

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Наглядность для ряда задач выбора энергии в качестве единицы измерения вместо массы

Г.С. Голицын

Для быстрого и удобного решения ряда задач физики, механики, геофизики методами теории подобия и размерности предлагается вместо системы единиц, включающей единицы массы, длины и времени, использовать систему с единицами энергии, длины и времени. Представлено восемь примеров, включающих в себя выводы закона излучения Стефана–Больцмана, полной кинетической энергии урагана, энергетического спектра космических лучей и т.д.

PACS numbers: 01.55.+b, 06.20.fa, 89.75.Da

DOI:10.3367/UFNr.0178.200807e.0753

Существует ряд замечательных книг с описанием обоснования метода размерностей и подобия и практических рецептов его использования [1, 2]. Если нет полной системы уравнений и начальных или граничных условий к ним, то из физических (или интуитивных) соображений можно выбрать параметры, определяющие искомую величину. Эта величина, имеющая какую-то размерность, ищется в виде одночлена из произведения размерностей определяющих параметров, каждый из которых возводится в степень. Приравнявая показатели степени справа и слева, получаем систему линейных алгебраических уравнений. Решение этой системы конкретизирует одночлен, определяющий искомую величину в случае, если число независимых единиц измерения совпадает с числом определяющих задачу параметров. Если число последних больше числа единиц измерений, то возникают параметры подобия, что обычно определяет область применения получаемых результатов.

В стандартной практике в качестве единицы измерений берутся единицы массы M , длины L и времени T . Тогда, например, размерность энергии $[E] = ML^2T^{-2}$, плотности $[\rho] = ML^{-3}$, давления $[p] = ML^{-1}T^{-2}$, плотности потока энергии $[q] = MT^{-3}$ и т.п. Рассмотрим в качестве первого примера наиболее часто употребляемый пример использования метода размерностей в задаче о сильном взрыве.

Пример 1. Считается, что при взрыве в начальный момент времени в среде с плотностью ρ выделяется энергия E . Требуется найти как функции времени t радиус и скорость возникающей ударной волны. Размер взрывного устройства считается малым по сравнению с

искомым радиусом ударной волны, т.е. не рассматриваются времена, близкие к начальному моменту. Решение имеет смысл до тех пор, пока скачок давления на волне остается большим по сравнению с давлением окружающей среды, которым здесь пренебрегается. Ограничимся поиском радиуса волны, который согласно стандартным рецептам ищем в виде $r = E^a \rho^b t^c$, или в размерностях

$$L = (ML^2T^{-2})^a (ML^{-3})^b T^c.$$

Приравнявая размерности справа и слева, имеем при размерности массы: $a + b = 0$, при размерности длины: $2a - 3b = 1$, при размерности времени: $-2a + c = 0$. Решение этой линейной системы алгебраических уравнений является единственным, поскольку ее детерминант равен $-5 \neq 0$, и имеет вид $a = 1/5 = -b$, $c = 2/5$, т.е.

$$r(t) = \left(\frac{Et^2}{\rho} \right)^{1/5}. \quad (1)$$

Вместе с тем, как доказывают классики [1, 2], выбор системы единиц измерений может быть произвольным. Его удобно сделать так, чтобы единицы измерений входили в минимально возможное число определяющих параметров. Поясним это на примере выбора следующей системы: время T , энергия E , длина L — система TEL. Тогда размерность энергии $[E] = E$, плотности $[\rho] = ET^2L^{-5}$, радиуса $[r] = L$, времени $[t] = T$. Теперь глядя на размерность плотности можно сразу написать выражение (1). Действительно, в выражении для радиуса ударной волны мы должны исключить размерности энергии и времени, а это делается делением энергии на плотность, умножением частного на t^2 и извлечением корня пятой степени.

Пример 2. Получение выражения для константы в законе излучения Стефана–Больцмана через постоянную Планка $\hbar$ и скорость света c . Температуру Θ будем измерять в энергетических единицах $[\Theta] = E$. В нашей

Г.С. Голицын. Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН, Пыжевский пер. 3, 119017 Москва, Российская Федерация
Тел. 951-55-65
E-mail: gsg@ifaran.ru, mail_adm@ifaran.ru

Статья поступила 17 декабря 2007 г.

