

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Асимметрия релятивистского закона сложения скоростей относительно их перестановки и неевклидова геометрия

В.И. Ритус

Асимметрия релятивистского закона сложения неколлинеарных скоростей относительно их перестановки приводит к двум модифицированным треугольникам, изображающим на евклидовой плоскости сложение непоставленных и поставленных скоростей и появление ненулевого угла ω между двумя результирующими скоростями. На этот же угол ω поворачивается спин частицы при изменении ее скорости лоренцевым бустом со скоростью, неколлинеарной скорости частицы. Три взаимосвязанных трехпараметрических представления угла ω , полученные автором ранее, выражают трехпараметрическую симметрию сторон и углов двух евклидовых треугольников, тождественную теоремам синусов и косинусов для сторон и углов одного геодезического треугольника на поверхности псевдосферы. А именно, все три представления угла ω после преобразования одного из них совпадают с представлениями площади псевдосферического треугольника через любые две его стороны и угол между ними. Угол ω симметрично выражается также через три угла или три стороны геодезического треугольника и, таким образом, является инвариантом группы его движений по поверхности псевдосферы, включая группу Лоренца. Хотя псевдосферы в евклидовом и псевдоевклидовом пространствах локально изометричны, лишь последняя изометрична всей плоскости Лобачевского и образует однородное, изотропное кривое пространство 4-скоростей в плоском пространстве Минковского. В этой связи, возможные релятивистские физические процессы, связанные с псевдосферой в евклидовом пространстве, исключительно интересны.

PACS numbers: 03.30.+p, 02.40.Ky

DOI: 10.3367/UFNr.0178.200807d.0739

Содержание

1. Введение (739).
2. Треугольник сложения релятивистских скоростей на евклидовой плоскости (740).
3. Угол поворота спина частицы при лоренцевом преобразовании ее скорости (741).
4. Преобразование асимметричной системы выражений угла ω в симметричную (742).
5. Перестановка складываемых скоростей и трехпараметрическая симметрия угла ω (742).
6. Теоремы синусов и косинусов в геометрии геодезических треугольников на псевдосфере (744).
7. Псевдосфера в евклидовом пространстве (744).
8. Площадь геодезического треугольника на псевдосфере (746).
9. Псевдосфера в псевдоевклидовом пространстве (747).
10. Метрика поверхности псевдосферы (748).
11. Псевдосферы в евклидовом и псевдоевклидовом пространствах (748).

12. Теорема Гильберта (750).
 13. Псевдосфера в евклидовом пространстве как арена протяженных релятивистских объектов (751).
 14. Заключение (752).
- Список литературы (752).

1. Введение

Закон сложения скоростей в теории относительности определяется лоренцевым преобразованием скорости, в котором преобразуемая скорость и скорость лоренцева преобразования (буста) считаются слагаемыми скоростями, а преобразованная скорость считается их суммой. В результате, сложение двух релятивистских скоростей проще всего представляется на языке 4-скоростей и сводится к векторной сумме пространственных частей соответствующих 4-скоростей, в которую, однако, пространственная часть скорости буста входит удлинненной. Такое правило сложения релятивистских скоростей представляется на евклидовой плоскости модифицированным треугольником сложения скоростей. При перестановке складываемых скоростей векторная сумма пространственных частей 4-скоростей изменяется, так как теперь скорость, бывшая до перестановки преобразуемой, становится скоростью буста и получает удлинение, а прежняя скорость буста оказывается преобразуемой и входит в сумму без удлинения. В итоге релятивистская

В.И. Ритус. Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН,
Ленинский просп. 53, 119991 Москва, Российская Федерация
Тел. (499) 132-64-26
E-mail: ritus@lpi.ru

Статья поступила 14 апреля 2008 г.

сумма двух скоростей не симметрична относительно перестановки складываемых скоростей, если они неколлинеарны. На евклидовой плоскости перестановка таких скоростей приводит к двум различным модифицированным треугольникам, изображающим сложение скоростей.

Математически эта асимметрия связана с некоммутативностью лоренцевых бустов с неколлинеарными скоростями. Релятивистскую сумму двух скоростей можно представить как скорость, переданную двумя бустами покоящейся частице. Поэтому скорости, переданные покоящейся частице бустами с неколлинеарными скоростями, зависят от последовательности бустов. В результате, векторные суммы двух неколлинеарных скоростей, различающиеся их перестановкой, оказываются одинаковыми по величине, но различными по направлению. Угол ω между этими направлениями и является предметом детального рассмотрения в этой статье. Именно на этот угол поворачивается спин частицы, направленный вдоль ее скорости, при изменении этой скорости лоренцевым бустом со скоростью, неколлинеарной скорости частицы.

В самом общем случае угол ω определяется тремя скалярными параметрами — абсолютными величинами складываемых скоростей и углом между ними. Его можно представить также через аналогичные параметры любых двух других скоростей из трех, связанных преобразованием Лоренца. В результате, для каждого лоренцева преобразования скорости возникают три представления угла ω , определяемые симметричными скалярными функциями двух векторов, выбранных в качестве независимых переменных из трех скоростей, связанных этим преобразованием. Симметрия этих функций относительно перестановки своих векторных аргументов означает, в частности, что ω не зависит от перестановки преобразуемой скорости и скорости буста, так что одно из трех представлений для ω является общим для двух лоренцевых преобразований, различающихся указанной перестановкой. Соответственно, оно является общим для обоих модифицированных треугольников сложения скоростей.

Два других представления ω , относящихся к одному треугольнику сложения, простым, но важным алгебраическим преобразованием конвертируются в два представления ω , относящихся к другому треугольнику. Тогда оказывается, что все три представления ω описываются одной симметричной скалярной функцией $\omega(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, зависящей от двух векторов, имеющих смысл скорости буста и преобразуемой скорости (или скорости обратного буста и преобразованной скорости) в том или другом треугольнике сложения скоростей.

Таким образом, три представления угла ω содержат полную информацию о сторонах и углах обоих евклидовых треугольников сложения скоростей. Эта информация сводится к тому, что абсолютные величины трех неудлиненных скоростей в двух евклидовых треугольниках и противолежащие им углы удовлетворяют теоремам синусов и косинусов для сторон и углов одного геодезического треугольника на поверхности псевдосферы — поверхности постоянной отрицательной гауссовой кривизны. Более того, трехпараметрические представления для угла ω совпадают с представлениями площади S этого геодезического треугольника, измеренной в единицах обратной кривизны, и, следова-

тельно, согласно геометрии на псевдосфере, — с дефектом суммы его углов A, A_1, A_2 :

$$\omega = |K|S = \pi - A - A_1 - A_2.$$

Так возникает еще одно трехпараметрическое представление угла ω , на этот раз через внутренние углы геодезического треугольника (т.е. углы, прилежащие скоростям бустов в двух евклидовых треугольниках). Более того, угол ω — инвариант релятивистского сложения скоростей относительно их перестановки — получает чисто геометрическую интерпретацию инварианта группы движений геодезического треугольника по поверхности псевдосферы. Эта группа движений включает группу Лоренца.

В евклидовом и псевдоевклидовом трехмерных пространствах двумерные поверхности с постоянной отрицательной гауссовой кривизной (псевдосферы), имея одинаковую внутреннюю геометрию (метрику), существенно различаются по своей реализации в этих пространствах.

Псевдосфера в псевдоевклидовом пространстве — это пространствуподобная поверхность — полость двуполостного гиперboloида с осью вращения вдоль оси времени. Она имеет бесконечную площадь, регулярна, однородна и изотропна на всем своем протяжении, и ее метрика совпадает с метрикой всей гиперболической плоскости Лобачевского. Пространственные и временная координаты точки на поверхности псевдосферы лишь множителем $|K|^{-1/2}$ отличаются от пространственных и временной компонент 4-скорости.

В трехмерном евклидовом пространстве, как было доказано Д. Гильбертом, не существует двумерной гладкой поверхности, изометричной всей плоскости Лобачевского. Псевдосфера в этом пространстве (поверхность Бельтрами) имеет конечную площадь и изометрична лишь некоторой области гиперболической плоскости Лобачевского. Такие ограничения на псевдосферу в евклидовом пространстве вызваны невозможностью покрыть ее поверхность бесконечно протяженной чебышевской сетью координатных линий x, y , сетевой угол $\phi(x, y)$ которой был бы регулярным решением нелинейного уравнения

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \sin \phi,$$

удовлетворяющим условию $0 < \phi < \pi$.

Хотя псевдосферы в евклидовом и псевдоевклидовом пространствах локально изометричны и позволяют отобразить на своих поверхностях релятивистское сложение скоростей геодезическими треугольниками с одинаковыми метрическими свойствами, они являются аренами существенно различающихся физических процессов. Неоднородность и неизотропность псевдосферы в евклидовом пространстве приводят к нелинейным волновым процессам в отличие от линейных процессов, связанных с однородной и изотропной поверхностью псевдосферы в псевдоевклидовом пространстве.

2. Треугольник сложения релятивистских скоростей на евклидовой плоскости

Как хорошо известно (см., например, § 5 курса Ландау и Лифшица [1]), скорость $\mathbf{v}$ частицы лоренцевым преобра-

зованием (бустом) со скоростью $\mathbf{v}_1$ преобразуется в скорость $\mathbf{v}_2$, компоненты которой связаны с компонентами скоростей $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}_1$ соотношениями

$$v_{2x} = \frac{v_x + v_1}{1 + \mathbf{v}\mathbf{v}_1}, \quad v_{2y} = \frac{v_y}{(1 + \mathbf{v}\mathbf{v}_1)\gamma_1}, \quad v_{2z} = \frac{v_z}{(1 + \mathbf{v}\mathbf{v}_1)\gamma_1},$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - v_1^2}}, \quad (1)$$

если $\mathbf{v}_1$ направлена вдоль оси x . Эти формулы можно объединить в одну векторную формулу

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{1 + \mathbf{v}\mathbf{v}_1} \left\{ \mathbf{v}_1 \left[\frac{\mathbf{v}\mathbf{v}_1}{v_1^2} \left(1 - \frac{1}{\gamma_1} \right) + 1 \right] + \frac{\mathbf{v}}{\gamma_1} \right\}, \quad (2)$$

как это сделано в книге Мёллера [2] или в статье автора [3]. Здесь и ниже используются обозначения этой статьи. Асимметрия выражения $\mathbf{v}_2$ относительно перестановки скоростей $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}_1$ очевидна.

Однако более компактное выражение для преобразования скорости возникает, если воспользоваться пространственными частями

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}\gamma, \quad \mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1\gamma_1, \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2\gamma_2 \quad (3)$$

и временными компонентами $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ соответствующих 4-скоростей $u^\alpha = (\mathbf{u}, \gamma)$, $\gamma = \sqrt{\mathbf{u}^2 + 1}$, и аналогично для u_1^α, u_2^α . Тогда формула (2) и обратная ей принимают вид

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{u} + \frac{\mathbf{u}_1}{C_1}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_2 - \frac{\mathbf{u}_1}{C_1}, \quad \mathbf{u}_1 = (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u})C_1, \quad (4)$$

где коэффициент C_1 ,

$$C_1 = \frac{\gamma_1 + 1}{\gamma + \gamma\gamma_1 + \mathbf{u}\mathbf{u}_1} = \frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_2 + \gamma_2\gamma_1 - \mathbf{u}_2\mathbf{u}_1} = \frac{\gamma + \gamma_2}{1 + \gamma\gamma_2 + \mathbf{u}\mathbf{u}_2}, \quad (5)$$

выражается через три независимых параметра — абсолютные величины любых двух скоростей, участвующих в лоренцевом преобразовании, и угол между ними. Этот коэффициент совпадает с C , введенным в [3], но снабжен теперь индексом 1, чтобы подчеркнуть асимметрию, обязанную именно скорости $\mathbf{u}_1$ лоренцева буста.

