью.

В четырехмерных моделях с инфракрасной модификацией гравитации избежать проблем с непротиворечи-

востью довольно легко, если лоренц-инвариантность нарушена для возмущений над плоским пространством. Основной акцент в настоящем обзоре делается на модели такого типа [38–42]. На самом деле нарушение лоренц-инвариантности довольно естественно в этом контексте. Действительно, инфракрасную модификацию гравитации можно представлять себе как аналог нарушенной (хиггсовской) фазы в калибровочных теориях, рассматривая гравитацию в определенном смысле как калибровочную теорию с калибровочной группой Лоренца. Поэтому естественно ожидать, что в хиггсовской фазе гравитация нарушает лоренцеву симметрию. Мы обсудим разные аспекты теорий такого рода, включая самосогласованность, натуральность и феноменологию. Последняя довольно интересна в некоторых случаях, причем интуитивные соображения, накопленные в лоренц-инвариантных теориях, часто оказываются ошибочными, когда лоренц-инвариантность отсутствует. В конце обзора мы вернемся к проблеме ускоренного расширения Вселенной.

## 2. Модель Фирца–Паули

Для того чтобы лучше понять проблемы, возникающие при попытке модифицировать гравитационное взаимодействие на больших расстояниях, поучительно сначала рассмотреть *лоренц-инвариантную* массивную гравитацию. Лоренц-инвариантный массовый член для гравитона был предложен Фирцем и Паули [43]; мы будем называть соответствующую теорию моделью Фирца–Паули.

На теории из класса обсуждаемых в этом разделе можно смотреть по-разному. Можно просто добавить массу гравитона к действию Эйнштейна–Гильберта, как будет сделано в разделе 2.1. В качестве эквивалентного подхода можно рассмотреть взаимодействие ОТО с дополнительными безмассовыми полями (см., например, [44, 45] и приведенные там ссылки). Как только безмассовые поля получают фоновые значения, зависящие от пространственно-временных координат, общая ковариантность становится нарушенной и гравитон приобретает массу способом, напоминающим механизм Хиггса. В любом из этих подходов получается один и тот же класс теорий, если выполнены следующие условия: 1) метрика Минковского — допустимая фоновая метрика, т.е. она является решением полевых уравнений<sup>4</sup>; 2) на фоне пространства Минковского нет легких полей, за исключением возмущений метрики; 3) на этом фоне лоренц-инвариантность не нарушена.

Проблемы, возникающие в модифицированных теориях гравитации, таковы: духи и связанная с ними неустойчивость; отсутствие непрерывности предела нулевой массы (явление ван Дама–Вельтмана–Захарова); переход в режим сильной связи на параметрически малом ультрафиолетовом (УФ) масштабе энергий; существование "скрытой" моды Бульвара–Дезера, которая незаметна при анализе возмущений над пространством Минковского, но становится видимой — и опас-

<sup>4</sup> Следует отметить, что массивная гравитация, основанная на фоновом пространстве, отличном от пространства Минковского, может иметь свойства, заметно отличающиеся от рассмотренных в этом разделе. Хорошо изученный пример — массивная гравитация на фоне пространства анти-де-Ситтера [46–50].

ной, — если фоновое пространство искривлено, пусть даже незначительно. В данном разделе мы обсудим эти проблемы на примере модели Фирца – Паули.

### 2.1. Лоренц-инвариантная массивная гравитация на фоне пространства Минковского

Рассмотрим ОТО с добавленным в действие наиболее общим лоренц-инвариантным массовым членом для гравитона. Параметризуем метрику, близкую к метрике Минковского, следующим образом:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}.$$

Иногда нам будут нужны выражения для  $g^{\mu\nu}$  и  $\sqrt{-g}$  с точностью до второго порядка:

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + h^{\mu\lambda} h_{\lambda}^{\nu},$$

$$\sqrt{-g} = 1 + \frac{1}{2} h_{\mu}^{\mu} + \frac{1}{8} h_{\mu}^{\mu} h_{\lambda}^{\lambda} - \frac{1}{4} h^{\mu\nu} h_{\mu\nu}, \quad (1)$$

где индексы поднимаются и опускаются с помощью метрики Минковского  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ . В квадратичном порядке на фоне пространства Минковского общий вид действия для лоренц-инвариантной массивной гравитации таков:

$$S = M_{\text{Pl}}^2 \int d^4x \left\{ L_{\text{EH}}^{(2)}(h_{\mu\nu}) + \frac{\alpha}{4} h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} + \frac{\beta}{4} (h_{\mu}^{\mu})^2 \right\}, \quad (2)$$

где  $M_{\text{Pl}}^2 = 1/(16\pi G)$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  — произвольные коэффициенты с размерностью квадрата массы,  $L_{\text{EH}}^{(2)}$  — стандартный кинетический член для гравитона, получающийся из действия Эйнштейна – Гильберта. Последний может быть записан в следующем виде:

$$L_{\text{EH}}^{(2)} = \frac{1}{4} (\partial_{\lambda} h^{\mu\nu} \partial^{\lambda} h_{\mu\nu} - 2\partial_{\mu} h^{\mu\nu} \partial_{\lambda} h_{\nu}^{\lambda} + 2\partial_{\mu} h^{\mu\nu} \partial_{\nu} h_{\lambda}^{\lambda} - \partial_{\mu} h_{\nu}^{\nu} \partial^{\mu} h_{\lambda}^{\lambda}). \quad (3)$$

При обсуждении возмущений метрики мы будем считать, что лагранжиан и действие связаны соотношением

$$S = M_{\text{Pl}}^2 \int d^4x L. \quad (4)$$

Это упростит формулы; многие из них не будут содержать  $M_{\text{Pl}}$ .

Нам будет удобно использовать и лоренц-инвариантную запись лагранжиана, и его  $(3+1)$ -разложение. В последнем случае возмущения метрики традиционно параметризуются так [51]:

$$h_{00} = 2\varphi,$$

$$h_{0i} = S_i + \partial_i B,$$

$$h_{ij} = h_{ij}^{\text{TT}} - \partial_i F_j - \partial_j F_i - 2(\psi\delta_{ij} - \partial_i \partial_j E). \quad (5)$$

Здесь  $h_{ij}^{\text{TT}}$  — поперечный бесследовый 3-тензор,

$$\partial_i h_{ij}^{\text{TT}} = 0, \quad h_{ii}^{\text{TT}} = 0,$$

$S_i$  и  $F_i$  — поперечные 3-векторы,

$$\partial_i S_i = \partial_i F_i = 0,$$

а другие переменные являются 3-скалярами; здесь и далее суммирование по пространственным индексам  $i, j = 1, 2, 3$  выполняется с евклидовой метрикой. Соответственно квадратичная часть действия Эйнштейна –

Гильберта раскладывается на тензорную, векторную и скалярную части:

$$L_{\text{EH}}^{(2)} = L_{\text{EH}}^{(\text{T})} + L_{\text{EH}}^{(\text{V})} + L_{\text{EH}}^{(\text{S})}, \quad (6)$$

где

$$L_{\text{EH}}^{(\text{T})} = \frac{1}{4} (\partial_0 h_{ij}^{\text{TT}} \partial_0 h_{ij}^{\text{TT}} - \partial_k h_{ij}^{\text{TT}} \partial_k h_{ij}^{\text{TT}}), \quad (7)$$

$$L_{\text{EH}}^{(\text{V})} = \frac{1}{2} \partial_k (S_i + \partial_0 F_i) \partial_k (S_i + \partial_0 F_i), \quad (8)$$

$$L_{\text{EH}}^{(\text{S})} = 2[\partial_k \psi \partial_k \psi - 3\partial_0 \psi \partial_0 \psi + 2\partial_k (\varphi - \partial_0 B + \partial_0^2 E) \partial_k \psi]. \quad (9)$$

Аналогично, массовые слагаемые раскладываются следующим образом:

$$L_{\text{m}} = \frac{\alpha}{4} h_{ij}^{(\text{TT})} h_{ij}^{(\text{TT})} + \quad (10)$$

$$+ \frac{\alpha}{2} (\partial_i F_j \partial_i F_j - S_i S_i) + \quad (11)$$

$$+ \left[ (\alpha + \beta) \varphi^2 + 2\beta(3\psi - \Delta E) \varphi + (\alpha + \beta) (\Delta E)^2 - \right. \\ \left. - 2(\alpha + 3\beta) \psi \Delta E + 3(\alpha + 3\beta) \psi^2 + \frac{\alpha}{2} B \Delta B \right]. \quad (12)$$

Здесь и далее мы не различаем лагранжианы, отличающиеся друг от друга на полную производную.

В ОТО большая часть полей, входящих в лагранжиан  $L_{\text{EH}}$ , не распространяется: все распространяющиеся степени свободы — гравитационные волны — удобно параметризовать поперечным бесследовым тензором  $h_{ij}^{\text{TT}}$ . Это, конечно, является следствием калибровочной инвариантности ОТО. В общей теории относительности линеаризованные на фоне пространства Минковского калибровочные преобразования имеют вид

$$h_{\mu\nu}(x) \rightarrow h_{\mu\nu}(x) + \partial_{\mu} \zeta_{\nu}(x) + \partial_{\nu} \zeta_{\mu}(x), \quad (13)$$

где  $\zeta_{\mu}(x)$  — произвольные функции координат.

При добавлении массового члена калибровочная инвариантность нарушается, что приводит к появлению новых распространяющихся степеней свободы. В самом деле, следует ожидать, что безмассовый гравитон со спином 2 превращается в массивную частицу со спином 2. Гравитон имеет две поляризации, а массивная частица — пять, со спиральностями  $\pm 2, \pm 1$  и 0. На языке  $(3+1)$ -разложения это соответствует двум тензорным модам, двум векторным и одной скалярной моде. Тем не менее при произвольных  $\alpha$  и  $\beta$  есть еще одна скалярная мода, которая с необходимостью оказывается духом. Рассмотрим сначала этот вопрос в  $(3+1)$ -формализме.

В тензорном секторе по-прежнему имеются две распространяющиеся моды  $h_{ij}^{\text{TT}}$ , которые теперь приобретают массу

$$m_{\text{G}}^2 = -\alpha. \quad (14)$$

Для того чтобы избежать появления тахионов, мы в дальнейшем ограничиваемся случаем<sup>5</sup>  $\alpha < 0$ . Тензорные возмущения имеют нормальный кинетический член (7), так что этот сектор не представляет собой проблемы.

<sup>5</sup> Скоро мы увидим, что  $\alpha > 0$  приводит к еще более серьезной проблеме в векторном секторе модели.

Векторный сектор содержит нединамическое поле  $S_i$ , которое входит в действие без производных по времени.

Здесь полезно прервать обсуждение модели Фирца – Паули, чтобы в общих чертах обсудить два типа нединамических полей. На уровне квадратичного действия нединамическое поле может входить в действие линейно или квадратично. Последняя возможность реализуется, например, в векторном секторе массивной гравитации: в лагранжиане (11) есть слагаемое  $S_i^2$ , а также присутствует слагаемое  $(\partial_k S_i)^2$  в (8). В этом случае нединамические поля могут быть "отынтегрированы": с помощью полевых уравнений, полученных варьированием по этим полям, можно выразить нединамические поля через динамические (т.е. такие, которые входят в действие с производными по времени), а затем избавиться от нединамических полей, подставив полученные выражения обратно в действие. При этом число динамических полей, вообще говоря, не уменьшается (в калибровочно-инвариантных теориях есть важные исключения, с которыми мы несколько раз столкнемся в этом обзоре).

Другая возможность состоит в том, что действие может не содержать квадратичного по нединамическому полю слагаемого. Это происходит, например, в скалярном секторе ОТО, в котором действие (9) линейно по полю  $\varphi$  (и полю  $B$ , которое тоже является нединамическим, так как после интегрирования по частям оно входит в лагранжиан без производных по времени). В отличие от уравнения в квадратичном случае соответствующее полевое уравнение представляет собой связь, наложенную на динамические поля, а само нединамическое поле выступает в роли множителя Лагранжа. Важный момент здесь состоит в том, что связь уменьшает число динамических полей, т.е. число степеней свободы.

Эти рассуждения могут быть непосредственно распространены на общий случай: если часть лагранжиана, квадратичная по нединамическим полям, невырождена, то все эти поля принадлежат к первой категории, в противном случае имеются множители Лагранжа, число которых равно степени вырождения.

Сделав это общее отступление, вернемся к векторному сектору и отынтегрируем поле  $S_i$ . Уравнение движения для него имеет вид

$$(\Delta - m_G^2) S_i = -\Delta \partial_0 F_i,$$

где  $\Delta$  — трехмерный лапласиан. Выразив  $S_i$  через  $F_i$  с помощью этого уравнения и подставив обратно в действие, получим действие для оставшегося поля  $F_i$ . В безмассовой теории это действие тождественно равно нулю, так что  $F_i$  не подчиняется никакому уравнению, представляя собой, таким образом, произвольное поле. Этот произвол является, конечно, следствием калибровочной свободы (13), в данном случае с поперечной  $\zeta_i$ . При наличии массовых членов поле  $F_i$  — динамическое. Лагранжиан для  $F_i$  в терминах трехмерного импульса выражается в виде<sup>6</sup>

$$L_F = \frac{m_G^2}{2} \left[ \frac{\mathbf{p}^2}{\mathbf{p}^2 + m_G^2} \partial_0 F_i^*(\mathbf{p}) \partial_0 F_i(\mathbf{p}) - \mathbf{p}^2 F_i^*(\mathbf{p}) F_i(\mathbf{p}) \right]. \quad (15)$$

<sup>6</sup> Здесь и далее через  $\mathbf{p}$  обозначается трехмерный импульс, а обозначение  $p$  оставлено для 4-импульса.

Для того чтобы привести лагранжиан к стандартному виду, введем канонически нормированное поле

$$\mathcal{F}_i(\mathbf{p}) = M_{\text{Pl}} m_G \sqrt{\frac{\mathbf{p}^2}{\mathbf{p}^2 + m_G^2}} F_i(\mathbf{p}). \quad (16)$$

Для линеаризованного действия получаем

$$S_{\mathcal{F}} = \int d^3 p \frac{1}{2} \left[ \partial_0 \mathcal{F}_i^* \partial_0 \mathcal{F}_i - (\mathbf{p}^2 + m_G^2) \mathcal{F}_i^* \mathcal{F}_i \right].$$

Таким образом, в векторном секторе есть две физические степени свободы с массой  $m_G$  (напомним, что поле  $F_i$  поперечное, поэтому только две его компоненты независимы). Число физических степеней свободы в тензорном и векторном секторах соответствует числу состояний массивного гравитона со спиральностью  $\pm 2$  и  $\pm 1$ , в согласии с нашими ожиданиями.

Отметим, что при  $m_G^2 \equiv -\alpha < 0$  лагранжиан (15) имеет общий знак минус, так что векторные моды оказываются духами. Это даже хуже, чем тахионное поведение тензорных мод.

Вернемся к обсуждению теории с  $m_G^2 \equiv -\alpha > 0$ . Из (16) видно, что предел  $m_G \rightarrow 0$  сингулярен. В этом пределе флуктуации канонически нормированного поля  $\mathcal{F}_i$  конечны, так что флуктуации векторной части метрики, т.е. флуктуации поля  $F_i$ , расходятся как  $m_G^{-1}$ . При малом, но конечном значении  $m_G$  это означает, что квантовая теория переходит в режим сильной связи на ультрафиолетовом энергетическом масштабе  $\Lambda_{\text{UV}}$ , который много меньше  $M_{\text{Pl}}$ . Тем не менее в векторном секторе величина этого масштаба еще приемлема. Мы обсудим сильную связь в разделе 2.5, так как она является наиболее серьезной проблемой в скалярном, а не в векторном секторе.

Перейдем теперь к скалярному сектору и рассмотрим сначала общий случай:

$$\alpha \neq 0, \quad \alpha \neq -\beta, \quad \alpha \neq -2\beta.$$

Проинтегрировав по частям, получим следующий вид лагранжиана, включающего в себя массовые члены:

$$L^{(S)} = 2 \left[ -2\varphi \Delta \psi - 2\dot{\psi} \Delta B + 2\dot{\psi} \Delta \dot{E} - 3\dot{\psi}^2 - \psi \Delta \psi + \frac{\alpha + \beta}{2} \varphi^2 + \beta(3\psi - \Delta E) \varphi + \frac{\alpha + \beta}{2} (\Delta E)^2 - (\alpha + 3\beta) \psi \Delta E + 3 \frac{\alpha + 3\beta}{2} \psi^2 + \frac{\alpha}{4} B \Delta B \right]. \quad (17)$$

В ОТО ( $\alpha = \beta = 0$ ) поля  $\varphi$  и  $B$  — это множители Лагранжа, которые дают одну и ту же связь  $\psi = 0$ . Тогда уравнение движения, полученное вариацией по  $\psi$ , дает  $\varphi = \dot{B} - \dot{E}$ ; варьирование по  $E$  не приносит ничего нового. Физических степеней свободы нет, а поля  $B$  и  $E$  остаются произвольными. Причина этого опять заключается в калибровочной свободе (13), теперь с  $\zeta_0 \neq 0$  и  $\zeta_i = \partial_i \zeta_L$ .

В массивном случае поля  $\varphi$  и  $B$  больше не являются множителями Лагранжа, но они все еще нединамические и могут быть отынтегрированы. Отынтегрирование поля  $B$  приводит к появлению дополнительного слагаемого в

лагранжиане,

$$L_B = -\frac{8}{\alpha} \dot{\psi} \Delta \dot{\psi}, \quad (18)$$

в то время как отынтегрирование  $\varphi$  дает другой добавочный член:

$$L_\varphi = -\frac{1}{\alpha + \beta} [2\Delta\dot{\psi} - \beta(3\dot{\psi} - \Delta E)]^2. \quad (19)$$

В результате лагранжиан для оставшихся полей  $\psi$  и  $E$  принимает вид

$$L^{(S)} = L_B + L_\varphi + 2 \left[ 2\dot{\psi} \Delta \dot{E} - 3\dot{\psi}^2 - \psi \Delta \dot{\psi} + \frac{\alpha + \beta}{2} (\Delta E)^2 - (\alpha + 3\beta) \psi \Delta E + 3 \frac{\alpha + 3\beta}{2} \psi^2 \right]. \quad (20)$$

Поля  $\psi$  и  $E$  — динамические, так что в скалярном секторе есть две физические степени свободы. Таким образом, помимо ожидаемого гравитона со спиральностью 0 возникает дополнительная скалярная мода. Эта степень свободы в действительности является духом (имеет отрицательный знак перед кинетическим членом).

Чтобы увидеть это, выделим в лагранжиане (20) слагаемые с производными по времени. Эти слагаемые берутся из членов, явно выписанных в (20), и из вклада (18). Таким образом, при заданном пространственном импульсе рассматриваемая часть лагранжиана имеет вид

$$L_{\text{kin}} = \frac{A}{2} \dot{\psi}^2 + B \dot{\psi} \dot{E} = \frac{A}{2} \left( \dot{\psi} + \frac{B}{A} \dot{E} \right)^2 - \frac{B^2}{2A} \dot{E}^2, \quad (21)$$

где  $A$  и  $B$  — коэффициенты, зависящие от пространственного импульса. Видно, что вне зависимости от знака  $A$  одна из двух степеней свободы — дух. Разумеется, поскольку теория лоренц-инвариантна, обе моды при больших пространственных импульсах подчиняются соотношению  $\omega^2 = \mathbf{p}^2$  и этот дух существует при сколь угодно больших  $\mathbf{p}$ .

Из (19) ясно, что случай  $\alpha = -\beta$  — особый<sup>7</sup>. Это в точности теория Фирца — Паули, причем

$$\beta = -\alpha = m_G^2.$$

В этом случае квадратичного по  $\varphi$  члена нет, так что  $\varphi$  оказывается множителем Лагранжа. Соответствующая связь имеет вид

$$\Delta E = 3\dot{\psi} - \frac{2}{\beta} \Delta \dot{\psi}. \quad (22)$$

Связь (22) устраняет одну из двух степеней свободы, поэтому единственная мода в скалярном секторе — это массивный гравитон со спиральностью 0 и правильным (положительным) знаком кинетического члена. В самом

<sup>7</sup> Случаи  $\alpha = 0$  и  $\alpha = -2\beta$  тоже особые. При  $\alpha = -2\beta$  масса духа равна массе гравитона и вследствие этой вырожденности его волновая функция возрастает во времени, т.е. имеет вид  $t \exp(i\omega t)$ . При  $\alpha = 0$  масса гравитона (14) равна нулю и можно убедиться в том, что степени свободы линеаризованной теории исчерпываются поперечными бесследовыми безмассовыми гравитонами. Теорию с  $\alpha = 0$  нельзя, таким образом, рассматривать как массивную гравитацию, и далее мы не будем обсуждать этот случай.

деле, подставляя (22) в действие<sup>8</sup> (17) и добавляя член (18), получим, что единственная оставшаяся степень свободы — это  $\psi$ , а лагранжиан имеет кинетический член вида

$$L_{\text{kin},\psi} = 6\dot{\psi}^2.$$

На самом деле полный квадратичный лагранжиан для  $\psi$  равен

$$L_{\psi \text{ FP}} = 6(\partial_\mu \psi \partial^\mu \psi - m_G^2 \psi^2), \quad (23)$$

в полной аналогии, например, с лагранжианом для тензорных мод  $h_{ij}^{\text{TT}}$ .

Завершим это обсуждение следующим комментарием. Конечно, в случае фоновой метрики Минковского и лоренц-инвариантных массовых членов анализ проще всего проводить в лоренц-ковариантном виде. Формализм (3+1)-разложения здесь определенно выглядит ненужным усложнением. Тем не менее наш анализ имеет полезные аспекты. Во-первых, он подсказывает, что проблемы массивной гравитации наиболее существенны в скалярном секторе. Во-вторых, он показывает, что "чудо" Фирца — Паули связано со специальным свойством поля  $\varphi$ , которое выступает в роли множителя Лагранжа и уничтожает нежелательную степень свободы. В разделе 2.6 мы увидим, что это свойство исчезает в искривленном фоновом пространстве и лишняя степень свободы — мода Бульвара — Дезера — снова появляется в спектре. Наконец, наше рассуждение наводит на мысль о том, что массовые члены, нарушающие лоренц-инвариантность, могут приводить к теории, свободной от патологий, если их выбрать так, чтобы нежелательные степени свободы уничтожались подходящим образом. Мы обсудим эту возможность в разделах 3–5.

## 2.2. Дух в формализме Штюкельберга

Для того чтобы выделять и изучать опасные степени свободы, удобно использовать формализм Штюкельберга [44]. Идея заключается в том, чтобы добавить в массивную гравитацию новые поля таким способом, который позволит восстановить калибровочную инвариантность, а потом разумным образом зафиксировать калибровку. Этот прием будет использоваться в разных разделах настоящего обзора, а здесь мы продемонстрируем подход Штюкельберга, заново получив дух в спектре на фоне пространства Минковского.

Рассмотрим снова теорию (2) с массовым членом общего вида. В линеаризованной теории вводятся новые (штюкельберговские) поля  $\xi_\mu$ , а также поле  $\bar{h}_{\mu\nu}$ :

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu(x) + \partial_\nu \xi_\mu(x). \quad (24)$$

При этом линеаризованная теория инвариантна относительно калибровочных преобразований

$$\bar{h}_{\mu\nu}(x) \rightarrow \bar{h}_{\mu\nu}(x) + \partial_\mu \zeta_\nu(x) + \partial_\nu \zeta_\mu(x),$$

$$\xi_\mu \rightarrow \xi_\mu - \zeta_\mu.$$

<sup>8</sup> Можно задаться вопросом о том, почему эта процедура законна, так как одно из полевых уравнений, очевидно, теряется. Дело обстоит следующим образом: в исходной формулировке это "потерявшееся" уравнение определяет лагранжев множитель  $\varphi$  через  $\psi$ .

Важно, что в силу калибровочной инвариантности ОТО квадратичное действие Эйнштейна–Гильберта (3) не зависит от  $\xi_\mu$ :

$$L_{\text{EH}}^{(2)} = L_{\text{EH}}^{(2)}(\bar{h}_{\mu\nu}).$$

Отметим, что новых степеней свободы не появилось; выбрав калибровку  $\xi_\mu = 0$ , мы возвращаемся к исходной массивной гравитации. Прием состоит в том, чтобы вместо использования калибровки  $\xi_\mu = 0$  наложить калибровочное условие на  $\bar{h}_{\mu\nu}$ , причем таким образом, чтобы все независимые компоненты  $\bar{h}_{\mu\nu}$  получили нетривиальные кинетические члены из лагранжиана Эйнштейна–Гильберта. Это гарантирует отщепление полей  $\bar{h}_{\mu\nu}$  и  $\xi_\mu$  при высоких энергиях (при  $\alpha \neq -\beta$ ), и свойства опасных мод можно будет получить, изучая лагранжиан, содержащий только поля  $\xi_\mu$ . Мы обсудим законность этой процедуры позднее (см. уравнения (33), (34)).

Нас интересуют относительно большие энергии и пространственные импульсы,  $\omega^2, \mathbf{p}^2 \gg |\alpha|, |\beta|$ . Таким образом, мы будем оставлять в действии слагаемые наивысшего порядка по производным. Вследствие структуры выражения (24) эти слагаемые возникают не только из действия Эйнштейна–Гильберта, но и из массового члена. Это — особенность формализма Штюкельберга.

Выбор калибровки для  $\bar{h}_{\mu\nu}$  не очень важен. Можно использовать калибровку  $\bar{h}_{00} = 0, \bar{h}_{0i} = 0$  или ковариантные калибровки<sup>9</sup>. В любом случае оставшиеся компоненты  $\bar{h}_{\mu\nu}$  имеют невырожденные члены с двумя производными по времени, которые берутся из действия Эйнштейна–Гильберта. Например, в калибровке  $\bar{h}_{00} = 0, \bar{h}_{0i} = 0$ , т.е.  $\bar{\varphi} = 0, S_i = 0, B = 0$ , у полей  $\bar{F}_i, \psi$  и  $\bar{E}$  имеются невырожденные члены с двумя производными по времени (см. (8) и (9)). Иногда мы будем схематично записывать

$$L_{\text{EH}}^{(2)} = (\partial\bar{h})^2.$$

Кинетические члены полей  $\xi_\mu$ , возникающие из массивной части действия (2), имеют следующий вид:

$$\frac{\alpha}{2} (\partial_\mu \xi_\nu)^2 + \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right) (\partial_\mu \xi^\mu)^2. \quad (25)$$

Из-за наличия массового члена возникает также смешивание между  $\xi_\mu$  и  $\bar{h}_{\mu\nu}$ , но, как мы вскоре убедимся, это смешивание несущественно при  $\alpha \neq -\beta$  для больших импульсов и частот,  $\mathbf{p}^2, \omega^2 \gg |\alpha|, |\beta|$ . Пренебрегая смешиванием, мы видим, что, как и было обещано, поля  $\bar{h}_{\mu\nu}$  и  $\xi_\mu$  отщепляются, так что метрический и штюкельберговский секторы,  $\bar{h}_{\mu\nu}$  и  $\xi^\mu$ , можно изучать по отдельности.

В метрическом секторе кинетическая часть лагранжиана — это просто лагранжиан Эйнштейна–Гильберта с фиксированной калибровкой. Таким образом, все распространяющиеся степени свободы в этом секторе содержатся в  $\bar{h}_{ij}^{\text{TT}}$ . Все остальные распространяющиеся степени свободы принадлежат штюкельберговскому сектору. Если учитывать смешивание между  $\bar{h}_{\mu\nu}$  и  $\xi^\mu$ , то распространяющиеся моды будут содержать ненулевые

вклады, пропорциональные  $\bar{h}_{\mu\nu}$ , но эти вклады, как мы покажем ниже, малы и ими можно пренебречь. Рассмотрим в явном виде, как это работает, на примере калибровки  $\bar{h}_{00} = 0, \bar{h}_{0i} = 0$ . В качестве примера обсудим векторный сектор в рамках (3+1)-разложения. Полный лагранжиан в векторном секторе равен

$$L^{(V)} = \frac{1}{2} (\partial_i \partial_0 \bar{F}_i)^2 + \frac{\alpha}{2} (\partial_i \bar{F}_j)^2 - \alpha \partial_i \bar{F}_j \partial_i \xi_j^{\text{T}} - \frac{\alpha}{2} (\partial_\mu \xi_i^{\text{T}})^2, \quad (26)$$

где мы положили  $S_i = 0$  в соответствии с нашим выбором калибровки и где  $\xi_i^{\text{T}}$  является трехмерно поперечным,  $\partial_i \xi_i^{\text{T}} = 0$ . Первое слагаемое в правой части (26) соответствует действию Эйнштейна–Гильберта (8), последнее берется из (25), тогда как третье слагаемое представляет собой смешивание между метрикой и штюкельберговским полем. Полевые уравнения имеют вид

$$\ddot{\bar{F}}_i + \alpha \xi_i^{\text{T}} - \alpha \bar{F}_i = 0, \quad (27)$$

$$\square \xi_i^{\text{T}} + \Delta \bar{F}_i = 0, \quad (28)$$

где оператор  $\square$  — это обычный даламбертиан. При  $\omega^2, \mathbf{p}^2 \gg m_G^2 \equiv -\alpha$  уравнения (27), (28) можно решать, используя теорию возмущений по малому параметру  $\alpha$ . В нулевом порядке у уравнения (27) нет осциллирующих решений, так что  $\bar{F}_i = 0$  и, как и ожидалось, все распространяющиеся моды описываются полем  $\xi_i^{\text{T}}$ . Это и есть состояния массивного гравитона спиральности 1 в представлении Штюкельберга. В первом порядке из (27) получим

$$\bar{F}_i = \frac{\alpha}{2\omega^2} \xi_i^{\text{T}},$$

так что уравнение (28) превращается в

$$(\omega^2 - \mathbf{p}^2) \xi_i^{\text{T}} + \frac{\alpha \mathbf{p}^2}{\omega^2} \xi_i^{\text{T}} = 0.$$

Как и было обещано, второе слагаемое, которое возникает из-за смешивания между  $\bar{F}_i$  и  $\xi_i^{\text{T}}$ , пренебрежимо мало при  $\omega^2, \mathbf{p}^2 \gg m_G^2$ .

