

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Новые направления в теории электронного охлаждения

Л.И. Меньшиков

Дается обзор теории электронного охлаждения ионов и позитронов. Обсуждаются формулы для силы торможения ионов в электронном пучке со "сплюснутым" распределением по скоростям, характерным для электронного охлаждения, при произвольных значениях магнитного поля. Для позитронов рассматриваются представляющие наибольший практический интерес случаи промежуточного и сильного магнитного поля. Рассчитаны сила трения и компоненты тензора диффузии позитронов по скоростям. Обсуждается процесс релаксации позитронов при их электронном охлаждении в позитронных накопительных кольцах и переходе к стационарному распределению. Показано, что стационарная функция распределения позитронов при этом практически совпадает с таковой для электронов. Анализируется возможность понижения поперечной температуры электронов, что необходимо для уменьшения разброса позитронов по импульсам.

PACS numbers: 29.27.Bd, 42.50.Fx, 52.25.Os

DOI: 10.3367/UFNr.0178.200807a.0673

Содержание

1. Введение (673).
2. Основные эффекты электронного охлаждения тяжелых частиц (674).
3. Вклад F_b в силу трения от парных столкновений в приближениях прямолинейной траектории частицы и замагниченности электронов (679).
4. Вклад F_c в силу трения от коллективных взаимодействий в приближении прямолинейной траектории частицы (681).
5. Сила трения, действующая на легкую частицу в изотропной плазме (683).
6. Кинетика электронного охлаждения легких частиц. Исходные уравнения (685).
7. Динамическая сила для позитрона (686).
8. Оценка вклада парных столкновений позитронов с электронами (690).
9. Качественное обсуждение стационарного распределения позитронов $\Phi(V)$ по скоростям (691).
10. Стационарная функция распределения позитронов (692).
11. Поперечное охлаждение электронов. Качественный анализ (694).
12. Роль диполь-дипольного взаимодействия электронных ларморовских орбит в явлении поперечного охлаждения (697).
13. Заключение (699).
14. Приложения (700).
 - П1. Черенковское торможение как возбуждение плазменных осцилляторов. П2. Экранирование поля позитрона, вращающе-

гося в магнитном поле в облаке замагниченных электронов. П3. Корреляционные функции напряженностей электрического поля в идеальной нерелятивистской плазме в магнитном поле. П4. Диффузия позитронов в пространстве скоростей, происходящая в изотропной электронной плазме. П5. Коэффициент продольной диффузии позитронов в пространстве скоростей, происходящей в электронной плазме. П6. Коэффициент поперечной диффузии D_{\perp} позитронов в пространстве скоростей, происходящей в облаке замагниченных электронов.

Список литературы (707).

1. Введение

Метод электронного охлаждения [1] (см. обзоры [2, 3]) успешно применяется для уменьшения фазового объема пучков частиц с массой

$$M \gg m, \quad (1)$$

где m — масса электрона. Указанные частицы далее будем называть частицами M , а их заряд обозначим через q . Задача охлаждения позитронов в случае

$$M = m \quad (2)$$

является новой. Эта задача возникла в проектах получения и изучения свойств атомов антиводорода и позитрония (см. обзор [4], а также [5, 6]).

Одной из ключевых величин, подлежащих вычислению, является сила трения F , действующая на частицу, движущуюся относительно электронного облака (пучка). Данный обзор посвящен главным образом охлаждению легких частиц (позитронов). Для полноты картины вначале дан краткий анализ достаточно хорошо развитой к настоящему времени теории охлаждения тяжелых частиц (1). В случае (1) коллективные эффекты и парные

Л.И. Меньшиков. Российский научный центр "Курчатовский институт",
пл. Курчатова 1, 123182 Москва, Российская Федерация
E-mail: mleonid1954@mail.ru

Статья поступила 4 июля 2007 г.,
после доработки 12 марта 2008 г.

столкновения дают сравнимые вклады в силу трения [3, 4]. Однако в случае (2) основную роль играют коллективные эффекты. Соответствующий расчет более сложен, и, вероятно, поэтому теория охлаждения позитронов еще не завершена, опубликовано лишь несколько работ по этой теме [4–9]. Учитывая важную роль охлаждения позитронов в проектах [4–6], в данном обзоре мы вновь возвращаемся к этому вопросу с целью критического анализа опубликованных результатов, а также суммирования и пополнения сведений, необходимых для планирования экспериментов с позитронами и атомами позитрония.

В обзоре обсуждаются методы расчета функции распределения позитронов $\Phi(\mathbf{V}, t)$ по скоростям \mathbf{V} . Эта функция содержит исчерпывающие сведения о процессе охлаждения позитронов. Особый интерес представляют стационарная функция распределения позитронов $\Phi(\mathbf{V})$, которое устанавливается в результате релаксации, и способы уменьшения разброса позитронов по импульсам.

В физике плазмы развиты мощные методы, которые с успехом могут быть применены к анализу рассматриваемого круга явлений, и продемонстрировать это является одной из целей обзора. Другая цель — привести сводку формул, достаточных для практических расчетов кинетики замедления позитронов, с их краткими выводами. Автор старался сопровождать формальные выкладки качественными оценками и обсуждением физического смысла получаемых результатов. И наконец, третья цель — изложить новые результаты, относящиеся к достаточно интересной области — физике анизотропной плазмы.

2. Основные эффекты электронного охлаждения тяжелых частиц

Прежде чем перейти к обсуждению теории охлаждения позитронов, напомним основные выдвинутые идеи и эффекты, предсказанные теоретически и обнаруженные в ходе исследований по электронному охлаждению тяжелых частиц.

Электронное облако удерживается комбинацией внешних электрических и магнитных полей, которые компенсируют кулоновское отталкивание электронов, заменяя тем самым фон положительных ионов, присутствующий в обычной квазинейтральной плазме. В результате практически все свойства облака совпадают со свойствами обычной плазмы [1–4].