Для скорости $\mathbf{u}_1$ лоренцева буста в (4) в качестве C_1 естественно (но не обязательно) использовать последнее представление из (5), чтобы правая часть $\mathbf{u}_1$ зависела только от $\mathbf{u}$ и $\mathbf{u}_2$. Аналогичное соображение относится и к выражениям для скоростей $\mathbf{u}_2$ и $\mathbf{u}$ в (4), в которых для C_1 можно использовать первое и второе представления из (5) соответственно.

Приведем еще выражения для временных компонент 4-скоростей $u^\alpha, u_1^\alpha, u_2^\alpha$ через пространственные части двух других скоростей, участвующих в лоренцевом преобразовании:

$$\gamma_2 = \gamma\gamma_1 + \mathbf{u}\mathbf{u}_1, \quad \gamma = \gamma_2\gamma_1 - \mathbf{u}_2\mathbf{u}_1,$$

$$\gamma_1 = \frac{(\gamma + \gamma_2)^2}{1 + \gamma\gamma_2 + \mathbf{u}\mathbf{u}_2} - 1. \quad (6)$$

Последнее выражение позволяет представить C_1 как функцию только абсолютных значений всех трех скоростей:

$$C_1 = \frac{\gamma_1 + 1}{\gamma + \gamma_2}. \quad (7)$$

Заметим, что при переходе от прямого преобразования Лоренца к обратному, т.е. при замене $\mathbf{u}_1 \leftrightarrow -\mathbf{u}_1$,

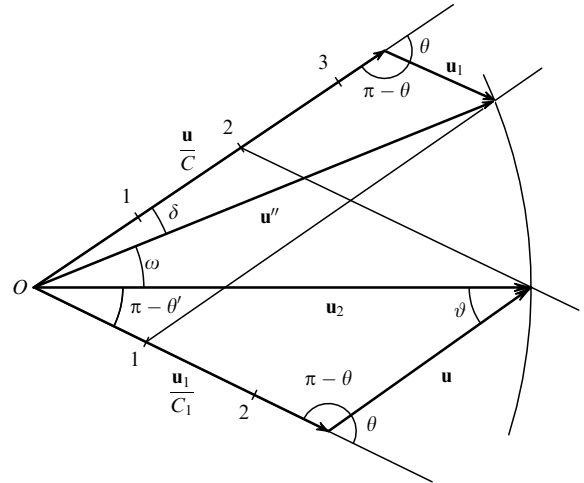


Рис. 1. Треугольники сложения скоростей, соответствующие формулам (4) и (16).

$\mathbf{u} \leftrightarrow \mathbf{u}_2$, выражения для скоростей $\mathbf{u}_2, \mathbf{u}$ в (4) переходят друг в друга, а выражение $\mathbf{u}_1$ переходит само в себя. Аналогичной асимметрией обладают и соответствующие выражения для временных компонент (6), а также выражения (5) для C_1 .

Формулы (4), (5) представляют собой релятивистский закон сложения скоростей, который отличается от обычного сложения 3-векторов только тем, что одна из складываемых скоростей, а именно, скорость лоренцева буста, входит удлинненной в $1/C_1$ раз. На рисунке 1 внизу представлен треугольник сложения релятивистских скоростей $\mathbf{u}$ и $\mathbf{u}_1$ для случая, когда их величины и угол между ними равны соответственно $u = 2, u_1 = 1, \theta = 60^\circ$. Тогда удлинение $1/C_1 = 2,65$. Нетрудно видеть, что этот треугольник при соответствующем изменении направлений $\mathbf{u}_1$ или $\mathbf{u}$ описывает все формулы сложения, фигурирующие в (4).

Таким образом приведенные соотношения демонстрируют выделенную, активную роль скорости $\mathbf{u}_1$ лоренцева преобразования (буста), которая пропорциональна разности преобразованной и преобразуемой скоростей. Эта выделенная роль исчезает в нерелятивистском приближении, когда $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2 = 1$, а u, u_1, u_2 малы по сравнению с 1. Тогда $C_1 = 1$ и приведенные формулы переходят в $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v} + \mathbf{v}_1$.

3. Угол поворота спина частицы при лоренцевом преобразовании ее скорости

Вигнером было показано [4, 5], что угол между направлением спина массивной частицы и ее скоростью не является лоренцевым инвариантом. Так, если частице со скоростью $\mathbf{v}$ и спином, направленным вдоль $\mathbf{v}$, сообщить лоренцевым бустом скорость $\mathbf{v}_1$ в направлении, ортогональном $\mathbf{v}$, то скорость частицы повернется на угол ϑ ,

$$\sin \vartheta = \frac{v_1}{v_2} = \frac{u_1\gamma}{u_2}, \quad (8)$$

и станет равной $\mathbf{v}_2$, в то время как спин повернется на меньший угол ω ,

$$\omega = \vartheta - \delta = \arcsin \frac{u_1}{1 + \gamma\gamma_1}, \quad \sin \delta = \frac{u_1}{u_2} \quad (9)$$

(см. [4, 5]). Однако, если частица движется со световой скоростью, $v = v_2 = 1$, то $\delta = 0$ и угол поворота спина совпадает с углом поворота скорости. В этом случае угол между спином и скоростью является лоренцевым инвариантом, как и само значение спина в направлении движения частицы.

В более общем случае, когда скорости $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}_1$ не ортогональны, поворот спина был рассмотрен в работах Сташа [6], автора [7] и ряде других. Мы приведем здесь три тесно связанные между собой представления для угла ω , полученные автором в [7]. Каждое из них явно выражено через три независимых параметра — абсолютные значения любых двух скоростей из трех $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, связанных преобразованием Лоренца, и угол между этими двумя скоростями:

$$\begin{aligned}\omega &= 2 \arctan \frac{|[\mathbf{u}\mathbf{u}_1]|}{(\gamma+1)(\gamma_1+1) + \mathbf{u}\mathbf{u}_1} = \\ &= 2 \arctan \frac{|[\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2]|}{(\gamma_1+1)(\gamma_2+1) - \mathbf{u}_1\mathbf{u}_2} = \\ &= 2 \arctan \frac{|[\mathbf{u}_2\mathbf{u}]|}{(\gamma_2+1)(\gamma+1) + \mathbf{u}_2\mathbf{u}}.\end{aligned}\quad (10)$$

Все три формулы представлены в работе [7] под номерами (32), (36)–(38), а в статье [3] — под номерами (20)–(22). Они имеют самое непосредственное отношение к неевклидовой геометрии на поверхности постоянной отрицательной гауссовой кривизны, т.е. к геометрии Лобачевского. К изложению этой связи мы и перейдем.

4. Преобразование асимметричной системы выражений угла ω в симметричную

Запишем три выражения для ω через *внутренние* углы $\pi - \theta$, $\pi - \theta'$, ϑ евклидова треугольника сложения скоростей (см. рис. 1, нижний треугольник). В этом случае асимметрия, создаваемая скоростью $\mathbf{u}_1$ лоренцева буста, выступает более выпукло:

$$\begin{aligned}\tan \frac{\omega}{2} &= \frac{u_1 \sin(\pi - \theta)}{(\gamma+1)(\gamma_1+1) - u_1 \cos(\pi - \theta)} = \\ &= \frac{u_2 u_1 \sin(\pi - \theta')}{(\gamma_2+1)(\gamma_1+1) - u_2 u_1 \cos(\pi - \theta')} = \\ &= \frac{u_2 \sin \vartheta}{(\gamma+1)(\gamma_2+1) + u_2 \cos \vartheta}.\end{aligned}\quad (11)$$

Действительно, в первых двух выражениях для ω косинусы внутренних углов $\pi - \theta$ и $\pi - \theta'$ треугольника, прилежащих активной стороне, входят со знаком минус, в то время как в третьей формуле косинус внутреннего угла ϑ , противолежащего активной стороне, входит со знаком плюс.

Эта асимметрия выражений для ω связана с выделенной ролью скорости $\mathbf{u}_1$ лоренцева буста в евклидовом треугольнике $\mathbf{u}_1 = (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u})C_1$ сложения скоростей. Изменение знака скорости буста сохраняет ее активную роль и лишь меняет у векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{u}_2$ роли преобразуемой и преобразованной скоростей, не меняя их величины и направлений (см. (4)). Скорости $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}_2$ играют пассивную роль в рассматриваемом треугольнике. В первом случае активный вектор $\mathbf{u}_1/C_1$ толкает пассивный вектор $\mathbf{u}$, преобразуя его в пассивный вектор $\mathbf{u}_2$. Во втором случае

активный вектор $-\mathbf{u}_1/C_1$ толкает пассивный вектор $\mathbf{u}_2$, преобразуя его в пассивный вектор $\mathbf{u}$ (см. рис. 1, нижний треугольник).

Для выявления в (11) скрытой симметрии существенно то, что последнее, третье выражение для ω в (11) можно тождественно преобразовать к виду первых двух с прежними значениями скоростей u , u_2 , но с новым углом $\delta = \vartheta - \omega$ вместо ϑ и знаком минус перед $\cos \delta$:

$$\tan \frac{\omega}{2} = \frac{u u_2 \sin \delta}{(\gamma+1)(\gamma_2+1) - u u_2 \cos \delta}, \quad \delta = \vartheta - \omega. \quad (12)$$

В самом деле, так как

$$\tan \frac{\omega}{2} \equiv \frac{\sin \omega}{1 + \cos \omega} = \frac{u u_2 \sin \vartheta}{(\gamma+1)(\gamma_2+1) + u u_2 \cos \vartheta}, \quad (13)$$

то

$$\begin{aligned}(\gamma+1)(\gamma_2+1) \sin \omega + u u_2 \cos \vartheta \sin \omega = \\ = u u_2 \sin \vartheta + u u_2 \sin \vartheta \cos \omega\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}(\gamma+1)(\gamma_2+1) \sin \omega = u u_2 \sin(\vartheta - \omega) + \\ + u u_2 \sin(\vartheta - \omega) \cos \omega + u u_2 \cos(\vartheta - \omega) \sin \omega,\end{aligned}$$

откуда следует

$$\begin{aligned}\sin \omega [(\gamma+1)(\gamma_2+1) - u u_2 \cos(\vartheta - \omega)] = \\ = u u_2 \sin(\vartheta - \omega)(1 + \cos \omega),\end{aligned}$$

т.е. формула (12). Таким образом, последнее выражение в (11) можно заменить выражением (12), в результате чего все три представления для $\tan(\omega/2)$ станут различаться лишь циклической заменой переменных

$$(u, u_1, \pi - \theta) \rightarrow (u_1, u_2, \pi - \theta') \rightarrow (u_2, u, \delta). \quad (14)$$

Обратим внимание на то, что сумма фигурирующих здесь углов равна $\pi - \omega$, т.е. меньше π .