Из этого анализа можно сделать два вывода. Во-первых, видно, что пренебрежение метрическим сектором  $\bar{h}_{\mu\nu}$  в самом деле законно (за исключением состояний спиральности 2), когда рассматривается область  $\omega^2, \mathbf{p}^2 \gg m_G^2$ . Во-вторых, видно, что формализм Штюкельберга бесполезен при изучении мод с  $\omega^2 \lesssim m_G^2$ ; ограничиваясь только штюкельберговским сектором, можно даже потерять какие-то из мод, для которых  $\omega^2 \lesssim m_G^2$ . В самом деле, нет никакой гарантии того, что система уравнений типа (27), (28) не имеет решений, осциллирующих медленнее, чем решения уравнения  $\square \xi_i^{\text{T}} = 0$ ; в конце концов оба уравнения (27), (28) имеют второй порядок по времени. В теории, которая изучается в этом разделе, число мод с большими и малыми  $\omega$  благодаря лоренц-инвариантности одинаково, однако следует отметить, что в теориях массивной гравитации с нарушением лоренцевой симметрии число мод с большими и малыми  $\omega$  может различаться.

Вернемся к модам с  $\omega^2, \mathbf{p}^2 \gg m_G^2$  и будем рассматривать штюкельберговский сектор. Выражение (25) можно

<sup>9</sup> В отличие от нековариантных калибровок, ковариантные калибровки не фиксируют калибровочную свободу полностью. Остаются нефизические степени свободы, о которых нужно позаботиться отдельно.

рассматривать как наиболее общий лоренц-инвариантный лагранжиан для векторного поля  $\xi_\mu$ . Хорошо известно, что в его спектре имеется дух, если только два слагаемых не собираются в квадрат тензора напряженности  $F_{\mu\nu}^2 = (\partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu)^2$ . Это происходит, когда  $\alpha = -\beta$ . Таким образом, мы снова видим, что отсутствие духов возможно лишь в случае Фирца – Паули.

В лоренц-инвариантной теории наличие духов неприемлемо. Поэтому далее в этом разделе мы сконцентрируемся на теории Фирца – Паули.

Рассмотрим, как штюкельберговский анализ работает в случае Фирца – Паули,  $\beta = -\alpha = m_G^2$ . В этом случае существенная часть действия имеет вид

$$L_m = -\frac{m_G^2}{2} (\partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu) (\partial^\mu \xi^\nu - \partial^\nu \xi^\mu) - m_G^2 (\partial_\nu \xi^\mu \bar{h}_\mu^\nu - \partial_\mu \xi^\mu \bar{h}_\nu^\nu), \quad (29)$$

где мы опустили члены без производных, но сохранили кинетический член со смешиванием  $\bar{h}_{\mu\nu}$  и  $\xi^\mu$ . Четырехмерно-поперечная часть  $\xi^\mu$ , удовлетворяющая условию  $\partial_\mu \xi^\mu = 0$ , обладает правильным кинетическим членом, который дается первой строкой в (29). С другой стороны, продольная часть

$$\xi_\mu = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi$$

получает кинетический член только за счет смешивания с полем  $\bar{h}_{\mu\nu}$ ; именно поэтому смешивание, сублидировавшее при  $\alpha \neq -\beta$ , теперь играет главную роль. Не будем некоторое время фиксировать калибровку  $\bar{h}_{\mu\nu}$ . Тогда кинетический член для  $\bar{h}_{\mu\nu}$  и  $\phi$  дается выражением

$$L_{EH}^{(2)}(\bar{h}_{\mu\nu}) - \frac{m_G^2}{2} (\partial_\mu \partial_\nu \bar{h}^{\mu\nu} - \partial_\mu \partial^\mu \bar{h}_\nu^\nu) \phi. \quad (30)$$

Выражение (30) может быть диагонализировано [44], если заметить, что комбинация  $\partial_\mu \partial_\nu \bar{h}^{\mu\nu} - \partial_\mu \partial^\mu \bar{h}_\nu^\nu$  пропорциональна линеаризованному скаляру кривизны, так что второе слагаемое в (30) имеет структуру  $m_G^2 R(\bar{h}_{\mu\nu}) \phi$ . Таким образом, кинетический член диагонализуется конформным преобразованием, которое на линеаризованном уровне записывается в виде

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \hat{h}_{\mu\nu} - \frac{m_G^2}{2} \eta_{\mu\nu} \phi. \quad (31)$$

При этом кинетический член преобразуется в

$$L_{kin} = L_{EH}^{(2)}(\hat{h}_{\mu\nu}) + \frac{3}{8} m_G^4 \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi. \quad (32)$$

После фиксации калибровки  $\hat{h}_{\mu\nu}$  в продольном секторе теории остается лишь одна распространяющаяся степень свободы  $\phi$  с правильным кинетическим членом. Таким образом, мы снова убедились в отсутствии духов в теории Фирца – Паули над пространством Минковского.

Заметим, что в общем случае  $\alpha \neq -\beta$ , слагаемое (32) имеет меньший порядок по сравнению со слагаемым  $(\alpha + \beta)(\square \phi)^2$ , которое возникает из (25). Таким образом, смешивание между скалярными составляющими  $\bar{h}_{\mu\nu}$  и  $\xi^\mu$  в этом случае несущественно, в точности как в векторном секторе.

Здесь следует сделать общий комментарий. Он касается того факта, что процедура Штюкельберга с

фиксацией калибровки  $\bar{h}_{\mu\nu}$  может привести к появлению побочных решений полевых уравнений. Рассмотрим, например, калибровку  $\bar{h}_{00} = 0$ ,  $\bar{h}_{0i} = 0$ . При таком выборе калибровки получим  $h_{00} = 2\partial_0 \xi_0$ ,  $h_{0i} = \partial_0 \xi_i + \partial_i \xi_0$ . Вариация действия исходной теории по  $h_{\mu\nu}$  дает уравнения

$$\frac{\delta S}{\delta h_{00}} = 0, \quad \frac{\delta S}{\delta h_{0i}} = 0, \quad \frac{\delta S}{\delta h_{ij}} = 0. \quad (33)$$

Первые два из уравнений (33) не содержат производных по времени и являются связями. С другой стороны, подставляя  $h_{00} = 2\partial_0 \xi_0$ ,  $h_{0i} = \partial_0 \xi_i + \partial_i \xi_0$  в действие и затем варьируя по  $\xi_\mu$  и  $h_{ij}$ , получим уравнения

$$\partial_0 \left( \frac{\delta S}{\delta h_{00}} \right) + \partial_i \left( \frac{\delta S}{\delta h_{0i}} \right) = 0, \quad \partial_0 \left( \frac{\delta S}{\delta h_{0i}} \right) = 0, \quad \frac{\delta S}{\delta h_{ij}} = 0. \quad (34)$$

Связей больше нет, вместо этого все уравнения имеют второй порядок по времени. Таким образом, у системы (34) больше решений, чем у (33). Тем не менее нас интересуют распространяющиеся моды, т.е. решения линеаризованных полевых уравнений, которые имеют вид  $\exp(i\omega t - i\mathbf{p}\mathbf{x})$ . В таком случае левые части (33) осциллируют, если только они не равны тождественно нулю, так что левые части (34) могут равняться нулю, только если выполнены условия (33). Система (34) обладает тем же самым числом распространяющихся степеней свободы, что и исходная система (33). Энергии и импульсы решений в исходном и штюкельберговском формализме тоже совпадают: если распространяющаяся мода является духом в формализме Штюкельберга, то она является духом и в исходной теории. Действительно существует, вообще говоря, единственный (с точностью до членов, не дающих вклада в полную энергию и импульс) тензор энергии-импульса, который сохраняется на решениях уравнений поля. Последнее наблюдение справедливо и на нелинейном уровне, а также для адиабатически изменяющейся фоновой метрики.

### 2.3. Явление ван Дама – Вельтмана – Захарова

Добавление в теорию гравитации массового члена Фирца – Паули изменяет гравитационное взаимодействие как между двумя массивными телами, так и между массивным телом и светом. Это взаимодействие можно достаточно просто рассчитать в приближении слабого поля [52, 53]. Результат удивителен: предсказание для отклонения луча света массивным телом отличается от предсказания ОТО даже в пределе нулевой массы гравитона. Это свойство известно как явление ван Дама – Вельтмана – Захарова (ВДВЗ): линеаризованная теория Фирца – Паули не переходит в линеаризованную ОТО при  $m_G \rightarrow 0$ . Если бы не существовало других особенностей, о которых пойдет речь в разделе 2.4, этот результат должен был бы закрыть теорию Фирца – Паули, так как экспериментальные данные по отклонению света согласуются с ОТО (см., например, [54] и приведенные там ссылки).

Рассмотрим явление ВДВЗ подробнее. На линеаризованном уровне взаимодействие двух источников гравитационного поля дается формулой

$$GT^{\mu\nu} P_{\mu\nu\lambda\rho} T^{\lambda\rho},$$



где  $G$  — гравитационная константа связи,  $P_{\mu\nu\lambda\rho}$  — пропагатор гравитационного поля,  $T^{\mu\nu}$  и  $T'^{\lambda\rho}$  — тензоры энергии-импульса (ТЭИ) двух источников. Существенно, что пропагаторы различны в массивном и безмассовом случаях. Их структура в обоих случаях имеет вид

$$P_{\mu\nu\lambda\rho} \propto \frac{\sum_i e_{\mu\nu}^i e_{\lambda\rho}^i}{p^2 - m_G^2},$$

где  $e_{\mu\nu}^i$  — тензоры поляризации гравитона; в безмассовом случае масса в знаменателе равна нулю. Так как знаменатель непрерывен при стремлении массы к нулю, за явление ВДВЗ ответственна именно сумма по поляризациям.

В массивном случае существуют пять тензоров поляризации. Сумма по этим тензорам дает

$$\text{FP: } P_{\mu\nu\lambda\rho} = \frac{1}{p^2 - m_G^2} \left\{ \frac{1}{2} \eta_{\mu\lambda} \eta_{\nu\rho} + \frac{1}{2} \eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\lambda} - \frac{1}{3} \eta_{\mu\nu} \eta_{\lambda\rho} + \right. \\ \left. + (\text{члены, зависящие от } p) \right\}. \quad (35)$$

Здесь члены, пропорциональные  $p_\mu$ , несущественны, поскольку после свертки с сохраняющимися ТЭИ вклада они не дадут. В безмассовом случае существуют только две поляризации, а пропагатор принимает вид

$$\text{GR: } P_{\mu\nu\lambda\rho} = \frac{1}{p^2} \left\{ \frac{1}{2} \eta_{\mu\lambda} \eta_{\nu\rho} + \frac{1}{2} \eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\lambda} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \eta_{\lambda\rho} + \right. \\ \left. + (\text{члены, зависящие от } p) \right\}. \quad (36)$$

Различие между выражениями (35) и (36) — в коэффициенте перед третьим слагаемым. Данное различие сохраняется и в пределе нулевой массы гравитона; это и есть явление ВДВЗ. Отметим также, что различие имеется в части пропагатора, которая умножается на след тензора энергии-импульса<sup>10</sup>.

Стоит отметить, что явление ВДВЗ специфично для полей спина 2. Для векторного поля безмассовый предел пропагатора с точностью до продольной части совпадает с пропагатором безмассовой теории, так что явление ВДВЗ отсутствует.

Константы взаимодействия  $G_{\text{GR}}$  и  $G_{\text{FP}}$  в массивном и безмассовом случаях, вообще говоря, различны. Связь между ними можно найти, потребовав, чтобы два нерелятивистских тела взаимодействовали в обоих случаях с одинаковой силой. В нерелятивистском пределе вклад дает только 00-компонента тензора энергии-им-

пульса, так что имеем

$$\text{GR: } G_{\text{GR}} T_{\mu\nu} P_{\mu\nu\lambda\rho} T'^{\lambda\rho} = \frac{1}{2} G_{\text{GR}} T_{00} T'_{00} \frac{1}{p^2}, \\ \text{FP: } G_{\text{FP}} T_{\mu\nu} \tilde{P}_{\mu\nu\lambda\rho} T'^{\lambda\rho} = \frac{2}{3} G_{\text{FP}} T_{00} T'_{00} \frac{1}{p^2 - m_G^2}.$$

В безмассовом пределе получим

$$G_{\text{FP}} = \frac{3}{4} G_{\text{GR}} \equiv \frac{3}{4} G_{\text{Newton}}. \quad (37)$$

Рассмотрим теперь предсказание для отклонения света в обоих случаях. Тензор энергии-импульса электромагнитной волны бесследовый; вследствие этого третье слагаемое в пропагаторе вклада не дает и для взаимодействия получаются следующие выражения:

$$\text{GR: } G_{\text{GR}} T_{00} T'_{00} \frac{1}{p^2}, \\ \text{FP: } G_{\text{FP}} T_{00} T'_{00} \frac{1}{p^2 - m_G^2}.$$

Из (37) следует, что отклонение света, предсказываемое массивной теорией, составляет 3/4 от результата безмассовой теории, т.е. ОТО.

Ясно, что явление ВДВЗ связано с продольными поляризациями гравитона, т.е. со штокельберговским полем  $\xi_\mu$ , которое обсуждалось в разделе 2.2. В дальнейшем мы еще обсудим механизм, ответственный за это явление.

#### 2.4. Радиус Вайнштейна

Как уже было отмечено, если бы аргументы, изложенные в разделе 2.3, являлись строго справедливыми, то это бы означало, что в лоренц-инвариантной теории масса гравитона строго равна нулю. В теории, тем не менее, есть лазейка [56], поскольку эти аргументы основываются на линейном приближении. В ОТО линейное приближение справедливо на расстояниях много больших, чем радиус Шварцшильда источника. Отклонение света гравитационным полем вблизи поверхности Солнца, таким образом, хорошо описывается в линейном режиме.

Не так обстоит дело в теории Фирца – Паули. Изучение сферически-симметричных классических решений в [56] свидетельствует о том, что при отличной от нуля массе гравитона линейное приближение становится неприменимым на расстоянии, значительно большем радиуса Шварцшильда, — это расстояние называют радиусом Вайнштейна:

$$r_V = \left( \frac{M}{M_{\text{Pl}}^2 m_G^4} \right)^{1/5}, \quad (38)$$

где  $M$  — масса источника. Отметим, что чем меньше масса гравитона, тем больше расстояние, на котором теория переходит в нелинейный режим. Взяв массу гравитона порядка современного параметра Хаббла, легко найти, что для Солнца  $r_V \simeq 100$  кпк, так что вращающиеся вокруг Солнца тела и пролетающий невдалеке от его поверхности свет взаимодействуют с нелинейным гравитационным полем. Приведенный выше аргумент относительно неправильного выражения для отклонения луча света в массивной теории,

<sup>10</sup> Можно задаться вопросом о том, нельзя ли избавиться от явления ВДВЗ, отказавшись от слабого принципа эквивалентности, т.е. изменив взаимодействие гравитации и материи. В самом деле, в массивной гравитации самосогласованность полевых уравнений не требует ковариантного сохранения тензора энергии-импульса источника (в отличие от ОТО, в которой гравитационная часть полевых уравнений — тензор Эйнштейна — удовлетворяет тождеству Бьянки, так что материальная часть — тензор энергии-импульса — должна ковариантно сохраняться). Если вместо взаимодействия с сохраняющимся тензором энергии-импульса поле  $h_{\mu\nu}$  взаимодействует с некоторым тензором  $S^{\mu\nu}$ , дивергенция которого при конечной  $m_G$  отлична от нуля и исчезает только в безмассовом пределе, приведенный выше анализ не проходит. Этот вопрос рассмотрен в [55] — ответ на него состоит в том, что таким образом от явления ВДВЗ избавиться нельзя.

таким образом, напрямую неприменим. С другой стороны, нелинейность гравитации Фирца–Паули во всей Солнечной системе сама по себе представляет проблему.

Происхождение масштаба  $r_V$  легко понять с помощью простого подсчета степеней [44]. Вспомним сначала, каким образом радиус Шварцшильда  $r_S = 2M/M_{\text{Pl}}^2$  появляется в ОТО как параметр разложения. Схематично квадратичное действие Эйнштейна–Гильберта (3) с источником записывается в виде

$$\int d^4x [M_{\text{Pl}}^2 (\partial h)^2 + Th], \quad (39)$$

где  $h$  — возмущения метрики,  $T$  — тензор энергии-импульса. Соответствующие уравнения имеют решение<sup>11</sup>

$$h = \frac{1}{\partial^2} \frac{T}{M_{\text{Pl}}^2}$$

или, что эквивалентно,

$$h = \frac{M}{M_{\text{Pl}}^2 r}, \quad (40)$$

где  $M$  — полная масса источника. Это — стандартный закон Ньютона. Нелинейные поправки в действие начинаются с членов типа  $M_{\text{Pl}}^2 \int d^4x h (\partial h)^2$ . Потребовав малости таких членов по сравнению с квадратичным вкладом (39), легко получить условие  $h \ll 1$ , т.е. для возмущения (40)

$$\frac{M}{M_{\text{Pl}}^2 r} \ll 1.$$

Это и есть условие  $r \gg r_S$ , обеспечивающее применимость линейного приближения в ОТО.

Такое условие должно выполняться и в теории Фирца–Паули. Однако есть и более сильное ограничение. На штюкельберговском языке раздела 2.2 это ограничение следует из рассмотрения поля  $\xi_\mu$ . Точнее, важна его скалярная часть  $\xi_\mu = \partial_\mu \phi$ . Из обсуждения, приведенного в конце раздела 2.2, следует, что действие для полей  $\hat{h}_{\mu\nu}$  и  $\phi$  в присутствии сохраняющегося источника  $T_{\mu\nu}$  схематично можно представить в виде

$$\int d^4x [M_{\text{Pl}}^2 (\partial \hat{h})^2 + M_{\text{Pl}}^2 m_G^4 (\partial \phi)^2 + T \hat{h} + m_G^2 T \phi + \dots], \quad (41)$$

где мы снова опустили численные факторы и не выписали явно массовые члены для  $\hat{h}_{\mu\nu}$  и  $\phi$ . Кинетический член здесь такой же, как и в (32), в то время как слагаемое, соответствующее источнику, получается из стандартного выражения  $h^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$  с помощью (24) и (31) при учете линейризованного закона ковариантного сохранения  $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ . Заметим, что после диагонализации кинетического члена с помощью (31) возникает прямое взаимодействие поля  $\phi$  с материей. Решая уравнения движения, мы обнаруживаем, что на расстояниях, много меньших

$m_G^{-1}$ , гравитационный потенциал  $\hat{h}$  дается выражением (40) и что  $m_G^2 \phi$  имеет тот же порядок:

$$m_G^2 \phi = \frac{M}{M_{\text{Pl}}^2 r}.$$

Последняя формула подразумевает, что  $\phi$  само по себе велико и сингулярно в пределе  $m_G \rightarrow 0$  (ср. с формулой (16) в разделе 2.1). В этом и состоит происхождение нелинейности на больших расстояниях от источника.

Действительно, нелинейное обобщение массового члена Фирца–Паули содержало бы высшие степени возмущения  $h_{\mu\nu}$ . Наименьшее слагаемое такого типа — это просто  $h^3$ . Этот член дает нелинейный вклад в действие вида

$$\int d^4x M_{\text{Pl}}^2 m_G^2 (\partial^2 \phi)^3. \quad (42)$$

Члены того же порядка возникают, кроме того, из-за нелинейности калибровочных преобразований в ОТО. Вообще говоря, координатное преобразование  $x^\mu \rightarrow x^\mu + \zeta^\mu$  соответствует следующему калибровочному преобразованию метрики:

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow g'_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x + \zeta) + \partial_\mu \zeta^\lambda g_{\nu\lambda}(x + \zeta) + \partial_\nu \zeta^\lambda g_{\mu\lambda}(x + \zeta) + \partial_\mu \zeta^\lambda \partial_\nu \zeta^\rho g_{\lambda\rho}(x + \zeta). \quad (43)$$

Записав  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ , в квадратичном по  $h_{\mu\nu}$  и  $\zeta^\mu$  порядке получим

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \partial_\mu \zeta_\nu + \partial_\nu \zeta_\mu + \partial_\mu \zeta^\lambda \partial_\nu \zeta_\lambda + \partial_\mu \zeta^\lambda h_{\nu\lambda} + \partial_\nu \zeta^\lambda h_{\mu\lambda},$$

где индексы по-прежнему поднимаются и опускаются с помощью метрики Минковского. Соответственно замена переменных (24) в этом порядке принимает вид

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu + \partial_\mu \xi^\lambda \partial_\nu \xi_\lambda + \partial_\mu \xi^\lambda \bar{h}_{\nu\lambda} + \partial_\nu \xi^\lambda \bar{h}_{\mu\lambda}. \quad (44)$$

Поле  $\xi^\mu$  по-прежнему не входит в действие Эйнштейна–Гильберта, тогда как массовый член получает вклад, который схематично записывается как

$$\int d^4x M_{\text{Pl}}^2 m_G^2 (\partial \xi)^3, \quad (45)$$

что совпадает с членом типа (42) при  $\xi_\mu = \partial_\mu \phi$ .

Линеаризованная теория справедлива, когда вклад (42) меньше, чем квадратичный член. Это требование приводит к условию

$$\frac{M}{M_{\text{Pl}}^2 m_G^4 r^5} \ll 1,$$

что эквивалентно  $r \ll r_V$  для  $r_V$ , определенного формулой (38).

Ситуацию можно улучшить, если подобрать члены  $h^3$  в нелинейном обобщении действия Фирца–Паули таким образом, чтобы ведущий вклад  $(\partial^2 \phi)^3$  отсутствовал. Таким способом начало нелинейного режима может быть отодвинуто на меньшие расстояния, а именно на

<sup>11</sup> Всюду в обзоре при подсчете степеней мы будем игнорировать численные множители и знаки.

расстояния до

$$r_* = \left( \frac{M}{M_{\text{Pl}}^2 m_G^2} \right)^{1/3}. \quad (46)$$

Можно показать, что дальше в этом направлении продвинуться нельзя [44]. Для массы гравитона порядка современного параметра Хаббла<sup>12</sup> нелинейный режим имеет место на расстояниях от Солнца, меньших  $r_* \sim 10$  пк, все еще охватывающих всю Солнечную систему.

Установим связь проведенного анализа с изучением явления ВДВЗ. Из (41) ясно, что гравитационное поле  $\hat{h}_{\mu\nu}$ , которое взаимодействует с материей, представляет собой смесь двух полей:  $\hat{h}_{\mu\nu}$  и  $m_G^2 \eta_{\mu\nu} \phi$ . Поле  $\hat{h}_{\mu\nu}$  имеет тот же кинетический член  $L_{\text{EH}}(\hat{h}_{\mu\nu})$ , что и линеаризованное гравитационное поле в ОТО, поле  $m_G^2 \phi$  имеет кинетический член такой же, как и у гравискаляра. Оба поля взаимодействуют с материей примерно с одной силой. Оставляя только часть  $\hat{h}_{\mu\nu}$ , в безмассовом пределе получим пропагатор  $\hat{h}_{\mu\nu}$  (и, следовательно, пропагатор полного возмущения метрики  $h_{\mu\nu}$  с точностью до продольных членов, опущенных в (35) и (36)), который имеет точно такую же форму, что и пропагатор в линеаризованной ОТО. Поле  $m_G^2 \phi$  добавляет в пропагатор следовую часть, которая не исчезает в безмассовом пределе и суммируется с вкладом от  $\hat{h}_{\mu\nu}$  в пропагатор (35).

Подведем итог. Массивная гравитация находится в нелинейном режиме на расстояниях, не меньших, чем (46), — они очень велики. Казалось бы, можно надеяться, что нелинейные взаимодействия изменят теорию так, что безмассовый предел станет непрерывным [56]. Это в самом деле происходит в некоторых случаях, например, в модели Двали – Габададзе – Поррати [22], где нелинейные взаимодействия влияют в основном на гравискалярный сектор и эффективно отщепляют его от остальных мод в пределе малой массы, уничтожая вклад в пропагатор, приводящий к явлению ВДВЗ. Однако этот механизм не работает в теории Фирца – Паули [57]. Таким образом, гравитация Фирца – Паули на фоне пространства Минковского имеет проблемы уже на классическом уровне: по всей вероятности, она противоречит прецизионным тестам ОТО. Как мы увидим в разделе 2.5, на квантовом уровне проблем еще больше.

## 2.5. Сильная связь

На квантовом уровне обсуждавшаяся в разделе 2.4 проблема нелинейности проявляется в переходе в режим сильной связи при энергиях, заметно меньших, чем можно было бы ожидать из простого размерного анализа.

И массивную, и безмассовую гравитацию следует рассматривать как эффективную низкоэнергетическую теорию, справедливую при энергиях (точнее говоря, переданных импульсах) меньших некоторого ультрафиолетового масштаба  $\Lambda_{\text{UV}}$ . Предполагается, что за пределами указанного масштаба эти теории переходят в некоторые "фундаментальные" теории (ультрафиолето-

вые пополнения) с лучшим поведением при высоких энергиях. Здесь предполагается аналогия с возможностью ультрафиолетового пополнения теории массивного векторного поля с самодействием: таким пополнением является неабелева калибровочная теория с механизмом Хиггса. В случае ОТО ультрафиолетовым пополнением, по всей вероятности, является теория струн или М-теория; существует ли ультрафиолетовое пополнение для массивной гравитации, неизвестно (фактически, результаты этого раздела говорят о том, что лоренц-инвариантная массивная гравитация вообще не имеет ультрафиолетового пополнения).

Эффективным теориям можно доверять на расстояниях  $r \gg \Lambda_{\text{UV}}^{-1}$ ; на меньших расстояниях нужно пользоваться теорией с хорошим ультрафиолетовым поведением, которая, скорее всего, имеет совершенно другие свойства. Ньютоновская гравитация проверена экспериментально на расстояниях вплоть до субмиллиметровых [58–61], так что эффективная низкоэнергетическая теория тоже должна быть справедлива на расстояниях, принимающих те же значения. Это подразумевает, что

$$\Lambda_{\text{UV}}^{-1} \lesssim 10^{-2} \text{ см}, \text{ или } \Lambda_{\text{UV}} \gtrsim 10^{-3} \text{ эВ}.$$

С другой стороны, верхний предел ультрафиолетового масштаба энергий  $\Lambda_{\text{UV}}$  может быть получен в самой низкоэнергетической эффективной теории. Древесные амплитуды рассеяния, вычисленные в ней, возрастают при увеличении энергии в системе центра масс  $E$  и в конце концов становятся настолько большими, что нарушают унитарный предел при некоторой энергии  $E \sim \Lambda$ . При энергиях, превышающих  $\Lambda$ , эффективная теория входит в режим сильной связи и ей доверять нельзя. Весь подход имеет смысл, если масштаб ультрафиолетового пополнения меньше масштаба сильной связи:

$$\Lambda_{\text{UV}} \lesssim \Lambda. \quad (47)$$

Известный пример — неабелева калибровочная теория с механизмом Хиггса. Масштаб сильной связи ее эффективной низкоэнергетической теории — теории массивного векторного поля с самодействием — равен

$$\Lambda = \frac{m_V}{g}, \quad (48)$$

где  $m_V$  — масса векторного бозона,  $g$  — калибровочная константа связи. Рассматриваемая низкоэнергетическая теория переходит в свое ультрафиолетовое пополнение — калибровочную теорию в хиггсовской фазе — на масштабе  $\Lambda_{\text{UV}} = m_H$ , где  $m_H$  — масса бозона Хиггса; на этом масштабе проявляются новые степени свободы, т.е. хиггсовские бозоны. Так как  $\Lambda = m_V/g = v$ , где  $v$  — хиггсовское вакуумное среднее, и  $m_H = \sqrt{\lambda}v$ , где  $\lambda < 1$  — хиггсовская константа самодействия, неравенство (47) в этом примере действительно выполняется.

В ОТО масштаб сильной связи — это  $\Lambda = M_{\text{Pl}}$ , так что ее ультрафиолетовое пополнение может иметь место при энергиях, заметно превышающих доступные<sup>13</sup>. В мас-

<sup>12</sup> Здесь и далее мы предполагаем, что большие значения  $m_G$  были бы несовместны с космологией. Даже без этого предположения требование, чтобы закон Ньютона оставался справедливым на масштабах скоплений галактик, дает  $m_G \lesssim 10 \text{ Мпк}^{-1}$ . В этом разделе и в разделах 2.5 и 2.6 использование значения  $m_G \sim 10 \text{ Мпк}^{-1}$  привело бы к изменению оценок примерно на два порядка и не изменило бы выводов.

<sup>13</sup> Это не необходимо: неравенство (47) может быть строгим. В связи с этим интерес представляет тераэлектронвольтовая гравитация, в которой  $\Lambda_{\text{UV}}$  имеет порядок нескольких тераэлектронвольт и новые явления происходят при энергиях, достижимых на коллайдерах. (Обзоры на эту тему см., например, в [13, 62–64].)