В случае отличного от нуля магнитного поля ($\mathbf{H} \neq 0$) траектории частиц являются винтовыми с радиусами, равными ларморовским:

$$r_{\text{HM}} = \frac{V_{\perp}}{\omega_{\text{HM}}}, \quad r_{\text{H}} = \frac{v_{\perp}}{\omega_{\text{H}}}, \quad \omega_{\text{HM}} = \frac{qH}{Mc}, \quad (3)$$

$$\omega_{\text{H}} = \frac{eH}{mc}, \quad V_{\perp} = |\mathbf{V}_{\perp}|, \quad v_{\perp} = |\mathbf{v}_{\perp}|.$$

Здесь векторы \mathbf{V}_{\perp} , \mathbf{v}_{\perp} — перпендикулярные направлению магнитного поля $\mathbf{h} = \mathbf{H}/H$ составляющие скоростей \mathbf{V} и \mathbf{v} частицы M и электрона соответственно (здесь и почти везде далее рассматривается система покоя пучка, \mathbf{V} и \mathbf{v} — скорости в этой системе). Для винтовых траекторий расчет силы трения \mathbf{F} весьма громоздок, поэтому предельно будут проанализированы предельные слу-

чай, наиболее важные в практических применениях: слабого (определение дано ниже) и предельно сильного магнитного поля (последний случай в физике пучков называют также "замагниченной плазмой"). Электронная плазма предполагается идеальной:

$$\xi = \frac{\bar{K}}{\bar{U}} \gg 1, \quad (4)$$

где \bar{K} , \bar{U} — средние значения кинетической и потенциальной энергий электронов. Кроме того, для описания электронного охлаждения достаточно рассматривать нерелятивистский случай:

$$\Delta = \sqrt{\frac{T}{m}} \ll c, \quad (5)$$

$$V \ll c. \quad (6)$$

В соотношениях (4) и (6)

$$\bar{U} \sim \frac{e^2}{R}, \quad (7)$$

$T = 2\bar{K}/3$ — эффективная температура электронов, $\bar{R} \sim n^{-1/3}$ — среднее расстояние между ними, n — их плотность [см^{-3}] в системе покоя пучка.

Из условия (4) следует вывод о малости угла рассеяния θ_{scat} частиц,

$$\theta_{\text{scat}} \ll 1, \quad (8)$$

при типичном столкновении в идеальной плазме. Длительность взаимодействия частиц M и m при столкновении с прицельным параметром ρ определяется временем $\tau_{\text{coll}} \sim \rho/u$, где $\rho = |\boldsymbol{\rho}|$, $u = |\mathbf{u}|$, $\mathbf{u} = \mathbf{V} - \mathbf{v}$ — их относительная скорость. Частица m испытывает при этом ускорение $a_m \sim qe/(m\rho^2)$ и смещается на расстояние $l_m \sim a_m \tau_{\text{coll}}^2 \sim qe/(mu^2)$, поэтому

$$\theta_{\text{scat}}^{(m)} \sim \frac{l_m}{\rho} \sim \frac{e^2}{\rho mu^2} \sim \frac{\bar{U}}{\bar{K}} \ll 1.$$

Отметим также, что

$$l_m \ll \rho. \quad (9)$$

Силу трения удобно разбить на две составляющих:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_b + \mathbf{F}_c, \quad (10)$$

где \mathbf{F}_b — вклад от парных столкновений частицы M с электронами, \mathbf{F}_c — вклад от коллективных взаимодействий, когда при условии (4) частица M взаимодействует одновременно с большим числом электронов, порядка числа электронов N_D в дебаевской сфере ($N_D = \xi^{3/2}$).

Обсудим сначала случай слабого магнитного поля ($H \rightarrow 0$). Рассмотрим инерциальную систему отсчета, в которой до столкновения частица M покоится (отметим, что в случае (1) частица M остается практически покоящейся в этой системе и после столкновения). В результате взаимодействия с M частица m получает поперечный импульс $\Delta p_{\perp} = 2qe/(\rho u)$ и отклоняется на угол $\theta_{\text{scat}}^{(m)} = \Delta p_{\perp}/(mu) = 2qe/(\rho mu^2)$. Поперечный по отношению к вектору \mathbf{u} импульс $\Delta \mathbf{p}_{\perp}$ нас не интересует, поскольку он исчезает при усреднении по столкнове-

ниям с различными направлениями вектора \mathbf{p} . Изменение продольной компоненты импульса частицы m , вызванное ее отклонением, выражается в виде $\Delta p_{m\parallel} = m u (1 - \cos \theta_{\text{scat}}^{(m)}) \approx m u (\theta_{\text{scat}}^{(m)})^2 / 2$, или в векторном виде $\Delta \mathbf{p}_{m\parallel} = (2q^2 e^2 / m u^3 \rho^2) \hat{\mathbf{u}}$. Вследствие галилеевой инвариантности последние формулы справедливы в любой системе отсчета, в том числе и в лабораторной. В силу сохранения импульса заключаем, что изменение импульса частицы M , вызванное отклонением частицы m , составляет

$$\Delta \mathbf{p}_M^{(1)} = -\Delta \mathbf{p}_{m\parallel} = -\frac{2q^2 e^2}{m u^3 \rho^2} \hat{\mathbf{u}}. \quad (11)$$

Плотность электронов со скоростями \mathbf{v} в элементе $d^3 v$ выражается как $dn = n f(\mathbf{v}) d^3 v$, где $f(\mathbf{v})$ — функция их распределения, нормированная на единицу: $\int f(\mathbf{v}) d^3 v = 1$. Число таких электронов, пролетающих через кольцо прицельных параметров площадью $2\pi\rho d\rho$ в единицу времени, равняется $dn u 2\pi\rho d\rho$, откуда находим [10, 11]:

$$\mathbf{F}_b = \int dn u 2\pi\rho d\rho \Delta \mathbf{p}_M^{(1)} = \frac{4\pi n e^2 q^2 A_b}{m} \nabla_{\mathbf{V}} \Phi(\mathbf{V}), \quad (12)$$

где $\Phi(\mathbf{V})$ — "первый потенциал Трубникова",

$$\Phi(\mathbf{V}) = \int \frac{f(\mathbf{v}) d^3 v}{u}, \quad (13)$$

A_b — кулоновский логарифм для парных столкновений частиц M с электронами,

$$A_b = \ln \frac{\bar{R}}{R_T}, \quad (14)$$

R_T — томсоновский радиус,

$$R_T = \frac{e^2}{T}. \quad (15)$$

Основной вклад в \mathbf{F}_b дают столкновения с прицельными параметрами $\rho < \bar{R}$. Формула (12) справедлива с логарифмической точностью $\sim 1/A_b$. Для изотропного распределения $\Phi(\mathbf{V}) = \Phi(V)$, $\nabla_{\mathbf{V}} \Phi(\mathbf{V}) = \Phi'(V) \hat{\mathbf{V}}$, $\hat{\mathbf{V}} = \mathbf{V}/V$. В частности, для максвелловского изотропного распределения $f(\mathbf{v}) = (m/2\pi T)^{3/2} \exp(-mv^2/2T)$

$$\Phi'(V) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\Delta^3 V^2} \int_0^V dv v^2 \exp\left(-\frac{v^2}{2\Delta^2}\right).$$