5. Перестановка складываемых скоростей и трехпараметрическая симметрия угла ω

Если в плоскости векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}_1$ ввести вектор $\mathbf{u}''$, направленный под углом δ к вектору $\mathbf{u}$ и имеющий длину $u'' = u_2$, то полученную формулу (12) можно записать в виде

$$\tan \frac{\omega}{2} = \frac{|[\mathbf{u}''\mathbf{u}]|}{(\gamma''+1)(\gamma+1) - \mathbf{u}''\mathbf{u}}. \quad (15)$$

Появление такой формулы не случайно. Она возникает, если в законе сложения скоростей (4) переставить скорости $\mathbf{u}$ и $\mathbf{u}_1$, т.е. считать $\mathbf{u}$ скоростью лоренцева буста, а $\mathbf{u}_1$ — преобразуемой скоростью. Тогда, очевидно, вместо правила сложения (4) получим правило сложения

$$\mathbf{u}'' = \mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{u}}{C}, \quad \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}'' - \frac{\mathbf{u}}{C}, \quad \mathbf{u} = (\mathbf{u}'' - \mathbf{u}_1)C, \quad (16)$$

в котором новый вектор $\mathbf{u}''$ играет роль преобразованной скорости, а коэффициент C определяется выражениями,

отличающимися от (5) заменой $\mathbf{u} \leftrightarrow \mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2 \leftrightarrow \mathbf{u}''$:

$$C = \frac{\gamma + 1}{\gamma_1 + \gamma\gamma_1 + \mathbf{u}\mathbf{u}_1} = \frac{\gamma + 1}{\gamma'' + \gamma\gamma'' - \mathbf{u}\mathbf{u}''} = \frac{\gamma_1 + \gamma''}{1 + \gamma_1\gamma'' + \mathbf{u}_1\mathbf{u}''}. \quad (17)$$

Коэффициент C , как и скорость буста $\mathbf{u}$ в (16), не имеет индекса, но отличается от C , введенного в [3] и обозначенного теперь через C_1 (см. выше). Для C справедлива также формула

$$C = \frac{\gamma + 1}{\gamma_1 + \gamma_2} \quad (18)$$

(ср. с (7)).

Заметим, что произведение двух удлинений $1/C$ и $1/C_1$ всегда больше или равно единице,

$$\frac{1}{CC_1} = \frac{(\gamma_1 + \gamma_2)(\gamma + \gamma_2)}{(\gamma + 1)(\gamma_1 + 1)} \geq 1, \quad (19)$$

чего нельзя сказать о каждом из них в отдельности.

Правило сложения скоростей (16) демонстрируется модифицированным треугольником на том же рис. 1, верхний треугольник, и с теми же величинами скоростей и угла между ними $u = 2$, $u_1 = 1$, $\theta = 60^\circ$, что и правило (4). Но скорость буста $\mathbf{u}$ участвует в этом треугольнике удлиненной в $1/C = 1,72$ раза в отличие от удлинения $1/C_1 = 2,65$ скорости буста $\mathbf{u}_1$ в треугольнике, соответствующем (4).

В (17), (18) по-прежнему

$$\gamma = \gamma_1\gamma_2 - \mathbf{u}_1\mathbf{u}_2, \quad \gamma_2 = \gamma'' = \gamma\gamma_1 + \mathbf{u}\mathbf{u}_1, \quad (20)$$

а γ_1 в отличие от (6) принимает вид скалярного произведения двух 4-векторов:

$$\gamma_1 = \gamma\gamma'' - \mathbf{u}\mathbf{u}'', \quad (21)$$

если использовать $\mathbf{u}''$. Это обычный вид временной компоненты преобразуемой 4-скорости $\mathbf{u}_1, \gamma_1$ через 4-скорость $\mathbf{u}, \gamma$ лоренцева буста и преобразованную 4-скорость $\mathbf{u}'', \gamma''$ согласно сложению скоростей (16). Более сложное выражение (6) для γ_1 обязано закону сложения (4), в котором γ_1 — временная компонента 4-скорости $\mathbf{u}_1, \gamma_1$ лоренцева буста, а не преобразуемой или преобразованной 4-скорости.

В результате, закон сложения скоростей (16), как и закон (4), характеризуется тем же самым углом ω , который представляется теперь выражениями

$$\begin{aligned} \omega &= 2 \arctan \frac{|[\mathbf{u}\mathbf{u}_1]|}{(\gamma + 1)(\gamma_1 + 1) + \mathbf{u}\mathbf{u}_1} = \\ &= 2 \arctan \frac{|[\mathbf{u}\mathbf{u}'']|}{(\gamma'' + 1)(\gamma + 1) - \mathbf{u}\mathbf{u}''} = \\ &= 2 \arctan \frac{|[\mathbf{u}''\mathbf{u}_1]|}{(\gamma'' + 1)(\gamma_1 + 1) + \mathbf{u}''\mathbf{u}_1}. \end{aligned} \quad (22)$$

При перестановке $\mathbf{u} \leftrightarrow -\mathbf{u}$, $\mathbf{u}_1 \leftrightarrow \mathbf{u}''$, не меняющей закона сложения (16), первое и второе выражения для ω переходят друг в друга, а третье — само в себя.

Эти три формулы для ω связаны с соответствующими представлениями ω в (10) перестановкой $\mathbf{u} \leftrightarrow \mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}'' \leftrightarrow \mathbf{u}_2$,

причем первые из них, как функции $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}_1$, просто совпадают в силу симметрии относительно этой перестановки. Теперь важно снова подчеркнуть, что полученная для треугольника скоростей $\mathbf{u}_1 = (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u})C_1$ третья формула для ω в (10) или (11) тождественно преобразуется во вторую формулу для ω в (22), полученную для треугольника скоростей $\mathbf{u} = (\mathbf{u}'' - \mathbf{u}_1)C$. Аналогично можно показать, что третья формула для ω в (22) тождественна второй формуле для ω в (10) или (11).

Таким образом, глобальная симметрия ω относительно всевозможных перестановок скоростей отражается тремя выражениями: первым и вторым из (10) и вторым из (22). Каждое из них представляется одной и той же скалярной функцией $\omega(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, симметрично зависящей от двух векторов-скоростей:

$$\begin{aligned} \omega(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= 2 \arctan \frac{|[\mathbf{a}\mathbf{b}]|}{(a^0 + 1)(b^0 + 1) + \mathbf{a}\mathbf{b}}, \\ a^0 &= \sqrt{\mathbf{a}^2 + 1}, \quad b^0 = \sqrt{\mathbf{b}^2 + 1}. \end{aligned} \quad (23)$$

Тогда симметрию можно выразить цепочкой трех равенств:

$$\omega(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1) = \omega(\mathbf{u}_2, -\mathbf{u}_1) = \omega(\mathbf{u}'', -\mathbf{u}) = \omega(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}). \quad (24)$$

Действительно, первое равенство отражает симметрию правила сложения (4) относительно перестановки $\mathbf{u}_1 \leftrightarrow -\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u} \leftrightarrow \mathbf{u}_2$, связывающей прямое и обратное лоренц-преобразования со скоростями $\pm \mathbf{u}_1$. Второе отражает симметрию относительно перестановки $\mathbf{u}_1 \leftrightarrow \mathbf{u}$, $\mathbf{u}_2 \leftrightarrow \mathbf{u}''$, связывающей правила сложения (4) и (16). Наконец, третье отражает симметрию правила сложения (16) относительно перестановки $\mathbf{u} \leftrightarrow -\mathbf{u}$, $\mathbf{u}'' \leftrightarrow \mathbf{u}_1$, т.е. прямого и обратного лоренц-преобразований со скоростями $\pm \mathbf{u}$. Одновременно эта перестановка возвращает нас к исходной функции с переставленными аргументами, подтверждая ее симметрию.

Обратим внимание на то, что аргументами функции ω в равенствах (24) оказываются преобразуемая скорость и скорость буста, принадлежащие тому или другому треугольнику сложения скоростей.

Ту же функцию $\omega(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ можно рассматривать как функцию

$$\omega(a, b, \zeta) = 2 \arctan \frac{ab \sin \zeta}{(a^0 + 1)(b^0 + 1) + ab \cos \zeta}, \quad (25)$$

трех переменных — абсолютных значений a , b двух скоростей и угла ζ между ними, внешнего в соответствующем евклидовом треугольнике скоростей, если одна из a , b скоростей активна, и внутреннего, если обе a , b скорости пассивны. Такая функция использовалась автором в уравнениях (36)–(38) работы [7]. Три члена равенства (24) запишутся через эту функцию в виде

$$\omega(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1) = \omega(u, u_1, \theta), \quad (26)$$

$$\omega(\mathbf{u}_2, -\mathbf{u}_1) = \omega(u_1, u_2, \theta'), \quad (27)$$

$$\omega(\mathbf{u}'', -\mathbf{u}) = \omega(u_2, u, \pi - \delta), \quad u'' = u_2, \quad (28)$$

где θ , θ' и $\pi - \delta$ — внешние углы двух евклидовых треугольников скоростей (см. рис. 1). Само равенство (24) переписывается теперь в виде равенства правых частей формул (26)–(28).

В дальнейшем, однако, удобнее использовать вместо внешних углов $\theta, \theta', \pi - \delta$ смежные с ними внутренние углы $\pi - \theta, \pi - \theta', \delta$ тех же треугольников. Тогда, представив функцию $\omega(a, b, \zeta)$ через "другую" функцию $f(a, b, \pi - \zeta)$, зависящую от угла, смежного с ζ :

$$\omega(a, b, \zeta) = f(a, b, \pi - \zeta) = 2 \arctan \frac{ab \sin(\pi - \zeta)}{(a^0 + 1)(b^0 + 1) - ab \cos(\pi - \zeta)}, \quad (29)$$

трехпараметрическую симметрию (24) можно представить равенством трех выражений для угла ω :

$$\omega = f(u, u_1, \pi - \theta) = f(u_1, u_2, \pi - \theta') = f(u_2, u, \delta). \quad (30)$$

Каждое из этих выражений определяется тремя независимыми параметрами — абсолютными величинами пассивной и активной скоростей и внутренним углом между ними, т.е. системой параметров двух евклидовых треугольников скоростей (4) и (16). Существенно то, что каждая тройка параметров, определяющих функцию f в (30), однозначно определяет параметры двух других троек благодаря трем уравнениям (34), (35), приведенным ниже.

Заметим, что функция f от тех же аргументов, что и в (30), уже фигурировала в двух представлениях уравнения (11) и в (12) в виде $\tan(f/2)$. Третье представление угла ω в уравнении (11), записанное как $\omega(u_2, u, \vartheta)$, благодаря уравнениям (12) и (29) преобразовано в

$$\omega(u_2, u, \vartheta) = \omega(u_2, u, \pi - \delta) = f(u_2, u, \delta), \quad \delta = \vartheta - \omega. \quad (31)$$

Нетривиальным здесь является первое равенство. По существу, это функциональное уравнение для функции ω . Оно устанавливает связь между пассивными скоростями и внутренним углом между ними в треугольнике сложения скоростей (4) и пассивной и активной скоростями и внешним углом между ними в треугольнике скоростей (16).