сивной гравитации масштаб сильной связи  $\Lambda$  и, следовательно, масштаб ультрафиолетового пополнения  $L_{UV}$ , безусловно, заведомо меньше  $M_{Pl}$ . Наивная оценка масштаба сильной связи имеет вид

$$\Lambda \sim (M_{Pl} m_G)^{1/2}. \quad (49)$$

Это прямой аналог выражения (48). В самом деле, рассмотрим поперечную компоненту штюкельберговского поля  $\xi^\mu$ , которая удовлетворяет  $\partial_\mu \xi_{tr}^\mu = 0$ . Кинетический член для этой компоненты возникает из действия Фирца – Паули и схематично записывается как

$$L_{tr}^{(2)} = M_{Pl}^2 m_G^2 (\partial \xi_{tr})^2. \quad (50)$$

Члены, кубичные по  $h_{\mu\nu}$ , возникают как из нелинейного обобщения действия Фирца – Паули, так и из нелинейной замены переменных (44), приводя к взаимодействию, схематично записанному в (45). Если бы форма (50) была общей и для поперечной, и для продольной компонент  $\xi^\mu$ , то после введения канонически нормированного поля  $\chi^\mu = M_{Pl} m_G \xi^\mu$  мы обнаружили бы, что оно входит в кинетический член с единичным коэффициентом, в то время как лагранжиан взаимодействия имеет вид

$$L_{int} = \frac{1}{M_{Pl} m_G} (\partial \chi)^3. \quad (51)$$

Такая теория в самом деле имела бы масштаб сильной связи (49), так как именно этот параметр подавляет оператор высшего порядка (51). Анализ остальных операторов высшего порядка,  $(\partial \xi)^4$  и т.д., привел бы к тому же выводу. Такое же рассуждение, примененное к теории самодействующего векторного поля, приводит к оценке (48), откуда видна аналогия между (48) и (49).

На самом деле масштаб (49) довольно интересен с точки зрения феноменологии. При массе гравитона порядка современного параметра Хаббла соответствующее расстояние равно

$$(M_{Pl} m_G)^{-1/2} \simeq 0,05 \text{ мм}. \quad (52)$$

Если бы оценка (52) представляла собой настоящий масштаб ультрафиолетового пополнения, то следовало бы ожидать новых явлений в гравитационном секторе на субмиллиметровых расстояниях. Однако в теории Фирца – Паули масштаб сильной связи на самом деле значительно меньше, чем оценка (49), и соответствующее расстояние значительно больше, чем (52).

Проблема заключается в продольном секторе, где  $\xi_\mu = \partial_\mu \phi$ . Вспомним выражения (41) и (42). В соответствии с (41) канонически нормированное поле — это  $\chi = M_{Pl} m_G^2 \phi$ , и из (42) следует, что его самодействие имеет вид

$$L_{int} = \frac{1}{M_{Pl} m_G^4} (\partial^2 \chi)^3.$$

Масштаб, подавляющий оператор высшего порядка, теперь равен

$$\Lambda = (M_{Pl} m_G^4)^{1/5}. \quad (53)$$

Это истинный масштаб сильной связи в общей теории Фирца – Паули. При массе гравитона порядка современ-

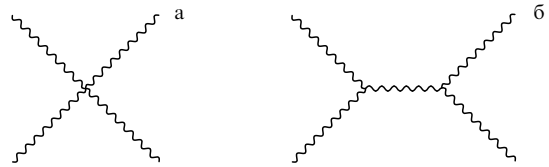


Рис. 1. Четырехгравитонное рассеяние в первом (а) и втором (б) порядках теории возмущений. Во втором порядке показана только s-канальная диаграмма.

ного параметра Хаббла этот масштаб имеет порядок  $10^{-21}$  эВ  $\sim (10^{16} \text{ см})^{-1}$ , что определенно является слишком малой величиной.

В рамках теории возмущений происхождение сильной связи связано с возрастанием пропагатора и волновых функций продольных компонент массивного гравитона при увеличении энергии, как и в случае массивного неабелева векторного поля. Рассмотрим амплитуду четырехгравитонного рассеяния, показанную на диаграммах рис. 1. Внешние линии для продольных гравитонов ведут себя как  $E^2/m_G^2$ . Вершина дает фактор  $E^2/M_{Pl}^2$ . Таким образом, вклад первой диаграммы имеет порядок

$$\frac{E^{10}}{M_{Pl}^2 m_G^8}.$$

Вторая диаграмма имеет тот же порядок, так как два лидирующих вклада в пропагатор сокращаются в амплитуде на массовой поверхности [65]. Поэтому амплитуда рассеяния в самом деле становится велика при энергиях порядка (53), что было проверено явным вычислением амплитуды [65].

Масштаб сильной связи можно сдвинуть в сторону более высоких энергий с помощью специального выбора членов взаимодействия. Действительно, можно подобрать такое нелинейное обобщение теории Фирца – Паули, чтобы кубичный вклад  $(\partial^2 \phi)^3$  исчез. Тогда остаются члены четвертого порядка:

$$L_{int} = M_{Pl}^2 m_G^2 (\partial^2 \phi)^4 = \frac{1}{M_{Pl}^2 m_G^6} (\partial^2 \chi)^4,$$

и масштаб сильной связи дается выражением

$$\Lambda = (M_{Pl} m_G^2)^{1/3}. \quad (54)$$

Это наилучший результат, которого можно достичь [44], поскольку имеется не только самодействие поля  $\phi$  (которое можно сократить подходящим выбором членов более высокого порядка по  $h_{\mu\nu}$ ), но и взаимодействие между продольной компонентой штюкельберговского поля  $\xi_\mu = \partial_\mu \phi$  и поперечной  $\xi_{tr}^\mu$ .

При массе гравитона порядка современного параметра Хаббла из (54) легко получить, что  $\Lambda \sim 3 \times 10^{-13}$  эВ  $\sim (10^8 \text{ см})^{-1}$ . Это все равно неприемлемо мало<sup>14</sup>. Мы заключаем, что теория Фирца – Паули испытывает серьезные проблемы с сильной связью.

<sup>14</sup> Это рассуждение относится к плоскому фоновому пространству. В принципе не исключено, что эффекты кривизны могут увеличить масштаб сильной связи, как это происходит, например, в модели Двали – Габададзе – Поррати [22]. В модели Фирца – Паули такого не происходит [57].

**2.6. Теория Фирца–Паули на фоне искривленного пространства: мода Бульвара–Дезера**

**2.6.1. Возмущения над космологическим фоном.** Если фоновая метрика не является в точности метрикой Минковского, то "чуда" Фирца–Паули больше не происходит и духовая мода снова появляется в спектре. Духовая мода существует при сколь угодно больших пространственных импульсах и, следовательно, феноменологически запрещена. Это явление называют неустойчивостью Бульвара–Дезера [66]. Важно, что неустойчивость Бульвара–Дезера имеет место независимо от того, каким конкретным образом теория Фирца–Паули обобщается на искривленное пространство-время [57].

Убедимся в существовании моды Бульвара–Дезера явно, взяв в качестве примера космологический фон. Как упоминалось в разделе 2.1, наиболее проблематичным является скалярный сектор; в самом деле, мы скоро убедимся в том, что именно в этом секторе возникает мода Бульвара–Дезера. Итак, в дальнейшем мы сосредоточимся на скалярном секторе.

Начнем с ОТО. Пусть возмущения метрики имеют вид

$$ds^2 = a^2(\eta)(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) dx^\mu dx^\nu, \tag{55}$$

где  $\eta$  — конформное время. Заметим, что определение  $h_{\mu\nu}$  в (55) отличается от определения в разделах 2.1–2.5, где через  $h_{\mu\nu}$  обозначалось отклонение  $g_{\mu\nu}$  от фоновой метрики. Здесь это отклонение равно  $a^2 h_{\mu\nu}$ . Индексы в дальнейшем будем поднимать и опускать с помощью метрики Минковского, так что по определению  $h_\mu^\nu = \eta^{\nu\lambda} h_{\mu\lambda}$ . Еще одно соглашение состоит в том, что суммирование по пространственным индексам будет производиться с  $\delta_{ij}$ . Ковариантные производные в явном виде мы использовать не будем. Таким образом, зависимость от масштабного фактора всегда будет явной.

Линеаризованные калибровочные преобразования (13) обобщаются с помощью (43). В соответствии с нашими соглашениями определим  $\zeta_\mu = \eta_{\mu\nu} \zeta^\nu$  и запишем калибровочные преобразования в нашей фоновой метрике так:

— пространственные,  $\zeta_i = -\partial_i \zeta_L$ :

$$\delta B = \zeta'_L, \quad \delta E = \zeta_L, \tag{56}$$

— временные,  $\zeta_0$ :

$$\delta B = \zeta_0, \quad \delta \varphi = \zeta'_0 + \mathcal{H} \zeta_0, \quad \delta \psi = \mathcal{H} \zeta_0, \tag{57}$$

где мы использовали обозначения (5) и ограничились скалярным сектором. Здесь и далее штрих обозначает производную  $\partial/\partial\eta$  и

$$\mathcal{H} = \frac{a'}{a}.$$

Для того чтобы изучать расширяющуюся Вселенную, введем положительную космологическую постоянную. Соответствующий вклад в действие выражается в виде

$$S_\Lambda = -6H_0^2 M_{\text{Pl}}^2 \int dx \sqrt{-g}.$$

Здесь константа  $H_0^2$  равна, в силу уравнений Эйнштейна, параметру Хаббла пространства де Ситтера в теории без материи и с безмассовыми гравитонами. Фоновые урав-

нения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^2 &= H_0^2 a^2, \\ 2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 &= 3H_0^2 a^2, \end{aligned} \tag{58}$$

а их решением, т.е. масштабным фактором пространства де Ситтера, является

$$a = -\frac{1}{H_0 \eta}.$$

Квадратичная часть члена с космологической постоянной равна

$$\begin{aligned} S_\Lambda^{(2)} &= 2H_0^2 M_{\text{Pl}}^2 \int d^3x d\eta a^4 \left[ \frac{3}{2} \varphi^2 - 9\varphi\psi + 3\varphi\Delta E - \right. \\ &\quad \left. - \frac{9}{2} \psi^2 + 3\psi\Delta E + \frac{3}{2} (\Delta E)^2 - \frac{3}{2} (\partial_i B)^2 \right], \end{aligned} \tag{59}$$

где  $\Delta = \partial_i \partial_i$ .

По внешнему виду слагаемое (59) в действии похоже на массовый член гравитона, так как оно не содержит производных полей. Это слагаемое не имеет структуры Фирца–Паули, поскольку в нем присутствуют оба члена,  $\varphi^2$  и  $(\partial_i B)^2$ . Следовательно, в отличие от полей в теории на фоне пространства Минковского, ни одно из полей в рассматриваемой теории не является множителем Лагранжа, и можно было бы ожидать, что в теории будет два динамических скалярных поля,  $\psi$  и  $E$ . В ОТО этого не происходит: две моды, оставшиеся после отынтегрирования  $\varphi$  и  $B$ , являются чисто калибровочными степенями свободы.

Действительно, рассмотрим совместно действие Эйнштейна–Гильберта и космологическую постоянную. Вне массовой поверхности (т.е. при произвольной фоновой метрике) квадратичная часть выражается в виде

$$\begin{aligned} S_{\text{EH}+\Lambda}^{(2)} &= 2M_{\text{Pl}}^2 \int d^3x d\eta a^2 \left\{ -2\varphi\Delta\psi - 2\psi'\Delta B + \right. \\ &\quad + 2\psi'\Delta E' + 3\psi\psi'' - \psi\Delta\psi + \mathcal{H}(2\varphi\Delta B - 2\varphi\Delta E' + 6\varphi\psi') + \\ &\quad + \left( -\frac{9}{2} \mathcal{H}^2 + \frac{3}{2} H_0^2 a^2 \right) \varphi^2 + \left( -\frac{9}{2} \mathcal{H}^2 - \frac{9}{2} H_0^2 a^2 \right) \psi^2 + \\ &\quad + \left[ (\mathcal{H}^2 - H_0^2 a^2) \left( 9\varphi\psi - 3\varphi\Delta E + \frac{3}{2} (\partial_i B)^2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 - 3H_0^2 a^2) \left( -\psi\Delta E - \frac{1}{2} (\Delta E)^2 \right) \right] \}. \end{aligned} \tag{60}$$

Члены, заключенные в квадратные скобки в правой части (60), в силу фоновых уравнений движения исчезают, и действие упрощается до следующего выражения:

$$\begin{aligned} S_{\text{EH}+\Lambda}^{(2)} &= 2M_{\text{Pl}}^2 \int d^4x a^2 \left\{ -2\varphi\Delta\psi - 2\psi'\Delta B + 2\psi'\Delta E' + \right. \\ &\quad + 3\psi\psi'' - \psi\Delta\psi + \mathcal{H}(2\varphi\Delta B - 2\varphi\Delta E' + 6\varphi\psi') + \\ &\quad \left. + [\mathcal{H}^2(-3\varphi^2 - 9\psi^2)] \right\}. \end{aligned} \tag{61}$$

Как и ожидалось,  $B$  и  $\varphi$  — нединамические поля с невырожденным квадратичным действием. Уравнения движения для них дают

$$\varphi = \frac{1}{\mathcal{H}} \psi', \quad B = \frac{1}{\mathcal{H}} \psi + E'. \tag{62}$$

Подставив выражения (62) обратно в действие и проинтегрировав по частям, мы получим, что квадратичная часть лагранжиана обращается в нуль,  $L_{\text{EH}+\Lambda}^{(2)}(\psi, E) = 0$  (мы снова использовали фоновые уравнения). Таким

образом,  $\psi$  и  $E$  — произвольные функции  $x^\mu$ , а  $\varphi$  и  $B$  связаны с ними соотношениями (62). Такие поля представляют собой чистую калибровку вида (56) и (57). Для того чтобы проверить это, нужно снова использовать фоновые уравнения (в частности,  $\mathcal{H}' = \mathcal{H}^2$ ).

Это "чудо" имеет место, конечно, благодаря калибровочной инвариантности. Как только калибровочная инвариантность явно нарушается массовым членом гравитона, "чуда" больше не происходит и появляется мода Бульвара – Дезера.

Обобщим массовый член для случая искривленного пространства-времени:

$$S_m = S_m(g_{\mu\nu}, \eta_{\mu\nu}).$$

На этом этапе много произвола — общая ковариантность явно нарушается и  $S_m$  может содержать различные комбинации:  $g_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu}$ ,  $g^{\mu\nu}\eta_{\mu\nu}$ ,  $\sqrt{g}$  и т.д. Последующие рассуждения не связаны с конкретным видом массового члена; предполагается только, что он не зависит от производных метрики, в пределе пространства Минковского переходит в член Фирца–Паули и для простоты полагается пропорциональным единственному массовому параметру  $m_G^2$ . Для иллюстрации общего подхода мы будем использовать простейшее обобщение массового члена Фирца–Паули:

$$S_m = \frac{1}{2} M_{\text{Pl}}^2 \int d^4x \left\{ -\frac{m_G^2}{2} \eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\rho} (g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}) \times \right. \\ \left. \times (g_{\lambda\rho} - \eta_{\lambda\rho}) + \frac{m_G^2}{2} [\eta^{\mu\nu} (g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu})]^2 \right\}. \quad (63)$$

Подчеркнем, что такой вид массового члена выбран только для иллюстрации.

Существует система координат, в которой  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ , и мы будем предполагать, что в этой системе фоновое пространство-время однородно и изотропно. Тогда метрика в этой системе координат имеет общий вид метрики Фридмана–Робертсона–Уокера (с учетом возмущений):

$$ds^2 = a^2(t) [n^2(t) (1 + h_{00}) dt^2 + 2n(t) h_{0i} dt dx^i + \\ + (-\delta_{ij} + h_{ij}) dx^i dx^j].$$

В этой системе координат фоновое пространство характеризуется двумя метрическими функциями:  $a(t)$  и  $n(t)$ . По-прежнему удобно иметь дело с конформным временем  $\eta$ , т.е. сделать замену переменных  $d\eta = n(t) dt$ . Другими словами, мы будем работать в конформной системе отсчета, где фоновая метрика имеет вид (55). Самосогласованность полевых уравнений влечет за собой уравнение, связывающее  $n(\eta)$  и  $a(\eta)$ , общий вид которого  $n' = f(n, a) a'$  (см. приложение). Отметим, тем не менее, что его решение не единственно: в данный момент времени  $n$  и  $a$  можно выбрать произвольными.

При учете массового члена квадратичная часть действия принимает весьма общий вид:

$$S_{\text{EH}+A+m_G}^{(2)} = 2M_{\text{Pl}}^2 \int d^3x d\eta a^2 \left\{ -2\varphi\Delta\psi - 2\psi'\Delta B + \right. \\ \left. + 2\psi'\Delta E' + 3\psi\psi'' - \psi\Delta\psi + \mathcal{H}(2\varphi\Delta B - 2\varphi\Delta E' + 6\varphi\psi') + \right. \\ \left. + \left[ \frac{m_\varphi^2}{2} \varphi^2 - \frac{m_B^2}{2} (\partial_i B)^2 + \frac{m_E^2}{2} (\Delta E)^2 + \frac{m_\psi^2}{2} \psi^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \mu_1\varphi\psi + \mu_2\varphi\Delta E + \mu_3\psi\Delta E \right] \right\}. \quad (64)$$

Слагаемые, заключенные в квадратные скобки в правой части (64), имеют тройное происхождение. Во-первых, среди них есть члены, не исчезающие в пределе  $m_G^2 \rightarrow 0$ ; эти члены стоят в квадратных скобках в правой части (61). Во-вторых, фоновые уравнения больше не совпадают с уравнениями (58), так что члены в квадратных скобках в (60) не обращаются в нуль. Наконец, есть вклады непосредственно от массового члена  $S_m$ . Последние два вклада рассмотрены подробнее в приложении.

В общем случае специальных соотношений между членами, заключенными в квадратные скобки в правой части (64), нет. Поля  $\varphi$  и  $B$  остаются нединамическими; отынтегрировав их, мы больше не получим нулевого действия для  $\psi$  и  $E$ . Вместо этого в действие будут входить члены со вторыми производными  $\psi$  и  $E$  по времени, некоторые из них явно входят в (64), а некоторые возникают после отынтегрирования  $\varphi$  и  $B$  (заметим, что члены в (64), пропорциональные  $\varphi$  и  $B$ , не содержат вторых производных по времени от  $\psi$  и  $E$ , так что высших производных по времени от этих полей не возникает). И  $\psi$ , и  $E$  — динамические поля, так что в скалярном секторе имеются две распространяющиеся моды, в отличие от единственной распространяющейся моды в скалярном секторе теории на фоне пространства Минковского. Дополнительная степень свободы как раз и представляет собой моду Бульвара – Дезера.

Ограничимся теперь фоновой метрикой, близкой к метрике Минковского,

$$\mathcal{H}^2 \ll m_G^2, \quad |a - 1| \ll 1, \quad |n - 1| \ll 1.$$

Отметим, что в этом пределе  $\mathcal{H}$  совпадает со стандартным параметром Хаббла. Нас будут интересовать сравнительно большие импульсы,  $\mathbf{p}^2 \gg m_G^2$ . Подробный анализ дает следующие результаты. Во-первых, свойства скалярных возмущений различны в двух диапазонах импульсов:

$$1) \quad \mathbf{p}^2 \ll \frac{m_G^4}{\mathcal{H}^2}, \\ 2) \quad \mathbf{p}^2 \gg \frac{m_G^4}{\mathcal{H}^2}. \quad (65)$$

Следовательно, предел больших импульсов и предел пространства Минковского не коммутируют. Диапазон 1 анализируется в приложении, а здесь мы подведем лишь итоги этого анализа. Существуют, как и ожидалось, две распространяющиеся моды. Одна из них — это мода Фирца–Паули, для которой дисперсионное соотношение сохраняется в виде  $\omega^2 = \mathbf{p}^2$  с точностью до малых поправок. Вторая мода — дух или дух-тахсион (тахсион и дух одновременно). Дух означает неограниченность энергии снизу; если мода одновременно является и тахионом, то она экспоненциально возрастает со временем.

Рассмотрим диапазон 2, т.е. предел больших импульсов. Для того чтобы отынтегрировать нединамические поля, решим уравнения, которые получаются варьированием действия по полям  $\varphi$  и  $B$ . Эти уравнения явно выписаны в приложении (см. (167) и (168)). Нам необходимо выражение для  $\varphi$  в лидирующем порядке по производным, а выражение для  $B$  — в лидирующем и сублидирующем порядках в связи с тем, что имеют

место некоторые сокращения. Нужные выражения — это

$$\varphi = \frac{1}{\mathcal{H}} \psi',$$

$$B = \frac{1}{\mathcal{H}} \psi + E' - \frac{m_\varphi^2}{2\mathcal{H}^2} \frac{1}{A} \psi' - \frac{3}{A} \psi' - \frac{\mu_2}{2\mathcal{H}} E.$$

Подставляя их обратно в действие (64) и интегрируя по частям, приходим к действию для динамических полей:

$$S_{\text{EH}+A+m_G}^{(2)} = 2M_{\text{Pl}}^2 \int d^3x \, d\eta a^2 \left\{ - \left[ 1 - \frac{\mathcal{H}'}{\mathcal{H}^2} + \frac{m_B^2}{2\mathcal{H}^2} \right] \partial_i \psi \partial_i \psi + \left( 3 + \frac{m_\varphi^2}{2\mathcal{H}^2} \right) (\psi')^2 + \frac{\mu_2 - m_B^2}{\mathcal{H}} \psi' \Delta E - \frac{m_B^2}{2} \partial_i E' \partial_i E' + \frac{m_E^2}{2} (\Delta E)^2 \right\}. \quad (66)$$

Заметим, что члены с максимальным количеством производных,  $\psi' \Delta E'$ , сократились.

Теперь явно видно, что существуют две распространяющиеся моды. Видно также, что их действие (66) сингулярно в пределе пространства Минковского<sup>15</sup>. В самом деле, сравнивая (64) с лагранжианом в пространстве Минковского (выражение (12), где  $\alpha = -\beta = -m_G^2$ ), найдем, что в пределе пространства Минковского

$$m_B^2 \rightarrow -\frac{m_G^2}{2}, \quad \mu_2 \rightarrow -m_G^2, \quad (67)$$

в то время как  $m_E^2$  и  $m_\varphi^2$  стремятся к нулю. Таким образом, первое и третье слагаемые в правой части (66) имеют коэффициенты, которые расходятся в пределе пространства Минковского, в котором  $\mathcal{H} \rightarrow 0$ . Более того, при  $\mathcal{H}^2 \ll m_G^2$  первый член в правой части (66) имеет общий знак плюс (в силу первого соотношения в (67)), что соответствует отрицательной энергии. Эта энергия неограничена снизу, так что в спектре есть дух или тахион. В приложении в рамках модели (63) показано, что у одной из мод сохраняется дисперсионное соотношение

$$\omega^2 = \mathbf{p}^2,$$

в то время как другая мода является тахионной или не тахионной в зависимости от соотношения между  $a - 1$  и  $n - 1$ .

**2.6.2. Штюкельберговский подход.** Проведенный анализ показывает, что как только калибровочная инвариантность нарушается, возникают две распространяющиеся скалярные моды на фоне искривленного пространства-времени, безотносительно к тому, насколько это пространство близко к пространству Минковского. Предел пространства Минковского сингулярен, и в пространстве-времени, близком к плоскому, одна из этих мод обязательно патологическая. Видно также, что непосредственный анализ явления Бульвара – Дезера доволь-

но сложен. В то же время его легко провести в формализме Штюкельберга [41, 44, 57, 67].

Будем изучать фоновые метрики, слабо отличающиеся от метрики Минковского. В этом случае работает теория возмущений по  $h_{\mu\nu}$ . Квадратичный лагранжиан изучался нами в разделах 2.1, 2.2. В кубичном порядке существуют, вообще говоря, следующие вклады в лагранжиан:

$$m_G^2 [\lambda_1 (h_\mu^\mu)^3 + \lambda_2 h_\mu^\mu h_{\nu\lambda} h^{\nu\lambda} + \lambda_3 h_{\mu\nu} h_\lambda^\nu h^{\lambda\mu}], \quad (68)$$

где  $\lambda_{1,2,3}$  — константы порядка единицы. На нетривиальном фоне поле  $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$  приобретает ненулевое фоновое значение  $h_{\mu\nu}^{(c)}$ . Для того чтобы использовать формализм Штюкельберга, нужно сделать замену переменных в соответствии с (43):

$$g_{\mu\nu}(x) = \bar{g}_{\mu\nu}(x + \xi) + \partial_\mu \xi^\lambda \bar{g}_{\nu\lambda}(x + \xi) + \partial_\nu \xi^\lambda \bar{g}_{\mu\lambda}(x + \xi) + \partial_\mu \xi^\lambda \partial_\nu \xi^\rho \bar{g}_{\lambda\rho}(x + \xi), \quad (69)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{g}_{\mu\nu}(x + \xi) &= \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}^{(c)}(x + \xi) + \bar{h}_{\mu\nu}(x + \xi) = \\ &= \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}^{(c)}(x) + \bar{h}_{\mu\nu}(x) + \\ &+ \partial_\lambda h_{\mu\nu}^{(c)}(x) \xi^\lambda + \partial_\lambda \bar{h}_{\mu\nu}(x) \xi^\lambda + \dots \end{aligned}$$

Здесь  $\bar{h}_{\mu\nu}$  и  $\xi^\mu$  — возмущения, а калибровка поля  $\bar{h}_{\mu\nu}(x)$  предполагается фиксированной. Как и прежде, действие Эйнштейна – Гильберта не содержит поля  $\xi^\mu$ . Рассматривая продольную часть штюкельберговского поля  $\xi_\mu = \partial_\mu \phi$  и подставляя разложение (69) в квадратичное действие Фирца – Паули и в кубичный член (68), получим квадратичное действие для  $\phi$ :

$$m_G^2 \left[ \frac{3}{8} m_G^2 \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \tilde{\lambda}_1 h_{\mu\nu}^{(c)} \partial^\mu \partial^\nu \phi \square \phi + \tilde{\lambda}_2 h_\mu^{(c)\mu} (\square \phi)^2 \right], \quad (70)$$

где мы оставили вклад Фирца – Паули (32), который не зависит от  $h_{\mu\nu}^{(c)}$ , так же как и часть, пропорциональную фону  $h_{\mu\nu}^{(c)}$  и содержащую максимальное число производных. Пренебрежение остальными слагаемыми законно при изучении медленно изменяющейся фоновой метрики и возмущений с импульсами и частотами  $\omega^2, \mathbf{p}^2 \gg m_G^2$ .

Следует отметить, что любая конфигурация, удовлетворяющая  $\square \phi = 0$ , является решением уравнений, вытекающих из (70). Это объясняет, почему при изучении теории на космологическом фоне мы все время обнаруживали моду с дисперсионным соотношением  $\omega^2 = \mathbf{p}^2$ . Более важен тот факт, что лагранжиан (70) имеет четвертый порядок по производным  $\phi$ , так что в спектре есть дух. Для того чтобы увидеть это явно и оценить массу духа, рассмотрим упрощенный вариант<sup>16</sup>

<sup>15</sup> В соответствии с предыдущими рассуждениями — это предел, в котором сначала  $\mathbf{p}^2$  устремляется к бесконечности и только потом фоновая метрика устремляется к метрике Минковского.

<sup>16</sup> Нижеследующие аргументы непосредственно обобщаются на случай (70). Используя пространственное преобразование Фурье, запишем лагранжиан в виде  $A\dot{\phi}^2 + B\phi'^2 + C\phi^2$ , где коэффициенты зависят от  $\mathbf{p}$ . От вторых производных по времени можно избавиться, введя новое поле  $\chi$ ; структура кинетического члена будет иметь вид  $B\dot{\phi}^2 + 2A\dot{\chi}\phi$ . Такая структура означает, что имеется дух (ср. с (21)).

действия (70),

$$m_G^2 [m_G^2 \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \tilde{\lambda} h^{(c)} (\square \phi)^2].$$

Этот лагранжиан эквивалентен выражению

$$\begin{aligned} m_G^2 [m_G^2 \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + 2\tilde{\lambda} h^{(c)} \partial_\mu \chi \partial^\mu \phi - \tilde{\lambda} h^{(c)} \chi^2] = \\ = m_G^2 \left[ m_G^2 \left( \partial_\mu \phi + \frac{\lambda}{m_G} h^{(c)} \partial_\mu \chi \right)^2 - \right. \\ \left. - \left( \frac{\tilde{\lambda} h^{(c)}}{m_G} \right)^2 (\partial_\mu \chi)^2 - \tilde{\lambda} h^{(c)} \chi^2 \right], \end{aligned}$$

где  $\chi$  — новое поле. Первое слагаемое в правой части последнего выражения соответствует модифицированной моде Фирца–Паули  $[\phi + (\lambda/m_G) h^{(c)} \chi]$ , в то время как второе слагаемое представляет собой кинетический член для моды Бульвара–Дезера  $\chi$ . Оно имеет знак минус, откуда следует, что мода Бульвара–Дезера — дух (в зависимости от знака  $\tilde{\lambda} h^{(c)}$  она может быть духом-таххионом при достаточно низких импульсах). Локальное значение квадрата ее массы порядка

$$m_{\text{BD}}^2 \simeq \frac{m_G^2}{h^{(c)}}. \quad (71)$$

Это объясняет, почему предел больших импульсов не коммутирует с пределом пространства Минковского, в чем мы убедились явно при изучении теории на космологическом фоне.