новой системе единиц измерения TEL размерность постоянной Планка $[h] = ET$, размерность скорости света по-прежнему $[c] = LT^{-1}$. Искомый поток излучения имеет размерность $[q] = EL^{-2}T^{-1}$. Поскольку размерность длины входит только в скорость света, то $q = c^{-2} \dots$, но теперь в числителе дополнительно появится множитель T^2 . Размерность T^{-3} мы можем получить, деля все на $\hbar^3$: $q = c^{-2}\hbar^{-3} \dots$. Заменяя в числителе E^4 величиной Θ^4 , получим в итоге $q = c^{-2}\hbar^{-3}\Theta^4$. Если температуру измерять в градусах Кельвина, то надо ввести постоянную Больцмана $k = 1,38 \times 10^{-25}$ Дж К $^{-1}$ и тогда с учетом $\Theta = kT$

$$q = \frac{k^4 T^4}{c^2 \hbar^3}. \quad (2)$$

Конечно, закон Стефана–Больцмана уже более ста лет получается интегрированием по частоте функции распределения Планка, что дает и численный множитель в законе (2), равный $\pi^2/60$. Тем не менее наш вывод представляется методически полезным благодаря его наглядности.

Пример 3. Вывод уравнения состояния идеального газа, т.е. зависимости давления от числа частиц n и температуры. Размерности $[p] = EL^{-3}$, $[n] = L^{-3}$, $[T] = E$. Сразу видно, что

$$p = n\Theta, \quad (3)$$

или, если температуру измерять в Кельвинах, то

$$p = nkT. \quad (3')$$

Пример 4. Очевидной является также формула для квадрата (изотермической) скорости звука

$$c^2 = \frac{p}{\rho} = \frac{EL^{-3}}{ET^2L^{-5}} = L^2T^{-2}. \quad (4)$$

Пример 5. Кинетическая энергия урагана K . Вихри в тропиках простираются на всю тропосферу, т.е. до высот 15–18 км, охватывая по массе около трех четвертей атмосферного столба M_1 . Размерность $[M_1] = ET^2L^{-4}$. Интенсивность конвекции определяется потоком плавучести $b = gp^{-1}\langle \rho'w' \rangle$, где g — ускорение силы тяжести, ρ' , w' — флуктуации плотности и вертикальной скорости соответственно. Размерность $[b] = L^2T^{-3}$, а ее типичная для ураганов величина порядка 3×10^{-2} м 2 с $^{-3}$. Возникающий конвективный столб засасывает в себя воздух из окрестностей размером во многие сотни и даже тысячи километров, концентрируя тем самым угловой момент масс воздуха на вращающейся планете. Это вызывает возрастание тангенциальной компоненты ветра и увеличивает теплоотдачу с поверхности океана, усиливающую конвекцию и т.д. Трение ветра о морскую поверхность лимитирует процесс. На вращающейся планете соответствующей характеристикой является параметр Кориолиса $l_C = 2\omega \sin \theta$, где θ — широта, $[l_C] = T^{-1}$. Размерность энергии есть только в размерности массы атмосферного столба, которую надо домножить на b^2 , для того чтобы ликвидировать размерность L^{-4} , после чего в знаменателе остается T^{-4} , которое уничтожается делением на l_C^4 . В итоге,

$$K = M_1 b^2 l_C^{-4}. \quad (5)$$

Формула (5) впервые была получена в [3] с использованием результатов исследования конвекции во вращающейся жидкости, где есть масштаб квадрата скорости $U^2 = bl_C^{-1}$ и масштаб площади $S = bl_C^{-3}$. Умножение произведения этих масштабов на массу M_1 и дает формулу (5). Для $\theta = 20^\circ$ имеем $l_C = 0,5 \times 10^{-4}$ с $^{-1}$ и при $b \approx 3 \times 10^{-2}$ м 2 с $^{-3}$ и $M_1 = 10^4$ кг м $^{-2}$ получаем $K = 2 \times 10^{18}$ Дж. Ураганы существуют и на высоких широтах, где они гораздо меньше по размерам: на широте 70° $l_C = 1,37 \times 10^{-4}$ с $^{-1}$, т.е. почти вдвое больше, чем l_C в тропиках, хотя сила ветра на широте 70° также может превосходить ураганную силу 33 м с $^{-1}$.