6. Теоремы синусов и косинусов в геометрии геодезических треугольников на псевдосфере

Под знаком $\arctan$ в формулах (10), (22) в числителях стоят длины равных друг другу векторов

$$[\mathbf{uu}_1] = [\mathbf{u}_2\mathbf{u}_1] = [\mathbf{uu}_2]C_1 = [\mathbf{uu}'''] = [\mathbf{u}''\mathbf{u}_1]C, \quad (32)$$

а в знаменателях — равные друг другу величины

$$\begin{aligned} (\gamma + 1)(\gamma_1 + 1) + \mathbf{uu}_1 &= (\gamma_2 + 1)(\gamma_1 + 1) - \mathbf{u}_2\mathbf{u}_1 = \\ &= C_1((\gamma + 1)(\gamma_2 + 1) + \mathbf{uu}_2) = (\gamma'' + 1)(\gamma + 1) - \mathbf{u}''\mathbf{u} = \\ &= C((\gamma'' + 1)(\gamma_1 + 1) + \mathbf{u}''\mathbf{u}_1), \end{aligned} \quad (33)$$

где $\mathbf{u}, \mathbf{u}_2$ связаны лоренцевым преобразованием со скоростью $\mathbf{u}_1$ (см. (4)), а $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}''$ — лоренцевым преобразованием со скоростью $\mathbf{u}$ (см. (16)).

Равенство длин векторов, не содержащих C_1, C в (32), может быть записано в виде

$$\frac{u}{\sin(\pi - \theta')} = \frac{u_1}{\sin \delta} = \frac{u_2 = u''}{\sin(\pi - \theta)}. \quad (34)$$

С другой стороны, величины, фигурирующие в (33), суть различные представления суммы $1 + \gamma + \gamma_1 + \gamma_2, \gamma_2 = \gamma''$, через длины двух векторов и угол между ними; поэтому из (33), в частности, следуют соотношения

$$\gamma = \gamma_1\gamma_2 - \mathbf{u}_1\mathbf{u}_2, \quad \gamma_1 = \gamma\gamma'' - \mathbf{uu}'', \quad \gamma_2 = \gamma'' = \gamma\gamma_1 + \mathbf{uu}_1. \quad (35)$$

Поскольку $\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}''$ — пространственные части 4-скоростей, а $\gamma, \gamma_1, \gamma_2 = \gamma''$ — их временные компоненты, то эти величины можно характеризовать гиперболическими углами $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$, так что

$$\begin{aligned} u &= \sinh \alpha, \quad \gamma = \cosh \alpha; \quad u_1 = \sinh \alpha_1, \quad \gamma_1 = \cosh \alpha_1; \\ u_2 = u'' &= \sinh \alpha_2, \quad \gamma_2 = \gamma'' = \cosh \alpha_2. \end{aligned} \quad (36)$$

Тогда соотношение (34) приобретает форму "теоремы синусов" для треугольника гиперболической геометрии Лобачевского (геометрии на псевдосфере):

$$\frac{\sinh \alpha}{\sin(\pi - \theta')} = \frac{\sinh \alpha_1}{\sin \delta} = \frac{\sinh \alpha_2}{\sin(\pi - \theta)}, \quad (37)$$

а три соотношения (35) — форму "теоремы косинусов" этой геометрии:

$$\begin{aligned} \cosh \alpha &= \cosh \alpha_1 \cosh \alpha_2 - \sinh \alpha_1 \sinh \alpha_2 \cos(\pi - \theta'), \\ \cosh \alpha_1 &= \cosh \alpha_2 \cosh \alpha - \sinh \alpha_2 \sinh \alpha \cos \delta, \\ \cosh \alpha_2 &= \cosh \alpha \cosh \alpha_1 - \sinh \alpha \sinh \alpha_1 \cos(\pi - \theta). \end{aligned} \quad (38)$$

Эти две теоремы однозначно определяют геодезический треугольник скоростей на поверхности псевдосферы с точностью до его движений как целого по поверхности (т.е. без разрывов и складок и с сохранением длин и углов).

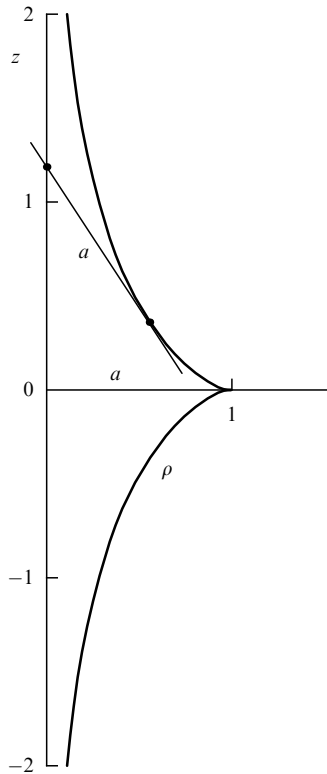
7. Псевдосфера в евклидовом пространстве

Псевдосфера, или поверхность Бельтрами, — это поверхность постоянной отрицательной кривизны, образованная вращением плоской кривой — трактрисы вокруг ее асимптоты. В свою очередь, трактриса — это кривая, имеющая асимптоту и точку возврата и характеризующаяся тем, что отрезок ее касательной от точки касания до точки пересечения с асимптотой имеет постоянную длину, обозначенную на рис. 2 и ниже буквой a .

В цилиндрических координатах z, ρ, φ уравнение псевдосферы с осью вращения вдоль z может быть записано в виде

$$\begin{aligned} z &= \pm \left(a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - \rho^2}}{\rho} - \sqrt{a^2 - \rho^2} \right), \\ 0 < \rho &\leq a, \quad -\pi < \varphi \leq \pi. \end{aligned} \quad (39)$$

Это уравнение при постоянном φ и переменном ρ определяет меридианы псевдосферы — трактрисы, являющиеся геодезическими, а при постоянном ρ и переменном φ — параллели псевдосферы — окружности (рис. 3). Гауссова кривизна псевдосферы равна $-1/a^2$. Площадь поверхности псевдосферы и объем, ограниченный ею, равны $4\pi a^2$ и $(2/3)\pi a^3$ соответственно. В дальнейшем, однако, мы, как правило, будем рассматривать верхнюю половину псевдосферы, для которой $z > 0$.

Рис. 2. Трактриса, параметр $a = 1$.

Площадь этой воронки Бельтрами и объем ею ограниченный равны соответственно $2\pi a^2$ и $(1/3)\pi a^3$.

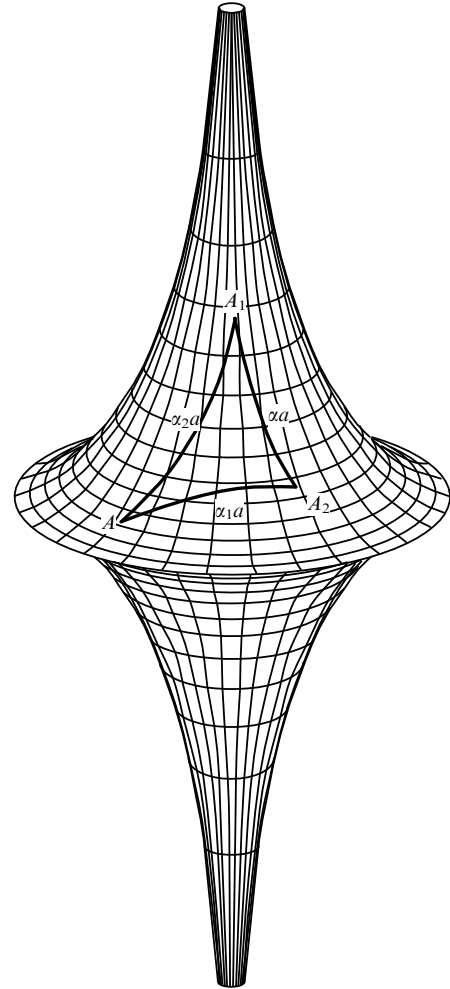
Уравнение (39) для псевдосферы можно записать также в параметрическом виде

$$\begin{aligned} x &= a \sin u \cos \varphi, & y &= a \sin u \sin \varphi, \\ z &= a \left(\ln \cot \frac{u}{2} - \cos u \right), & 0 < u < \pi, & \quad -\pi < \varphi \leq \pi, \end{aligned} \quad (40)$$

если радиус широтной окружности представить формулой $\rho = a \sin u$, где $0 < u < \pi$. Тогда верхняя и нижняя воронки Бельтрами, составляющие псевдосферу, отвечают значениям u из интервалов $0 < u \leq \pi/2$ и $\pi/2 \leq u < \pi$, а их общая широтная окружность $\rho = a$ (ребро возврата) отвечает значению $u = \pi/2$. Хотя все функции (40), определяющие поверхность, в области задания параметров u, φ (и даже в расширенной для φ области $-\infty < \varphi < \infty$) являются аналитическими, поверхность не регулярна в точках ребра возврата, ее невозможно продолжить за ребро возврата непрерывно с непрерывным изменением касательной плоскости.

Если на псевдосфере с гауссовой кривизной $K = -1/a^2$ выбрать геодезический треугольник (т.е. треугольник, стороны которого являются отрезками геодезических) с внутренними углами $A = \pi - \theta'$, $A_1 = \delta$, $A_2 = \pi - \theta$, то противолежащие им стороны будут иметь длины αa , $\alpha_1 a$, $\alpha_2 a$, где гиперболические углы α , α_1 , α_2 и углы A , A_1 , A_2 удовлетворяют теоремам (37), (38) (см. рис. 3).

При отображении евклидова треугольника скоростей $\mathbf{u}_1 = (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u})C_1$ на поверхность псевдосферы внутренние углы треугольника $\pi - \theta$, $\pi - \theta'$, противолежащие его пассивным сторонам $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}$, и длины этих сторон,

Рис. 3. Псевдосфера в евклидовом пространстве с геодезическим треугольником AA_1A_2 .

измеряемые гиперболическими углами α_2 , α , сохраняются. Это означает, что они без изменения трансформируются в углы $A_2 \equiv \pi - \theta$, $A \equiv \pi - \theta'$ и противолежащие им стороны $\alpha_2 a$, αa геодезического треугольника на поверхности псевдосферы. В то же время угол ϑ , противолежащий активной стороне $\mathbf{u}_1/C_1$ евклидова треугольника, и длина этой стороны не сохраняются. Они преобразуются соответственно в угол $A_1 \equiv \delta = \vartheta - \omega$ и длину $\alpha_1 a$ противолежащей ему стороны геодезического треугольника.

Аналогичным образом евклидов треугольник скоростей $\mathbf{u} = (\mathbf{u}'' - \mathbf{u}_1)C$ отображается на поверхность псевдосферы так, что его внутренние углы $\pi - \theta$, δ , противолежащие пассивным сторонам $\mathbf{u}''$, $\mathbf{u}_1$, и длины этих сторон, измеряемые гиперболическими углами α_2 , α_1 , без изменения трансформируются в углы $A_2 \equiv \pi - \theta$, $A_1 \equiv \delta$ и противолежащие им стороны $\alpha_2 a$, $\alpha_1 a$ геодезического треугольника. Но угол $\theta - \delta$, противолежащий активной стороне $\mathbf{u}/C$ этого треугольника, и ее длина не сохраняются, а преобразуются в угол $A \equiv \theta - \delta - \omega = \pi - \theta'$ и длину αa противолежащей ему стороны геодезического треугольника.

Таким образом, два евклидовых треугольника скоростей отображаются в один геодезический треугольник на поверхности псевдосферы с внутренними углами $A_2 = \pi - \theta$, $A_1 = \delta$, $A = \pi - \theta'$ и длинами $\alpha_2 a$, $\alpha_1 a$, αa

противолежащих им сторон. Это является прямым следствием того, что углы и скорости двух евклидовых треугольников, различающихся перестановкой складываемых скоростей $\mathbf{u}_1 \leftrightarrow \mathbf{u}$, удовлетворяют теоремам синусов (37) и косинусов (38) геометрии на псевдосфере.