Масса (71) расходится при стремлении фоновой метрики к метрике Минковского. Это свойство может давать надежду, что неустойчивость Бульвара–Дезера не столь опасна. Если масса духа окажется больше, чем ультрафиолетовый масштаб  $L_{\text{UV}}$ , то проведенный анализ становится несправедливым, так как при энергиях, превышающих  $L_{\text{UV}}$ , нужно использовать неизвестное ультрафиолетовое пополнение теории. Тем не менее это наблюдение не спасает теорию Фирца–Паули [57]. В самом деле, вдали от астрофизического источника массы  $M$  имеем

$$h^{(c)} \simeq \frac{M}{M_{\text{Pl}}^2 r},$$

так что

$$m_{\text{BD}}^2 \simeq \frac{r}{r_*^3}, \quad (72)$$

где  $r_*$  — радиус, даваемый формулой (46). Следовательно, неустойчивость Бульвара–Дезера имеет место на интервале  $(r_* L_{\text{UV}})^2 r_* > r > r_*$ , на котором  $m_{\text{BD}} < L_{\text{UV}}$  и в то же время справедливо линейное приближение. Этот интервал пуст, только если  $L_{\text{UV}}^{-1} \gtrsim r_*$ . Вспомним, что значение  $r_*$  для Солнца порядка 10 пк. Таким образом, в Солнечной системе теории Фирца–Паули с  $L_{\text{UV}}^{-1} \gtrsim r_*$  доверять нельзя; если бы у гравитона была лоренц-инвариантная масса, то либо мы столкнулись бы с сильными неустойчивостями, либо нам пришлось бы иметь дело с неизвестным ультрафиолетовым пополнением вместо эффективной теории Фирца–Паули.

Итак, лоренц-инвариантная массивная гравитация в четырех измерениях полна патологий. Один из способов избавиться от патологий — отказаться от лоренц-инвариантности.

### 3. Теории с нарушением лоренц-инвариантности: общие соображения

#### 3.1. Массовые члены, нарушающие лоренц-инвариантность

В этом разделе и разделах 4, 5 мы рассмотрим теории с массовыми членами, нарушающими лоренц-инвариантность. Будем предполагать, что пространство Минковского является решением соответствующих полевых уравнений и что евклидова симметрия трехмерного пространства явно не нарушается в теории возмущений относительно этого фона. Тогда квадратичное действие для возмущений относительно пространства Минковского имеет вид

$$S^{(2)} = S_{\text{EH}}^{(2)} + S_m, \quad (73)$$

где  $S_{\text{EH}}^{(2)}$  — квадратичная часть действия Эйнштейна–Гильберта, равная (3),  $S_m$  — массовый член для гравитона. Массовый лагранжиан равен

$$\begin{aligned} L_m = \frac{1}{4} [m_0^2 h_{00} h_{00} + 2m_1^2 h_{0i} h_{0i} - m_2^2 h_{ij} h_{ij} + \\ + m_3^2 h_{ii} h_{jj} - 2m_4^2 h_{00} h_{ii}]. \end{aligned} \quad (74)$$

Как и прежде,  $h_{\mu\nu}$  — возмущения над метрикой Минковского. Лагранжиан Фирца–Паули получится, если все массы в выражении (74), кроме  $m_0$ , выбрать равными между собой:

$$\text{FP: } m_0^2 = 0, \quad m_1^2 = m_2^2 = m_3^2 = m_4^2 = m_G^2.$$

Последнее свойство объясняет выбор обозначений в (74). В дальнейшем через  $m$  будет обозначаться общий масштаб масс  $m_0, \dots, m_4$ .

Воспользуемся снова формализмом (3+1)-разложения (5). Этот формализм здесь особенно уместен, поскольку он полностью учитывает трехмерную евклидову инвариантность — единственную симметрию, которая не нарушается массовым членом общего вида. Лагранжиан в тензорном секторе представляет собой сумму кинетического члена (7) и массового члена

$$L_{m,\Gamma} = -\frac{m^2}{4} h_{ij}^{\text{TT}} h_{ij}^{\text{TT}}.$$

Следовательно, имеются две физические тензорные моды с дисперсионным соотношением

$$\omega^2 = \mathbf{p}^2 + m_G^2,$$

где  $m_G$  — это масса тензорных гравитонов,

$$m_G = m_2. \quad (75)$$

Для того чтобы эти моды не были тахионными, необходимо потребовать выполнения условия

$$m_2^2 \geq 0.$$

Далее мы будем считать, что это требование выполнено.

В векторном секторе квадратичный лагранжиан равен сумме вклада Эйнштейна–Гильберта (8) и массо-



вого члена

$$L_{m,v} = \frac{m_1^2}{2} S_i S_i - \frac{m_2^2}{2} \partial_i F_j \partial_i F_j.$$

Новшество по отношению к теории Фирца–Паули заключается в случае  $m_1 = 0$ . Поле  $S_i$  тогда становится множителем Лагранжа и дает связь  $F = 0$ . Таким образом, в векторном секторе не содержится распространяющихся мод, в отличие от случая Фирца–Паули,

$$m_1 = 0 : \text{нет распространяющихся векторных мод. (76)}$$

При  $m_1 \neq 0$  анализ векторных мод соответствует анализу, проведенному в разделе 2.1. При  $m_1^2 > 0$  в векторном секторе содержатся две нормальные распространяющиеся моды. Канонически нормированное распространяющееся поле теперь имеет вид

$$F_i(\mathbf{p}) = M_{Pl} m_1 \sqrt{\frac{\mathbf{p}^2}{\mathbf{p}^2 + m_1^2}} F_i(\mathbf{p})$$

с дисперсионным соотношением

$$\omega^2 = \frac{m_2^2}{m_1^2} (\mathbf{p}^2 + m_1^2).$$

При  $m_1^2 < 0$  и  $m_2 \neq 0$  эти моды становятся духами или тахионами на больших импульсах, так что нужно потребовать, чтобы выполнялось условие

$$m_1^2 \geq 0.$$

Займемся теперь скалярным сектором. Полный квадратичный лагранжиан имеет вид

$$\begin{aligned} L_S^{(2)} = & 2[\partial_k \psi \partial_k \psi - 3\partial_0 \psi \partial_0 \psi + 2(\partial_k \varphi \partial_k \psi + \partial_k B \partial_0 \partial_k \psi + \\ & + \partial_0 \Delta E \partial_0 \psi)] + \left[ \frac{m_0^2}{2} \varphi^2 + \frac{m_1^2}{4} (\partial_i B)^2 + \right. \\ & + \frac{3(3m_3^2 - m_2^2)}{2} \psi^2 - (3m_3^2 - m_2^2) \psi \Delta E + \\ & \left. + \frac{1}{2} (m_3^2 - m_2^2) (\Delta E)^2 + m_4^2 \varphi (3\psi - \Delta E) \right]. \end{aligned} \quad (77)$$

При произвольных массах появляются две распространяющиеся моды, одна из которых — дух. Действительно, при  $m_1 \neq 0$  поле  $B$  может быть отынтегрировано, причем соответствующий вклад в лагранжиан (ср. с (18)) равен

$$L_B = \frac{8}{m_1^2} \psi \Delta \psi. \quad (78)$$

Поле  $\varphi$  также можно отынтегрировать; соответствующий вклад в лагранжиан динамических полей  $\psi$  и  $E$  не содержит производных по времени. Следовательно, слагаемые с производными по времени в полученном лагранжиане для  $\psi$  и  $E$  снова имеют структуру (21), что означает наличие духа. Вообще говоря, дух существует при всех импульсах и частотах, так что наблюдения, которые будут сделаны в разделе 3.6, не помогают. От духовой моды необходимо избавиться.

### 3.2. Устранение второй скалярной моды

Хотя в общем случае теория патологична, при некоторых значениях масс духовая мода исчезает. В частности, так происходит, если хотя бы одно из полей,  $\varphi$  или  $B$ , остается множителем Лагранжа. Суть дела состоит в том, что соответствующая связь устраняет вторую моду в скалярном секторе, а оставшаяся мода, если она существует, вполне может быть нормальной. Два подходящих выбора масс — это  $m_0 = 0$  и  $m_1 = 0$ . Обсудим их по очереди.

**3.2.1  $m_0 = 0$ .** В случае  $m_0 = 0$  поле  $\varphi$  является множителем Лагранжа, который приводит к связи

$$2\Delta\psi = m_4^2(3\psi - \Delta E). \quad (79)$$

Предполагая, что  $m_1 \neq 0$  и  $m_4 \neq 0$ , можно отынтегрировать поле  $B$ , что даст вклад (78), и выразить  $\Delta E$  через  $\psi$  с помощью связи (79). Тогда  $\psi$  останется единственным динамическим полем. Члены в лагранжиане этого поля, существенные при высоких импульсах и частотах,  $\omega^2, \mathbf{p}^2 \gg m^2$ , имеют вид

$$L_\psi = 4 \left[ 2 \left( \frac{1}{m_4^2} - \frac{1}{m_1^2} \right) \partial_0 \partial_i \psi \partial_0 \partial_i \psi - \frac{m_2^2 - m_3^2}{m_4^4} (\Delta\psi)^2 \right] + \dots,$$

где опущенные члены содержат максимум две производные. Этот лагранжиан не имеет патологий при  $\omega^2, \mathbf{p}^2 \gg m^2$ , если

$$m_1^2 > m_4^2 > 0, \quad m_2^2 > m_3^2.$$

Тем не менее далее мы увидим, что и в этом случае возникают проблемы.

В классе теорий с  $m_0 = 0$  есть подклассы с дополнительными ограничениями на массы. Например, уже из приведенного анализа следует, что случай  $m_4 = 0$ , случай  $m_4 = m_1$  и случай  $m_2 = m_3$  — специальные. Подробное изучение этих границ можно найти в [40].

**3.2.2.  $m_1 = 0$ .** При  $m_1 = 0$  поле  $B$  — множитель Лагранжа. Соответствующая связь — это  $\dot{\psi} = 0$ , что для распространяющихся мод дает  $\psi = 0$ . Подставляя  $\psi = 0$  обратно в действие, легко увидеть, что членов со вторыми производными не остается, так что в скалярном секторе распространяющихся мод нет. В векторном секторе имеет место та же ситуация (см. (76)). Таким образом, все распространяющиеся моды в теории с  $m_1 = 0$  — это тензорные гравитоны с массой (75). Мы подробно обсудим эту теорию в разделе 5.

**3.2.3.  $m_2 = m_3, m_4 = 0$ .** Изучение лагранжиана (77) выявляет еще один специальный случай,  $m_2 = m_3$  и одновременно  $m_4 = 0$ . Теперь особую роль играют не поля  $\varphi$  и  $B$ , а поле  $E$ . Поле  $\Delta E$  входит в лагранжиан линейно, и соответствующее полевое уравнение имеет вид

$$2\ddot{\psi} + (3m_3^2 - m_2^2) \psi = 0.$$

Таким образом, высокочастотных мод у поля  $\psi$  нет, независимо от пространственного импульса. Если интересоваться только высокочастотными модами, то нужно положить  $\psi = 0$ , после чего получается лагранжиан без производных по времени. Следовательно, в этом случае высокочастотных распространяющихся мод нет совсем.

Таким образом, видно, что существуют определенные случаи, в которых массивная гравитация с нарушением лоренцевой симметрии не содержит духов в линеаризованной теории на фоне пространства Минковского. Дальнейший анализ многочисленных проблем, в том числе затронутых в разделе 2, удобно проводить в формализме Штюкельберга.

### 3.3. Симметрии вместо точной подстройки

Как мы видели в разделе 2.6, для того чтобы избавиться теорию от патологий, недостаточно устранить вторую скалярную моду на фоне пространства Минковского. В лоренц-инвариантной теории второй скалярной моды на фоне пространства Минковского не существует в силу специального выбора коэффициентов  $\alpha = -\beta$  в массовом члене лагранжиана (2). Тем не менее эта точная подстройка нарушается на фоне искривленного пространства, и вторая мода (мода Бульвара – Дезера) появляется вновь. Аналогично, похожие соотношения точной подстройки представляют собой проблему и в теориях с нарушением лоренц-инвариантности. Убедимся в этом явно на примере теории с  $m_0 = 0$  и без каких-либо других ограничений на массы. Удобно обратиться к формализму Штюкельберга и действовать аналогично тому, как это было сделано в разделе 2.6.2. В квадратичном порядке штюкельберговская часть метрики (69), которая содержит производные полей  $\xi$ , имеет вид

$$g_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu + \partial_\mu \xi^\lambda \partial_\nu \xi_\lambda. \quad (80)$$

Займемся членами, содержащими поле  $\xi_0$ . На фоне пространства Минковского они возникают из второго и пятого слагаемых в лагранжиане (74). Получим

$$L_m = \frac{1}{2} m_1^2 (\partial_0 \xi_i + \partial_i \xi_0) (\partial_0 \xi_i + \partial_i \xi_0) - m_4^2 \partial_0 \xi_0 \partial_i \xi_i + \dots,$$

где опущены члены, содержащие только  $\xi_i$ . Проинтегрировав второе слагаемое по частям, легко увидеть, что поле  $\xi_0$  — нединамическое, так что в скалярном секторе может быть только одна распространяющаяся мода — продольная часть  $\xi_i$ . Это находится в согласии с изложенным в разделе 3.2.1.

Если фоновая метрика слегка отлична от метрики Минковского,  $g_{\mu\nu}^{(c)} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}^{(c)}$ , то упомянутое свойство теряется. Действительно, из-за квадратичного члена в (80) массовые члены сами по себе содержат комбинацию

$$-\frac{1}{2} m_4^2 h_{00} h_{ii}^{(c)} = -\frac{1}{2} m_4^2 (\partial_0 \xi_0)^2 h_{ii}^{(c)} + \dots$$

Поле  $\xi_0$  становится динамическим, вторая мода появляется вновь, и в некоторых фоновых метриках (с подходящим знаком  $h_{ii}^{(c)}$ ) эта мода является духом.

Тем не менее существует элегантный способ решения проблемы точной подстройки [40]. Соотношения между массами могут быть не результатом точной подстройки, а следствием ненарушенных калибровочных симметрий, оставшихся от калибровочной инвариантности ОТО. Можно ожидать, что эти остаточные калибровочные симметрии защитят теорию от патологий при ее обобщении на искривленное пространство или при учете возможных ультрафиолетовых эффектов (пример теории, проблематичной из-за ультрафиолетовых эффектов, мы приведем в разделе 3.5). В нескольких случаях такой подход приводит к модифицированной на боль-

ших расстояниях теории гравитации, свободной от патологий.

Можно представить себе различные остаточные калибровочные симметрии [40]. В этом обзоре мы обсудим лишь некоторые из них: либо те, про которые известно, что они приводят к интересным теориям, либо те, которые служат примером неудачи такого подхода. Первая ненарушенная симметрия, которую мы рассмотрим — это

$$x^i \rightarrow x^i + \zeta^i(x^i, t). \quad (81)$$

Симметрия (81) подразумевает, что все массы, кроме  $m_0$ , равны нулю; это симметрия теории духового конденсата [38].

Вторая симметрия, которую мы будем обсуждать:

$$t \rightarrow t + \zeta^0(x^i, t). \quad (82)$$

Симметрия (82) накладывает ограничение  $m_0 = m_1 = m_4 = 0$ . Мы увидим, что у соответствующей теории имеются проблемы с ультрафиолетовыми эффектами (см. раздел 3.5).

Третья симметрия:

$$x^i \rightarrow x^i + \zeta^i(t). \quad (83)$$

Симметрии (83) достаточно, чтобы положить  $m_1 = 0$ , в то время как остальные массы остаются свободными. В разделе 3.2.2 мы обнаружили, что в таком случае в линеаризованной теории на фоне пространства Минковского патологий нет. Мы убедимся, что соответствующая теория [40–42] свободна от патологий на фоне пространства, близкого к пространству Минковского, а также на произвольном космологическом фоне. Она также УФ-стабильна. Кроме того, как мы обсудим в разделе 5, эта теория довольно интересна с феноменологической точки зрения.

### 3.4. Скаляры, нарушающие лоренц-инвариантность

Существует удобный способ проанализировать поведение теорий того класса, который мы обсуждаем в этом обзоре, а также расширить теорию возмущений на фоне пространства Минковского до полной эффективной низкоэнергетической теории. Этот способ состоит в том, чтобы начать с общековариантной теории с дополнительными скалярными полями  $\phi^\alpha$ ,  $\alpha = 0, 1, 2, 3$ , которые можно назвать голдстоуновскими полями. Нарушение лоренц-инвариантности происходит тогда, когда эти поля приобретают фоновые значения, зависящие от координат пространства-времени. В этом подходе лоренц-инвариантность нарушается *спонтанно*, так как исходное действие теории лоренц-инвариантно, а фоновая конфигурация полей не является лоренц-инвариантной.

Например, в пространстве-времени Минковского фоновыми полями являются

$$\begin{aligned} \bar{\phi}^0 &= a\Lambda^2 t, \\ \bar{\phi}^i &= b\Lambda^2 x^i, \end{aligned} \quad (84)$$

где  $\Lambda$  — параметр размерности массы,  $a$  и  $b$  — коэффициенты порядка единицы. При наших соглашениях поля  $\phi^\alpha$  имеют размерность массы. Фоновые поля (84) представляют собой решения уравнений движения, если лагранжиан содержит только их производные. Это свойство автоматически приводит к тому, что лагран-

жиан инвариантен относительно сдвиговой симметрии  $\phi^x(x) \rightarrow \phi^x(x) + \lambda^x$  с постоянной  $\lambda^x$ . Это, в свою очередь, означает, что трансляционная инвариантность пространства-времени не нарушается фоном (84), поскольку трансляцию можно свести на нет, сдвинув поля  $\phi^x$ . Аналогично, для того чтобы сохранить инвариантность относительно пространственных вращений, нужно потребовать, чтобы лагранжиан был инвариантен при SO(3)-вращениях полей,  $\phi^i \rightarrow A^i_j \phi^j$ . Таким образом, мы приходим к рассмотрению теорий, в которых действие на уровне первых производных имеет общий вид

$$S = S_{\text{EH}} + S_\phi, \tag{85}$$

где  $S_{\text{EH}}$  — действие Эйнштейна–Гильберта, а

$$S_\phi = \int d^4x \sqrt{-g} A^4 F(X, V^i, Y^{ij}, Q), \tag{86}$$

причем

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{A^4} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi^0 \partial_\nu \phi^0, \\ V^i &= \frac{1}{A^4} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi^0 \partial_\nu \phi^i, \\ Y^{ij} &= \frac{1}{A^4} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi^i \partial_\nu \phi^j, \\ Q &= \frac{1}{A^8} \frac{1}{\sqrt{-g}} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \epsilon_{ijkl} \partial_\mu \phi^0 \partial_\nu \phi^i \partial_\lambda \phi^j \partial_\rho \phi^k. \end{aligned} \tag{87}$$

Внутренние индексы  $i, j, k$  в действии (86) должны быть свернуты с  $\delta_{ij}$  или  $\epsilon_{ijk}$ . Здесь и далее мы не пользуемся соглашением (4) при записи лагранжиана для голдстоуновских полей; это упростит подсчет степеней. Комбинация  $Q$  фактически не является независимой (за исключением возможных тонкостей, связанных с наличием символа  $\epsilon$ ): ее квадрат можно выразить через  $X, V^i$  и  $Y^{ij}$ . Соответственно в дальнейшем мы будем считать лагранжеву функцию  $F$  зависящей только от оставшихся трех комбинаций.

Тензор энергии-импульса конфигурации (84) обращается в нуль в пространстве Минковского, а значит, пространство Минковского представляет собой допустимое фоновое пространство, если  $a$  и  $b$  удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} F + a^2 \frac{\partial F}{\partial X} &= 0, \\ \frac{1}{2} F \delta_{ij} + b^2 \frac{\partial F}{\partial Y^{ij}} &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial V^i} &= 0 \end{aligned} \tag{88}$$

при  $X = a^2, Y^{ij} = -b^2 \delta^{ij}$  и  $V^i = 0$ . Далее мы часто будем выбирать  $a = b = 1$ , переопределив поля.

Теорию с действием (86) надо понимать как эффективную теорию поля, справедливую только при низких энергиях<sup>17</sup>. Ультрафиолетовый масштаб обрезания  $L_{\text{UV}}$

<sup>17</sup> Что именно понимается под низкими энергиями, становится ясно при учете членов высшего порядка: это энергии и/или импульсы, при которых члены высшего порядка начинают резко возрастать. Так как мы изучаем лоренц-инвариантные действия, ультрафиолетовый масштаб обрезания  $L$  входит в действие так, как диктует лоренц-инвариантность. С другой стороны, значение энергии, при котором низкоэнергетическая теория прекращает работать, может отличаться от значения пространственного импульса в силу спонтанного нарушения лоренцевой симметрии фоновыми скалярными полями.

в этой теории должен быть меньше  $L$  (ср. с разделом 2.5). В самом деле, разложим поля относительно фона (84):

$$\phi^x = \bar{\phi}^x + \pi^x.$$

Тогда для лагранжиана возмущений имеем

$$L_\pi = (\partial\pi)^2 + \frac{1}{A} (\partial\pi)^3 + \dots, \tag{89}$$

что подразумевает:  $L_{\text{UV}} \lesssim A$ . В связи с этим важно, чтобы теория была УФ-стабильна [40]. В низкоэнергетических эффективных теориях нет никаких оснований считать, что низкоэнергетический лагранжиан содержит члены только с первыми производными. Поэтому нужно позаботиться о членах с высшими производными типа  $A^{-2} g^{\mu\nu} g^{\lambda\rho} \partial_\mu \partial_\nu \phi^x \partial_\lambda \partial_\rho \phi^x$ . На первый взгляд кажется, что эти члены должны быть подавлены ниже масштаба обрезания, т.е. при  $\mathbf{p}^2, \omega^2 \ll A^2$ . Тем не менее, если кинетические члены имеют специальную структуру, то слагаемые с высшими производными могут оказаться важными. В дальнейшем нам встретятся примеры такого рода.

Включая в рассмотрение гравитационные поля и все еще находясь в пространстве Минковского и на фоне полей (84), легко видеть, что калибровочному преобразованию  $x^\mu \rightarrow x^\mu + \zeta^\mu(x)$  соответствует преобразование полей  $\pi^x$ :

$$\pi^x(x) \rightarrow \pi^x(x) + A^2 \zeta^x(x).$$

Следовательно,

$$\zeta^x = A^{-2} \pi^x \tag{90}$$

представляют собой штюкельберговские поля, обсуждавшиеся в разделе 2.2. В унитарной калибровке,  $\pi^x = 0$ , получим  $X = 1 - h_{00}, V^{ij} = -1 - h_{ij}$  и т.д., так что квадратичная по  $h_{\mu\nu}$  часть действия содержит массовый член (74), причем масштаб масс

$$m = \frac{A^2}{M_{\text{Pl}}}, \tag{91}$$

что находится в соответствии с (49). Таким образом, теории класса (85) действительно обладают всеми ожидаемыми свойствами массивной гравитации с нарушением лоренц-инвариантности. Эта конструкция удобна тем, что поведение теории при  $\mathbf{p}^2, \omega^2 \gg m_{\text{G}}^2$  на фоне пространства Минковского (или близкого к нему) можно анализировать, изучая только голдстоуновский сектор. Кроме того, теория хорошо определена в фоновом пространстве, отличающемся от пространства Минковского.

Разумеется, при произвольной функции Лагранжа  $F$  в теории имеются патологии. Как было отмечено в разделе 3.3, патологии могут отсутствовать, если часть калибровочной симметрии ОТО остается ненарушенной. В этом случае действие голдстоуновских полей (86) имеет специальный вид. Например, остаточная калибровочная симметрия  $t \rightarrow t + \zeta^0(x^i, t)$  (см. (82)) на языке голдстоуновских полей означает, что функция Лагранжа  $F$  инвариантна при замене переменных

$$\phi^0 \rightarrow \phi^0 + \Xi^0(\phi^i, \phi^0) \tag{92}$$

с произвольной функцией  $\Xi^0(\phi^i, \phi^0)$ . Действительно, только в этом случае фон (84) инвариантен при калибровочных преобразованиях  $t \rightarrow t + \zeta^0(x^i, t)$ , дополненных переопределением полей. Таким образом на лагранжиан и, следовательно, на массовый член гравитона накладываются ограничения, следующие из требования остаточной калибровочной инвариантности в терминах голдстоуновских полей.

### 3.5. Пример ультрафиолетово-нестабильной теории

Для иллюстрации проблем с УФ-стабильностью, которые могут возникать в теории, не имеющей других патологий, рассмотрим модель с остаточной калибровочной симметрией (82), накладывая на массовые параметры условия  $m_0 = m_1 = m_4 = 0$ . На языке голдстоуновских полей это преобразование соответствует преобразованию полей (92). Эта симметрия может быть симметрией голдстоуновского действия (86), только если поле  $\phi^0$  полностью отсутствует. Следовательно, в голдстоуновском секторе теории есть три поля  $\phi^i$ , и на уровне первых производных действие имеет вид

$$S_\phi = \int d^4x \sqrt{-g} A^4 F(Y^{ij}),$$

где  $Y^{ij}(\phi^i)$  дается выражением (87). Как отмечено в разделе 3.3, лагранжиан общего вида для голдстоуновских полей, рассматриваемый как лагранжиан низкоэнергетической эффективной теории, содержит члены высшего порядка, например

$$\Delta F = \frac{1}{A^4} g^{\mu\nu} g^{\lambda\rho} \partial_\mu \partial_\nu \phi^i \partial_\lambda \partial_\rho \phi^i. \quad (93)$$

Мы увидим, что в обсуждаемой здесь модели эти члены важны и в действительности они приводят к патологиям в спектре.

Рассмотрим эту теорию на фоне пространства Минковского, на некоторое время забыв о членах высшего порядка. Лоренц-инвариантность нарушается фоном

$$\bar{\phi}^i = A^2 x^i, \quad (94)$$

который удовлетворяет полевым уравнениям для голдстоуновских полей. Раскладывая поля около этого фона,  $\phi^i = \bar{\phi}^i + \pi^i$ , получим квадратичный лагранжиан для штюкельберговских полей  $\pi^i$ . Этот лагранжиан содержит первые и вторые производные функции Лагранжа  $F$ , вычисленные при  $Y^{ij} = Y^{ij}(\bar{\phi}^i) = -\delta^{ij}$ , которые мы параметризуем следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial Y^{ij}}(\bar{\phi}) &= F_1 \delta_{ij}, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial Y^{ij} \partial Y^{kl}}(\bar{\phi}) &= F_{21} \delta_{ij} \delta_{kl} + F_{22} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \end{aligned}$$

Квадратичный лагранжиан имеет вид

$$\begin{aligned} L_\pi &= F_1 \partial_\mu \pi^i \partial^\mu \pi^i + 2F_{21} \partial_i \pi^i \partial_j \pi^j + \\ &+ 2F_{22} (\partial_i \pi^i \partial_j \pi^j + \partial_i \pi^j \partial_j \pi^i). \end{aligned} \quad (95)$$

На первый взгляд, этот лагранжиан описывает три скалярных поля с нормальным кинетическим членом. Это, однако, несовместно с тем фактом, что при  $m_1 = 0$  в векторном секторе физических мод нет (см. (3.1)).

Разрешение этого противоречия связано с требованием, чтобы тензор энергии-импульса фоновых полей (94) обращался в нуль, для того чтобы метрика Минковского являлась решением полной системы полевых уравнений. Соответствующие условия следуют из (88), откуда при отсутствии комбинаций  $X$  и  $V^i$  имеем

$$F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial Y^{ij}} = 0 \quad \text{при} \quad \phi^i = \bar{\phi}^i.$$

Следовательно,  $F_1 = 0$  в (95), так что действие с первыми производными на самом деле соответствует теории без физических мод: на этом уровне все штюкельберговские поля входят в действие без производных по времени, поэтому ни одно из них не является динамическим.

При учете членов более высокого порядка ситуация меняется. Члены типа (93) содержат производные по времени и не запрещены никакой симметрией. В терминах полей  $\pi^i$  такие вклады имеют следующую структуру:

$$\Delta L_\pi = \frac{1}{A^2} [(\partial_0^2 \pi^i)^2 - (\partial_0 \partial_i \pi^i)^2 + \dots]. \quad (96)$$

Эти вклады доминируют при высоких частотах как раз потому, что лагранжиан (95) не содержит производных по времени, т.е. потому, что поля  $\pi^i$  на уровне первых производных — нединамические. С учетом членов высшего порядка поля  $\pi^i$  начинают распространяться, а их дисперсионное соотношение имеет вид

$$\omega^4 = \text{const } \mathbf{p}^2 A^2.$$

Последнее означает, что по крайней мере одна из мод для каждого  $\pi^i$  — тахионная, а соответствующая "частота" высока даже при умеренных импульсах (но все же меньше масштаба обрезания  $\Lambda_{UV}$ ). Это делает модель неприемлемой.

Таким образом, поля, являющиеся на фоне пространства Минковского нединамическими на уровне первых производных, представляют собой потенциальную угрозу. Такие поля могут привести к распространяющимся модам на фоне искривленного пространства и/или из-за наличия членов высшего порядка в лагранжиане. Первую возможность мы будем называть неустойчивостью Бульвара – Дезера, а вторую — УФ-чувствительностью [40].