Пример 6. Кинетическая энергия общей циркуляции планетной атмосферы K_0 . Эта величина определяется [4] средней плотностью потока солнечной энергии q с размерностью $EL^{-2}T^{-1}$, теплоемкостью атмосферы c_p с размерностью $L^2T^{-2}K^{-1}$, где K — размерность температуры — градус Кельвина, размером планеты — ее радиусом r — и постоянной закона излучения Стефана–Больцмана σ , обеспечивающего стабильный температурный режим планеты, $[\sigma] = ET^{-1}L^{-2}K^{-4}$. Ищем $[K_0] = E$. Надо подобрать комбинации, последовательно исключая размерности K , T и L . Запишем ответ в виде произведения множителей, выполняющих эту процедуру:

$$E = \left(\frac{\sigma^{1/4}}{c_p} \right)^{1/2} (q^{7/4})^{1/2} r^3 = \left(\frac{\sigma^{1/4} q^{7/4}}{c_p} \right)^{1/2} r^3. \quad (6)$$

По обычному рецепту в системе MLTK мы имели бы линейную систему четырех алгебраических уравнений с четырьмя неизвестными. Однако наша система TEL является более простой и может служить тестом для стандартной процедуры. На достаточно быстро вращающихся планетах формула (6) должна быть домножена на параметр подобия по вращению $\Pi = \omega r/c$, где c — скорость звука [4].

Пример 7. Форма интегрального энергетического спектра галактических космических лучей (КЛ) в интервале энергий $10 \leq E < 3 \times 10^5$ ГэВ. Нижний предел по энергии определяется тем, что для меньших энергий преобладают КЛ солнечного происхождения, а для верхнего предела ларморовский радиус оказывается сравнимым с толщиной галактического диска и частицы уже перестают эффективно удерживаться магнитным полем Галактики [5]. Первичным источником энергии являются взрывы сверхновых звезд, происходящие 2–3 раза в столетие. Их мощность $G \sim 3 \times 10^{33}$ Вт и $[G] = E/T$. Объемная энергетическая плотность КЛ w составляет около 0,5 эВ см $^{-3}$, т.е. $[w] = EL^{-3}$, как для давления. Интегральный энергетический спектр $N(\geq E)$ — число частиц с энергией $\geq E$, регистрируемых в единицу времени на единице площади, приходящихся на единичный телесный угол, $[N(\geq E)] = L^{-2}T^{-1}$ и $N(\geq E) = f(G, w, E)$. Размерность длины есть только у плотности энергии, поэтому $N(\geq E) \sim w^{2/3}$, размерность времени в нужной степени имеется только у мощности G , поэтому $N(\geq E) \sim w^{2/3}G$, а для исключения размерности энергии необходимо, чтобы выполнялось соотношение

$$N(\geq E) \sim w^{2/3}GE^{-5/3}. \quad (7)$$

Экспериментальное значение показателя степени в зависимости $N(\geq E) \sim E^{-1,7}$. Полный феноменологичес-

кий вывод энергетического спектра $N(\geq E)$ с использованием механизма Ферми для ускорения частиц КЛ можно найти в [6]. Для интервала энергий $3 \times 10^5 \leq E < 10^8$ спектр становится круче и показатель спектра приближается к $-2,1$. В [6] он найден равным $-19/9 = -(2 + 1/9)$ с использованием оценки объемной плотности энергии w для КЛ больших энергий.

Пример 8. Зависимость числа цунами от высоты набегающей на берег волны. Цунами возбуждаются подводными землетрясениями (ЗТ), большинство которых происходит вблизи срединно-океанических хребтов, где земная кора тонкая. Источник энергии в геодинамике — геотермический поток мощностью $F = 4,5 \times 10^{13}$ Вт [7]. Мерой интенсивности ЗТ является энергия E , высвобождаемая при ЗТ. Геометрический поток возбуждает конвекцию в мантии, раскалывает кору на плиты. Из-за неоднородности конвекции по пространству скорости плит (все в пределах нескольких сантиметров в год) создают напряжения на границах плит, разрешаемые ЗТ. Кумулятивное число ЗТ $N(\geq E)$ имеет размерность частоты. Поскольку $[F] = ET^{-1}$, то наши соображения сразу дают

$$N(\geq E) = \frac{F}{E} f(\Pi_i), \quad (8)$$

где Π_i — параметры подобия. Для ЗТ основным параметром является отношение длины разрыва $L = (E/\sigma)^{1/3}$, где σ — напряжение, сбрасываемое в процессе ЗТ, к толщине коры H . Анализ каталогов ЗТ показывает, что когда $\Pi = L/H = O(1)$, то функция $f(\Pi) \rightarrow \text{const}$. Эта константа близка к 0,4 [8]. Океаническая кора тонкая, поэтому для подводных ЗТ имеем $N(\geq E) \sim E^{-1}$. Очевидно, что при прочих равных условиях высота волны цунами h пропорциональна энергии ЗТ. Поэтому следует ожидать для числа волн цунами $N(\geq E) \sim h^{-1}$. Действительно [8], по данным наблюдений это степенная функция с показателем степени $-1,01$.