В геометрии на псевдосфере доказывается, что площадь S геодезического треугольника пропорциональна дефекту суммы его углов [8]:

$$S = a^2(\pi - A - A_1 - A_2). \quad (41)$$

Так как сумма углов евклидова треугольника скоростей $\mathbf{u}_1 = (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u})C_1$ равна π , $\pi - \theta + \pi - \theta' + \vartheta = \pi$, то дефект суммы углов геодезического треугольника положителен и равен

$$\pi - A - A_1 - A_2 = \pi - (\pi - \theta') - \delta - (\pi - \theta) = \vartheta - \delta = \omega, \quad (42)$$

т.е. совпадает с углом ω между векторами $\mathbf{u}_2$ и $\mathbf{u}''$ (см. рис. 1), возникшим из-за несимметрии релятивистского закона сложения скоростей $\mathbf{u}$ и $\mathbf{u}_1$ относительно их перестановки,

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{u} + \frac{\mathbf{u}_1}{C_1}, \quad \mathbf{u}'' = \mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{u}}{C}, \quad (43)$$

или, если угодно, из-за некоммутативности лоренцевых бустов с неколлинеарными скоростями.

Таким образом, угол ω , отражающий асимметрию релятивистского закона сложения скоростей на евклидовой плоскости, симметрично представляется дефектом суммы углов геодезического треугольника на псевдосфере.

8. Площадь геодезического треугольника на псевдосфере

В "Лекциях по теории относительности" Логанова [9] приведена другая важная трехпараметрическая формула для площади S треугольника в пространстве Лобачевского, т.е. площади геодезического треугольника на поверхности псевдосферы с кривизной $-1/a^2$. В наших обозначениях ее можно записать в виде

$$\sin \frac{S}{2a^2} = \frac{\sinh(\alpha_1/2) \sinh(\alpha_2/2) \sin A}{\cosh(\alpha/2)}. \quad (44)$$

Две других формулы для S получаются отсюда циклической перестановкой гиперболических углов α , α_1 , α_2 и углов A , A_1 , A_2 . Однако эти формулы выражают S/a^2 через четыре параметра, хотя в действительности из них независимы только три. Кроме того, гиперболические углы фигурируют в них в виде половинных значений, что неудобно для связи со скоростями (см. (36)).

Тем не менее, используя (44), можно найти соответствующее выражение для

$$\cos \frac{S}{2a^2} = \frac{1}{\cosh(\alpha/2)} \left(\cosh \frac{\alpha_1}{2} \cosh \frac{\alpha_2}{2} - \sinh \frac{\alpha_1}{2} \sinh \frac{\alpha_2}{2} \cos A \right), \quad (45)$$

также содержащее четыре параметра, а затем и выражение для

$$\tan \frac{S}{2a^2} = \frac{\sinh(\alpha_1/2) \sinh(\alpha_2/2) \sin A}{\cosh(\alpha_1/2) \cosh(\alpha_2/2) - \sinh(\alpha_1/2) \sinh(\alpha_2/2) \cos A}, \quad (46)$$

которое содержит уже только три параметра. Чтобы перейти теперь от половинных гиперболических углов к самим углам, достаточно умножить числитель и знаменатель последнего выражения на $4 \cosh(\alpha_1/2) \cosh(\alpha_2/2)$ и использовать известные формулы удвоения углов. Тогда получим

$$\tan \frac{S}{2a^2} = \frac{\sinh \alpha_1 \sinh \alpha_2 \sin A}{(\cosh \alpha_1 + 1)(\cosh \alpha_2 + 1) - \sinh \alpha_1 \sinh \alpha_2 \cos A}. \quad (47)$$

Это выражение и два других, получающихся из него циклической заменой гиперболических и обычного углов, совпадают с первыми двумя выражениями для $\tan(\omega/2)$ в (11) и выражением (12), если учесть параметризацию (36) компонент 4-скоростей гиперболическими углами. Равенство $S/a^2 = \omega$ площади геодезического треугольника углу ω демонстрируется также формулой (30).

Таким образом, из трех полученных в работе [7] трехпараметрических представлений угла ω (угла поворота спина при неколлинеарных лоренцевых преобразованиях) два тождественно совпадают с двумя представлениями для площади S/a^2 треугольника скоростей на поверхности псевдосферы, а третье тождественно совпадает с третьим представлением для S/a^2 после проведения сделанного выше преобразования от угла ϑ к углу $\delta = \vartheta - \omega$. Вместе с тем, именно третье представление в (11) выделено своей асимметрией по отношению к первым двум представлениям, так как оно содержит угол ϑ , противолежащий скорости лоренцева буста — источнику асимметрии в евклидовом треугольнике сложения скоростей (см. рис. 1). Ни один из углов геодезического треугольника не имеет физического смысла угла ϑ — угла поворота скорости частицы при лоренцевом преобразовании со скоростью, неколлинеарной скорости частицы. Поэтому именно это представление отвечает непосредственно на наиболее интересный вопрос о связи угла поворота спина частицы с углом поворота ее скорости при лоренцевом преобразовании последней.

Отметим два важных частных случая, следующих из третьего представления.

1. Буст меняет скорость частицы только по направлению. Тогда $u = u_2$ и

$$\omega = 2 \arctan \frac{\sin \vartheta}{(\gamma + 1)/(\gamma - 1) + \cos \vartheta}. \quad (48)$$

Если при этом угол ϑ мал, то

$$\omega = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \vartheta. \quad (49)$$

2. Скорость частицы мало отличается от скорости света. Тогда $u = u_2 = \gamma = \gamma_2 \gg 1$ и независимо от вели-

чины угла ϑ

$$\omega \approx 2 \arctan \frac{\sin \vartheta}{1 + \cos \vartheta} = \vartheta, \quad (50)$$

т.е. спин поворачивается на тот же угол, что и скорость ультрарелятивистской частицы.

9. Псевдосфера в псевдоевклидовом пространстве

В трехмерном евклидовом пространстве двумерная поверхность сферы радиуса a с центром в начале координат описывается уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2. \quad (51)$$

В псевдоевклидовом пространстве, переход к которому осуществляется заменой $z \rightarrow it$, эта поверхность преобразуется в однополостный гиперболоид

$$x^2 + y^2 - t^2 = a^2, \quad (52)$$

который иногда называют сферой действительного радиуса в псевдоевклидовом пространстве [10].

Если радиус a сделать чисто мнимым: $a \rightarrow ia$, то получим уравнение

$$x^2 + y^2 - t^2 = -a^2, \quad (53)$$

описывающее сферу мнимого радиуса в псевдоевклидовом пространстве. Ее называют также псевдосферой радиуса a в псевдоевклидовом пространстве R_1^3 (см. [11]). Уравнение (53), записанное в более привычном виде

$$t^2 = a^2 + x^2 + y^2, \quad (54)$$

представляет двуполостный гиперболоид в трехмерном пространстве (рис. 4).

Если на поверхности обычной сферы (51) выделить две точки A_1, A_2 и соединить их отрезком геодезической (дугой большого круга), то его длина s , радиус сферы a и угол α между радиусами-векторами $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$, проведенными из центра $x = y = z = 0$ сферы к этим точкам, будут

связаны соотношениями

$$\alpha = \frac{s}{a}, \quad \cos \alpha = \frac{\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2}{\sqrt{r_1^2} \sqrt{r_2^2}} = \frac{\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2}{a^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{a^2}. \quad (55)$$

Переходя теперь к псевдоевклидову пространству, $z_1 z_2 \rightarrow -t_1 t_2$, и сфере мнимого радиуса, $a \rightarrow ia$, получаем вместо (55):

$$\alpha \rightarrow -i \frac{s}{a} = -i\alpha, \quad (56)$$

$$\cos \alpha \rightarrow \cosh \alpha = \frac{t_1 t_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2}{a^2} = \gamma_1 \gamma_2 - \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2.$$

Эта формула определяет кратчайшее расстояние s между точками A_1, A_2 на псевдосфере в псевдоевклидовом пространстве.

Последнее выражение в (56) связывает координаты точек A_1, A_2 на псевдосфере непосредственно с безразмерными компонентами 4-скоростей:

$$u_{1x} = \frac{x_1}{a}, \quad u_{1y} = \frac{y_1}{a}, \quad \gamma_1 = \frac{t_1}{a}, \quad (57)$$

и аналогично для $(\mathbf{u}_2, \gamma_2)$.

Если совместить точку A_2 с "северным полюсом" псевдосферы $N(x = y = 0, t = a)$, то из (56) получаем

$$\cosh \alpha_1 = \gamma_1, \quad \mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1 \sinh \alpha_1, \quad \mathbf{e}_1^2 = 1. \quad (58)$$

Аналогично, совмещая A_1 с полюсом N , получаем из (56)

$$\cosh \alpha_2 = \gamma_2, \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_2 \sinh \alpha_2, \quad \mathbf{e}_2^2 = 1. \quad (59)$$

Векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ имеют единичную длину и лежат в евклидовой плоскости, касательной к псевдосфере в точке N . Таким образом, расстояния точек A_1, A_2 от "северного полюса" N равны $s_1 = \alpha_1 a, s_2 = \alpha_2 a$, а их расстояние между собой равно $s = \alpha a$.

Помещая в точку полюса N вершину A треугольника AA_1A_2 на псевдосфере и обозначая угол между векторами $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ буквой A , получаем из (56) и (58), (59)

$$\cosh \alpha = \cosh \alpha_1 \cosh \alpha_2 - \sinh \alpha_1 \sinh \alpha_2 \cos A. \quad (60)$$

Это первая строчка "теоремы косинусов" для треугольника AA_1A_2 на псевдосфере.

Поверхности постоянной гауссовой кривизны (положительной или отрицательной) обладают важным свойством. При движении какой-либо фигуры, целиком лежащей на такой поверхности, например, треугольника AA_1A_2 , сохраняются длины всех линий и величины всех углов, несмотря на возможное изгибание передвигаемой фигуры.

Передвигая треугольник AA_1A_2 по поверхности псевдосферы так, чтобы в ее северном полюсе $x = y = 0, t = a$ вместо вершины A оказалась вершина A_1 , получим вторую строчку теоремы косинусов:

$$\cosh \alpha_1 = \cosh \alpha_2 \cosh \alpha - \sinh \alpha_2 \sinh \alpha \cos A_1. \quad (61)$$

Аналогично, перемещая треугольник AA_1A_2 так, чтобы в северный полюс псевдосферы попала вершина

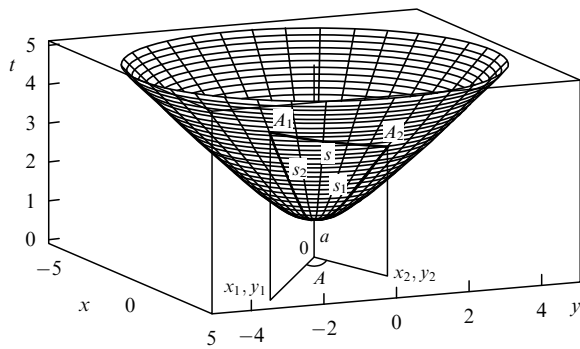


Рис. 4. Северная полость $t = \sqrt{a^2 + x^2 + y^2}$ псевдосферы в псевдоевклидовом пространстве с геодезическим треугольником AA_1A_2 . Вершина A совмещена с полюсом $x = y = 0, t = a$. Углы обозначены теми же буквами, что и вершины, s, s_1, s_2 — псевдосферические длины дуг. Параметр $a = 1$.