Чтобы завершить обсуждение модели, отметим, что на языке возмущений метрики УФ-чувствительность — это чувствительность к членам с производными в лагранжиане для  $h_{\mu\nu}$ . Например, первый, самый нежелательный вклад в (96) в терминах возмущений метрики соответствует члену

$$\begin{aligned} \Delta S_h &= \int d^4x A^2 \left( \frac{1}{2} \partial_i h_{00} - \partial_0 h_{0i} \right)^2 = \\ &= M_{\text{pl}}^2 \int d^4x m_G^2 \frac{1}{A^2} \left( \frac{1}{2} \partial_i h_{00} - \partial_0 h_{0i} \right)^2, \end{aligned}$$

где мы учли соотношение (90), из которого следует соответствие  $h \simeq A^{-2} \partial \pi$ , и использовали (91). Член  $\Delta S_h$  инвариантен относительно остаточных калибровочных преобразований (82), так что нет оснований считать его отсутствующим. Таким образом, мы обнаружили, что в спектре теории с двумя ненулевыми массами гравитона,  $m_2$  и  $m_3$ , имеются тахионы, если добавлены слагаемые

общего вида с первыми производными, согласованные с симметрией (82).

**3.6. Не слишком опасные неустойчивости**

Наконец, перейдем к обсуждению неустойчивостей, возникающих в теориях с нарушением лоренц-инвариантности, сделав акцент на феноменологии. В этих теориях допустимо наличие тахионов и/или духов, если они существуют только при низких частотах (при низких энергиях частиц). В приемлемых теориях частота обрезания для тахионов  $A_{tc}$  может быть несколько больше современного параметра Хаббла  $H_0$ , а масштаб  $A_{gh}$  для духов может превышать  $H_0$  на много порядков. Обсудим это подробнее, предполагая, что духи и тахионы взаимодействуют с обычной материей только гравитационно.

Рассмотрим сначала тахионы, предполагая для примера, что дисперсионное соотношение при  $|\mathbf{p}| \ll A_{tc}$  имеет вид

$$\omega^2 = -\mathbf{p}^2, \tag{97}$$

тогда как при  $|\mathbf{p}| > A_{tc}$  частота нормальная,  $\omega^2 > 0$  (примером такого закона дисперсии служит  $\omega^2 = -\mathbf{p}^2 + A_{tc}^{-2}\mathbf{p}^4$ ). Тогда в расширяющейся Вселенной  $\omega$  при  $|\mathbf{p}| \ll A_{tc}$  изменяется как

$$|\omega(t)| = \frac{\Omega}{a(t)},$$

где  $\Omega$  — постоянная конформная частота. В истории Вселенной есть особый момент времени  $t_A$ , при котором

$$H(t_A) = A_{tc}.$$

При меньших временах моды, которые могли бы быть тахионами, не развиваются, так что экспоненциальное возрастание любой моды возможно только на временах, больших, чем  $t_A$ . Наибольшее возрастание соответствует модам, которые становятся тахионными как раз при  $t_A$ , т.е. таким, для которых

$$\omega(t_A) \equiv \frac{\Omega}{a(t_A)} \simeq A_{tc}.$$

В самом деле, моды с большими конформными частотами при  $t = t_A$  все еще осциллируют, а моды с меньшими конформными частотами при  $t \sim t_A$  еще не развиваются. К настоящему времени наибольший фактор роста амплитуды поля равен

$$\exp\left(\int_{t_0}^{t_A} \frac{a(t_A)}{a(t)} A_{tc} dt\right),$$

где  $t_0$  обозначает наш момент времени. Неоднородности тахионного поля создают гравитационные потенциалы, сравнимые с гравитационными потенциалами обычной материи с возмущениями плотности энергии

$$\delta\rho \simeq A_{tc}^4 \exp\left(2 \int_{t_0}^{t_A} \frac{a(t_A)}{a(t)} A_{tc} dt\right),$$

где мы выписали предэкспоненциальный фактор из размерных соображений, не учитывая в нем красное смещение. Ограничение на  $A_{tc}$  берется из требования,

чтобы плотность энергии этих неоднородностей не превышала экспериментально разрешенного значения, скажем,  $10^{-4}\rho_c$  (конкретное число здесь роли не играет). Аппроксимируя космологическую эволюцию законом  $a \propto t^{2/3}$  (что соответствует Вселенной, в которой доминирует нерелятивистское вещество), найдем

$$\delta\rho \approx A_{tc}^4 \exp(3t_0^{1/3} t_A^{2/3} A_{tc}) = A_{tc}^4 \exp\left[4\left(\frac{A_{tc}}{H_0}\right)^{1/3}\right].$$

Требую, чтобы  $\delta\rho \lesssim 10^{-4}\rho_c \sim 10^{-4}M_{Pl}^2 H_0^2$ , получим

$$\frac{A_{tc}}{H_0} \lesssim \frac{1}{64} \left[\ln\left(10^{-4} \frac{M_{Pl}^2}{H_0^2}\right)\right]^3 \sim 3 \times 10^5.$$

Отсюда следует, что масштаб обрезания частоты для тахионов с дисперсионным соотношением (97) должен быть порядка  $A_{tc} \sim 10^5 H_0$  или меньше.

Ограничение на  $A_{tc}$  довольно сильно зависит от формы дисперсионного соотношения для тахионов. В любом случае, оно выше, чем  $H_0$ , но не намного.

Перейдем теперь к духам. В этом случае неустойчивость связана с рождением пар духов вместе с обычными частицами из вакуума, что не запрещено сохранением энергии-импульса ввиду отрицательности энергии духовых частиц.

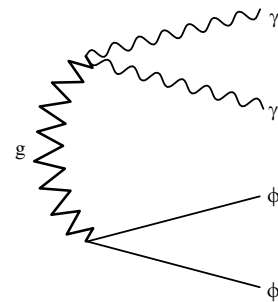
Наиболее сильное ограничение [68] на масштаб обрезания  $A_{gh}$  следует из процесса

$$\text{вакуум} \rightarrow \phi + \phi + \gamma + \gamma, \tag{98}$$

где  $\phi$  и  $\gamma$  обозначают дух и фотон соответственно. Мы предполагаем, что духи испытывают лишь гравитационное взаимодействие. Тогда этот процесс описывается диаграммой на рис. 2 и его скорость в единице объема на основе соображений размерности можно оценить как<sup>18</sup>

$$\Gamma \simeq \frac{A_{gh}^8}{M_{Pl}^4}.$$

Отметим, что все частицы в (98) находятся на массовой поверхности, так что  $A_{gh}$  — это масштаб обрезания по энергии, а не обычный ультрафиолетовый масштаб обрезания по переданному импульсу. В лоренц-инва-



**Рис. 2.** Распад вакуума на два духа и два фотона через рождение виртуального гравитона.

<sup>18</sup> Здесь предполагается, что масштаб обрезания 3-импульса также имеет порядок  $A_{gh}$ .

риантных теориях  $\Lambda_{\text{gh}} = \infty$  и скорость распада вакуума бесконечна. Это соответствует тому, что бесконечен объем группы Лоренца. Другими словами, в лоренц-инвариантных теориях над процессом (98) с определенными импульсами выходящих частиц можно сделать любое лоренцево преобразование (буст), так что фазовое пространство бесконечно. Не так обстоит дело в теориях с нарушением лоренц-инвариантности. В них фотоны, образованные в процессе (98), обладают энергией  $E_\gamma \lesssim \Lambda_{\text{gh}}$ , а их плотность в современной Вселенной и, таким образом, поток около Земли имеют порядок

$$F \simeq \Gamma t_0.$$

Поток на единицу энергии равен

$$\frac{dF}{dE_\gamma} (E_\gamma \sim \Lambda_{\text{gh}}) \simeq \frac{\Lambda_{\text{gh}}^7}{M_{\text{Pl}}^4} t_0.$$

Он должен быть меньше, чем дифференциальный поток, измеренный с помощью EGRET (Energetic Gamma-Ray Experiment Telescope):

$$\frac{dF}{dE_\gamma} = 7 \times 10^{-9} \left( \frac{E_\gamma}{450 \text{ МэВ}} \right)^{-2,1} \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1} \text{ ср}^{-1} \text{ МэВ}^{-1}.$$

Это требование дает [68]

$$\Lambda_{\text{gh}} \lesssim 3 \text{ МэВ}.$$

Таким образом, если в теории с нарушением лоренц-инвариантности есть духи, то масштаб обрезания частоты может быть относительно велик.

#### 4. Духовый конденсат: модификация гравитации без массы гравитона

Рассмотрим теперь пример УФ-стабильной теории, а именно модель "духового конденсата" [38]. Вопросы, обсуждавшиеся в разделе 3, — отсутствие дополнительной скалярной моды на фоне пространства Минковского, защита с помощью остаточной симметрии от ее появления на фоне искривленного пространства и из-за поправок высшего порядка — играют ведущую роль при построении этой модели.

Хотя в модели духового конденсата гравитон остается безмассовым, простота этой модели делает ее хорошим введением в более сложные модели массивной гравитации.

Как обсуждалось в разделе 3.2, для модификации гравитационного взаимодействия в ИК-области удобно ввести дополнительные скалярные поля. В простейшем случае это просто одно скалярное поле  $\phi$  (ср. с изложением в разделе 3.4) с действием, напоминающим (86),

$$S_\phi = \Lambda^4 \int d^4x \sqrt{-g} F(X), \quad (99)$$

где  $X$  дается первым из выражений (87),  $X = g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi / \Lambda^4$ . Из действия (99) следует полевое уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu [F_X(X) \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi] = 0, \quad (100)$$

где  $F_X = \partial F / \partial X$ . В пространстве-времени Минковского при выключенной гравитации уравнение (100) имеет решение, линейно возрастающее со временем ("духовый

конденсат"):

$$\phi_v = \alpha \Lambda^2 t, \quad (101)$$

где  $\alpha$  — произвольная постоянная. Этот фон, очевидно, нарушает лоренцеву симметрию. Симметрия относительно сдвигов по времени тоже нарушена, но диагональная комбинация трансляций по времени и сдвигов  $\phi$  на константу остается симметрией, так что имеется интеграл энергии. В "унитарной" калибровке  $\phi = \phi_v$  переменная  $X$  сводится к  $X = \alpha^2 g^{00}$  и действие (99) становится функцией  $g^{00}$ . Это действие инвариантно при преобразованиях пространственных координат, зависящих от точки пространства-времени:

$$x^i \rightarrow \tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x^i, t), \quad (102)$$

как упоминалось в конце раздела 3.3 (см. (81)). Данная симметрия играет важную роль при построении модели духового конденсата.

При учете обратной реакции духового конденсата на гравитационный фон параметр  $\alpha$  перестает быть произвольным. Для того чтобы пространство Минковского являлось решением уравнений Эйнштейна при  $\phi = \phi_v$ , тензор энергии-импульса для  $\phi_v$  должен обращаться в нуль,

$$T_{\mu\nu} = [2\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi F_X - \eta_{\mu\nu} F]_{\phi=\phi_v} = 0.$$

Это уравнение приводит к следующим двум условиям (ср. с (88)):

$$\begin{aligned} 2\alpha^2 F_X(\alpha^2) - F(\alpha^2) &= 0, \\ F(\alpha^2) &= 0. \end{aligned} \quad (103)$$

Второе из этих двух условий — это обычная подстройка космологической постоянной к нулю. Когда это условие выполнено, из первого из уравнений (103) следует, что  $F_X(\alpha^2) = 0$ . Мы будем предполагать, что экстремумы функции  $F(X)$  находятся при  $X \neq 0$ . Таким образом, параметр  $\alpha$  не равен нулю, и можно переопределить поля так, чтобы условия (103) выполнялись при  $\alpha = 1$ .

В расширяющейся Вселенной духовый конденсат автоматически оказывается в конечном итоге в точке  $F_X = 0$ . Это следует из полевого уравнения (100). Действительно, уравнение (100) можно рассматривать как уравнение ковариантного сохранения тока

$$J^\mu = F_X(X) g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi.$$

В космологическом контексте поле  $\phi$  считается зависящим только от времени, так что единственная ненулевая компонента этого тока — это плотность  $J^0$ . В силу ковариантного сохранения она, как и другие плотности, уменьшается во времени:

$$J^0 \propto \frac{1}{a^3},$$

отсюда следует, что  $F_X(X)$  на больших временах пренебрежимо мало.

В унитарной калибровке и в квадратичном порядке по возмущениям метрики  $h_{\mu\nu}$  действие (99) на фоне пространства Минковского принимает вид

$$S_\phi^{(2)} = \Lambda^4 \frac{F_{XX}}{2} \int d^4x h_{00}^2 = \frac{1}{2} M_{\text{Pl}}^2 m_0^2 \int d^4x h_{00}^2, \quad (104)$$

где  $F_{XX} = [d^2F/dX^2](\alpha = 1)$  — константа. При учете действия Эйнштейна–Гильберта получим формулу (74), в которой все массы кроме  $m_0$  равны нулю. Таким образом, на уровне действия со вторыми производными физических степеней свободы нет (ср. с результатами раздела 3.2).

В этом можно убедиться и в формализме Штюкельберга, сделав замену  $h_{00} \rightarrow 2(M_{\text{Pl}}m_0)^{-1}\hat{c}_0\pi$  в выражении (104). Для действия штюкельберговского поля  $\pi$  получим выражение

$$2 \int d^4x (\partial_0\pi)^2, \quad (105)$$

которое не содержит градиентного члена и описывает моду с дисперсионным соотношением

$$\omega^2 = 0. \quad (106)$$

Если бы действие модели духового конденсата содержало только вклад (99), то весь эффект заключался бы лишь в фиксации (частичной) калибровочной свободы ОТО, так что в секторе с начальным условием  $X = 1$  теория описывала бы эйнштейновскую гравитацию в некоторой калибровке. Эта ситуация специфична для модели духового конденсата; в разделе 5 мы увидим, что в общем случае модификация гравитации начинается с первого члена в разложении действия по производным.

Вырожденность действия (105) (отсутствие членов с пространственными производными) говорит о том, что нераспространяющаяся штюкельберговская мода может стать распространяющейся при добавлении поправок высшего порядка. Такие поправки являются обычными в эффективных низкоэнергетических теориях, но здесь они играют решающую роль. Симметрия (81) ограничивает общий вид этих поправок. На языке голдстоуновских полей вклады следующего порядка в действие содержат высшие производные голдстоуновского поля  $\phi$ , такие как  $\partial^2\phi$  и  $\partial_\mu\partial_\nu\phi$ , подавленные степенями  $\Lambda$ . При разложении до второго порядка по  $\pi$  эти члены превращают действие (105) в

$$2 \int d^4x \left\{ (\partial_0\pi)^2 + \frac{c_0}{\Lambda^2} (\partial_0^2\pi)^2 + \frac{c_1}{\Lambda^2} \partial_0^2\pi \partial_i^2\pi + \frac{c_2}{\Lambda^2} (\partial_i^2\pi)^2 + \dots \right\},$$

где  $c_i$  — численные коэффициенты, по порядку величины равные единице. Дисперсионное соотношение для штюкельберговской моды теперь приобретает вид

$$\omega^2 = \frac{c_0}{\Lambda^2} \omega^4 + \frac{c_1}{\Lambda^2} \omega^2 \mathbf{p}^2 + \frac{c_2}{\Lambda^2} \mathbf{p}^4. \quad (107)$$

Уравнение (107) имеет два решения. Первое решение

$$\omega^2 = \frac{\Lambda^2}{c_0} + O(\mathbf{p}^2)$$

не относится к делу, так как оно не входит в область применимости эффективной низкоэнергетической теории, т.е. для нее несправедливо  $\omega \ll \Lambda$ . Второе решение представляет собой модификацию дисперсионного соотношения  $\omega^2 = 0$ , которое превращается в

$$\omega^2 = \frac{c_2}{\Lambda^2} \mathbf{p}^4 + O\left(\frac{\mathbf{p}^6}{\Lambda^4}\right). \quad (108)$$

Это решение описывает медленно распространяющуюся моду [38], которая не является тахионом, если  $c_2 > 0$ . Согласно (105), эта мода — не духовая при  $F_{XX}(\alpha = 1) > 1$ . Следовательно, при больших пространственных импульсах теория свободна от патологий.

Мода (108) изменяет гравитационное взаимодействие (в частности, ньютоновский потенциал) на расстояниях, превышающих  $r_c = 1/m_0$ . С другой стороны, масштаб времен, на которых эти изменения формируются, параметрически больше,  $t_c = \Lambda/m_0^2$  [38]. Причина снова состоит в том, что модификация гравитации происходит лишь в сублидирующем порядке в разложении по производным. Когда масса  $m_0$  стремится к нулю, масштабы  $r_c$  и  $t_c$  стремятся к бесконечности и изменения плавно исчезают. В этом смысле явление ван Дама–Вельтмана–Захарова в модели духового конденсата отсутствует. Отметим, тем не менее, что в соответствии с (104) масса  $m_0$  связана с ультрафиолетовым масштабом как

$$m_0^2 M_{\text{Pl}}^2 = F_{XX} \Lambda^4.$$

Следовательно, предел нулевой массы соответствует пределу  $\Lambda \rightarrow 0$  (при фиксированной  $M_{\text{Pl}}$ ), так что область применимости низкоэнергетической эффективной теории в этом пределе стягивается к нулю.

В модели духового конденсата отсутствует и неустойчивость Бульвара–Дезера. В отличие от примера, приведенного в разделе 3.5, единственное имеющееся в рассматриваемой теории скалярное поле  $\pi$  на фоне плоского пространства имеет дисперсионное соотношение (107), что является следствием остаточной симметрии (102). На фоне слегка искривленного пространства это дисперсионное соотношение может получить добавки с малыми коэффициентами, зависящими от кривизны фонового пространства. Появление новых вкладов в дисперсионное соотношение, например члена пропорционального  $\mathbf{p}^2$  с отрицательным коэффициентом, может привести к тахионной неустойчивости при малых пространственных импульсах. Так и происходит на космологическом фоне [69], хотя эта неустойчивость не особенно опасна. С другой стороны, члены, вызванные малой кривизной фонового пространства, не могут изменить знак ведущего члена  $\omega^2$ , так что духом мода не становится. Ситуация, следовательно, отличается от случая моды Бульвара–Дезера в разделе 2.6, где одна из мод на фоне искривленного пространства с необходимостью являлась духом.

Модель духового конденсата и ее модификации обладают необычными свойствами. Некоторые из этих свойств представляют потенциальный интерес для феноменологии и космологии, другие служат примером новых явлений, которые могут возникнуть при нарушении лоренц-инвариантности. Опишем кратко некоторые из них.

Вследствие нарушения лоренц-инвариантности и смешивания медленно распространяющегося поля  $\pi$  с возмущениями метрики, гравитационные поля движущихся источников отличаются от гравитационных полей источников, которые покоятся относительно духового конденсата. В частности, имеется эффект памяти: движущиеся тела оставляют "звездные следы" в духовом конденсате [70, 71].

Сам по себе духовый конденсат можно рассматривать как материю с довольно необычными свойствами. В

частности, сгустки этой материи в принципе могут антигравитировать [38]. Более общее свойство состоит в том, что наличие в пространстве духового конденсата приводит к неустойчивости типа джинсовской, с временным масштабом, параметрически большим по сравнению с масштабом в случае идеальной жидкости с той же плотностью энергии [38]. Это свойство также связано с наличием медленно распространяющейся моды  $\pi$ .

Довольно богата и нелинейная динамика духового конденсата. В процессе эволюции духовый конденсат формирует каустики [72], во многом аналогичные каустикам в некоторых других скалярных теориях [73]. Вдали от каустики динамика духового конденсата совпадает с динамикой жидкости с уравнением состояния  $p \propto \rho^2$ . Другой возможный эффект — непертурбативная неустойчивость фона (101), приводящая к формированию микроскопических "дыр" с отрицательной энергией [74].

Нарушение лоренцевой симметрии заметно изменяет физику черных дыр по сравнению с таковой в ОТО. Наименее впечатляющий эффект — это аккреция духового конденсата на черную дыру [75, 76]. Более экзотичные возможности — нарушение черными дырами второго закона термодинамики [77], возможность вылета сигналов из черной дыры [78] и наличие у черной дыры волос [79].

Модели, интересные с космологической точки зрения, получаются при добавлении к действию потенциального члена, т.е. вместо (99) действие выбирается в виде

$$S_\phi = \Lambda^4 \int d^4x \sqrt{-g} [F(X) - V(\phi)].$$

Тогда и кинетический член  $F(X)$ , и потенциальный член  $V(\phi)$  дают вклады в тензор энергии-импульса. Поле  $\phi$  все еще возрастает, хотя и не вполне в соответствии с (101). Это может быть использовано при построении моделей инфляции с духовым конденсатом в качестве инфлатона [80] и моделей темной энергии, обеспечивающей современное ускоренное расширение Вселенной [81, 82]. Интересно, что поле  $\phi$  возрастает, даже если при его увеличении возрастает потенциал; в этом случае поле  $\phi$  движется *вверх* по потенциалу. Это приводит к фантомному поведению [69, 83], которое состоит в том, что плотность энергии возрастает во времени, а уравнение состояния соответствует  $p = w\rho$  с  $w < -1$  (в общем случае  $w$  зависит от времени). Это — один из немногих примеров фантомной материи без ультрафиолетовых патологий: в большинстве остальных случаев фантомное уравнение состояния получается в теориях с наличием в УФ-области неприемлемых духов и/или тахионов (см., однако, [84, 85]). Если фантомное поведение имеет место на инфляционной стадии эволюции Вселенной, то спектр первичных тензорных возмущений наклонен в область малых длин волн (в противоположность наклону спектра в область больших длин волн, который предсказывается в теориях, где в качестве инфлатона выступает обычное скалярное поле). Темная энергия, приводящая к современному ускоренному расширению Вселенной, тоже может иметь фантомное уравнение состояния, что в принципе может быть обнаружено в будущих наблюдениях сверхновых типа Ia (см., например, [86]). Вероятно, наиболее удивительно то, что фантом может приводить к смене сжатия расширением

в космологии: в ОТО из соотношения  $p < -\rho$  следует

$$\dot{H} > 0,$$

где  $H$  — параметр Хаббла, так что становится возможным переход от  $H < 0$  к  $H > 0$ . Решения такого типа были найдены [69, 87] и изучены [88, 89] в моделях духового конденсата с подходящими потенциалами  $V(\phi)$ . Смена сжатия расширением в этих моделях происходит контролируемым и непротиворечивым образом.

## 5. Минимальная модель с массивным гравитоном

### 5.1. Линеаризованная теория

Интересная теория [40–42], без явных патологий и с массивными гравитонами, получается, если рассмотреть остаточную калибровочную симметрию (83), которая приводит к условию  $m_1 = 0$ . Эта симметрия,  $x^i \rightarrow x^i + \zeta^i(t)$ , переходит в следующую симметрию голдстоуновского лагранжиана:

$$\phi^i \rightarrow \phi^i + \Xi^i(\phi^0), \quad (109)$$

с тремя произвольными функциями  $\Xi^i$ . На уровне первых производных существуют две комбинации голдстоуновских полей, инвариантные относительно этой симметрии:

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{\Lambda^4} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi^0 \partial_\nu \phi^0, \\ W^{ij} &= \frac{1}{\Lambda^4} \left( g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi^i \partial_\nu \phi^j - g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi^0 \partial_\nu \phi^i \frac{g^{\lambda\rho} \partial_\lambda \phi^0 \partial_\rho \phi^j}{X} \right) = \\ &= Y^{ij} - \frac{V^i V^j}{\Lambda^4 X}, \end{aligned}$$

где  $Y^{ij}$  и  $V^i$  определены в (87). Следовательно, на этом уровне голдстоуновское действие имеет вид

$$S_\phi = \int d^4x \sqrt{-g} F(X, W^{ij}), \quad (110)$$

где индексы  $i, j$  сворачиваются с помощью  $\delta_{ij}$ .

Обсудим сначала эту теорию на линеаризованном уровне на фоне пространства Минковского. Фоновые голдстоуновские поля даются выражениями (84). Переопределением полей добьемся выполнения соотношения  $a = b = 1$  и запишем фоновые поля в виде

$$\bar{\phi}^0 = \Lambda^2 t, \quad (111)$$

$$\bar{\phi}^i = \Lambda^2 x^i. \quad (112)$$

Из (88) получаем, что тензор энергии-импульса этой конфигурации обращается в нуль при условии

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} F + \frac{\partial F}{\partial X} &= 0, \\ \frac{1}{2} F \delta_{ij} + \frac{\partial F}{\partial W^{ij}} &= 0 \end{aligned} \quad (113)$$

при значениях  $X = 1$ ,  $W^{ij} = -\delta^{ij}$ . Включая в рассмотрение возмущения метрики и используя унитарную кали-



бровку  $\phi^x = \bar{\phi}^x$ , можно найти, что на фоне пространства Минковского теория представляет собой теорию гравитации с нарушающим лоренцеву симметрию массовым членом (74) при единственном ограничении

$$m_1 = 0.$$

Остальные массовые параметры являются независимыми друг от друга и выражаются через  $F$  и ее первые и вторые производные при  $X = 1$ ,  $W^{ij} = -\delta^{ij}$ . Следовательно, на уровне голдстоуновского действия с первыми производными ни в векторном, ни в скалярном секторах распространяющихся мод нет, как обсуждалось в разделе 3.2.2, тогда как тензорные гравитоны (две степени свободы) имеют массу  $m_G = m_2$ . В этом смысле данную модель можно рассматривать как минимальную модель массивного гравитона.

Поучительно исключить гравитацию и рассмотреть голдстоуновское действие этой теории на фоне пространства Минковского, но не в точке (113). Квадратичное действие для возмущений  $\pi^x = \phi^x - \bar{\phi}^x$  получается из (110) и имеет следующий общий вид:

$$L_\pi = \frac{a}{2} (\dot{\pi}^0)^2 - \frac{b}{2} (\partial_i \pi^0)^2 + c \pi^0 \partial_i \pi^i + \frac{d_1}{2} (\partial_i \pi^i)^2 + \frac{d_2}{2} (\partial_i \pi^j)^2, \quad (114)$$

где  $b = 2(\partial F / \partial X)(\bar{\phi})$ , а постоянные  $a, c, d_1, d_2$  содержат вторые производные  $F$  при  $\phi = \bar{\phi}$ . Легко видеть, что поля  $\pi^i$  — нединамические. Их уравнения движения в векторном секторе дают  $\pi^{Ti} = 0$ , где  $\pi^{Ti}$  — поперечная часть,  $\partial_i \pi^{Ti} = 0$ . Отсюда следует, что в векторном секторе нет нетривиальных мод даже для произвольного линейно возрастающего фона. Уравнение движения для продольной компоненты  $\pi^i$  дает

$$\pi^i = \text{const} \frac{\partial_i}{\Delta} \dot{\pi}^0.$$

Подставляя это выражение в уравнение движения для  $\pi^0$ , получим

$$\tilde{a} \ddot{\pi}^0 - b \Delta \pi^0 = 0,$$

где  $\tilde{a}$  — комбинация констант  $a, c, d_1$  и  $d_2$ . Для произвольного линейно возрастающего голдстоуновского фона дисперсионное соотношение имеет вид  $\omega^2 = \text{const} \mathbf{p}^2$ . Видно, что при подходящем выборе параметров эта мода не является ни тахионом, ни духом [40, 41].

При выполнении условия

$$\frac{\partial F}{\partial X} = 0 \quad (115)$$

дисперсионное соотношение на уровне действия с первыми производными имеет вид  $\omega^2 = 0$ . Фактически эта особая точка совпадает с точкой (113), так как здесь мы пренебрегаем гравитацией и, следовательно, не можем сделать различия между разными значениями  $F$  при  $\phi = \bar{\phi}$ . В общем, ситуация в скалярном и векторном секторах весьма похожа на то, что происходит в теории духового конденсата.

Отсутствие распространяющихся мод, связанных с полями  $\pi^i$  (в отличие от  $\pi^0$ ), отнюдь не случайно. Если

задан фон (111), то симметрия (109) означает, что теория инвариантна относительно инфинитезимальных преобразований

$$\pi^i \rightarrow \pi^i + \Xi^i(t).$$

Отсюда следует, что на уровне первых производных лагранжиан не содержит производных по времени от полей  $\pi^i$ , так что эти поля нединамические. Это, конечно, явно видно из (114). Итак, дисперсионное соотношение  $\mathbf{p}^2 = 0$ , свойственное нераспространяющимся модам, в этой модели защищено симметрией (109).

Последнее наблюдение оказывается полезным при обсуждении вопроса об ультрафиолетовой чувствительности в этой модели. В предположении, что члены с высшими производными инвариантны относительно симметрии (109), эти члены не могут содержать  $\partial_0^2 \phi^i$  (в системе отсчета, в которой фон  $\bar{\phi}^0$  имеет вид (111)) и в терминах возмущений  $\pi^x$  представляют собой квадратичные комбинации величин

$$A^{-1} \partial_0 \partial_j \pi^i, \quad A^{-1} \partial_j \partial_k \pi^i, \quad A^{-1} \partial_0^2 \pi^0, \\ A^{-1} \partial_0 \partial_j \pi^0, \quad A^{-1} \partial_j \partial_k \pi^0.$$

При добавлении этих членов в лагранжиан (114) поля  $\pi^i$  формально становятся динамическими, однако можно непосредственно убедиться в том, что уравнение для соответствующего дисперсионного соотношения выражается в виде

$$\mathbf{p}^2 [\omega^2 - \text{const} A^2 + O(\mathbf{p}^2)] = 0.$$

Следовательно, моды, которые могли бы быть распространяющимися, имеют дисперсионное соотношение

$$\omega^2 = \text{const} A^2 + O(\mathbf{p}^2).$$

Так как частоты имеют порядок ультрафиолетового масштаба обрезания, данные моды на самом деле отсутствуют в низкоэнергетической теории. В этом смысле теория УФ-стабильна: при включении членов с высшими производными остается только мода с дисперсионным соотношением  $\mathbf{p}^2 = 0$ .