В предельных случаях получаем

$$\Phi'(V) = -\begin{cases} V^{-2}, & V \gg \Delta, \\ \Delta^{-3} V \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}}, & V \ll \Delta. \end{cases} \quad (16)$$

Для расчета \mathbf{F}_c идеальную плазму (4) ввиду условия $N_D \gg 1$ можно рассматривать как сплошную среду, реакция которой на электромагнитное возмущение с частотой ω и волновым вектором \mathbf{k} описывается тензором диэлектрической проницаемости [11–17]:

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) = \delta_{\alpha\beta} + \frac{\omega_p^2}{\omega} \int \frac{v_\alpha \partial f(\mathbf{v}) / \partial v_\beta}{\omega + i0 - \mathbf{k}\mathbf{v}} d^3 v, \quad (17)$$

где $\omega_p = \sqrt{4\pi n e^2 / m}$ — плазменная частота.

В нерелятивистском случае (5) можно пренебречь поперечным электромагнитным полем и рассматривать только продольное электрическое поле [11–17]. В этом предельном случае при любой величине магнитного поля плазма подобна изотропной среде с диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = \varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) \hat{k}_\alpha \hat{k}_\beta \equiv \varepsilon_{\parallel}, \quad (18)$$

где $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k$. Поясним этот вывод, поскольку он важен для дальнейшего. В случае (5) имеем

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla\varphi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \approx -\nabla\varphi(\mathbf{r}, t),$$

поэтому электрическое поле является продольным:

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = \int d^3 r dt \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r} + i\omega t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -i\mathbf{k}\varphi(\mathbf{k}, \omega). \quad (19)$$

Уравнения Максвелла в плазме могут быть представлены в виде, совпадающем с видом уравнений для диэлектрика [11–18]. В частности,

$$\nabla \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = 4\pi\rho_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t), \quad D_\alpha(\mathbf{k}, \omega) = \varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) E_\beta(\mathbf{k}, \omega), \quad (20)$$

где $\rho_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t)$ — плотность внесенного в плазму заряда. Из (19), (20) получаем $i\mathbf{k}_\alpha D_\alpha(\mathbf{k}, \omega) = 4\pi\rho_{\text{ex}}(\mathbf{k}, \omega)$, т.е. $i\mathbf{k}_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) (-i\mathbf{k}_\beta \varphi(\mathbf{k}, \omega)) = 4\pi\rho_{\text{ex}}(\mathbf{k}, \omega)$, поэтому

$$\varphi(\mathbf{k}, \omega) = \frac{4\pi\rho_{\text{ex}}(\mathbf{k}, \omega)}{\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)}, \quad (21)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{4\pi i \mathbf{k}}{k^2 \varepsilon(\mathbf{k}, \omega)} \rho_{\text{ex}}(\mathbf{k}, \omega),$$

где

$$\rho_{\text{ex}}(\mathbf{k}, \omega) = \int d^3 r dt \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r} + i\omega t) \rho_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t).$$

Формула (21) является обобщением обычной кулоновской формулы

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\varepsilon} \int \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho_{\text{ex}}(\mathbf{r}', t) d^3 r',$$

справедливой для диэлектрика в отсутствие дисперсии (т.е. при ε , не зависящей от \mathbf{k}, ω).

По физическим соображениям формулу (21) перепишем в виде:

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = \mathbf{E}_c(\mathbf{k}, \omega) + \mathbf{E}_p(\mathbf{k}, \omega),$$

где $\mathbf{E}_c(\mathbf{k}, \omega) = -(4\pi i \mathbf{k} / k^2) \rho_{\text{ex}}(\mathbf{k}, \omega)$ — собственное поле заряда, \mathbf{E}_p — электрическое поле,

$$\mathbf{E}_p(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{4\pi i \mathbf{k}}{k^2} \rho_p(\mathbf{k}, \omega), \quad (22)$$

индуцированных в плазме зарядами ("дебаевское" облако), имеющих плотность

$$\rho_p(\mathbf{k}, \omega) = \rho_{\text{ex}}(\mathbf{k}, \omega) \left(\frac{1}{\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)} - 1 \right), \quad (23)$$

наведенных в плазме исходным зарядом с плотностью ρ_{ex} .

Для точечного заряда q , движущегося по траектории $\mathbf{r} = \mathbf{R}(t)$, имеем

$$\begin{aligned} \rho_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t) &= q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}(t)), \\ \rho_{\text{ex}}(\mathbf{k}, \omega) &= q \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp(i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{R}(t)). \end{aligned} \quad (24)$$

Сила, действующая на заряд, выражается в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_c(t) &= q\mathbf{E}_p(\mathbf{r} = \mathbf{R}(t), t) = \\ &= q \int \frac{d^3k}{(2\pi)^4} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{R}(t) - i\omega t) \mathbf{E}_p(\mathbf{k}, \omega). \end{aligned} \quad (25)$$

Для неподвижного заряда, помещенного в начало координат ($\mathbf{R} = 0$), в случае $H \rightarrow 0$ для изотропного распределения электронов из (21) и (23) с учетом соотношений

$$\rho_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t) = q\delta(\mathbf{r}), \quad \rho_{\text{ex}}(\mathbf{k}, \omega) = 2\pi q\delta(\omega) \quad (26)$$

получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -\nabla\varphi(\mathbf{r}), \quad \varphi(\mathbf{r}) = q \frac{\exp(-r/r_D)}{r}, \\ \frac{1}{r_D^2} &= \omega_p^2 \left(\frac{1}{v^2} \right) = 4\pi\omega_p^2 \int_0^\infty dv f(v), \\ \rho_p(\mathbf{k}, t) &= \frac{q}{1 + k^2 r_D^2}, \quad \rho_p(\mathbf{r}, t) = \frac{q \exp(-r/r_D)}{4\pi k^2 r_D^2 r}, \end{aligned} \quad (27)$$

где r_D — дебаевский радиус,

$$r_D \approx \sqrt{\frac{T}{4\pi n e^2}} \quad (28)$$

(для максвелловского распределения последнее соотношение является точным). Таким образом, r_D — характерный радиус дебаевского облака. Для равномерно движущегося заряда

$$\mathbf{R}(t) = X(t)\hat{V}, \quad X(t) = Vt, \quad \rho(\mathbf{k}, \omega) = 2\pi q\delta(\omega - k_{\parallel}V), \quad (29)$$

где $k_{\parallel} = \mathbf{k}\hat{V}$.