A_2 , получаем третью строчку теоремы:

$$\cosh \alpha_2 = \cosh \alpha \cosh \alpha_1 - \sinh \alpha \sinh \alpha_1 \cos A_2. \quad (62)$$

С помощью теоремы косинусов нетрудно получить и теорему синусов (37). В самом деле, используя для $\cos A$ формулу (60), можно представить отношение $\sin A / \sinh \alpha$ в виде

$$\begin{aligned} \frac{\sin A}{\sinh \alpha} &\equiv \frac{\sqrt{1 - \cos^2 A}}{\sinh \alpha} = \\ &= \frac{\sqrt{1 + 2 \cosh \alpha \cosh \alpha_1 \cosh \alpha_2 - \cosh^2 \alpha - \cosh^2 \alpha_1 - \cosh^2 \alpha_2}}{\sinh \alpha \sinh \alpha_1 \sinh \alpha_2}, \end{aligned} \quad (63)$$

т.е. совершенно симметричным по $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ выражением, которое должно быть справедливым и для двух других членов теоремы синусов.

В свою очередь, формула (63) позволяет получить еще одно трехпараметрическое представление для угла ω , симметричное по гиперболическим углам $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ или временным компонентам $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$:

$$\begin{aligned} \omega &= 2 \arctan \frac{u u_1 \sin A_2}{(\gamma + 1)(\gamma_1 + 1) - u u_1 \cos A_2} = \\ &= 2 \arctan \frac{\sqrt{1 + 2\gamma\gamma_1\gamma_2 - \gamma^2 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2}}{1 + \gamma + \gamma_1 + \gamma_2}. \end{aligned} \quad (64)$$

Каждое из этих выражений для угла ω явно представлено либо через длины двух сторон и угол между ними, либо через длины трех сторон геодезического треугольника, т.е. через параметры, инвариантные при движении треугольника по поверхности псевдосферы. Поэтому ω — инвариант этой группы движений, включающей группу Лоренца. О том же говорит и представление угла ω (42) через углы геодезического треугольника.

10. Метрика поверхности псевдосферы

Величина $\gamma = \gamma_1 \gamma_2 - \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 = -u_1^z u_2^z$ будучи скалярным произведением двух 4-скоростей явно лоренц-инвариантна. Лоренцевым инвариантом является и длина $u = \sqrt{\gamma^2 - 1}$ пространственной части 4-скорости $u^z = (\mathbf{u}, \gamma)$. Отношение $v = u/\gamma$ можно рассматривать как инвариантную величину относительной 3-скорости двух частиц со скоростями u_1^z, u_2^z (см. § 12 в [1]). То же можно сказать и о величинах $\gamma_1, \gamma_2 = \gamma''$, представленных в (35).

Рассмотрим квадрат длины вектора $\mathbf{u}$ для случая, когда вектор $\mathbf{u}_2$ очень близок к вектору $\mathbf{u}_1$: $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1 + d\mathbf{u}_1$. Нетрудно видеть, что в этом случае инвариант γ отличается от единицы на величину второго порядка малости по $d\mathbf{u}_1$:

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma_1 \gamma_2 - \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 = \gamma_1 \sqrt{1 + (\mathbf{u}_1 + d\mathbf{u}_1)^2} - \mathbf{u}_1^2 - \mathbf{u}_1 d\mathbf{u}_1 \approx \\ &\approx 1 + \frac{1}{2} \left(d\mathbf{u}_1^2 - \frac{(\mathbf{u}_1 d\mathbf{u}_1)^2}{1 + \mathbf{u}_1^2} \right) + \dots \end{aligned} \quad (65)$$

Поскольку $u^2 = \gamma^2 - 1$, то, используя для u параметризацию (36) и связь $s = \alpha a$, получаем

$$ds^2 = a^2 \left(d\mathbf{u}_1^2 - \frac{(\mathbf{u}_1 d\mathbf{u}_1)^2}{1 + \mathbf{u}_1^2} \right). \quad (66)$$

Если считать $\mathbf{u}_1$ N -мерным вектором, то формула (66) для квадрата элемента длины ds^2 представляет метрику N -мерной однородной и изотропной поверхности с отрицательной гауссовой кривизной $K = -1/a^2$. Эта поверхность вложена в плоское $N + 1$ -мерное псевдоевклидово пространство с метрикой

$$ds^2 = d\mathbf{x}^2 - dt^2 \quad (67)$$

(см. § 3 гл. 13 книги С. Вейнберга [12] и § 111 курса Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица [1]). В нашем случае $N = 2$ и для наглядности удобно записать метрику (66) в "полярных" координатах

$$u_{1x} = \frac{r}{a} \cos \varphi, \quad u_{1y} = \frac{r}{a} \sin \varphi. \quad (68)$$

Тогда

$$ds^2 = a^2 d\mathbf{x}^2 = \frac{dr^2}{1 + r^2/a^2} + r^2 d\varphi^2, \quad (69)$$

так что отношение длины $2\pi r$ широтной окружности к расстоянию до нее от полюса,

$$s = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 + r^2/a^2}} = a \operatorname{arsinh} \frac{r}{a}, \quad (70)$$

больше 2π .

11. Псевдосферы в евклидовом и псевдоевклидовом пространствах

Рассмотрим теперь связь между псевдосферой в евклидовом пространстве (ПСЕ) и псевдосферой в псевдоевклидовом пространстве (ПСПЕ). Обе псевдосферы обладают одной и той же постоянной гауссовой кривизной $K = -1/a^2$. В то время как координаты x, y, t поверхности ПСПЕ непосредственно связаны с компонентами 4-скоростей (см. (57)), связь координат поверхности ПСЕ со скоростями нужно еще установить. Для этого сравним основную метрическую форму ПСЕ, записанную в цилиндрических координатах $\rho, \varphi, z = z(\rho)$ (см. (39)),

$$ds^2 = \frac{a^2}{\rho^2} d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2, \quad 0 < \rho \leq a, \quad -\pi < \varphi \leq \pi, \quad (71)$$

с метрикой ПСПЕ (66).

С помощью замены координат ρ, φ координатами ξ, η ,

$$\rho = \frac{a^2}{\eta}, \quad \varphi = \frac{\xi}{a}, \quad (72)$$

метрику (71) можно преобразовать в метрику

$$ds^2 = a^2 \frac{d\xi^2 + d\eta^2}{\eta^2} \quad (73)$$

модели Клейна геометрии Лобачевского [11]. В этой модели метрика (73) задается на евклидовой полуплоскости $-\infty < \xi < \infty, \eta > 0$, с помощью координат ξ, η декартовой ортогональной системы. Снабженная такой

метрикой евклидова полуплоскость оказывается полным метризованным многообразием с постоянной отрицательной кривизной $K = -1/a^2$. В то же время поверхность ПСЕ, обладая той же кривизной, изометрично отображается только на часть

$$-\pi a < \xi = a\varphi \leq \pi a, \quad a \leq \eta = \frac{a^2}{\rho} < \infty, \quad (74)$$

евклидовой полуплоскости $\xi, \eta > 0$, ограниченную прямыми $\xi = \pm \pi a$ и $\eta = a$.

Если теперь связать координаты ξ, η с координатами x, y, t точки на поверхности ПСПЕ преобразованиями

$$\frac{\xi}{a} = \frac{y}{t+x}, \quad \frac{\eta}{a} = \frac{a}{t+x}, \quad t = \sqrt{a^2 + x^2 + y^2}, \quad (75)$$

то нетрудно показать, что в новых переменных метрика

$$ds^2 = dx^2 - \frac{(x dx)^2}{a^2 + x^2}, \quad \mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}, \quad (76)$$

совпадает с метрикой ПСПЕ (66). Обратим внимание на то, что метрика (76) задана с помощью декартовых координат x, y на всей евклидовой плоскости этих переменных. В то же время координаты ρ, φ метрики (71) изменяются в ограниченных пределах, так что

$$0 < \frac{\rho}{a} = \frac{t+x}{a} < 1, \quad -\pi < \varphi = \frac{y}{t+x} \leq \pi. \quad (77)$$

Это означает, что поверхность ПСЕ изометрично отображается только на часть поверхности ПСПЕ или, что то же самое, — только на часть

$$-\infty < x < 0, \quad |y| < \pi(t+x), \quad (78)$$

всей евклидовой плоскости x, y , снабженной метрикой ПСПЕ.

Чтобы найти эту часть, удобно использовать обратную к (75) связь x, y с ξ, η :

$$x = \frac{a^2 - \xi^2 - \eta^2}{2\eta}, \quad y = \frac{a\xi}{\eta}, \quad t = \frac{a^2 + \xi^2 + \eta^2}{2\eta}. \quad (79)$$

Тогда нетрудно показать, что область на плоскости x, y , куда отображается ПСЕ, ограничена снизу по x двумя гиперболами $x_1(y)$, $y \geq 0$, с общей асимптотой $y = 0$, а сверху по x — параболой $x_2(y)$:

$$x_1(y) < x < x_2(y), \quad -\pi a < y < \pi a, \quad (80)$$

где

$$x_1(y) = -\frac{\pi^2 - 1}{2\pi} |y| - \frac{\pi a^2}{2|y|}, \quad x_2(y) = -\frac{y^2}{2a} \quad (81)$$

(см. также рис. 5). Гиперболы и парабола — это отображения границ $\xi = \pm \pi a$ и $\eta = a$ области, занятой отображением ПСЕ на евклидовой полуплоскости в модели Клейна.

ПСПЕ обладает максимальной симметрией, выражающейся в изотропии и однородности ее поверхности: окрестность любой точки поверхности геометрически подобна окрестности любой другой ее точки. Это

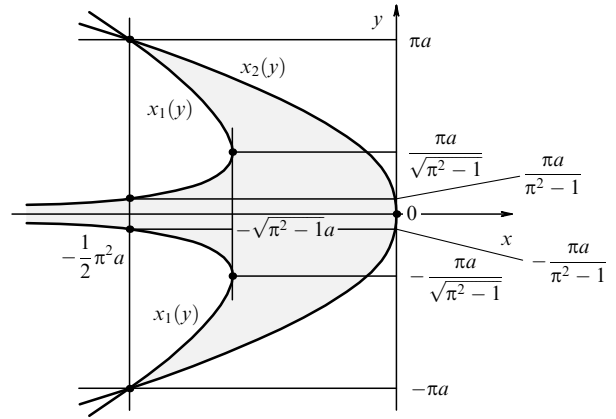


Рис. 5. Область изометричного отображения воронки Бельтрами (разрезанной по меридиану) на плоскости x, y с метрикой (76) псевдосферы в псевдоевклидовом пространстве.