Здесь стоит обсудить физическую интерпретацию мод с дисперсионным соотношением  $\mathbf{p}^2 = 0$ . Их можно считать степенями свободы с бесконечной скоростью распространения (в отличие от скорости моды духового конденсата, которая на уровне первых производных является нулевой, а за счет членов с высшими производными становится немного отличной от нуля). Физически такие моды описывают звуковые волны, проходящие через жесткую систему координат, заданную в пространстве функциями  $\phi^i$ . Жесткость этой системы обеспечивается симметрией (83) и SO(3)-симметрией голдстоуновского действия, что позволяет двигать и вращать эту систему только как единое целое. Бесконечно быстро распространяющиеся моды не вызывают нарушения причинности при отсутствии лоренц-инвариантности, но разрешают мгновенную передачу информации. Последнее приводит ко многим необычным эффектам [77, 79]. Подробное изучение свойств таких мод в упрощенной модели массивной квантовой электродинамики (КЭД) можно найти в [90, 91].

Члены высшего порядка важны также для того, чтобы поле  $\pi^0$  оставалось динамическим, когда фон удовлетворяет (115). Тогда дисперсионное соотношение переходит в

$$\omega^2 = \text{const} \frac{\mathbf{p}^4}{L^2}. \quad (116)$$

Таким образом, спектр эффективной низкоэнергетической теории здесь тот же, что и в случае духового конденсата, за исключением того, что в данной модели тензорные гравитоны имеют массу.

Симметрия (109) также защищает теорию от неустойчивости Бульвара – Дезера. На фоне пространства, близкого к пространству Минковского, и для фоновых полей, близких к (111), (112), можно выбрать систему отсчета, в которой фон  $\bar{\phi}^0$  имеет в точности вид (111). В такой системе отсчета проведенный выше анализ остается справедливым: поля  $\pi^i$  в низкоэнергетической эффективной теории нединамические, по крайней мере при  $\omega^2, \mathbf{p}^2 \gg m_G^2$ , и остается одна динамическая мода, связанная с полем  $\pi^0$ . Ее дисперсионное соотношение совпадает с (116) с точностью до поправок, пропорциональных отличию фонового пространства от пространства Минковского.

В заключение этого раздела сделаем отступление, касающееся теории, которая обладает многими свойствами, присущими рассмотренной здесь модели, но получается [92] в совершенно ином контексте биметрических теорий [93]. В ней присутствуют два симметричных тензорных поля,  $g_{1\mu\nu}$  и  $g_{2\mu\nu}$ , каждое из которых обладает собственным действием Эйнштейна – Гильберта. Теория содержит их взаимодействие без производных,

$$S_{\text{int}} = \int d^4x (g_1 g_2)^{1/4} V(g_{1\mu\nu}, g_{2\lambda\rho}). \quad (117)$$

Вся теория считается инвариантной относительно диффеоморфизмов пространства-времени. С учетом точной подстройки, обнуляющей космологическую постоянную, эта теория допускает решение, нарушающее лоренцеву симметрию, в котором обе метрики плоские, но не пропорциональные друг другу [92]; в некоторой системе отсчета  $g_{1\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ , а  $g_{2\mu\nu} = a^2 \text{diag}(c^2, -1, -1, -1)$ . Смешивающее слагаемое (117) приводит к нарушающим лоренц-инвариантность массовым членам в действии для возмущений относительно этого фонового пространства. В секторе тензорных возмущений есть два поперечных бесследовых гравитона, один из которых является безмассовым, а другой обладает ненулевой массой. При достаточно высоких импульсах эти гравитоны распространяются с разными скоростями,  $v_1 = 1$ ,  $v_2 = c$ , и осциллируют между собой. Интересно, что инвариантность исходной теории относительно диффеоморфизмов накладывает некоторые ограничения на массовые слагаемые, одно из которых аналогично условию  $m_1 = 0$ , определяющему модель, которую мы обсуждали в этом разделе. В результате никаких распространяющихся мод, кроме двух поперечных бесследовых гравитонов, нет, если только в действие (117) не добавлять члены с производными. На линеаризованном уровне гравитационный потенциал между массивными телами в этой биметрической теории на фоне, нарушающем лоренц-инвариан-

ность, в общем случае имеет вид (132), но от линейно возрастающей части можно избавиться, потребовав определенной симметрии относительно растяжений. Все эти особенности являются прямыми аналогами свойств модели, изучаемой в этом разделе.

## 5.2. Феноменология

Можно ожидать, что аналогично тому, как это происходит в стандартной теории поля, отличная от нуля масса гравитона приведет к экспоненциальному убыванию гравитационного потенциала на расстояниях, больших обратной массы гравитона. Последняя тогда была бы сильно ограничена экспериментальными данными. В модели, описываемой действием (110), дело обстоит *не так* из-за нарушения лоренц-инвариантности. Далее мы увидим, что гравитационный потенциал в линейном приближении не изменяется, по крайней мере в некоторой области параметров. В этой области поведение модели во многих отношениях подобно ОТО и может быть феноменологически приемлемым. В то же время могут существовать многие интересные и потенциально измеримые эффекты, один из которых — само отличие от нуля массы гравитона.

**5.2.1. Закон Ньютона.** Закон Ньютона получается из ОТО в линейном приближении. Чтобы вывести его аналог в модели с действием (110), полезно вернуться к унитарной калибровке, в которой отсутствуют возмущения голдстоуновских полей, так что все возмущения содержатся в метрике. Тогда сравнение с ОТО не будет представлять труда. Как и в разделе 2.1, удобно разложить возмущения метрики согласно (1). Квадратичная часть действия имеет вид

$$L^{(2)} = L_{\text{EH}}^{(2)} + L_m + L_s, \quad (118)$$

где  $L_{\text{EH}}^{(2)}$ ,  $L_m$  и  $L_s$  возникают из действия Эйнштейна – Гильберта, массового члена и источника соответственно. Слагаемое Эйнштейна – Гильберта дается выражением (6), а массовый член и член с источником выражаются в виде

$$L_m = M_{\text{Pl}}^2 \left\{ -\frac{1}{4} m_2^2 (h_{ij}^{\text{TT}})^2 - \frac{1}{2} m_2^2 (\partial_i F_j)^2 + m_0^2 \varphi^2 + (m_3^2 - m_2^2) (\Delta E)^2 - 2(3m_3^2 - m_2^2) \psi \Delta E + 3(3m_3^2 - m_2^2) \psi^2 + 2m_4^2 \Delta E - 6m_4^2 \varphi \psi \right\}, \quad (119)$$

$$L_s = -T_{00} (\varphi + \partial_0 B - \partial_0^2 E) - T_{ii} \psi + (S_i + \partial_0 F_i) T_{0i} + \frac{1}{2} h_{ij} T_{ij}. \quad (120)$$

Обозначения для масс те же, что и в (74); массы  $m_i^2$  представляют собой комбинации первых и вторых производных функции  $F$ , параметра  $L$  и массы Планка. Как было выяснено ранее, их общий масштаб — это  $m \sim L^2/M_{\text{Pl}}$ . Источник содержит внешний тензор энергии-импульса, который мы считаем сохраняющимся. Все комбинации возмущений метрики, умножаемые на компоненты  $T_{\mu\nu}$ , калибровочно инвариантны. Та из них, которая умножается на  $T_{00}$ ,

$$\Phi \equiv \varphi + \partial_0 B - \partial_0^2 E,$$

играет роль ньютоновского потенциала в нерелятивистском пределе ОТО.

В тензорном секторе есть только поперечные бесследовые возмущения  $h_{ij}^{TT}$  (две степени свободы). Уравнения для этих полей совпадают с уравнениями для массивного поля с массой  $m_G = m_2$ . Отметим, что массивное тензорное поле в теории с нарушением лоренц-инвариантности не обязательно имеет пять поляризований. Примеры этого явления уже обсуждались в разделах 3 и 4.

В векторном секторе уравнения такие:

$$-\Delta(S_i + \partial_0 F_i) = -T_{0i}, \quad (121)$$

$$\partial_0 \Delta(S_i + \partial_0 F_i) + m_2^2 \Delta F_i = \partial_0 T_{0i}. \quad (122)$$

Дифференцируя (121) по времени и складывая с уравнением (122), получим

$$F_i = 0$$

при условии, что  $m_2^2 \neq 0$ . Таким образом, поведение векторного сектора модели такое же, как и в теории Эйнштейна в калибровке  $F_i = 0$ . В векторном секторе распространяющихся мод нет, а взаимодействие источников не изменяется, если не учитывать нелинейные эффекты и члены высшего порядка по производным.

Потенциал взаимодействия статических источников (потенциал Ньютона) определяется скалярным сектором модели. Полевые уравнения для скалярных возмущений имеют вид

$$2\Delta\psi + m_0^2 \varphi + m_4^2 \Delta E - 3m_4^2 \psi = \frac{T_{00}}{2M_{\text{Pl}}^2}, \quad (123)$$

$$2\Delta\Phi - 2\Delta\psi + 6\partial_0^2 \psi - (3m_3^2 - m_2^2) \Delta E + 3(3m_3^2 - m_2^2) \psi - 3m_4^2 \varphi = \frac{T_{ii}}{2M_{\text{Pl}}^2}, \quad (124)$$

$$-2\Delta\partial_0^2 \psi + (m_3^2 - m_2^2) \Delta^2 E - (3m_3^2 - m_2^2) \Delta\psi + m_4^2 \Delta\varphi = -\frac{\partial_0^2 T_{00}}{2M_{\text{Pl}}^2}, \quad (125)$$

$$2\Delta\partial_0 \psi = \frac{\partial_0 T_{00}}{2M_{\text{Pl}}^2}. \quad (126)$$

Из уравнения (126) вытекает, что

$$\psi = \frac{1}{\Delta} \frac{T_{00}}{4M_{\text{Pl}}^2} + \psi_0(x^i), \quad (127)$$

где  $\psi_0(x^i)$  — произвольная, не зависящая от времени функция. Из уравнений (123) и (125) можно получить

$$\varphi = \frac{2m_2^2 m_4^2}{\mathfrak{M}} \psi + \frac{2(m_3^2 - m_2^2)}{\mathfrak{M}} \Delta\psi_0, \quad (128)$$

$$\Delta E = \left(3 - \frac{2m_0^2 m_2^2}{\mathfrak{M}}\right) \psi - \frac{2m_4^2}{\mathfrak{M}} \Delta\psi_0, \quad (129)$$

где

$$\mathfrak{M} = m_4^4 - m_0^2(m_3^2 - m_2^2).$$

Наконец, подставляя выражения (127)–(129) в уравнение (124), найдем калибровочно-инвариантный потен-

циал  $\Phi$ :

$$\Phi = \frac{1}{\Delta} \frac{T_{00} + T_{ii}}{4M_{\text{Pl}}^2} - 3 \frac{\partial_0^2}{\Delta^2} \frac{T_{00}}{4M_{\text{Pl}}^2} + \left(3 - \frac{2m_0^2 m_2^2}{\mathfrak{M}}\right) \times \times \frac{m_2^2}{\Delta} \left(\frac{1}{\Delta} \frac{T_{00}}{4M_{\text{Pl}}^2} + \psi_0\right) + \left(1 - \frac{2m_2^2 m_4^2}{\mathfrak{M}}\right) \psi_0. \quad (130)$$

Первые два члена в правой части выражения (130) — стандартные вклады ОТО, причем первый из них в нерелятивистском пределе переходит в ньютоновский потенциал. Таким образом, за исключением членов, зависящих от  $\psi_0$ , калибровочно-инвариантные потенциалы  $\Phi$  и  $\psi$  отличаются от их аналогов в ОТО  $\Phi_E$  и  $\psi_E$  наличием зависящего от массы третьего слагаемого в правой части выражения (130),

$$\psi = \psi_E, \quad \Phi = \Phi_E + \left(3 - \frac{2m_0^2 m_2^2}{\mathfrak{M}}\right) \frac{m_2^2}{\Delta^2} \frac{T_{00}}{4M_{\text{Pl}}^2}. \quad (131)$$

Второй член в правой части второго из соотношений (131) исчезает при однородном стремлении всех масс к нулю, так что потенциалы  $\psi$  и  $\Phi$  в безмассовом пределе те же, что и в ОТО. Это означает, что явление ВДВЗ в модели отсутствует.

Для статического источника выражение (131) приводит к модификации ньютоновского потенциала точечной массы  $M$ , который в координатном пространстве теперь принимает вид

$$\Phi = G_N M \left(-\frac{1}{r} + \mu^2 r\right), \quad (132)$$

где

$$\mu^2 = -\frac{1}{2} m_2^2 \left(3 - \frac{2m_0^2 m_2^2}{\mathfrak{M}}\right). \quad (133)$$

Так как потенциал возрастает, теория возмущений перестает работать на расстояниях  $r \gtrsim 1/(G_N M \mu^2)$ . Это было бы неприемлемым для относительно больших масс гравитона. Однако модификация потенциала отсутствует в случае  $3\mathfrak{M} = 2m_0^2 m_2^2$  (и  $\mathfrak{M} \neq 0$ ). В дальнейшем мы увидим, что последнее условие может быть обеспечено определенной симметрией относительно растяжений<sup>19</sup>, которая автоматически возникает в космологии в пределе больших времен, т.е. на поздних стадиях космологической эволюции.

Свобода выбора не зависящей от времени функции  $\psi_0(x)$ , которая входит в гравитационные потенциалы, соответствует наличию скалярной моды с дисперсионным соотношением  $\omega^2 = 0$ . В разделе 5.1 мы видели, что эта мода является аналогом моды духового конденсата и при учете в действии членов с высшими производными становится динамической с дисперсионным соотношением  $\omega^2 \propto \mathbf{p}^4$ . Величина  $\psi_0$  определяется начальными условиями. В линейном режиме отличное от нуля значение  $\psi_0$  может означать существование входящей

<sup>19</sup> Как и другие симметрии, которые мы обсуждали в разделе 3.3, такую симметрию (см. (140)) можно рассматривать как ненарушенную часть инвариантности относительно диффеоморфизмов.

волны духового конденсата. Таким образом, для определения потенциала между источниками физически оправдан выбор  $\psi_0(x^i) = 0$ . Заметим, впрочем, что этот выбор является не столь очевидным в космологическом контексте.

**5.2.2. Космологические решения.** На момент написания этого обзора для модели (110) известны только пространственно плоские космологические решения. Плоский космологический анзац<sup>20</sup> таков:

$$\begin{aligned} ds^2 &= dt^2 - a^2(t) dx_i^2, \\ \phi^0 &= \phi(t), \quad \phi^i = A^2 x^i. \end{aligned} \quad (134)$$

Для него  $W^{ij} = -a^{-2}\delta^{ij}$ , так что функция  $F$  в (110) зависит только от  $X$  и  $a$ ,  $F = F(X, a)$ . Уравнения Эйнштейна сводятся к уравнению Фридмана

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \frac{1}{6M_{\text{Pl}}^2} \{\rho_m + 2A^4 X F_X - A^4 F\} \equiv \\ &\equiv \frac{1}{6M_{\text{Pl}}^2} \{\rho_m + \rho_1 + \rho_2\}, \end{aligned} \quad (135)$$

где  $\rho_m$  — плотность энергии без учета голдстоуновских полей. Полевое уравнение для  $\phi^0$  имеет вид

$$\partial_t(a^3 \sqrt{X} F_X) = 0. \quad (136)$$

Уравнения для  $\phi^i$  удовлетворяются автоматически. В принципе эту систему уравнений можно непосредственно решить для произвольной функции  $F(X, a)$ . Интегрирование уравнения (136) дает алгебраическое уравнение, которое определяет  $X$  как функцию масштабного фактора  $a$ . Это превращает уравнение (135) в замкнутое уравнение для масштабного фактора  $a(t)$ .

С точки зрения космологических приложений, особый интерес представляют решения, в которых масштабный фактор  $a(t)$  на больших временах стремится к бесконечности. Так как массы гравитона представляют собой линейные комбинации функции  $F(X, a)$  и ее производных, можно задаться вопросом: остаются ли они конечными или стремятся в этом пределе к нулю и остается ли применимым описание с помощью эффективной теории? Действительно, как следует из уравнения (136), при больших временах либо  $X$ , либо  $F_X$  стремится к нулю, подсказывая, что массы также могут стремиться к нулю.

Рассмотрим конкретный класс функций  $F$  таких, для которых функция  $X(a)$ , найденная из уравнения (136), при больших  $a$  асимптотически стремится к некоторой степени  $a$ . Это не очень ограничивающее предположение — например, ему удовлетворяет любая алгебраическая функция  $F(X, a)$ . Тогда существует действительная постоянная  $\gamma$  такая, при которой комбинация  $X^\gamma/a^2$  стремится к ненулевому значению при  $a \rightarrow \infty$ . Из уравнения (136) следует  $X F_X = \text{const} \sqrt{X}/a^3$ , что определяет зависимость компоненты энергии  $\rho_1$  от масштабного

фактора:

$$\rho_1 = \text{const} \frac{1}{a^{3-1/\gamma}}. \quad (137)$$

Соотношение (137) обобщает поведение, обнаруженное в модели духового конденсата, где плотность энергии духового конденсата изменяется как  $1/a^3$  [38] (такое поведение можно получить из (137) при  $\gamma \rightarrow \infty$ ).

При  $\gamma > 1/3$  плотность энергии  $\rho_1$  ведет себя как компонента темной энергии с отрицательным давлением. Ее уравнение состояния изменяется от уравнения для холодной темной материи,  $w = 0$  (при  $\gamma = +\infty$ ), до уравнения для космологической постоянной,  $w = -1$  (при  $\gamma = 1/3$ ). При  $0 < \gamma < 1/3$  член  $\rho_1$  возрастает с увеличением  $a$ . Это соответствует компоненте плотности энергии с сильно отрицательным уравнением состояния,  $w < -1$ . Без точной подстройки этот вклад не может быть сокращен членом  $\rho_2$ , так что параметр Хаббла расходится при  $a \rightarrow \infty$ , приводя к нарушению условий применимости низкоэнергетической эффективной теории и быстрым неустойчивостям [94]. В дальнейшем мы предполагаем, что  $\gamma$  не принадлежит этому диапазону. При  $\gamma < 0$  плотность энергии  $\rho_1$  соответствует жидкости с положительным давлением.

Для того чтобы увидеть, что масса гравитона остается конечной, а описание с помощью эффективной низкоэнергетической теории — справедливым в пределе  $a \rightarrow \infty$ , удобно заменить  $X$  новой переменной  $Z = X^\gamma/a^2$ . Функция  $F(X, a)$  становится функцией от  $Z$  и  $a$ ,  $\tilde{F}(Z, a) = F(Z^{1/\gamma} a^{2/\gamma}, a)$ . Отметим, что  $\tilde{F}(Z, a)$  удовлетворяет соотношению  $\gamma Z \tilde{F}_Z = X F_X$ , где  $\tilde{F}_Z = \partial \tilde{F} / \partial Z$ . В этих обозначениях уравнение (136) принимает вид

$$\gamma a^{3-(1/\gamma)} Z^{1-(1/2\gamma)} \tilde{F}_Z(Z, a) = A, \quad (138)$$

где  $A$  — постоянная интегрирования. Уравнение (138) определяет  $Z$  как функцию  $a$ . Данная зависимость по построению такова, что  $Z(a \rightarrow \infty) = Z_0$ , где  $Z_0$  — некоторая константа.

Если, кроме того, предположить, что функция  $\tilde{F}(Z, a)$  регулярна при  $a \rightarrow \infty$ , то на больших временах получим

$$F(X, a) = \tilde{F}(Z, a) \rightarrow F_0(Z). \quad (139)$$

В терминах исходных переменных (139) означает, что в пределе  $a \rightarrow \infty$  функция  $F(X, W^{ij})$  зависит только от комбинации  $X^\gamma W^{ij}$ . Это соответствует следующей симметрии голдстоуновского действия относительно растяжений:

$$\begin{aligned} \phi_0 &\rightarrow \lambda \phi_0, \\ \phi_i &\rightarrow \lambda^{-\gamma} \phi_i, \end{aligned} \quad (140)$$

что в унитарной калибровке эквивалентно следующей ненарушенной части инвариантности относительно диффеоморфизмов:  $t \rightarrow \lambda t, x^i \rightarrow \lambda^{-\gamma} x^i$ . В этом случае имеем

$$\rho_2 = -A^4 F_0(Z_0).$$

Последнее выражение ведет себя как космологическая постоянная (в предположении, что  $F_0(Z_0) \neq 0$ ). Аналогично, при  $a \rightarrow \infty$  массы гравитона становятся функциями  $Z_0$  и в общем случае остаются конечными.

Модели, удовлетворяющие (139), обладают интересным свойством, которое является следствием симметрии

<sup>20</sup> В принципе можно написать более общий анзац для скалярных полей, зависящих от времени, а именно  $\phi^i = A^2 C(t) x^i$ , где  $C(t)$  — произвольная функция времени. Для моделей, инвариантных относительно симметрии (140), которые мы в основном и будем рассматривать, этот анзац приводит к той же космологической эволюции, что и анзац (134) (подробнее см. в [41]).

(140). Легко проверить, что (140) влечет за собой следующие соотношения между массами гравитона в пространстве Минковского:

$$m_0^2 = -3\gamma m_4^2, \quad \gamma(m_2^2 - 3m_3^2) = m_4^2. \quad (141)$$

Соотношения (141) гарантируют, что параметр  $\mu^2$ , определяемый формулой (133), равен нулю, т.е. поправка к ньютоновскому потенциалу (последнее слагаемое в (131)) обращается в нуль. Таким образом, без учета членов с высшими производными на больших временах модификация гравитации на линейном уровне заключается только в ненулевых массах двух поляризацій гравитона.

Особенно прост случай, в котором функция  $F$  зависит только от комбинации

$$Z^{ij} = X^\gamma W^{ij}. \quad (142)$$

Если  $\gamma > 1/3$  или  $\gamma < 0$ , то эволюция приводит систему в точку  $\tilde{F}_Z = 0$ , в полной аналогии с моделью духового конденсата. В случае  $0 < \gamma < 1/3$  и регулярной  $\tilde{F}$  величина  $Z^{ij}$  расходится при больших  $a$ . Это делает низкоэнергетическую эффективную теорию неприменимой.

**5.2.3. Массивные гравитоны.** Рассмотрим подробнее свойства массивных гравитонов, а именно экспериментальные ограничения на массу гравитона и возможность рождения гравитонов в ранней Вселенной. Для простоты в этом разделе мы ограничимся моделью с действием

$$S_G = A^4 \int d^4x \sqrt{-g} F(Z^{ij}), \quad (143)$$

где  $Z^{ij}$  дается выражением (142). В этой модели на линейном уровне поправок в ньютоновский потенциал нет, так что модель автоматически согласуется с тестами линеаризованной гравитации, основанными на наблюдениях Солнечной системы и экспериментах типа Кавендиша [95]. Ограничения на массу гравитона возникают из рассмотрения излучения и/или распространения гравитационных волн.

Наблюдения замедления орбитального движения в системах двойных пульсаров [96] рассматриваются как косвенное доказательство существования гравитационных волн. Согласие этих наблюдений с ОТО означает, что масса гравитона не может быть больше характерной частоты испускаемых гравитационных волн. Эта частота определяется периодом орбитального движения, который по порядку величины равен 10 часам, что приводит к следующему ограничению на массу гравитона:

$$\frac{m_G}{2\pi} \equiv v_G \lesssim 3 \times 10^{-5} \text{ Гц} \approx (10^{15} \text{ см})^{-1} \sim (70 \text{ а.е.})^{-1}. \quad (144)$$

Таким образом, максимальная разрешенная масса гравитона сравнима с величиной, обратной размеру Солнечной системы, что по космологическим меркам является очень большой массой (малым расстоянием). Гравитоны с такой массой могут быть кандидатами в частицы темной материи, если они в достаточном количестве рождаются в ранней Вселенной. Действительно, если масса гравитона достаточно велика, так что  $(mv)^{-1} \lesssim 1 \text{ кпк} \sim 3 \times 10^{21} \text{ см}$ , где  $v \sim 10^{-3}$  — характерная скорость в гало галактик, то массивные гравитоны могут

группироваться в галактиках и служить темной материей в галактических гало.

Оценим количество реликтовых массивных гравитонов. Массивные гравитоны описываются поперечным бесследовым возмущением метрики,  $h_{ij}^{\text{TT}}$ . Квадратичное действие для  $h_{ij}$  (индекс ТТ мы далее опускаем) в расширяющейся Вселенной имеет следующий вид:

$$M_{\text{Pl}}^2 \int d^3k d\eta a^2(\eta) [(h'_{ij})^2 - (\partial_k h_{ij})^2 - m_G^2 a^2(\eta) h_{ij}^2], \quad (145)$$

где  $\eta$  — конформное время, а штрих обозначает  $\partial/\partial\eta$ . Выражение (145) имеет вид действия для минимально взаимодействующего массивного скалярного поля. Поэтому аналогично скалярным бозонам массивные гравитоны интенсивно рождаются при инфляции (ср. с [97]).

Для определенности рассмотрим сценарий, в котором параметр Хаббла  $H_i$  постоянен во время инфляции. Этот сценарий может реализоваться, например, в моделях гибридной инфляции [98]. Во-первых, нужно проверить то, что феноменологически интересные значения параметров соответствуют режиму ниже масштаба обрезания эффективной теории, т.е.  $H_i \lesssim \Lambda$ . Это означает, что энергетический масштаб инфляции  $E_i \sim \sqrt{H_i M_{\text{Pl}}}$  должен удовлетворять соотношению

$$E_i < m_G^{1/4} M_{\text{Pl}}^{3/4} \approx 10^7 \text{ ГэВ} (m_G \times 10^{15} \text{ см})^{1/4}. \quad (146)$$

Данное значение достаточно велико, чтобы быть совместным со всеми остальными космологическими требованиями (в частности, с требованием возможности успешного бариогенезиса) даже при массе гравитона порядка современного параметра Хаббла.

Рассмотрим теперь рождение массивных гравитонов. В предположении упомянутого выше сценария инфляции спектр возмущений для массивных гравитонов совпадает со спектром для минимально взаимодействующего массивного скалярного поля в пространстве де Ситтера [99]:

$$\langle h_{ij}^2 \rangle \simeq \frac{1}{4\pi^2} \left( \frac{H_i}{M_{\text{Pl}}} \right)^2 \int \frac{dk}{k} \left( \frac{k}{H_i} \right)^{2m_G^2/(3H^2)}. \quad (147)$$

Важно, что при достаточно долгой инфляции современные физические импульсы большинства гравитонов меньше современного параметра Хаббла.

Возмущения метрики остаются замороженными до тех пор, пока параметр Хаббла не станет меньше массы гравитона, после чего начинают осциллировать с амплитудой, убывающей по закону  $a^{-3/2}$ . Плотность энергии массивных гравитонов в начале осцилляций по порядку величины равна

$$\rho_* \sim M_{\text{Pl}}^2 m_G^2 \langle h_{ij}^2 \rangle \simeq \frac{3H_i^4}{8\pi^2},$$

где мы пренебрегли множителем порядка единицы. Сегодня вклад массивных гравитонов в плотность энергии составляет

$$\Omega_g = \frac{\rho_*}{z_*^3 \rho_c} = \frac{\rho_*}{z_*^3 \rho_c} \left( \frac{H_c}{H_*} \right)^{3/2}, \quad (148)$$

где  $z_*$  — красное смещение на момент начала осцилляций,  $H_* \sim M_G$  — параметр Хаббла на тот же момент,

$H_e \approx 0,4 \times 10^{-12} \text{ с}^{-1}$  — параметр Хаббла в эпоху равенства плотностей энергии материи и излучения,  $z_e \approx 3200$  — соответствующее красное смещение. Собирая вместе все сомножители, получим

$$\Omega_g \sim 3 \times 10^3 (m_G \times 10^{15} \text{ см})^{1/2} \left( \frac{H_i}{\Lambda} \right)^4. \quad (149)$$

Оценка (149) предполагает, что число е-фолдингов за время инфляции велико,  $\ln N_e > H^2/m_G^2$ , что в рассматриваемой модели инфляции довольно естественно.

Согласно (149) массивные гравитоны рождаются достаточно эффективно для того, чтобы образовать всю холодную темную материю при условии, что значение параметра Хаббла во время инфляции примерно на порядок меньше масштаба  $\Lambda$ . Интересно, что значение  $\Omega_g \sim 1$  получается, когда начальная плотность энергии возмущений метрики близка к масштабу обрезания,  $\rho_*^{1/4} \sim \Lambda$ . Это наводит на мысль о том, что другие механизмы рождения, не связанные с инфляцией, могут естественным образом приводить к такому же результату,  $\Omega_g \sim 1$ .

Если массивные гравитоны рождались в процессе эволюции Вселенной в достаточно заметном количестве, то их можно зарегистрировать с помощью детекторов гравитационных волн. На расстояниях меньших, чем длина волны, влияние поперечной бесследовой гравитационной волны на пробные массивные частицы в ньютоновском приближении описывается ускорением  $\ddot{h}_{ij}x^j/2$  (в качестве обзора см., например, [100]). То же самое верно для массивных гравитационных волн, за исключением того, что длины волн в нерелятивистском случае больше, так что ньютоновское описание работает для большего диапазона расстояний. Таким образом, нерелятивистские волны действуют на детектор так же, как и безмассовые волны с той же частотой.