В идеальной плазме

$$\frac{r_D}{R} \sim \xi^{1/2} \gg 1. \quad (30)$$

В коллективное слагаемое \mathbf{F}_c , так же как и в \mathbf{F}_b , основной вклад вносит область больших значений k :

$$\frac{1}{r_D} < k < \frac{1}{R}, \quad (31)$$

что соответствует расстояниям взаимодействия $\bar{R} < \rho < r_D$. Отсюда и из выражения $\varepsilon(\mathbf{k}, \omega = 0) = 1 + 1/(k^2 r_D^2)$ видно, что

$$|\varepsilon - 1| \ll 1, \quad (32)$$

поэтому в (23) можно положить

$$\frac{1}{\varepsilon} - 1 \approx 1 - \varepsilon. \quad (33)$$

Тогда \mathbf{F}_c выражается через $\text{Im}\varepsilon$ и с логарифмической точностью ($\sim 1/A_c$) имеем

$$\mathbf{F}_c = \frac{4\pi q^2 e^2 n A_c}{m} \nabla_{\mathbf{V}} \Phi(\mathbf{V}), \quad A_c = \ln \frac{r_D}{R}. \quad (34)$$

Физический смысл формулы (34) состоит в следующем. При $V < \Delta$ дебаевское облако отстает от частицы на расстояние $x \sim r_D V/\Delta$. Суммарный заряд дебаевского облака равен по модулю и противоположен по знаку заряду частицы: $q_D = -q$ (в противном случае на большом расстоянии от заряда имелось бы медленно спадающее с расстоянием электрическое поле $(q + q_D)/r^2$, которое вызывало бы перераспределение зарядов, что в конечном случае приводило бы к его компенсации). Считая для оценки, что заряд q_D равномерно распределен по дебаевскому облаку, из (25) получаем соотношение $F_c \sim q(x/r_D)(q/r_D^2) \sim q^2 V/(\Delta r_D^2)$, $V < \Delta$, которое согласуется с (34).

При $V > \Delta$ заряд находится на краю облака, размер которого составляет $L \sim V\tau_p = V/\omega_p$ (электроны реагируют на поле заряда через время τ_p , в течение которого заряд проходит путь L). Под действием электрического поля $E \sim q/L^2$ заряда электроны смещаются от исходных положений на расстояние $S \sim a_e \tau_p^2/2$, где $a_e \sim E/m$ — характерное ускорение электронов. Заряд q_D образуется вследствие того, что электроны поступают внутрь дебаевской области из ее приповерхностного слоя толщиной $\sim S$. Создаваемый ими заряд равен $q_D \sim -en_e S L^2 \sim -q$ (строгий результат, как указывалось выше, $q_D = -q$). Следовательно (см. (25)), $E_p \sim q_D/L^2$, $F_c = qE_p \sim q^2 e^2 n/(mV^2)$, $V > \Delta$, что также согласуется с (34). Приведенные качественные оценки помогут далее разобраться с более сложными случаями ненулевого магнитного поля.

Из формул (10), (12) и (34) следует известный замечательный вывод: промежуточный размер \bar{R} не входит в выражение для полной силы трения

$$\mathbf{F} = \frac{4\pi q^2 e^2 n \Lambda}{m} \nabla_{\mathbf{V}} \Phi(\mathbf{V}), \quad (35)$$

$$\Lambda = \Lambda_b + \Lambda_c = \ln \frac{\bar{R}}{R_T} + \ln \frac{r_D}{R} = \ln \frac{r_D}{R_T}.$$

По этой причине нет необходимости в строгом определении значения граничного прицельного параметра, разделяющего парные и коллективные процессы.

Теперь учтем "сплошность" функции распределения электронов [19, 20]

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}) &= G_e(v_{\perp}) g(v_{\parallel}), \quad G_e(v_{\perp}) = \frac{1}{2\pi A_{\perp}^2} \exp\left(-\frac{v_{\perp}^2}{2A_{\perp}^2}\right), \\ g(v_{\parallel}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} A_{\parallel}} \exp\left(-\frac{v_{\parallel}^2}{2A_{\parallel}^2}\right), \end{aligned} \quad (36)$$

которая всегда имеется в электронных пучках кулеров и играет ключевую роль в получении ионных пучков со сверхнизкими температурами [2, 3]. В (36) введены обозначения

$$A_{\perp} = \sqrt{\frac{T_{\perp}}{m}}, \quad A_{\parallel} = \sqrt{\frac{T_{\parallel}}{m}}, \quad (37)$$

где T_{\perp} , T_{\parallel} — температуры, характеризующие движение электронов поперек и вдоль силовых линий магнитного

поля, по которым движется пучок электронов. Возникновение сплюсненности обусловлено эффектом кинематического охлаждения ускоряемого пучка электронов, являющегося следствием теоремы Лиувилля. Стартуя с катода со скоростью u_0 , электрон проходит через область с разностью потенциалов U , и его скорость становится равной

$$u = \sqrt{u_0^2 + \frac{2eU}{m}} \quad (38)$$

(рассматриваются нерелятивистские электронные пучки, которые применяются в настоящее время). Если начальные скорости двух электронов различаются на Δu_0 , то согласно (38) разность их конечных скоростей

$$\Delta u = \frac{u_0 \Delta u_0}{u}. \quad (39)$$

Эти соотношения относятся, очевидно, к продольному движению, поэтому из (39) и оценки $|\Delta u_0| \sim u_0 \sim \sqrt{T_c/m}$, где T_c — температура катода, следует вывод:

$$T_{\parallel} \sim \frac{T_c^2}{\varepsilon}, \quad \varepsilon = \frac{mu^2}{2} \approx eU, \quad T_{\perp} \approx T_c. \quad (40)$$