следует из инвариантности метрики (76) относительно вращений вокруг оси t и инвариантности относительно "квазитрансляций" (термин Вейнберга [12])

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{q} \left(\sqrt{a^2 + \mathbf{x}^2} + \frac{\mathbf{q}\mathbf{x}}{1 + \sqrt{1 + \mathbf{q}^2}} \right), \quad (82)$$

переводящих ее точку $\mathbf{x} = a\mathbf{u}$ в точку $\mathbf{x}' = a\mathbf{u}'$. В частности, любую точку $\mathbf{x}$ можно перевести в начало координат $\mathbf{x}' = 0$, выбрав $\mathbf{q}$ равным $-\mathbf{x}/a$. В действительности, (82) — это преобразование скорости $\mathbf{u}$ в скорость $\mathbf{u}'$ лоренцевым бустом со скоростью $\mathbf{q}$:

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u} + \frac{\mathbf{q}}{C_q}, \quad C_q = \frac{\gamma_q + 1}{\gamma + \gamma\gamma_q + \mathbf{u}\mathbf{q}}, \quad \gamma_q = \sqrt{\mathbf{q}^2 + 1} \quad (83)$$

(ср. с (4) и (5)). Нетрудно явно показать, что лоренцево преобразование (83) всех скоростей, определяющих величины $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ в (35), не меняет эти величины:

$$\gamma(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \gamma(\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2), \quad \gamma_1(\mathbf{u}, \mathbf{u}'') = \gamma_1(\mathbf{u}', \mathbf{u}'''), \quad (84)$$

$$\gamma_2(\mathbf{u}, -\mathbf{u}_1) = \gamma_2(\mathbf{u}', -\mathbf{u}'_1).$$

Согласно представлению (64), это означает, что угол ω также инвариантен относительно преобразования (83).

В отличие от поверхности ПСПЕ поверхность ПСЕ не изотропна и не однородна в целом, ее главные кривизны k_1, k_2 зависят от ρ :

$$k_1 = \frac{\rho}{a\sqrt{a^2 - \rho^2}}, \quad k_2 = -\frac{\sqrt{a^2 - \rho^2}}{a\rho}, \quad -\pi < \varphi \leq \pi, \quad (85)$$

и, более того, обращаются в 0, $-\infty$ и $\infty, 0$ при $\rho = 0$ и $\rho = a$, хотя гауссова кривизна во всех точках поверхности постоянна и равна $K = k_1 k_2 = -1/a^2$. Поэтому поверхность ПСЕ изометрична поверхности ПСПЕ лишь в некоторой области последней (см. (74)). Площадь этой области равна $2\pi a^2$, в то время как площадь поверхности ПСПЕ, как и всякой другой плоскости Лобачевского, бесконечна. Это согласуется с теоремой Д. Гильберта, который показал, что в евклидовом пространстве не существует полной и регулярной поверхности, изометричной всей плоскости Лобачевского [13].

12. Теорема Гильберта

Поскольку реальное физическое пространство псевдоевклидово, то отображение релятивистских скоростей отрезками геодезических, а закона сложения этих скоростей геодезическим треугольником на однородной и изотропной поверхности ПСПЕ представляется адекватным физической реальности. Именно таким правилам подчиняются импульсы $\mathbf{p} = m\mathbf{u}$ и энергии $E = m\gamma$ свободных релятивистских частиц в псевдоевклидовом пространстве Минковского. А координаты x, y, t точки на поверхности ПСПЕ, где $t = \sqrt{a^2 + x^2 + y^2}$, самым непосредственным образом (хочется сказать, напрямую) связаны с компонентами 4-скорости $u^\alpha = (\mathbf{u}, \gamma)$:

$$u_x = \frac{x}{a}, \quad u_y = \frac{y}{a}, \quad \gamma = \frac{t}{a}. \quad (86)$$

С другой стороны, и евклидово пространство индуцирует на вложенной в него поверхности Бельтрами (мы возвращаемся здесь к поверхности, изображенной на рис. 3) гиперболическую геометрию, т.е. метрику с постоянной отрицательной гауссовой кривизной. Поскольку поверхность Бельтрами обладает конечной площадью $4\pi a^2$ и ограничивает конечный объем $(2/3)\pi a^3$, было бы интересно узнать, не означает ли это, что существуют конечные евклидовы объемы того же порядка πa^3 , в которых физические объекты характеризуются не скоростями, а чисто пространственными величинами — собственными размерами, расстояниями друг от друга и чисто пространственными распределениями.

Как известно из дифференциальной геометрии, если на поверхности в евклидовом пространстве выбрана чебышевская сеть координатных линий x, y , то метрика (первая квадратичная форма) на этой поверхности имеет вид

$$ds^2 = dx^2 + 2 \cos \phi \, dx \, dy + dy^2, \quad (87)$$

где сетевой угол $\phi(x, y)$ по определению находится в интервале $0 < \phi < \pi$ [14]. Тогда из знаменитой формулы Гаусса, связывающей кривизну K с коэффициентами первой квадратичной формы, следует, что для поверхности с $K = -1/a^2$ и метрики (87) сетевой угол подчиняется нелинейному уравнению синус-Гордона [13]

$$a^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \sin \phi. \quad (88)$$

С другой стороны, равенство нулю второй квадратичной формы

$$N d^2 \mathbf{r} = \frac{a}{\rho \sqrt{a^2 - \rho^2}} d\rho^2 - \frac{\rho \sqrt{a^2 - \rho^2}}{a} d\varphi^2 \quad (89)$$

для ПСЕ приводит к двум семействам асимптотических линий

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \mp \operatorname{arccosh} \frac{a}{\rho} - c_1 = \ln \tan \frac{u}{2} - c_1, \\ \varphi_2 &= \pm \operatorname{arccosh} \frac{a}{\rho} + c_2 = -\ln \tan \frac{u}{2} + c_2, \end{aligned} \quad (90)$$

на этой поверхности. Здесь $\rho = a \sin u$, $0 < u < \pi$, а верхний и нижний знаки перед $\operatorname{arccosh}$ и интервалы $0 < u \leq \pi/2$, $\pi/2 \leq u < \pi$ изменения переменной u относятся к верхней и нижней воронкам Бельтрами соот-

ветственно. Напомним, что

$$\operatorname{arccosh} \frac{a}{\rho} = \ln \left(\frac{a}{\rho} + \sqrt{\frac{a^2}{\rho^2} - 1} \right), \quad \frac{a}{\rho} \geq 1.$$

Пользуясь уравнениями (90) для асимптотических линий, мы молчаливо предполагаем, что поверхность ПСЕ, как она представлена на рис. 3, разрезана по меридиану $\varphi = \pm \pi$ и к краям этого разреза приклеены бесконечно простирающиеся листы так называемой универсальной накрывающей поверхности ПСЕ. Эта универсальная накрывающая, имея ту же кривизну $K = -1/a^2$, бесконечное число раз "обматывает" поверхность ПСЕ, причем k -й ее участок $(2k-1)\pi < \varphi \leq (2k+1)\pi$, k — любое целое число, считается стелющимся над предыдущим $k-1$ -м участком. Таким образом, уравнения (90) представляют асимптотические линии ПСЕ на ее универсальной накрывающей.

С ростом параметра u в интервале $0 < u < \pi$ асимптотические линии двух семейств, вращаясь в противоположных направлениях, приближаются по поверхности верхней воронки к ребру возврата, при $u = \pi/2$ касаются его в точках $\varphi_1 = -c_1$, $\varphi_2 = c_2$ и касаются друг друга, если $c_2 = -c_1$, а затем с ростом u удаляются от него по поверхности нижней воронки, вращаясь в прежних направлениях. Любопытно, что асимптотические линии, будучи пространственными кривыми, не имеют особенностей для всех значений параметра u в интервале $0 < u < \pi$, хотя поверхность ПСЕ, на которой они расположены, имеет сингулярное ребро возврата при $u = \pi/2$.

Еще более интересно то, что две асимптотические линии 1-го и 2-го семейств, спускающиеся по поверхности верхней воронки и имеющие общую точку касания друг с другом и с ребром возврата (для таких линий $c_2 = -c_1$), могут считаться одной линией, которая спускается из бесконечности $u = 0$, $\varphi = -\infty$ по поверхности верхней воронки к ребру возврата как линия 1-го семейства, а после касания с ребром возврата поднимается по поверхности той же воронки к бесконечности $u = 0$, $\varphi = +\infty$ как линия 2-го семейства. В результате, верхняя воронка покрывается однопараметрической сетью асимптотических линий, начинающихся и заканчивающихся при $u = 0$, $\varphi = \mp \infty$ и касающихся ребра возврата в точках $u = \pi/2$, $\varphi = c$, определяемых значением параметра $c = -c_1 = c_2$, $-\infty < c < \infty$. Таким образом, ребро возврата оказывается естественной границей асимптотической сети для верхней воронки. Аналогичное можно сказать и об асимптотической сети для нижней воронки, поскольку она зеркально симметрична верхней.

Если теперь для элемента длины (71) на поверхности ПСЕ вместо цилиндрических переменных ρ, φ или переменных u, φ , $u \in (0, \pi)$, использовать переменные x, y ,

$$x = \frac{1}{2} a \left(\ln \tan \frac{u}{2} - \varphi \right), \quad y = \frac{1}{2} a \left(\ln \tan \frac{u}{2} + \varphi \right), \quad (91)$$

и по-прежнему позволить углу φ меняться от $-\infty$ до $+\infty$, то этот элемент приобретет форму (87), где $\cos \phi = \cos 2u$. Это означает, что переменные x, y в (91), образующие согласно (90) сеть асимптотических линий на поверхности ПСЕ (точнее, на ее универсальной накрывающей), совпадают с переменными x, y координатных линий чебышевской сети. В таком случае и

сетевой угол $\phi(x, y)$ чебышевской сети должен совпадать с углом между асимптотическими линиями в той же точке поверхности. Этот последний угол можно найти с помощью формулы Эйлера для нормальной кривизны в направлении θ :

$$k(\theta) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta. \quad (92)$$

Здесь k_1, k_2 — главные кривизны (85), а угол θ отсчитывается от меридианного направления. По определению, в асимптотических направлениях кривизна $k(\theta)$ исчезает и для углов θ_1, θ_2 этих направлений с меридианом получаем

$$\begin{aligned} \tan \theta_{1,2} &= \pm \sqrt{-\frac{k_1}{k_2}} = \pm \frac{\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}}, \\ \theta_{1,2} &= \pm \arctan \frac{\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}}. \end{aligned} \quad (93)$$

Таким образом, угол между двумя асимптотическими направлениями на поверхности ПСЕ равен

$$2\theta_1 = 2 \arctan \frac{\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} = 2 \arcsin \frac{\rho}{a}. \quad (94)$$

Он определяется только радиусом широтной окружности, независимо от ее принадлежности верхней или нижней воронке Бельтрами, и лежит в интервале $0 < 2\theta_1 < \pi$.

С другой стороны, уравнение $\cos \phi = \cos 2u$, связывающее чебышевский угол ϕ с радиусом $\rho = a \sin u$ или с параметром u , равным $u = \arcsin(\rho/a)$ для верхней и равным $u = \pi - \arcsin(\rho/a)$ для нижней воронки, имеет два решения

$$1) \quad \phi = 2u, \quad 2) \quad \phi = 2\pi - 2u. \quad (95)$$

Используя первое из них для верхней воронки, а второе — для нижней, получаем один и тот же результат

$$\begin{aligned} 1) \quad \phi &= 2u = 2 \arcsin \frac{\rho}{a}, \\ 2) \quad \phi &= 2\pi - 2u = 2\pi - 2\left(\pi - \arcsin \frac{\rho}{a}\right) = 2 \arcsin \frac{\rho}{a}, \end{aligned} \quad (96)$$

совпадающий с (94).