Для того чтобы оценить амплитуду гравитационных волн, предположим, что они составляют всю темную материю в гало нашей Галактики. Плотность энергии нерелятивистских гравитационных волн порядка  $M_{\text{Pl}}^2 m_G^2 h_{ij}^2$ . Приравнявая ее к локальной плотности в гало  $\rho_0 \sim 0,3 \text{ ГэВ см}^{-3}$ , получим

$$h_{ij} \sim 10^{-10} \left( \frac{3 \times 10^{-5} \text{ Гц}}{v_G} \right). \quad (150)$$

При частотах  $10^{-6} - 10^{-5} \text{ Гц}$  величина (150) на много порядков больше ожидаемой чувствительности детектора LISA (Laser Interferometer Space Antenna — лазерно-интерферометрическая космическая антенна) [101]. Таким образом, LISA может обнаружить массивные гравитационные волны, даже если плотность гравитонов значительно меньше, чем необходимо для объяснения ими темной материи. Отметим, что в близлежащем диапазоне частот  $10^{-9} - 10^{-7} \text{ Гц}$  имеется ограничение [102] на уровне  $\Omega_g < 10^{-9}$  на стохастический фон гравитационных волн, которое берется из тайминга миллисекундных пульсаров [103]. Таким образом, возможно, что модель может быть проверена с помощью повторного анализа уже существующих данных по таймингу пульсаров. Повторный анализ должен учитывать, что в отличие от обычных гравитационных волн реликтовые массивные гравитоны образуют монохроматическую линию на частоте, равной массе гравитона. Эта узкая линия с

относительной шириной  $\Delta\nu/\nu \sim 10^{-6}$  — отличительная черта данной модели.

Другой возможный эффект — задержка  $\Delta t$  гравитационно-волнового сигнала во времени относительно электромагнитного излучения. В терминах частоты волны  $f$  и расстояния до источника  $D$

$$\Delta t = \frac{D}{2} \left( \frac{m_G}{2\pi f} \right)^2$$

(в предположении  $f \gg m_G$ ). Рассмотрим в качестве примера гравитационные волны, испускаемые при слиянии двух массивных черных дыр — одним из многообещающих процессов с точки зрения детектирования гравитационных волн. Частота этих волн порядка гравитационного радиуса образующейся черной дыры,

$$f \sim R_S^{-1} = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2M},$$

где  $M$  — масса черной дыры. Таким образом, при  $m_G \sim 10^{-15} \text{ см}^{-1}$  задержка составляет

$$\Delta t \sim \frac{D}{2} \left( \frac{M m_G}{\pi M_{\text{Pl}}^2} \right)^2 \sim 5 \times 10^{-6} \left( \frac{D}{\text{Мпк}} \right) \left( \frac{M}{M_\odot} \right)^2 [\text{с}].$$

Это значение может оказаться недостаточным для черных дыр с массой порядка солнечной, но не исключено, что задержка может быть зарегистрирована в случае слияния более тяжелых черных дыр.

**5.2.4. Дополнительные космологические тесты: возрастание возмущений.** Выяснив, что некоторые модели массивной гравитации проходят наиболее очевидные экспериментальные проверки, естественно задать вопрос: могут ли они быть жизнеспособной альтернативой ОТО при описании более тонких эффектов? Один из таких эффектов — образование структур. В стандартной космологии, основанной на ОТО, образование наблюдаемых во Вселенной структур объясняется возрастанием первичных возмущений, преимущественно на стадии, в которой доминирует материя (см., например, [104, 105] и приведенные там ссылки). Стандартная теория находится в согласии с наблюдениями при условии, что темная материя обладает нужными свойствами [8, 106, 107]. Не очевидно, что ОТО можно модифицировать, не нарушив этого согласия. В данном разделе мы продемонстрируем, что модель массивной гравитации, описываемая действием (143), дает пример такой модификации, т.е. приводит к правильному образованию структур, даже несмотря на то, что масса гравитона по космологическим меркам очень велика. Это снова иллюстрирует тот факт, что в теории с нарушением лоренц-инвариантности масса поперечного бесследового гравитона слабо связана со свойствами трехмерно-скалярных мод.

Возмущения, существенные для образования структур, — трехмерные скаляры. В массивной гравитации скалярный сектор содержит дополнительные скалярные поля, которые могут повлиять на скорость возрастания возмущений и сделать модель несовместимой с наблюдениями. Без фиксации калибровки в скалярном секторе существуют возмущения метрики  $\phi$  (которые не следует путать с голдстоуновскими полями  $\phi^0, \phi^i$ ),  $B, \psi$  и  $E$ , определенные в соответствии с (5) и (55), возмущения голдстоуновских полей  $\pi_0$  и  $\pi_L$  (продольная часть  $\pi_i$ ) и

возмущения обычной материи. Всего имеется девять скалярных возмущений, из которых можно составить семь калибровочно-инвариантных комбинаций, динамика которых ответственна за формирование структур. Полный набор уравнений, описывающих поведение этих возмущений, можно найти в [108].

Систему уравнений для возмущений можно свести к двум уравнениям для калибровочно-инвариантных потенциалов  $\Phi$  и  $\Psi$ . В ОТО эти потенциалы удовлетворяют соотношению  $\Phi - \Psi = 0$ . В массивной гравитации последнее соотношение заменяется следующим:

$$\Phi - \Psi = \vartheta(x^i) a^{1/\gamma-1}, \quad (151)$$

где  $\vartheta(x^i)$  — произвольная функция пространственных координат, которая возникает как константа интегрирования. Своим происхождением эта константа обязана существованию моды с дисперсионным соотношением  $\omega^2 = 0$ . Мы уже сталкивались с появлением такой константы в разделе 5.2.1.

Второе уравнение — замкнутое уравнение для  $\Psi$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial a^2} + \frac{1}{a} \left( 4 + 3c_s^2 + \frac{H'}{H^2} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial a} + \\ + \frac{1}{a^2} \left[ \left( 1 + 3c_s^2 \right) + 2 \frac{H'}{H^2} - \frac{c_s^2 \Delta}{H^2} \right] \Psi = \\ = \left[ \frac{\gamma c_s^2 \Delta}{H^2} - \left( 3c_s^2 + \frac{1}{\gamma} + 2 \frac{H'}{H^2} \right) \right] \vartheta a^{1/\gamma-3}. \end{aligned} \quad (152)$$

Контраст плотности выражается через решения этого уравнения следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta_\rho = \frac{2M_{\text{Pl}}^2}{\rho_m} (\gamma \Delta - 3H^2) a^{1/\gamma-3} \vartheta - \\ - \frac{2M_{\text{Pl}}^2}{a^2 \rho_m} \left[ 3H^2 \left( 1 + a \frac{\partial}{\partial a} \right) - \Delta \right] \Psi, \end{aligned} \quad (153)$$

где  $\vartheta$  — та же не зависящая от времени функция пространственных координат, что и в (151).

Стандартная теория космологических возмущений получается, если положить массы гравитона равными нулю,  $m_i^2 = 0$ . В этом случае имеем  $\Phi - \Psi = 0$ , т.е.  $\vartheta(x^i) = 0$ . Тогда уравнения для возмущений совпадают с уравнениями в теории Эйнштейна. Отметим, что функция  $\vartheta$  определяется начальными условиями. Если положить  $\vartheta = 0$ , то исчезнут зависящие от  $\vartheta$  члены в (152) и (153) и эти уравнения будут приведены к стандартному виду даже при  $m_G^2 \neq 0$ . Следовательно, всегда существуют такие начальные условия, при которых модель (143) приводит к стандартной скорости возрастания возмущений и, таким образом, становится совместной с наблюдениями. Более того, при некоторых значениях параметра  $\gamma$  часть в выражении для возмущений, пропорциональная  $\vartheta(x^i)$ , возрастает медленнее, чем обычная часть, и, следовательно, является подавленной, так что согласие с наблюдениями может быть достигнуто при любой функции  $\vartheta(x^i)$ , если она не слишком велика.

В случае возмущений материи во Вселенной, в которой доминирует материя, уравнение (152) сводится к следующему уравнению:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial a^2} + \frac{7}{2a} \frac{\partial \Psi}{\partial a} + \left( \frac{1}{\gamma} - 1 \right) a^{1/\gamma-3} \vartheta = 0,$$

которое отличается от стандартного присутствием неоднородного члена, пропорционального  $\vartheta$ . Решение последнего уравнения имеет вид

$$\Psi = -\frac{2\gamma}{2+3\gamma} a^{1/\gamma-1} \vartheta(x^i) + a^{-5/2} c_1(x^i) + c_2(x^i),$$

где  $c_i(x^i)$  — постоянные интегрирования. Подставляя это решение в (153), можно найти контраст плотности:

$$\begin{aligned} \delta_\rho = \left( \frac{2M_{\text{Pl}}^2 a}{\rho_0} \Delta + 3 \right) \frac{c_1(x^i)}{a^{5/2}} + 2 \left( \frac{aM_{\text{Pl}}^2}{\rho_0} \Delta - 1 \right) c_2(x^i) + \\ + \frac{6\gamma}{2+3\gamma} a^{1/\gamma-1} \left( \frac{a\gamma M_{\text{Pl}}^2}{\rho_0} \Delta - 1 \right) \vartheta(x^i), \end{aligned} \quad (154)$$

где  $\rho_0$  — плотность энергии материи в настоящее время. Первые два члена в правой части выражения (154) в точности те же, что появляются в стандартной теории Эйнштейна, причем второй из них описывает линейное возрастание возмущений,  $\delta_\rho \propto a$ . Отличие от стандартного случая состоит в третьем члене в правой части (154). Возмущения, соответствующие этому члену, возрастают пропорционально  $a^{1/\gamma}$ . При  $\gamma > 1$  или  $\gamma < 0$  такие "аномальные" возмущения возрастают медленнее, чем обычные.

В эпоху доминирования излучения ситуация аналогична. Для релятивистской жидкости имеем  $c_s^2 = w = 1/3$ , так что уравнение (152) превращается в

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial a^2} + \frac{4}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial a} - \frac{M_{\text{Pl}}^2 \Delta}{\rho_r} \Psi + \left( \frac{1}{\gamma} - 1 - \frac{a^2 \gamma M_{\text{Pl}}^2 \Delta}{\rho_r} \right) a^{1/\gamma-3} \vartheta = 0, \quad (155)$$

где  $\rho_r$  — плотность энергии излучения в настоящий момент.

Решение уравнения (155) при произвольном  $\gamma$  имеет довольно сложный вид. Для простоты сосредоточимся на модах, длина волны которых меньше размера горизонта,  $k^2/a^2 \gg H^2$ . Контраст плотности, вычисленный в соответствии с (153), содержит стандартную осциллирующую часть, а также дополнительную часть, пропорциональную  $\vartheta$ ,

$$\begin{aligned} \delta_\rho \sim c_1(x^i) \sin y + c_2(x^i) \cos y + 2\gamma \left( \frac{\rho_r}{k^2 M_{\text{Pl}}^2} \right)^{(1/\gamma-1)/2} \times \\ \times \left[ -y^{1+1/\gamma} + \int_0^y dx x^{1+1/\gamma} \sin(y-x) \right] \vartheta, \end{aligned} \quad (156)$$

где  $y = \eta k/\sqrt{3}$  — величина, пропорциональная масштабному фактору,  $c_i(x^i)$  — две константы интегрирования. Легко видеть, что при  $-1 \leq \gamma < 0$  вклад в контраст плотности, зависящий от  $\vartheta$ , со временем убывает, так что остается только стандартная часть. Таким образом, при таких  $\gamma$  и на стадии доминирования материи, и на стадии доминирования излучения возмущения ведут себя так же, как предсказывает ОТО.

Другой интересный случай —  $\gamma = 1$ . Этот случай особый, так как при  $\gamma = 1$  исчезает зависимость от  $a$  последнего члена в выражении (155). На самом деле можно показать, что в этом случае зависимость от  $\vartheta$  в контрасте плотности исчезает вовсе, так что остается только стандартная часть.

При других значениях  $\gamma$  зависящие от  $\vartheta$  вклады в возмущения во Вселенной, в которой преобладает излу-

чение, возрастают. Согласуется или не согласуется модель такого типа с наблюдениями — зависит от неизвестной функции ("константы интегрирования")  $\vartheta(x^i)$ . Отметим, что эта функция может начать слабо изменяться со временем при учете в действии (143) поправок высшего порядка по производным. Пока остается неясным, могут ли эти поправки устремить  $\vartheta(x^i)$  к нулю во время инфляции. В последнем случае зависимость от начального значения  $\vartheta(x^i)$  исчезнет и модель будет совместна с наблюдениями при любом значении параметра  $\gamma$ .

**5.2.5. Нелинейные решения: черные дыры.** Подход, основанный на голдстоуновских полях с действием (86) (в отличие, например, от модели Фирца–Паули), позволяет рассмотреть нелинейный режим. Мы уже использовали этот факт в разделе 5.2.2, где были получены космологические решения в массивной гравитации. Другой интересный вопрос, связанный с нелинейной гравитационной динамикой, — существование и свойства черных дыр. Быстрый прогресс наблюдений уже в ближайшем будущем сделает возможным количественное изучение астрофизических черных дыр, включая измерение метрики вблизи горизонта черной дыры [109–114]. В связи с этим важно понять характер возможных, хотя бы в принципе, отклонений от ОТО.

Свойства черных дыр в ОТО имеют универсальный характер в том смысле, что метрика черной дыры однозначно определяется ее массой и угловым моментом. Это обстоятельство связано с причинной структурой пространства-времени черной дыры и является следствием теорем "об отсутствии волос" [115–118]. Неудивительно поэтому, что свойства черных дыр чрезвычайно устойчивы по отношению к модификациям теории гравитации. Например, свойства черных дыр остаются неизменными в скалярно-тензорных теориях [115, 116, 119, 120]. По этой причине построить альтернативную модель черной дыры — сложная задача.

В этом разделе мы увидим, что свойства черных дыр в массивной гравитации отличаются от таковых в ОТО. Другими словами, в массивной гравитации черные дыры имеют так называемые волосы. Происхождение этих волос связано с мгновенным взаимодействием, которое имеет место в массивной гравитации с нарушением лоренц-инвариантности. Их существование, таким образом, обусловлено наличием моды с дисперсионным соотношением  $\mathbf{p}^2 = 0$ , которая, в свою очередь, является следствием симметрии (83), как было отмечено в разделе 5.1. Для простоты мы опять ограничимся конкретным классом моделей с действием (143). Так как наличие мгновенного взаимодействия — общее свойство теорий массивной гравитации с нарушением лоренц-инвариантности (в частности, моделей с действием (110)), мы ожидаем, что наши выводы будут применимы к более широкому, чем обсуждаемый в этом разделе, классу моделей.

Прямолинейный подход к проблеме — попытаться явно найти решения в виде черных дыр и увидеть, отличаются ли они от черных дыр в ОТО, — оказывается чрезвычайно сложной задачей. Можно упростить ситуацию, задав несколько иной вопрос: есть ли в массивной гравитации решение в виде черной дыры с метрикой, в точности соответствующей метрике в ОТО? Для того чтобы ответить на этот вопрос, нужно найти

такую конфигурацию голдстоуновских полей, в которой при данной метрике черной дыры удовлетворялись бы все уравнения движения (уравнения Эйнштейна и уравнения движения для скалярных полей). Если это возможно, то решение с такой метрикой существует. Наоборот, если это невозможно, то решения в виде черных дыр в массивной гравитации модифицируются.

Для того чтобы метрика черной дыры являлась решением уравнений Эйнштейна, тензор энергии-импульса голдстоуновских полей  $\phi^0$  и  $\phi^i$  должен обращаться в нуль снаружи черной дыры:

$$0 = T_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}F + 2\frac{\delta F}{\delta W^{ij}} \left\{ \left( \gamma \frac{W^{ij}}{X} + \frac{V^i V^j}{X^2} \right) \partial_\mu \phi^0 \partial_\nu \phi^0 + X^\gamma \partial_\mu \phi^i \partial_\nu \phi^j - \frac{V^i}{X} (\partial_\mu \phi^0 \partial_\nu \phi^j + \partial_\nu \phi^0 \partial_\mu \phi^j) \right\}, \quad (157)$$

где  $g_{\mu\nu}$  — метрика черной дыры. Из системы уравнений (157) ясно, что, за исключением, быть может, случая специальных функций  $F$ , тензор энергии-импульса в нуль не обращается, так как это потребовало бы выполнения десяти уравнений с четырьмя неизвестными.

Вспомним, однако, что наша модель построена таким образом, что тензор энергии-импульса голдстоуновских полей обращается в нуль в пространстве Минковского. Этого можно достичь таким выбором вакуума для голдстоуновских полей (см. (111) и (112)), чтобы уравнения (113) выполнялись. Для модели (143) последние уравнения дают

$$F = 0, \quad \frac{\delta F}{\delta W^{ij}} = 0$$

в вакууме над пространством Минковского, где

$$W^{ij} = -\delta^{ij}. \quad (158)$$

Таким образом,  $T_{\mu\nu}$  можно обратить в нуль, если найти такую конфигурацию голдстоуновских полей, при которой уравнения (158) выполнялись бы *на фоне метрики черной дыры*.

В системе (158) уравнений меньше по сравнению с (157), но их все равно слишком много — система (158) содержит шесть дифференциальных уравнений для четырех неизвестных функций  $\phi^0$  и  $\phi^i$ . Таким образом, если нет вырождения, то уравнения (158) не могут быть выполнены и, следовательно, голдстоуновские поля нельзя подобрать таким образом, чтобы их тензор энергии-импульса равнялся нулю.

Эквивалентную форму уравнений (158) можно получить, перейдя в унитарную калибровку. В такой калибровке (158) превращается в

$$(g^{00})^\gamma g_{ij}^{-1} = -\delta^{ij}. \quad (159)$$

На геометрическом языке решить уравнения (159) — значит найти для данной метрики систему координат, в которой сечения постоянного времени — конформно плоские. Эта переформулировка уравнений (158) особенно удобна.

В случае черной дыры Шварцшильда решение уравнений (158) действительно *существует*. Иными словами, существует система координат, в которой пространственная метрика — конформно плоская. Это так называемая система Гулстранда–Пенлеве. В системе



Гулстранда – Пенлеве метрика черной дыры имеет вид

$$ds^2 = d\tau^2 - \left( dx^i - \frac{R_S^{1/2}}{r^{3/2}} x^i d\tau \right)^2,$$

где  $R_S$  — радиус Шварцшильда черной дыры,  $r = \sqrt{x_i^2}$ , в то время как конфигурация скалярных полей, удовлетворяющая (158), выражается просто как

$$\phi^0 = A^2 \tau, \quad \phi^i = A^2 x^i. \quad (160)$$

Сделав обратное преобразование к координатам Шварцшильда, найдем

$$\phi^0 = A^2 \left[ t + 2\sqrt{rR_S} + R_S \ln \left( \frac{\sqrt{r} - \sqrt{R_S}}{\sqrt{r} + \sqrt{R_S}} \right) \right],$$

где  $\phi^i$  все еще определяются (160). Таким образом, черная дыра Шварцшильда является решением и в массивной гравитации.

Ситуация меняется в случае вращающейся черной дыры: чуда не происходит и, как и ожидалось, уравнения (158) или (159) не имеют решений. На самом деле конформно плоские сечения постоянного времени — это важная составляющая часть численных расчетов слияния черных дыр, поэтому их существование для различных решений уравнений Эйнштейна подробно изучалось [121, 122]. В частности, доказано, что конформно плоского сечения метрики Керра не существует из-за наличия нетривиального инварианта квадрупольного происхождения [122]

$$Y = -112\pi J^2. \quad (161)$$

Более того, из результатов [122] следует, что любое осесимметричное вакуумное решение уравнений Эйнштейна с отличным от нуля угловым моментом обладает ненулевым значением  $Y$  и, следовательно, не допускает существования конформно плоских пространственных сечений. Таким образом, не существует таких конфигураций голдстоуновских полей, в которых их тензор энергии-импульса обращался бы в нуль на фоне метрики Керра или любой другой метрики с отличным от нуля угловым моментом. Следовательно, вращающиеся черные дыры в массивной гравитации обязаны отличаться от черных дыр в ОТО.

Тот факт, что вращающиеся черные дыры модифицируются благодаря присутствию голдстоуновских полей, находится в соответствии с ожиданием, что в массивной гравитации у черных дыр имеются волосы. Существование волос может быть явно продемонстрировано в упрощенной модели электродинамики с нарушением лоренц-инвариантности с действием [79]

$$S = S_{\text{EH}} + \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ F(X) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + m^2 G^{\mu\nu} A_\mu A_\nu \right\}. \quad (162)$$

Здесь  $S_{\text{EH}}$  — действие Эйнштейна – Гильберта,  $X$  дается выражением (87),  $G^{\mu\nu}$  — "эффективная метрика",

$$G^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \frac{\partial^\mu \phi^0 \partial^\nu \phi^0}{X}.$$

Эта модель похожа на массивную гравитацию тем, что в ней имеются мгновенные взаимодействия [90], которые ответственны за наличие волос у черной дыры. Более того, можно показать [79], что обычные заряженные вращающиеся черные дыры не являются решениями в этой модели, в полной аналогии с тем, что вращающиеся черные дыры не являются решениями в массивной гравитации.

Для того чтобы продемонстрировать существование электромагнитных волос в модели (162), нужно показать, что существуют нетривиальные статические решения с конечной энергией для линеаризованных возмущений электромагнитного поля на фоне черной дыры Шварцшильда. В секторе с угловым моментом  $l = 1$  векторное поле может быть параметризовано четырьмя действительными функциями радиальной переменной  $\rho$  (явные выражения см. в [79]). Уравнения для возмущений векторного поля сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для радиальных функций. Необходимо показать, что существует решение этой системы, регулярное и на бесконечности, и на горизонте черной дыры  $\rho \rightarrow -\infty$ .

Существование регулярного решения можно продемонстрировать подсчетом убывающих и возрастающих мод в асимптотических областях. Здесь мы только приведем результаты; подробности можно найти в [79]. Можно показать, что одна из четырех радиальных функций отщепляется и соответствующее уравнение не имеет регулярного решения. Уравнения для оставшихся трех радиальных функций можно переписать в виде одного уравнения четвертого порядка. Таким образом, общее решение параметризуется четырьмя действительными параметрами, один из которых отвечает за общую нормировку. На бесконечности имеются два убывающих и два возрастающих решения. Требование, чтобы общее решение спадало на бесконечности, фиксирует два из трех параметров. На горизонте имеется три регулярных и одно сингулярное решение. Оставшийся параметр можно, таким образом, использовать для устранения сингулярной части, и таким способом будет получено всюду регулярное решение — "дипольные волосы".

В целом, возникает следующая картина. Черные дыры в массивной гравитации не обязаны быть универсальными. В частности, метрика вращающейся черной дыры может (и в соответствии с прямым анализом должна) отличаться от метрики в ОТО. Различия между возможными метриками — волосы черной дыры — зависят от истории коллапса. В [79] приведены аргументы в пользу того, что эти различия, как и отклонения от стандартной метрики, порядка единицы только на расстояниях много больше обратной массы гравитона  $m^{-1}$  и, вероятно, подавлены фактором  $\sim (ml)^2$  на расстояниях  $l \ll m^{-1}$ , если не подгонять параметры модели. При ограничении на массу гравитона (144) в простейших моделях эффекты, связанные с волосами черной дыры, наблюдаемы только для самых крупных черных дыр с массами порядка  $10^9 M_\odot$ .

В последнее время были найдены [123] сферически-симметричные решения в классе биметрических теорий (117) со спонтанным нарушением лоренцевой симметрии и массивными гравитонами. Эти решения обладают рядом любопытных особенностей, включая волосы черных дыр (хотя черная дыра сферически-симметрична, ее метрика определяется многими параметрами,

а не только массой), нетривиальную зависимость метрики снаружи от свойств внутренности звезды, сильное изменение линейного члена в (132) и т.д. Эти решения, таким образом, хорошо иллюстрируют богатство нелинейных эффектов в массивной гравитации с нарушением лоренц-инвариантности.

## 6. Заключение

Итак, лоренц-инвариантная массивная гравитация в четырех измерениях имеет серьезные проблемы с самосогласованностью. Либо имеются духи в спектре возбуждений над пространством Минковского, либо режим сильной связи начинается при неприемлемо низких энергиях; кроме того, на фоне пространства, отличного от пространства Минковского, возникает мода Бульвара–Дезера. Вследствие лоренц-инвариантности патологические духовые моды существуют при сколь угодно больших пространственных импульсах, так что вакуум теории катастрофически нестабилен. Сегодня неизвестно никакого способа устранения этих проблем и довольно маловероятно, что эту теорию можно сделать свободной от патологий и феноменологически приемлемой.

Модификация гравитации на больших расстояниях менее проблематична в теориях с дополнительными пространственными измерениями и теориях мира на бране. Среди наиболее обсуждаемых моделей такого рода — модель Двали–Габададзе–Поррати, в которой нормальная (в отличие от самоускоряющейся) ветвь не содержит в спектре духовых мод. Пока не совсем ясно, является ли в ней приемлемым масштаб сильной связи.

В настоящем обзоре мы пошли по другому пути и изучали теории с нарушением лоренц-инвариантности. Мы уделили особое внимание подклассу теорий, в которых (в унитарной калибровке) единственным динамическим полем является метрика и для которых пространство Минковского является решением полевых уравнений. При этих условиях членами низшего порядка в действии на фоне пространства Минковского являются массовые члены для возмущений метрики. Таким образом, в этом обзоре упор был сделан на массивную гравитацию с нарушением лоренц-инвариантности. Существует огромное число других возможностей; обзоры некоторых из них можно найти, например, в [124, 125].

Если спектр теории не лоренц-инвариантен, то духи, и в меньшей степени тахионы, становятся феноменологически приемлемыми при условии, что они существуют только при достаточно малых энергиях и пространственных импульсах и слабо (например, лишь гравитационно) взаимодействуют с материей. Более того, некоторые варианты массивной гравитации с нарушением лоренц-инвариантности вообще не содержат явных патологий и являются феноменологически приемлемыми даже при сравнительно большом энергетическом масштабе нарушения лоренц-инвариантности. В отличие от теории Фирца–Паули, в которой есть явление ВДВЗ, эти теории на классическом уровне представляют собой гладкую деформацию ОТО, а на квантовом уровне их масштаб сильной связи достаточно велик, чтобы не представлять собой опасности. Среди этих теорий наиболее привлекательны те, в которых часть инвариантности ОТО относительно диффеоморфизмов остается ненарушенной, что обеспечивает стабильность таких теорий

при деформации фонового пространства и/или при добавлении в действие членов высшего порядка.

Общая проблема, которую следует упомянуть в связи с этим, — ультрафиолетовое пополнение таких теорий. В отличие от ОТО, которая считается низкоэнергетической эффективной теорией, происходящей от теории струн, теории массивной гравитации каким-либо очевидным струнным пополнением не обладают. Это представляет собой интересный вопрос для будущих исследований.

Массивную гравитацию того типа, который мы изучали в настоящем обзоре, удобно анализировать с помощью формализма Штюкельберга–Голдстоуна. Этот формализм включает в себя скалярные поля, фоновые значения которых эволюционируют или по времениподобному, или по пространственноподобному, или по обоим направлениям. Достоинство формализма заключается в том, что в нем полностью восстанавливается общая ковариантность, поэтому при энергиях и импульсах, превышающих масштаб массы гравитона, новые моды, которые появляются дополнительно к гравитонам ОТО, представляют собой возмущения этих скалярных полей и эффективно отщепляются от гравитации (за исключением случая Фирца–Паули). Таким путем изучать спектр теории довольно легко. Более того, голдстоуновское действие можно рассматривать как нелинейное обобщение массового члена гравитона и изучать нелинейные свойства получившейся теории, например космологию и черные дыры.

Эволюционирующие скалярные поля интересны во многих отношениях, несмотря на то, что их возмущения могут быть исключены выбором калибровки, так что в унитарной калибровке теория содержит только метрику. В космологическом контексте такие скалярные поля могут приводить к ускоренному расширению Вселенной с нетривиальным уравнением состояния эффективной темной энергии. Следует отметить, что в других теориях с гравитацией, модифицированной на больших расстояниях, это часто невозможно. Например, в теориях с конденсатами векторных полей конденсаты часто стремятся к постоянным значениям на поздних временах. Существует общий аргумент, состоящий в том, что эволюция Вселенной на поздних временах в этом и подобных случаях — такая же, как и в ОТО<sup>21</sup>, возможно, с космологической постоянной [126, 127]. Этот аргумент выглядит следующим образом. Пространственно плоская, однородная и изотропная метрика имеет общий вид

$$ds^2 = N^2(t) dt^2 - a^2(t) \delta_{ij} dx^i dx^j.$$

Эта форма симметрична относительно репараметризации времени и пространственных растяжений,

$$t \rightarrow t'(t), \quad x^i \rightarrow \lambda x^i, \quad (163)$$

с произвольной функцией  $t'(t)$  и произвольной постоянной  $\lambda$ . Если поля материи фиксированы на их вакуумных значениях (в локально-плоской системе отсчета), то динамическими переменными являются только  $N(t)$  и

<sup>21</sup> Конденсаты могут продолжать эволюционировать в текущую космологическую эпоху, приводя к темной энергии с нетривиальным уравнением состояния. Эта возможность подробно изучена в литературе.