При типичных значениях $T_c = 1000$ К и $U = 10$ кВ из (40) получаем $T_{\parallel} \sim 0,3$ К. Более низкие значения T_{\parallel} реально не могут быть достигнуты, поскольку вследствие кулоновского отталкивания электроны в пучке обязательно будут перемещаться относительно друг друга. По теореме вириала

$$T_{\parallel} \sim \frac{e^2}{\bar{R}} + \frac{T_c^2}{\varepsilon}. \quad (41)$$

Для ускорения темпа охлаждения пучок должен иметь как можно бóльшую плотность, однако вследствие кулоновского отталкивания в устойчивом пучке плотность не может превышать значения

$$n \sim 10^9 \text{ см}^{-3}. \quad (42)$$

При этом $e^2/\bar{R} \sim 1$ К, следовательно, в типичном случае

$$T_{\perp} \approx T_c \sim 1000 \text{ К}, \quad T_{\parallel} \sim 1 \text{ К}. \quad (43)$$

Итак, далее полагаем, что

$$\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} \gg 1. \quad (44)$$

Отметим, что при значениях (43) $T_{\parallel} \sim e^2/\bar{R}$, поэтому по отношению к продольному движению электронов облако является неидеальной плазмой:

$$\xi \sim 1, \quad N_D \sim 1. \quad (45)$$

Ясно, что по этой причине некоторые результаты будут справедливы лишь по порядку величины. Тем не менее все расчеты будут проводиться в предположении об идеальности (4), которое для анизотропной плазмы записывается как

$$\xi_{\parallel} = \frac{T_{\parallel} \bar{R}}{e^2} \gg 1. \quad (46)$$

Рассмотрим задачу об экранировании точечного заряда q электронным облаком со сплюсненным распределением (36). Тогда из (17), (18), (23) для фурье-компоненты плотности заряда в дебаевском облаке получаем (ср. с (27)):

$$\rho_p(\mathbf{k}) = \frac{q}{1 + k_{\parallel}^2 R_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2 R_{\perp}^2}, \quad (47)$$

где R_{\parallel} , R_{\perp} — "продольный" и "поперечный" дебаевские радиусы,

$$R_{\parallel} = \sqrt{\frac{T_{\parallel}}{4\pi n e^2}} = \frac{A_{\parallel}}{\omega_p}, \quad R_{\perp} = \sqrt{\frac{T_{\perp}}{4\pi n e^2}} = \frac{A_{\perp}}{\omega_p}. \quad (48)$$

Поскольку $R_{\parallel} \ll R_{\perp}$, то в \mathbf{k} -пространстве поверхности равной плотности заряда $\rho_p(\mathbf{k}) = \text{const}$ сильно вытянуты вдоль магнитного поля (далее — ось z). Это означает, что в обычном пространстве распределение дебаевского заряда $\rho_p(\mathbf{r})$ будет сильно сплющено вдоль оси z (направление "||"):

$$\rho_p(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \rho_p(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi R_{\parallel} R_{\perp}^2} \frac{\exp(-S)}{S}, \quad (49)$$

где

$$S = \left(\frac{z^2}{R_{\parallel}^2} + \frac{r_{\perp}^2}{R_{\perp}^2} \right)^{1/2}, \quad z = \mathbf{h}\mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{r} - \mathbf{h}z.$$

При $R_{\parallel} = R_{\perp}$ выражение (49) совпадает с (27). Согласно (49) дебаевское облако неподвижного заряда представляет собой сильно сплюсненный эллипсоид вращения с толщиной $\sim 2R_{\parallel}$ по оси вращения (оси z):

$$\frac{R_{\perp}}{R_{\parallel}} = \frac{A_{\perp}}{A_{\parallel}} = \sqrt{\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}}} \sim 30. \quad (50)$$

В случае быстрых частиц

$$V > A_{\perp} \quad (51)$$

при любой массе частицы M имеем

$$r_{\text{нм}} > r_{\text{н}}, \quad (52)$$

$$\bar{r}_{\text{н}} = \frac{A_{\perp}}{\omega_{\text{н}}}, \quad (53)$$

поэтому при расчете \mathbf{F} траекторию частицы M можно считать прямолинейной. Кроме того, в (13) можно положить $f(\mathbf{v}) = \delta(\mathbf{v})$, тогда

$$\Phi(\mathbf{V}) = \frac{1}{V}, \quad \nabla_{\mathbf{V}} \Phi(\mathbf{V}) = -\frac{\hat{\mathbf{V}}}{V^2}. \quad (54)$$

Вследствие уменьшения F с возрастанием V наиболее длительную стадию представляет собой замедление быстрых частиц, поэтому формулы (12), (34), (54) являются достаточными для оценки времени замедления частиц с начальной скоростью, удовлетворяющей (51):

$$\tau_d \sim \frac{MmV^3}{12\pi n e^2 q^2 A}. \quad (55)$$

При уточнениях τ_d следует учесть влияние магнитного поля на движение электронов (см. разделы 3, 4). При

выполнении условия

$$V < \Delta_{\perp} \quad (56)$$

приближение прямолинейных траекторий остается справедливым для тяжелых частиц М (1) и нарушается для позитронов (2). По этой причине область скоростей (56) для позитронов будет рассматриваться позднее (начиная с раздела 5), а здесь и в разделах 3 и 4 движение частиц М будем считать прямолинейным. Тем самым в разделах 3 и 4 мы ограничимся случаем тяжелых частиц (1), а также случаем (2), (51) быстрых позитронов. Забегая вперед, заметим, что для позитронов наиболее важным является интервал (56) (точнее, $V_{\perp} \sim \Delta_{\perp}$, $V_{\parallel} \sim \Delta_{\parallel}$), поскольку именно в этой области оказывается сосредоточенным стационарное распределение позитронов, которое уславливается в результате их замедления.