Таким образом, с ростом u в интервале $0 < u < \pi$ сетевой угол ϕ сначала линейно растет, достигает недопустимого для чебышевской сети значения $\phi = \pi$ на границе $u = \pi/2$ верхней и нижней воронок, а затем линейно падает до нуля. Тем самым чебышевская сеть, как и сама поверхность ПСЕ, имеет особенность на границе верхней и нижней воронок (скачок производной $\partial\phi/\partial u$) и распадается на две регулярные сети, покрывающие отдельно каждую из воронок. Именно это обстоятельство позволило Гильберту утверждать, что в евклидовом пространстве не существует аналитической поверхности постоянной отрицательной кривизны без особенностей и повсюду регулярной, т.е. изометричной всей плоскости Лобачевского.

Тем не менее уравнение синус-Гордона обладает бесконечным множеством решений, регулярных на всей поверхности ПСЕ (точнее, на ее универсальной накрывающей). Однако они уже не имеют смысла сетевого угла чебышевской или асимптотической сети. Упомянем только одно из таких решений.

13. Псевдосфера в евклидовом пространстве как арена протяженных релятивистских объектов

Введем вместо x, y безразмерные переменные ξ, φ , используя формулы (91):

$$x + y = a \ln \tan \frac{u}{2} = a\xi, \quad y - x = a\varphi. \quad (97)$$

Как и x, y , они образуют декартовы переменные на плоскости ξ, φ . Тогда уравнение синус-Гордона (88) примет вид

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = \sin \phi. \quad (98)$$

Его простейшее решение

$$\phi_\beta(\xi, \varphi) = 4 \arctan \left[\exp \left(\varepsilon \frac{\xi - \beta\varphi}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) \right], \quad \varepsilon = \pm 1, \quad (99)$$

регулярное на всей плоскости ξ, φ , называется солитоном ($\varepsilon = 1$) или антисолитоном ($\varepsilon = -1$). Оно содержит параметр $\beta, |\beta| < 1$, который можно назвать скоростью солитона (антисолитона), если ξ и φ интерпретировать как пространственную и временную координаты. То, что роль времени выполняет угловая координата φ точки на универсальной накрывающей ПСЕ, представляется многозначительным. Пространственная координата определяется радиусом широтной окружности и равна

$$\xi = \mp \operatorname{arccosh} \frac{a}{\rho} \quad (100)$$

для верхней и нижней воронок Бельтрами. С изменением ξ при фиксированном φ солитонное решение плавно растет от 0 до 2π , а антисолитонное — падает от 2π до 0. При этом основное изменение $\phi_\beta(\xi, \varphi)$ происходит в области $\xi \approx \beta\varphi$ с протяженностью $\Delta\xi \sim (1 - \beta^2)^{1/2}$, которая сокращается с ростом скорости (лоренцево сокращение размеров солитона). При лоренцевом преобразовании со скоростью β_1 решение $\phi_\beta(\xi, \varphi)$, будучи релятивистским скаляром, сохраняет свою функциональную зависимость от лоренц-преобразованных координат ξ', φ' и лоренц-преобразованной скорости β' : $\phi_\beta(\xi, \varphi) = \phi_{\beta'}(\xi', \varphi')$, так как

$$\frac{\xi - \beta\varphi}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\xi' - \beta'\varphi'}{\sqrt{1 - \beta'^2}}, \quad \beta' = \frac{\beta + \beta_1}{1 + \beta\beta_1}. \quad (101)$$

Преобразованная скорость β' — релятивистская сумма скоростей β и β_1 .

Таким образом, поверхность ПСЕ (точнее, поверхность ее универсальной накрывающей) оказывается ареной существования и движения протяженных релятивистских объектов. Им посвящена обширная литература (см., например, [15, 16]).

Так как уравнение синус-Гордона появилось в геометрической задаче вложения в трехмерное евклидово пространство двумерной поверхности постоянной отрицательной кривизны, то в физических задачах, описываемых уравнением синус-Гордона, становятся интересными физическая переменная, выполняющая роль времени, и физическая единица измерения скорости. Во

всяком случае, трудно ожидать, что фигурирующая в этих задачах безразмерная скорость β измеряется в единицах скорости света, появление которой связано с псевдоевклидовостью четырехмерного пространства.

14. Заключение

В заключение следует отметить, что трехпараметрические представления угла ω , полученные автором в 1961 г., в неевклидовой гиперболической геометрии являются представлениями для площади (умноженной на кривизну) псевдосферического треугольника скоростей, связанных преобразованием Лоренца. Они демонстрируют чисто геометрическое неевклидово происхождение этого угла — объекта внутренней геометрии кривой поверхности — и его релятивистскую инвариантность.

Вместе с тем нельзя недооценивать и простоту отражения обсуждаемой симметрии *двумя евклидовыми* треугольниками скоростей, изображенными на рис. 1. В самом деле, соответствующие этим двум треугольникам "теоремы синусов"

$$\frac{u}{\sin(\pi - \theta')} = \frac{u_2}{\sin(\pi - \theta)} = \frac{u_1}{C_1 \sin \vartheta}, \quad (102)$$

$$\frac{u_1}{\sin \delta} = \frac{u''}{\sin(\pi - \theta)} = \frac{u}{C \sin(\theta - \delta)}, \quad (103)$$

непосредственно содержат "теорему синусов"

$$\frac{u}{\sin A} = \frac{u_1}{\sin A_1} = \frac{u_2}{\sin A_2} \quad (104)$$

для одного геодезического треугольника на псевдосфере, поскольку $u'' = u_2$ (см. также (34), (37)).

А три выражения "теоремы косинусов"

$$u^2 = \frac{u_1^2}{C_1^2} + u_2^2 - 2 \frac{\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2}{C_1}, \quad (105)$$

$$u_1^2 = u''^2 + \frac{u^2}{C^2} - 2 \frac{\mathbf{u}'' \mathbf{u}}{C}, \quad (106)$$

$$u_2^2 = u^2 + \frac{u_1^2}{C_1^2} + 2 \frac{\mathbf{u} \mathbf{u}_1}{C_1}, \quad (107)$$

с углами, прилежащими скоростям бустов в этих двух евклидовых треугольниках, после несложных преобра-

зований сводятся к выражениям

$$\gamma = \gamma_1 \gamma_2 - \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2, \quad \gamma_1 = \gamma'' \gamma - \mathbf{u}'' \mathbf{u}, \quad \gamma_2 = \gamma \gamma_1 + \mathbf{u} \mathbf{u}_1, \quad (108)$$

т.е. к "теореме косинусов" для того же псевдосферического треугольника (см. также (35), (38)).

Автор благодарен С.С. Герштейну и М.А. Соловьеву за стимулирующие замечания и А.И. Ритусу за помощь.

Работа поддержана грантами РФФИ 08-02-01118 и Научных школ 1615.2008.2.

Список литературы

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Теория поля* (М.: Наука, 1988) [Translated into English: Landau L. D., Lifshitz E. M. *The Classical Theory of Fields* (Oxford: Pergamon Press, 1983)]
2. Møller C. *The Theory of Relativity* 2nd ed. (London: Oxford Univ. Press, 1972) [Мёллер К. *Теория относительности* 2-е изд. (М.: Атомиздат, 1975)]
3. Ритус В. И. *УФН* **177** 105 (2007) [Ritus V. I. *Phys. Usp.* **50** 95 (2007)]
4. Wigner E. P. *Helv. Phys. Acta* (Suppl. IV) 210 (1956)
5. Wigner E. P. *Rev. Mod. Phys.* **29** 255 (1957)
6. Stapp H. P. *Phys. Rev.* **103** 425 (1956)
7. Ритус В. И. *ЖЭТФ* **40** 352 (1961) [Ritus V. I. *Sov. Phys. JETP* **13** 240 (1961)]
8. Ефимов Н. В. *Высшая геометрия* (М.-Л.: Гостехиздат, 1945) [Translated into English: Efimov N. V. *Higher Geometry* (Moscow: Mir Publ., 1980)]
9. Логунов А. А. *Лекции по теории относительности* (М.: Наука, 2002)
10. Каган В. Ф. *Основания геометрии* Ч. II (М.: ГИТТЛ, 1956)
11. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. *Современная геометрия: методы и приложения* 2-е изд. (М.: Наука, 1986) [Translated into English: Dubrovin B. A., Fomenko A. T., Novikov S. P. *Modern Geometry: Methods and Applications* 2nd ed. (New York: Springer-Verlag, 1992)]
12. Weinberg S. *Gravitation and Cosmology* (New York: Wiley, 1972) [Вейнберг С. *Гравитация и космология* (М.: Мир, 1975)]
13. Hilbert D. *Grundlagen der Geometrie* (Leipzig: B.G. Teubner, 1930) [Translated into English: *Foundations of Geometry* (Peru, Ill.: Open Court Publ. Co., 1971)] [Гильберт Д. *Основания геометрии* Добавление V (М.: Гостехиздат, 1948)]
14. Позняк Э. Г., Шикин Е. В. *Дифференциальная геометрия* (М.: Изд-во МГУ, 1990)
15. Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. *Теория солитонов: метод обратной задачи* (М.: Наука, 1980) [Translated into English: Novikov S., Manakov S. V., Pitaevskii L. P., Zakharov V. E. *Theory of Solitons: The Inverse Scattering Method* (Contemporary Soviet Mathematics) (New York: Consultants Bureau, 1984)]
16. Rajaraman R. *Solitons and Instantons* (Amsterdam: North-Holland, 1982) [Раджараман Р. *Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля* (М.: Мир, 1985)]

Permutation asymmetry of relativistic velocity addition law, and noneuclidean geometry

V.I. Ritus

P.N. Lebedev Physical Institute, Russian Academy of Sciences, Leninskii prosp. 53, 119991 Moscow, Russian Federation
Tel. (7-499) 132-64 26. E-mail: ritus@lpi.ru

The asymmetry of the relativistic noncollinear velocity addition law about velocity permutation leads to two modified triangles depicting on Euclidian plane the addition of unpermuted and permuted velocities and the appearance of nonzero angle ω between two resulting velocities. Through the same angle ω the spin of a particle turns when the Lorentz boost with velocity noncollinear to the velocity of a particle changes the last one. Three mutually connected three-parametric representations of the angle ω , at one time obtained by the author, express the three-parametric symmetry of sides and angles of two Euclidian triangles identical to the sine and cosine theorems for the sides and angles of a single geodesic triangle on the surface of a pseudosphere. Namely, all three representations of the angle ω after a transformation one of them coincide with the representations of the area of a pseudospherical triangle expressed by any two of its sides and the angle between them. The angle ω is also symmetrically expressed in terms of three angles or three sides of a geodesic triangle, and therefore it is an invariant of the group of triangle's motions along the pseudospherical surface, the group that includes the Lorentzian group. Though the pseudospheres in Euclidian and pseudoeuclidian spaces are locally isometric, only the last one is isometric to the entire Lobachevsky plane and forms the homogeneous isotropic curve 4-velocity subspace in the plane Minkovsky space. In this connection, relativistic physical processes that may be related to the pseudosphere in Euclidian space are exceptionally interesting.

PACS numbers: **03.30.+p**, **02.40.Ky**

Bibliography — 16 references
Uspekhi Fizicheskikh Nauk **178** (7) 739–752 (2008)

DOI: 10.3367/UFNr.0178.200807d.0739

Received 14 April 2008

Physics – Uspekhi **51** (7) (2008)