$a(t)$  и действие для этих переменных должно быть инвариантным относительно преобразований (163). Единственное действие, которое является локальным во времени, совместимым с данными симметриями и содержит не более двух производных, имеет вид

$$S(N, a) = \tilde{M}_{\text{Pl}}^2 \int dt \frac{1}{N} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \tilde{\Lambda} \int N dt,$$

где  $\tilde{M}_{\text{Pl}}$  и  $\tilde{\Lambda}$  не обязаны совпадать с истинными значениями массы Планка и космологической постоянной. Это действие имеет в точности ту же форму, что и действие ОТО с космологической постоянной, записанное для однородного изотропного пространства. Вне зависимости от того, какие конденсаты присутствуют во Вселенной, ее эволюция происходит в соответствии с уравнением Фридмана, возможно, с модифицированной постоянной Ньютона и космологической постоянной<sup>22</sup> при условии, что конденсаты не зависят от точки пространства-времени (в локально-плоской системе отсчета) и совместны с однородностью и изотропией пространства.

Несмотря на кажущуюся общность, этот аргумент неприменим к эволюционирующим скалярным полям просто потому, что их фоновые значения зависят от точки пространства-времени. Мы привели явный пример нетривиальной космологической эволюции на поздних временах в разделе 5.2.2. Больше возможностей появляется, если добавить скалярный потенциал скатывающегося поля (полей), как обсуждалось в конце раздела 4.

Теории массивной гравитации с нарушением лоренц-инвариантности обладают множеством других интересных особенностей. Массивные гравитоны являются кандидатами в частицы темной материи; в этом случае детектирование темной материи — дело будущих (а возможно, и сегодняшних) экспериментов по поиску гравитационных волн. В теориях массивной гравитации с нарушением лоренц-инвариантности, в отличие от лоренц-инвариантных теорий, предсказываются богатые свойства черных дыр. С точки зрения феноменологии это предоставляет возможность поиска нарушения лоренц-инвариантности с помощью измерений метрик черных дыр вблизи горизонта. С теоретической точки зрения массивную гравитацию с нарушением лоренц-инвариантности можно использовать для лучшего понимания классических и квантовых аспектов физики черных дыр. Изучение перечисленных выше увлекательных вопросов началось лишь недавно, и в этом направлении стоит ожидать стремительного прогресса.

Авторы признательны М. Бебруну, С. Дубовскому, М. Либанову и С. Сибирякову за полезные обсуждения и прочтение рукописи, а также З. Бережиани, Д. Комелли, С. Дезеру, Ф. Нести и Л. Пило за полезную переписку. Работа В.А.Р. частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант 08-02-00473. Работа П.Г.Т. частично поддержана грантами Vel-spro:IAP-VI/11 и IISN.

<sup>22</sup> Возможность того, что "космологическая" ньютоновская постоянная и ньютоновская постоянная в законе Ньютона могут различаться, представляет интерес с точки зрения феноменологии [128] (см. также [129]).

## 7. Приложение

В этом приложении проведено детальное изучение малых возмущений на космологическом фоне в лоренц-инвариантной массивной гравитации. Мы используем модель и обозначения раздела 2.6.1. В качестве конкретного примера выберем теорию с определенным видом массового члена, а именно (63). Фоновые уравнения движения в конформном времени в общем случае имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^2 &= H_0^2 a^2 + \epsilon_0, \\ 2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 &= 3H_0^2 a^2 + \epsilon_s, \end{aligned} \quad (164)$$

где  $\epsilon_0(a, n)$  и  $\epsilon_s(a, n)$  берутся из массового члена в действии. Как было отмечено в разделе 2.6.1, непротиворечивость уравнений (164) влечет за собой соотношение между  $n(\eta)$  и  $a(\eta)$ . В общем случае оно имеет вид  $n' = f(n, a) a'$ , однако здесь это неважно, поскольку  $a$  и  $n$  в фиксированный момент времени могут принимать произвольные значения. Нас будет интересовать фоновое пространство, близкое к пространству Минковского, для которого  $|a - 1| \ll 1$ ,  $|n - 1| \ll 1$ . Так как массовый член квадратичен по возмущениям метрики над пространством Минковского, функции  $\epsilon_0$  и  $\epsilon_s$  при  $a = 1$ ,  $n = 1$  обращаются в нуль, а вблизи этой точки

$$\epsilon_0, \epsilon_s = O(a - 1) + O(n - 1).$$

Например, в случае (63)

$$\begin{aligned} \epsilon_0 &= -\frac{1}{2} m_G^2 (a^2 - 1) n, \\ \epsilon_s &= -\frac{m_G^2}{2n} [2(a^2 - 1) + (a^2 n^2 - 1)]. \end{aligned} \quad (165)$$

Начнем с диапазона импульсов 1 в (65). В этой области  $\mathcal{H}^2$ ,  $|a - 1|$  и  $|n - 1|$  — наименьшие параметры задачи; формально мы будем считать их величинами одного порядка. Используем тот факт, что в пределе пространства Минковского значения параметров, входящих в (64), соответствуют теории Фирца–Паули, отсюда

$$\begin{aligned} m_\psi^2 &= 3m_G^2 + O(\mathcal{H}^2), \quad m_B^2 = -\frac{1}{2} m_G^2 + O(\mathcal{H}^2), \\ \mu_1 &= 3m_G^2 + O(\mathcal{H}^2), \quad \mu_2 = -m_G^2 + O(\mathcal{H}^2), \\ \mu_3 &= -2m_G^2 + O(\mathcal{H}^2), \end{aligned} \quad (166)$$

в то время как остальные параметры имеют порядок  $O(\mathcal{H}^2)$ , т.е. обращаются в нуль в пределе пространства Минковского. Чтобы найти количество динамических мод и их дисперсионные соотношения, запишем систему линейных уравнений для возмущений и вычислим ее определитель в порядке  $\mathcal{H}^2$ . Уравнения таковы:

$$\begin{aligned} \varphi: \quad m_\phi^2 \varphi + 2\mathcal{H}\Delta B + (-2\Delta\psi + 6\mathcal{H}\psi' + \mu_1\psi) + \\ + (-2\mathcal{H}\Delta E' + \mu_2\Delta E) = 0, \end{aligned} \quad (167)$$

$$B/\Delta: \quad 2\mathcal{H}\varphi + m_B^2 B - 2\psi' = 0, \quad (168)$$

$$\begin{aligned} \psi: \quad (-2\Delta\varphi - 6\mathcal{H}\varphi' - 6q\varphi + \mu_1\varphi) + (2\Delta B' + 4\mathcal{H}\Delta B) + \\ + (6\psi'' - 2\Delta\psi + 4\mathcal{H}\psi' + 2q\psi + m_\psi^2\psi) + \\ + (-2\Delta E'' - 4\mathcal{H}\Delta E' + \mu_3\Delta E) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E/\Delta: \quad (2\mathcal{H}\varphi' + 2q\varphi + \mu_2\varphi) + (-2\psi'' - 4\mathcal{H}\psi' + \mu_3\psi) + \\ + m_E^2 \Delta E = 0, \end{aligned}$$

где  $q = \mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2 = O(\mathcal{H}^2)$ . Теперь вычислим определитель. Сделав преобразование Фурье, с учетом (166) получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta} \text{Det} = & m_G^6 (3\omega^2 - 3\mathbf{p}^2 - 3m_G^2) + \\ & + (12m_G^2 \mathcal{H}^2 + 2m_G^2 m_\phi^2) \omega^4 + O(m_G^2 \mathcal{H}^2 \omega^2 \mathbf{p}^2) + \\ & + O(m_G^2 \mathcal{H}^2 \mathbf{p}^4). \end{aligned} \quad (169)$$

Здесь мы предполагаем, что  $\mathbf{p}^2 \gg m_G^2$ ,  $\omega^2 \gg m_G^2$  и оставляем только те новые (по отношению к случаю пространства Минковского) члены, которые пропорциональны наибольшей степени  $\omega$ . Отметим, что произошли некоторые сокращения: в частности, исчезли члены порядка  $\mathcal{H}^2 \mathbf{p}^2 \omega^4$ . Эти сокращения — след калибровочной инвариантности: члены порядка  $\mathcal{H}^2 \mathbf{p}^2 \omega^4$  не зависели бы от массы гравитона, так что они остались бы и в пространстве де Ситтера с безмассовыми гравитонами, что несовместно с калибровочной инвариантностью.

Поскольку определитель имеет четвертый порядок по  $\omega$ , существуют две моды. Одна из них обладает дисперсионным соотношением продольной компоненты массивного гравитона. Этот результат справедлив только в области импульсов 1; действительно, члены, опущенные в (169), велики при больших импульсах. Предел больших импульсов мы обсудим позднее. В рассматриваемой области импульсов для второй моды, моды Бульвара–Дезера, имеет место соотношение  $\omega^2 \gg \mathbf{p}^2$  и частота дается формулой

$$\omega^2 = -\frac{3m_G^4}{12\mathcal{H}^2 + 2m_\phi^2}. \quad (170)$$

Наше рассмотрение справедливо для произвольного массового члена, не обязательно (63). Для любого массового члена, принимающего форму Фирца–Паули на фоне пространства Минковского, имеем  $m_\phi^2 \sim \mathcal{H}^2$ , так что для частоты моды Бульвара–Дезера непрерывного перехода к пространству Минковского нет. Мода Бульвара–Дезера может быть и тахионной, и нетахионной; в примере (63) это зависит от знака  $(a-1)$ . Действительно, в этом случае  $m_\phi^2 = -6\mathcal{H}^2 - 3\epsilon_0$ , так что частота удовлетворяет соотношению

$$\omega^2 = \frac{m_G^4}{2\epsilon_0}$$

и ее знак противоположен знаку  $(a-1)$  (см. (165)).

Для того чтобы увидеть, является ли мода Бульвара–Дезера духом, воспользуемся тем фактом, что ее частота (170) не зависит от пространственных импульсов, если только они лежат в диапазоне 1. Таким образом, чтобы получить действие для этой моды, можно опустить члены с лапласианом в (167) и (168), за исключением членов, содержащих  $\Delta E$  (здесь мы рассматриваем  $\Delta E$  как поле, наравне с  $\psi$ ). Таким образом, получим

$$\varphi = \frac{1}{m_\phi^2} [2\mathcal{H}(\Delta E - 3\psi)' + m_G^2(\Delta E - 3\psi)],$$

$$B = \frac{1}{m_B^2} (2\psi' - 2\mathcal{H}\varphi),$$

где мы использовали выражения для  $\mu_1$  и  $\mu_2$  в ведущем порядке, а именно  $\mu_1 = 3m_G^2$ ,  $\mu_2 = -m_G^2$ . Подставляя эти выражения обратно в действие (64), интегрируя по

частям и снова опуская члены с пространственным лапласианом и члены, подавленные отношением  $\mathcal{H}^2/m_G^2$ , найдем действие для динамических полей  $\psi$  и  $\Delta E$ :

$$\begin{aligned} S_{\text{EH}+A+m_G}^{(2)} = & 2M_{\text{Pl}} \int d^3x \, dx^0 a^2 \times \\ & \times \left[ -\frac{6\mathcal{H}^2 + m_\phi^2}{3m_\phi^2} (\Delta E' - 3\psi')^2 - \frac{m_G^4}{2m_\phi^2} \times \right. \\ & \left. \times (\Delta E - 3\psi)^2 + \frac{1}{3} (\Delta E')^2 \right]. \end{aligned}$$

Последнее выражение снова справедливо для любого массового члена, не обязательно (63). Здесь мы пренебрегли членами  $m_\psi^2 \psi^2$  и  $\mu_3 \psi \Delta E$ , так как их вклады в действие для моды Бульвара–Дезера подавлены величиной  $\mathcal{H}^2/m_G^2$ . Из вида действия понятно, что поле Бульвара–Дезера с дисперсионным соотношением (170) — это  $\Delta E - 3\psi$ , и в случае, когда это поле не является тахионом, оно является духом. В самом деле, поле Бульвара–Дезера — не тахион в случае, когда  $6\mathcal{H}^2 + m_\phi^2 < 0$ , откуда следует  $m_\phi^2 < 0$ , так что кинетический член этого поля отрицателен. Заметим, кроме того, что действие для этого поля сингулярно в пределе пространства Минковского, т.е. в пределе  $\mathcal{H} \rightarrow 0$ , в котором также  $m_\phi^2 \rightarrow 0$ .

Повторим, что проведенный выше анализ справедлив только при  $\mathbf{p}^2 \ll m_G^4/\mathcal{H}^2$ . Переход к пределу больших импульсов с использованием выражения (169) был бы некорректным, отчасти вследствие того, что члены, не выписанные явно в (169), существенны при больших импульсах, а отчасти потому, что члены высшего порядка по  $\mathcal{H}$  могут иметь высший порядок по  $\mathbf{p}^2$ .

Перейдем теперь к пределу больших импульсов 2 в (65). Анализ, приводящий к действию (66), применим к любому массовому члену. Это действие имеет следующий общий вид:

$$\begin{aligned} S_{\text{EH}+A+m_G}^{(2)} = & 2M_{\text{Pl}} \int d^4x \, a^2 \left\{ A\psi\Delta\psi + C(\psi')^2 + \right. \\ & \left. + B\psi'\Delta E + \frac{m_B^2}{2} E'\Delta E' + \frac{m_E^2}{2} (\Delta E)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Далее, рассмотрим массовый член (63). Прямое вычисление в этом случае дает

$$m_\phi^2 = -6\mathcal{H}^2 - 3\epsilon_0, \quad m_B^2 = -3\epsilon_0 - \frac{1}{2} m_G^2 a^2 n,$$

$$\mu_2 = -3\epsilon_0 - m_G^2 a^2 n, \quad 1 - \frac{\mathcal{H}'}{\mathcal{H}^2} = \frac{3\epsilon_0 - \epsilon_s}{2\mathcal{H}^2}, \quad m_E^2 = -\epsilon_s.$$

Следовательно,

$$A \equiv 1 - \frac{\mathcal{H}'}{\mathcal{H}^2} + \frac{m_B^2}{2\mathcal{H}^2} = \frac{1}{4\mathcal{H}^2} (-2\epsilon_s - m_G^2 a^2 n),$$

$$B \equiv \frac{\mu_2 - m_B^2}{\mathcal{H}} = -\frac{m_G^2 a^2 n}{2\mathcal{H}},$$

$$C \equiv 3 + \frac{m_\phi^2}{2\mathcal{H}^2} = -\frac{3\epsilon_0}{2\mathcal{H}^2}.$$

Дисперсионные соотношения получим, решив уравнения движения для  $\psi$  и  $E$ . Имеются две моды, одна из которых обладает дисперсионным соотношением

$$\omega_1^2 = \mathbf{p}^2,$$

а другая — дисперсионным соотношением

$$\omega_2^2 = \frac{\epsilon_s}{3\epsilon_0} \mathbf{p}^2.$$

Последние выражения справедливы при любых  $a$  и  $n$ , не обязательно близких к единице.

Одна из этих мод — тахион или дух. Действительно, положительность энергии требует выполнения условий

$$A > 0, \quad C > 0, \quad m_B^2 < 0, \quad m_E^2 > 0.$$

Однако, поскольку справедливо соотношение

$$\omega_2^2 = 2\mathcal{H}^2 \frac{A}{m_B^2},$$

из указанных требований вытекает, что  $\omega_2^2 < 0$  и вторая мода — это тахион. Отметим, что в некоторых фоновых пространствах вторая мода — сверхсветовая.

## Список литературы

- Weinberg S *Rev. Mod. Phys.* **61** 1 (1989)
- Sahni V, Starobinsky A *Int. J. Mod. Phys. D* **9** 373 (2000); astro-ph/9904398
- Dolgov A D, astro-ph/9708045
- Чернин А Д *УФН* **171** 1153 (2001) [Chernin A D *Phys. Usp.* **44** 1099 (2001)]
- Padmanabhan T *Phys. Rep.* **380** 235 (2003); hep-th/0212290
- Peebles P J E, Ratra B *Rev. Mod. Phys.* **75** 559 (2003); astro-ph/0207347
- Copeland E J, Sami M, Tsujikawa S *Int. J. Mod. Phys. D* **15** 1753 (2006); hep-th/0603057
- Spergel D N et al. (WMAP) *Astrophys. J. Suppl.* **170** 377 (2007); astro-ph/0603449
- Dolgov A D, hep-ph/0606230
- Rubakov V A *Phys. Rev. D* **61** 061501 (2000); hep-ph/9911305
- Steinhardt P J, Turok N *Science* **312** 1180 (2006); astro-ph/0605173
- Linde A, hep-th/0211048
- Рубаков В А *УФН* **171** 913 (2001) [Rubakov V A *Phys. Usp.* **44** 871 (2001)]; hep-ph/0104152
- Charmousis C, Gregory R, Rubakov V A *Phys. Rev. D* **62** 067505 (2000); hep-th/9912160
- Kogan I I et al. *Nucl. Phys. B* **584** 313 (2000); hep-ph/9912552
- Gregory R, Rubakov V A, Sibiryakov S M *Phys. Rev. Lett.* **84** 5928 (2000); hep-th/0002072
- Gabadadze G *Nucl. Phys. B: Proc. Suppl.* **171** 88 (2007); arXiv:0705.1929
- Dvali G, Gabadadze G, Porrati M *Phys. Lett. B* **485** 208 (2000); hep-th/0005016
- Gabadadze G, hep-ph/0308112
- Luty M A, Porrati M, Rattazzi R *JHEP* (09) 029 (2003); hep-th/0303116
- Rubakov V A, hep-th/0303125
- Nicolis A, Rattazzi R *JHEP* (06) 059 (2004); hep-th/0404159
- Deffayet C *Phys. Lett. B* **502** 199 (2001); hep-th/0010186
- Deffayet C, Dvali G, Gabadadze G *Phys. Rev. D* **65** 044023 (2002); astro-ph/0105068
- Dvali G, Gabadadze G, Shifman M *Phys. Rev. D* **67** 044020 (2003); hep-th/0202174
- Gorbunov D, Koyama K, Sibiryakov S *Phys. Rev. D* **73** 044016 (2006); hep-th/0512097
- Bekenstein J, Milgrom M *Astrophys. J.* **286** 7 (1984)
- Bekenstein J D *Phys. Lett. B* **202** 497 (1988)
- Bekenstein J D *Phys. Rev. D* **70** 083509 (2004); astro-ph/0403694
- Bekenstein J D *PoS* (JHW2004) 012 (2005); astro-ph/0412652
- Bekenstein J D, Sanders R H, astro-ph/0509519
- Logunov A A *Relativistic Theory of Gravity* (Commack, NY: Nova Sci. Publ., 1998)
- Logunov A A, gr-qc/0210005
- 't Hooft G, arXiv:0708.3184
- Boisseau B et al. *Phys. Rev. Lett.* **85** 2236 (2000); gr-qc/0001066
- Gannouji R et al. *JCAP* (09) 016 (2006); astro-ph/0606287
- Carlóni S et al., gr-qc/0701009
- Arkani-Hamed N et al. *JHEP* (05) 074 (2004); hep-th/0312099
- Rubakov V, hep-th/0407104
- Dubovsky S L *JHEP* (10) 076 (2004); hep-th/0409124
- Dubovsky S L, Tinyakov P G, Tkachev I I *Phys. Rev. D* **72** 084011 (2005); hep-th/0504067
- Dubovsky S L, Tinyakov P G, Tkachev I I *Phys. Rev. Lett.* **94** 181102 (2005); hep-th/0411158
- Fierz M, Pauli W *Proc. R. Soc. London A* **173** 211 (1939)
- Arkani-Hamed N, Georgi H, Schwartz M D *Ann. Phys. (New York)* **305** 96 (2003); hep-th/0210184
- Kakushadze Z *Phys. Rev. D* **77** 024001 (2008); arXiv:0710.1061
- Kogan I I, Mouslopoulos S, Papazoglou A *Phys. Lett. B* **503** 173 (2001); hep-th/0011138
- Porrati M *Phys. Lett. B* **498** 92 (2001); hep-th/0011152
- Deser S, Waldron A *Phys. Rev. Lett.* **87** 031601 (2001); hep-th/0102166
- Deser S, Waldron A *Phys. Lett. B* **508** 347 (2001); hep-th/0103255
- Porrati M *JHEP* (04) 058 (2002); hep-th/0112166
- Mukhanov V F, Feldman H A, Brandenberger R H *Phys. Rep.* **215** 203 (1992)
- van Dam H, Veltman M *Nucl. Phys. B* **22** 397 (1970)
- Захаров В И *Письма в ЖЭТФ* **12** 447 (1970) [Zakharov V I *JETP Lett.* **12** 312 (1970)]
- Will C M *Living Rev. Relativity* **9** lrr-2006-3 (2006); gr-qc/0510072
- Ford L H, Van Dam H *Nucl. Phys. B* **169** 126 (1980)
- Vainshtein A I *Phys. Lett. B* **39** 393 (1972)
- Creminelli P et al. *JHEP* (09) 003 (2005); hep-th/0505147
- Long J C et al. *Nature* **421** 922 (2003)
- Long J C, Price J C *C.R. Physique* **4** 337 (2003); hep-ph/0303057
- Smullin S J et al. *Phys. Rev. D* **72** 122001 (2005); hep-ph/0508204
- Hoyle C D et al. *Phys. Rev. D* **70** 042004 (2004); hep-ph/0405262
- Gherghetta T, hep-ph/0601213
- Hewett J L, in *Particle Physics Beyond the Standard Model, Lecture Notes of the Les Houches Summer School. Session 84: 2005* (Eds D Kazakov, S Lavignac, J Dalibard) (Amsterdam: Elsevier, 2006) Ch. 5
- Rubakov V, in *Particle Physics Beyond the Standard Model, Lecture Notes of the Les Houches Summer School. Session 84: 2005* (Eds D Kazakov, S Lavignac, J Dalibard) (Amsterdam: Elsevier, 2006) Ch. 4
- Aubert A *Phys. Rev. D* **69** 087502 (2004); hep-th/0312246
- Boulware D G, Deser S *Phys. Rev. D* **6** 3368 (1972)
- Deffayet C, Rombouts J-W *Phys. Rev. D* **72** 044003 (2005); gr-qc/0505134
- Cline J M, Jeon S, Moore G D *Phys. Rev. D* **70** 043543 (2004); hep-ph/0311312
- Creminelli P et al. *JHEP* (12) 080 (2006); hep-th/0606090
- Dubovsky S L *JCAP* (07) 009 (2004); hep-ph/0403308
- Peloso M, Sorbo L *Phys. Lett. B* **593** 25 (2004); hep-th/0404005
- Arkani-Hamed N et al. *JHEP* (01) 036 (2007); hep-ph/0507120
- Felder G, Kofman L, Starobinsky A *JHEP* (09) 026 (2002); hep-th/0208019
- Krotov D, Rebbi C, Rubakov V, Zakharov V *Phys. Rev. D* **71** 045014 (2005); hep-ph/0407081
- Frolov A V *Phys. Rev. D* **70** 061501 (2004); hep-th/0404216
- Mukohyama S *Phys. Rev. D* **71** 104019 (2005); hep-th/0502189
- Dubovsky S L, Sibiryakov S M *Phys. Lett. B* **638** 509 (2006); hep-th/0603158
- Babichev E, Mukhanov V, Vikman A *JHEP* (09) 061 (2006); hep-th/0604075
- Dubovsky S, Tinyakov P, Zaldarriaga M *JHEP* (11) 083 (2007); arXiv:0706.0288
- Arkani-Hamed N et al. *JCAP* (04) 001 (2004); hep-th/0312100
- Piazza F, Tsujikawa S *JCAP* (07) 004 (2004); hep-th/0405054
- Krause A, Ng S-P *Int. J. Mod. Phys. A* **21** 1091 (2006); hep-th/0409241
- Senatore L *Phys. Rev. D* **71** 043512 (2005); astro-ph/0406187
- Рубаков В А *ТМФ* **149** 409 (2006) [Rubakov V A *Theor. Math. Phys.* **149** 1651 (2006)]; hep-th/0604153

85. Libanov M, Rubakov V, Papantonopoulos E, Sami M, Tsujikawa S *JCAP* (08) 010 (2007); arXiv:0704.1848
86. Mukohyama S *JCAP* (10) 011 (2006); hep-th/0607181
87. Buchbinder E I, Khoury J, Ovrut B A *Phys. Rev. D* **76** 123503 (2007); hep-th/0702154
88. Creminelli P, Senatore L *JCAP* (11) 010 (2007); hep-th/0702165
89. Buchbinder E I, Khoury J, Ovrut B A *JHEP* (11) 076 (2007); arXiv:0706.3903
90. Dvali G, Papucci M, Schwartz M D *Phys. Rev. Lett.* **94** 191602 (2005); hep-th/0501157
91. Gabadadze G, Grisa L *Phys. Lett. B* **617** 124 (2005); hep-th/0412332
92. Berezhiani Z et al. *Phys. Rev. Lett.* **99** 131101 (2007); hep-th/0703264
93. Isham C J, Salam A, Strathdee J *Phys. Rev. D* **3** 867 (1971)
94. Dubovsky S et al. *JHEP* (03) 025 (2006); hep-th/0512260
95. Esposito-Farèse G, Polarski D *Phys. Rev. D* **63** 063504 (2001); gr-qc/0009034
96. Taylor J H (Jr.) *Rev. Mod. Phys.* **66** 711 (1994)
97. Rubakov V A, Sazhin M V, Veryaskin A V *Phys. Lett. B* **115** 189 (1982)
98. Linde A D *Phys. Rev. D* **49** 748 (1994); astro-ph/9307002
99. Bunch T S, Davies P C W *Proc. R. Soc. London A* **360** 117 (1978)
100. Thorne K S, in *Three Hundred Years of Gravitation* (Eds S W Hawking, W Israel) (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987) p. 330
101. Bender P L *Class. Quantum Grav.* **20** S301 (2003)
102. Lommen A N, astro-ph/0208572
103. Сажин М В *Астрон. журн.* **55** 65 (1978) [Sazhin M V *Sov. Astron.* **22** 36 (1978)]
104. Dodelson S *Modern Cosmology* (San Diego, Calif.: Academic Press, 2003)
105. Mukhanov V *Physical Foundations of Cosmology* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2005)
106. Tegmark M et al. (SDSS) *Phys. Rev. D* **69** 103501 (2004); astro-ph/0310723
107. Seljak U, Slosar A, McDonald P *JCAP* (10) 014 (2006); astro-ph/0604335
108. Bebronne M V, Tinyakov P G *Phys. Rev. D* **76** 084011 (2007); arXiv:0705.1301
109. Ryan F D *Phys. Rev. D* **52** 5707 (1995)
110. Falcke H, Melia F, Agol E *Astrophys. J. Lett.* **528** L13 (2000); astro-ph/9912263
111. Collins N A, Hughes S A *Phys. Rev. D* **69** 124022 (2004); gr-qc/0402063
112. Narayan R *New J. Phys.* **7** 199 (2005); gr-qc/0506078
113. Broderick A E, Loeb A *Astrophys. J. Lett.* **636** L109 (2006); astro-ph/0508386
114. Glampedakis K, Babak S *Class. Quantum Grav.* **23** 4167 (2006); gr-qc/0510057
115. Bekenstein J D *Phys. Rev. D* **5** 1239 (1972)
116. Bekenstein J D *Phys. Rev. D* **5** 2403 (1972)
117. Teitelboim C *Phys. Rev. D* **5** 2941 (1972)
118. Price R H *Phys. Rev. D* **5** 2419 (1972)
119. Thorne K S, Dykla J J *Astrophys. J.* **166** L35 (1971)
120. Psaltis D et al., arXiv:0710.4564
121. Garat A, Price R H *Phys. Rev. D* **61** 124011 (2000); gr-qc/0002013
122. Valiente Kroon J A *Class. Quantum Grav.* **21** 3237 (2004); gr-qc/0402033
123. Berezhiani Z et al., arXiv:0803.1687
124. Magueijo J *Rep. Prog. Phys.* **66** 2025 (2003); astro-ph/0305457
125. Jacobson T, arXiv:0801.1547
126. Eling C, Jacobson T, Mattingly D, gr-qc/0410001
127. Libanov M V, Rubakov V A *JHEP* (08) 001 (2005); hep-th/0505231
128. Carroll S M, Lim E A *Phys. Rev. D* **70** 123525 (2004); hep-th/0407149
129. Kiselev V V *Class. Quantum Grav.* **21** 3323 (2004); gr-qc/0402095

### Infrared-modified gravities and massive gravitons

#### V.A. Rubakov

*Institute for Nuclear Research, Russian Academy of Sciences,  
prosp. 60-letiya Oktyabrya 7a, 117312 Moscow, Russian Federation  
Tel. (7-499) 135-2259*

*E-mail: rubakov@ms2.inr.ac.ru*

#### P.G. Tinyakov

*Institute for Nuclear Research, Russian Academy of Sciences,  
prosp. 60-letiya Oktyabrya 7a, 117312 Moscow, Russian Federation,  
Service de Physique Théorique, Université Libre de Bruxelles,  
CP225, bld. du Triomphe, B-1050 Bruxelles, Belgium*

*E-mail: petr.tiniakov@ulb.ac.be*

Some theoretical and phenomenological aspects of four-dimensional massive gravity are reviewed, starting from the Fierz–Pauli theory with Lorentz-invariant mass terms and proceeding to Lorentz-violating masses. Unlike the Fierz–Pauli theory, some Lorentz-violating models have nonpathological spectra about flat and nearly flat space time backgrounds and also lead to interesting phenomenological implications.

PACS numbers: **04.50. +h**, **11.10.Lm**, **95.35. +d**

DOI: 10.3367/UFNr.0178.200808a.0785

Bibliography — 129 references

*Received 19 March 2008*

*Uspekhi Fizicheskikh Nauk* **178** (8) 785–822 (2008)

*Physics–Uspekhi* **51** (8) (2008)