Пределом слабого магнитного поля будем называть случай

$$\bar{r}_H > R_{\perp}. \quad (57)$$

Выражение (49) можно переписать в виде

$$H < H_1, \quad \frac{H_1^2}{4\pi} = mc^2 n.$$

При параметрах (42) из (57) следует оценка

$$H < H_1 = 40 \text{ Гс}. \quad (58)$$

В этом случае влиянием магнитного поля на силу трения можно пренебречь и она определяется выражениями (10), (12), (34). Если воспользоваться аналогией с электростатикой, то согласно (13) вектор $-\nabla_V \Phi$, определенный в пространстве скоростей, аналогичен вектору электрического поля, создаваемого единичным зарядом, распределенным по закону (36). Следовательно, при

$$\Delta_{\parallel} < V_{\parallel} < \Delta_{\perp}, \quad V_{\perp} < \Delta_{\perp} \quad (59)$$

"поле" $-\nabla_V \Phi$ аналогично электрическому полю вблизи плоскости равномерно (с поверхностной плотностью σ) заряженного диска:

$$|-\nabla_V \Phi| \sim 2\pi\sigma, \quad \sigma \sim \frac{1}{\pi\Delta_{\perp}^2}.$$

Следовательно,

$$F \sim F_c \sim \frac{nq^2 e^2}{m\Delta_{\perp}^2}, \quad \Delta_{\parallel} < V < \Delta_{\perp}, \quad H < H_1. \quad (60)$$

Оценку (60) поучительно и полезно для дальнейшего получить исходя непосредственно из формы дебаевского облака (49), (50), которое можно приближенно представить как равномерно заряженный диск с зарядом $q_D = -q$, радиусом $\sim R_{\perp}$ и толщиной $\sim 2R_{\parallel}$:

$$F \sim F_c = qE_p \sim \frac{q^2}{R_{\perp}^2}, \quad V_{\parallel} \sim \Delta_{\parallel}, \quad H < H_1, \quad (61)$$

что совпадает с (60). Итак, оценка (60) дает силу трения при скорости частицы $V_{\parallel} \sim \Delta_{\parallel}$, когда вследствие отста-

вания дебаевского облака частица находится на его краю.

При увеличении магнитного поля соотношение между параметрами (57) заменяется следующим:

$$R_{\parallel} < \bar{r}_H < R_{\perp}, \quad (62)$$

что соответствует магнитным полям (эту область будем называть "областью средних полей")

$$H_1 < H < H_2, \quad (63)$$

где

$$\frac{H_2^2}{4\pi} = \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} mc^2 n, \quad H_2 \sim 1200 \text{ Гс}. \quad (64)$$

Движение электронов в поперечном (\perp) магнитному полю направлении ограничено размером $\sim \bar{r}_H$, поэтому при увеличении магнитного поля поперечный размер дебаевского облака уменьшается. При условиях (62), (63) этот размер $\sim \bar{r}_H$, поэтому вместо (61) получаем

$$F \sim F_c \sim \frac{q^2}{\bar{r}_H^2}, \quad V_{\parallel} \sim \Delta_{\parallel}, \quad H_1 < H < H_2. \quad (65)$$

Наконец, при $H > H_2$

$$\bar{r}_H < R_{\parallel}, \quad (66)$$

поэтому электроны "привязаны" к силовым линиям магнитного поля и, подобно бусинкам на натянутой нити, могут совершать только одномерное движение вдоль этих линий. Такое движение приводит к перераспределению электронов вдоль магнитного поля, вследствие чего концентрация описывается формулой Больцмана

$$n(\mathbf{r}) = n \exp\left(-\frac{u}{T_{\parallel}}\right) \approx n\left(1 - \frac{u}{T_{\parallel}}\right), \quad u = -e\varphi, \quad (67)$$

где $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$ — электрический потенциал. Из (67) и уравнения Пуассона для φ следует, что в случае (66) дебаевское облако является сферически-симметричным и описывается формулами (27), (28), в которых в качестве r_D следует взять R_{\parallel} . Отсюда получаем:

$$F \sim F_c \sim \frac{q^2}{R_{\parallel}^2} \sim \frac{nq^2 e^2}{m\Delta_{\parallel}^2}, \quad V_{\parallel} \sim \Delta_{\parallel}, \quad H > H_1. \quad (68)$$

Поскольку поле E_p достигает наибольшей величины на краю дебаевского облака, то сила трения имеет максимальное значение при $V_{\parallel} \sim \Delta_{\parallel}$. Оценки (61), (65) и (68) можно объединить с помощью интерполяции:

$$F_{\max} \sim F(V_{\parallel} = \Delta_{\parallel}) \sim q^2 \left(\frac{1}{R_{\parallel}^2 + \bar{r}_H^2} + \frac{1}{R_{\perp}^2} \right). \quad (69)$$

Указанные выше закономерности представлены на рис. 1: при слабых полях (58) сила трения не зависит от H , при средних (63) F_{\max} возрастает пропорционально квадрату магнитного поля и наконец в замагниченной плазме (66) сила трения становится наибольшей и перестает зависеть от H . Предполагается справедливым приближение прямолинейных траекторий частицы М, поэтому рис. 1

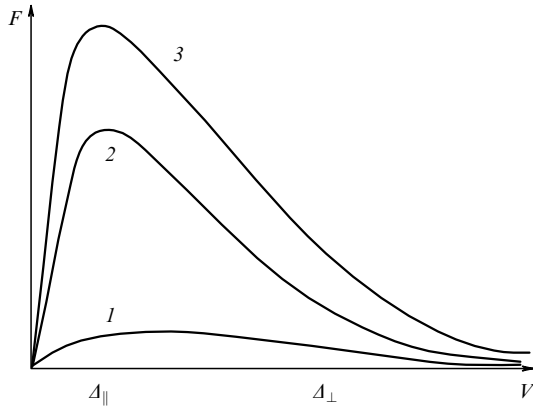


Рис. 1. Качественный вид зависимости силы трения от скорости для тяжелой частицы ($M \gg m$) при $H < H_1$ (кривая 1), $H_1 < H < H_2$ (кривая 2), $H > H_2$ (кривая 3).

относится лишь к случаю тяжелой частицы (в разделе 7 будет показано, что аналогичные представленным на рис. 1 зависимости справедливы и для позитронов, но не для модуля $F = |\mathbf{F}|$, а для проекции силы трения на направление магнитного поля $F_{||}$).

Во избежание недоразумений укажем, что в традиционной физике плазмы [11–16] термин "замагниченная плазма" означает бесстолкновительную плазму: $\omega_H \gg \nu$, где ν — частота кулоновских столкновений электронов с электронами и ионами. В данном же случае, в физике пучков заряженных частиц, имеется в виду условие (66). Возрастание ($\sim H^2$) силы трения в интервале скоростей (59) и магнитных полей (63) (его называют "эффектом замагниченности электронов" [2, 3]) чрезвычайно важно для электронного охлаждения пучков, так как оно приводит к снижению времени охлаждения, т.е. уменьшению размеров кулеров. Как мы видели выше, коллективный вклад F_c в силу трения возрастает вследствие уменьшения размера дебаевского облака, вызываемого увеличением магнитного поля. Аналогичным образом возрастает вклад F_b , обусловленный парными столкновениями (см. раздел 3), хотя физическая причина этого иная. С уменьшением \bar{r}_H перпендикулярное магнитному полю движение электрона "замыкается" внутри круга с малым радиусом, поэтому частица М взаимодействует с электроном как с точечной частицей, движущейся вдоль магнитного поля с малой скоростью $v_{||} \sim \Delta_{||}$. Если и $V_{||} \sim \Delta_{||}$, то относительная скорость u частиц также мала, а время взаимодействия велико. По этой причине при каждом столкновении частицы обмениваются большим импульсом, т.е. F_b возрастает.