Показатели, близкие к -1 , имеют также кумулятивные распределения числа оползней и сейс в зависимости от их массы M : $N(\geq M) \propto M^{-n}$, где $0,95 \leq n \leq 1,1$, число озер в зависимости от их площади S : $N(\geq S) \propto S^{-0,95}$ и т.д. Физическое объяснение этому состоит в том, что такие природные объекты и явления формируются в процессе долговременной реакции системы на случайные воздействия, время корреляции которых мало по сравнению со временем реакции системы. Тогда корре-

ляционная функция случайных сил — дельта-функция, а их спектр — белый шум, и в пространстве импульсов мы будем иметь случайные блуждания. Таким образом, объясняются многие природные статистические закономерности [9], что оправдывает наш анализ размерностей и дает возможность определить пределы его применимости. Например, на этом пути непринужденно объясняются основные результаты теории локально однородной и изотропной турбулентности Колмогорова–Обухова [9].

Представляется, что приведенный здесь анализ на основе системы единиц измерений ТЕЛ полезен в методическом отношении. Автор успешно его использует в лекциях по природным явлениям на физическом факультете Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова и на аэрокосмическом факультете Московского физико-технического института. Простота всегда производит впечатление.

Работа частично поддержана Программой Президиума РАН "Математические методы нелинейной динамики" и грантом Президента РФ НШ 4166 2006.5.

Список литературы

1. Седов Л И *Методы подобия и размерности в механике* (М.: Наука, 1972) [Translated into English: Sedov L I *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics* (Moscow: Mir Publ., 1982)]
2. Баренблатт Г И *Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика* (Л.: Гидрометеониздат, 1-е изд. — 1978, 2-е изд. — 1982) [Translated into English: Barenblatt G I *Similarity, Self-Similarity, and Intermediate Asymptotics* (New York: Consultants Bureau, 1979); *Scaling, Self-Similarity, and Intermediate Asymptotics* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996)]
3. Голицын Г С *ДАН* **354** 535 (1997) [Golitsyn G S *Dokl. Earth Sci.* **354** 633 (1997)]
4. Голицын Г С *Введение в динамику планетных атмосфер* (Л.: Гидрометеониздат, 1973)
5. Березинский В С и др. *Астрофизика космических лучей* (Под ред. В Л Гинзбурга) 2-е изд. (М.: Физматлит, 1990) [Translated into English: Berezhinskii V S et al. *Astrophysics of Cosmic Rays* (Ed. V L Ginzburg) (Amsterdam: North-Holland, 1990)]
6. Голицын Г С *Письма в Астрон. журн.* **31** 500 (2005) [Golitsyn G S *Astron. Lett.* **31** 446 (2005)]
7. Schubert G, Turcotte D L, Olson P *Mantle Convection in the Earth and Planets* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2001)
8. Golitsyn G S *Comput. Seismol.* (32) 138 (2001)
9. Голицын Г С *ДАН* **398** 177 (2004) [Golitsyn G S *Dokl. Phys.* **49** 501 (2004)]

Convenience of using energy rather than mass in the measurement unit system for a number of problems in physics, mechanics and geophysics

G.S. Golitsyn

A.M. Obukhov Institute of Atmospheric Physics, Russian Academy of Sciences,
Pyzhevskii per. 3, 119017 Moscow, Russian Federation
Tel. (7-495) 951-55 65. E-mail: gsg@ifaran.ru, mail_adm@ifaran.ru

Changing from the mass-length-time to the energy-length-time system of units is suggested as a means with which a number of problems in physics, mechanics and geophysics can be more easily and conveniently solved using dimensional analysis and similarity methods. Eight examples are presented, including the ways in which the Stefan–Boltzmann radiation law, the total kinetic energy of a hurricane and the cosmic ray energy spectrum can be derived.

PACS numbers: **01.55.+b**, **06.20.fa**, **89.75.Da**

DOI: 10.3367/UFNr.0178.200807e.0751

Bibliography — 9 references

Received 17 December 2007

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **178** (7) 753–755 (2008)

Physics – Uspekhi **51** (7) (2008)