Итак, сплюснутость (36) при $H > H_1$ приводит к увеличению силы трения.

3. Вклад F_b в силу трения от парных столкновений в приближениях прямолинейной траектории частицы и замагниченности электронов

Данный раздел, который носит отчасти методический характер, посвящен строгому выводу формулы для силы трения, обусловленной парными столкновениями в замагниченной плазме. Траектория частицы М предполагается здесь (и в разделе 4) прямолинейной, что практически всегда верно как в случае (1), так и в случае

(2) при скоростях (51). Кроме того предполагается, что

$$\bar{r}_H < \bar{R}, \quad (70)$$

поэтому ларморовский радиус электронов можно считать нулевым. Соотношение (70) будем называть условием замагниченности электронов по отношению к парным столкновениям. При параметрах (42), (43) это условие выполняется, если $H > 500$ Гс. К парным замагниченным столкновениям относятся столкновения с прицельным параметром ρ (минимальным расстоянием между частицей М и электроном), удовлетворяющим условию

$$\bar{r}_H < \rho < \bar{R}, \quad (71)$$

к обычным парным — столкновения с

$$\rho < \bar{r}_H, \quad (72)$$

к коллективным — столкновения с

$$\rho > \bar{R}. \quad (73)$$

В данном разделе рассматриваются случаи (71), (72), причем сначала (71).

Рассмотрим вклад dF_b от замагниченных столкновений (71) частицы М с электроном со скоростями из интервала $(v_{||}, v_{||} + dv_{||})$. Концентрация таких электронов согласно (36)

$$dn = ng(v_{||}) dv_{||}. \quad (74)$$

Поскольку $T_{\perp} \gg T_{||}$, то для томсоновского радиуса (15) в случае распределения (36) следует принять выражение

$$R_T = \frac{e^2}{T_{\perp}}. \quad (75)$$

При $\rho \sim R_T$ угол рассеяния электрона на частице М велик: $\theta_{\text{scat}} \sim 1$. При параметрах (42), (43) и типичном для эксперимента ЛЕРТА (Low Energy Particle Toroidal Accumulator) (Объединенный институт ядерных исследований, г. Дубна) [4–7] значении магнитного поля

$$H \sim 1000 \text{ Гс} \quad (76)$$

характерные размеры [см] таковы:

$$\begin{aligned} R_T &\sim 1,5 \times 10^{-6}, & \bar{r}_H &\sim 1 \times 10^{-3}, & \bar{R} &\sim 2 \times 10^{-3}, \\ R_{\perp} &\sim 3 \times 10^{-2}, & R_{||} &\sim 1 \times 10^{-3}. \end{aligned} \quad (77)$$

Видно, что томсоновский радиус мал по сравнению с другими размерами. Следовательно, в типичном столкновении $\theta_{\text{scat}} \ll 1$. Это означает, что вклады от разных электронов в F_b независимы:

$$\mathbf{F}_b = \int d\mathbf{F}_b. \quad (78)$$

Для расчета dF_b перейдем в систему отсчета K' , движущуюся вдоль \mathbf{H} со скоростью $v_{||}$. В системе K' рассматриваемая группа электронов покоится, а частица М движется со скоростью $\mathbf{u} = \mathbf{V} - v_{||}\mathbf{h}$. Уравнения

движения частиц имеют вид

$$M\ddot{\mathbf{r}}_M = -qe \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad m\ddot{z}_e = qe \frac{z}{r^3}, \quad (79)$$

где $z_e = \mathbf{h}\mathbf{r}_e$, \mathbf{r}_M и $\mathbf{r}_e = z_e\mathbf{h}$ — координаты частицы М и электрона соответственно, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_M - \mathbf{r}_e$, $z = \mathbf{h}\mathbf{r}$. Из (79) следует:

$$\ddot{z} = -qe \frac{z}{\mu r^3}, \quad \ddot{\mathbf{r}}_{\perp} = -qe \frac{\mathbf{r}_{\perp}}{Mr^3}, \quad \ddot{X} = 0, \quad (80)$$

где $X = (Mz_M + mz_e)/(M + m)$, $\mu = Mm/(M + m)$ — приведенная масса частиц. Первые два уравнения (80) перепишем в виде

$$\ddot{x}_{\alpha} = -qeA_{\alpha\beta} \frac{x_{\beta}}{r^3}, \quad (81)$$

где x_{α} — компонента вектора \mathbf{r} ; по повторяющимся индексам идет суммирование,

$$A_{\alpha\beta} = \frac{1}{M} \delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{m} h_{\alpha}h_{\beta}. \quad (82)$$

Как говорилось в разделе 2, вследствие малости R_T взаимодействие между частицами можно считать малым, поэтому уравнения (80) будем решать с помощью метода последовательных приближений, пренебрегая величинами третьего (и более высокого) порядка малости:

$$x_{M\alpha} \equiv (\mathbf{r}_M)_{\alpha}, \quad x_{M\alpha} = x_{M\alpha}^{(0)} + x_{M\alpha}^{(1)} + x_{M\alpha}^{(2)} + \dots, \quad (83)$$

$$x_{M\alpha}^{(0)} = (\boldsymbol{\rho} + \mathbf{u}t)_{\alpha} = x_{\alpha}^{(0)},$$

где $\boldsymbol{\rho}$ — прицельный параметр столкновения, $\boldsymbol{\rho} \perp \mathbf{u}$. Формулы для координат частицы М

$$z_M = X + \frac{m}{M+m} z, \quad \mathbf{r}_{M\perp} = \mathbf{r}_{\perp}$$

запишем в виде

$$x_{M\alpha} = Xh_{\alpha} + B_{\alpha\beta}x_{\beta}, \quad B_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - \frac{M}{M+m} h_{\alpha}h_{\beta}. \quad (84)$$

Поскольку $\dot{X} = \text{const}$ (см. (80)), то согласно (84) изменение скорости частицы М в результате столкновения с принятой выше погрешностью выражается в виде:

$$\Delta V_{\alpha} = \Delta V_{\alpha}^{(1)} + \Delta V_{\alpha}^{(2)}, \quad \Delta V_{\alpha}^{(1)} = B_{\alpha\beta} \Delta \dot{x}_{\beta}^{(1)}, \quad (85)$$

$$\Delta V_{\alpha}^{(2)} = B_{\alpha\beta} \Delta \dot{x}_{\beta}^{(2)}.$$

Из (85) следует:

$$\dot{x}_{\alpha}^{(1)}(t) \equiv \frac{dx_{\alpha}^{(1)}}{dt} = -qeA_{\alpha\beta} J_{\beta}(t), \quad (86)$$

$$\Delta \dot{x}_{\alpha}^{(1)} \equiv \dot{x}_{\alpha}^{(1)}(+\infty) = -\frac{2qe}{\mu\rho} A_{\alpha\beta} \hat{\rho}_{\beta},$$

$$J_{\beta}(t) = \int_{-\infty}^t dt' \frac{x_{\alpha}^{(0)}(t')}{r^3(t')} = f\hat{u}_{\alpha} + k\hat{\rho}_{\alpha}, \quad (87)$$

$$f = -\frac{1}{\mu r}, \quad k = \frac{1}{\mu r} \left(1 + \frac{ut}{\rho}\right),$$

$$\hat{\rho} = \frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho}, \quad \hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{u}, \quad r \equiv r(t) = \sqrt{\rho^2 + u^2 t^2},$$

$$\Delta \dot{x}_{\alpha}^{(2)} = -qeA_{\alpha\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} dt x_{\gamma}^{(1)}(t) \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} \left(\frac{x_{\beta}}{r^3}\right). \quad (88)$$

В системе отсчета K' до взаимодействия с частицей М электроны из выбранной группы покоятся, а частица М движется со скоростью \mathbf{u} . Рассчитаем изменение скорости частицы М на пути L , т.е. за время $\Delta t = L/u$:

$$\delta V_{\alpha} = \sum_L \Delta V_{\alpha} = dn \int dV \Delta V_{\alpha}, \quad (89)$$

где суммирование производится по электронам из группы (74), находящимся в цилиндре с высотой L , бесконечным радиусом и осью симметрии, совпадающей с невозмущенной траекторией частицы $x_{\alpha}^{(0)}(t)$, dV — элемент объема. После интегрирования по азимутальному углу $d\varphi$, содержащемуся в элементе объема

$$dV = Ld^2\rho, \quad d^2\rho = \rho d\rho d\varphi, \quad (90)$$

слагаемое $\Delta V_{\alpha}^{(1)}$ в (85) исчезает. В (88) проводим интегрирование по частям. Для изменения скорости получаем с учетом (86) выражение

$$\Delta V_{\alpha} = -q^2 e^2 B_{\alpha\beta} A_{\beta\gamma} A_{\delta\eta} \int_{-\infty}^{+\infty} dt P_{\gamma\delta}(t) J_{\eta}(t), \quad (91)$$

где

$$P_{\gamma\delta}(t) = \int_{-\infty}^t dt' \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} \left(\frac{x_{\delta}}{r^3}\right) = a\delta_{\gamma\delta} + b(\hat{u}_{\gamma}\hat{\rho}_{\delta} + \hat{u}_{\delta}\hat{\rho}_{\gamma}) + c\hat{u}_{\gamma}\hat{u}_{\delta} + d\hat{\rho}_{\delta}\hat{\rho}_{\gamma},$$

$$a = \frac{1}{\mu\rho^2} \left(1 + \frac{ut}{r}\right), \quad b = \frac{\rho}{\mu r^3},$$

$$c = \frac{t}{r^3} - \frac{1}{\mu\rho^2} \left(1 + \frac{ut}{r}\right), \quad d = -\frac{t}{r^3} - \frac{2}{\mu\rho^2} \left(1 + \frac{ut}{r}\right).$$

В (91) производим усреднение по направлениям единичного вектора $\hat{\rho}$, перпендикулярного оси цилиндра:

$$\langle P_{\gamma\delta}(t) J_{\eta}(t) \rangle = f\hat{u}_{\eta} \left[a\delta_{\gamma\delta} + c\hat{u}_{\gamma}\hat{u}_{\delta} + \frac{1}{2} d(\delta_{\gamma\delta} - \hat{u}_{\gamma}\hat{u}_{\delta}) \right] + \frac{bk}{2} S_{\gamma\eta\delta}, \quad (92)$$

$$S_{\gamma\eta\delta} = \hat{u}_{\gamma}(\delta_{\eta\delta} - \hat{u}_{\eta}\hat{u}_{\delta}) + \hat{u}_{\delta}(\delta_{\eta\gamma} - \hat{u}_{\eta}\hat{u}_{\gamma}). \quad (93)$$

Указанное усреднение возникает при интегрировании в (89), (90) по углу φ :

$$\int d\varphi \dots = 2\pi \langle \dots \rangle. \quad (94)$$

В (92) следует отбросить нечетные по t слагаемые, дающие нулевой вклад в (91), после чего выражение в квадратных скобках в правой части (92) исчезает:

$$\langle \Delta V_{\alpha} \rangle = -q^2 e^2 B_{\alpha\beta} A_{\beta\gamma} A_{\delta\eta} \frac{1}{u^3 \rho^2} S_{\gamma\eta\delta}. \quad (95)$$

Из (82), (84), (95) следует

$$M \langle \Delta V_{\alpha} \rangle = -\frac{q^2 e^2}{u^3 \rho^2} (A\hat{u}_{\alpha} + B\hat{h}_{\alpha}), \quad (96)$$

где

$$A = \frac{2}{M} + \frac{1}{m} \left(1 - 2(\hat{\mathbf{u}}\mathbf{h})^2\right), \quad B = \frac{1}{m} \hat{\mathbf{u}}\mathbf{h}.$$

Суммируя вклады от электронов с разными скоростями v_{\parallel} (см. (78)), из (89), (90), (94), (96) получаем следующее выражение для вклада в \mathbf{F}_b от замагниченных парных столкновений (71):

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{Mb}(\mathbf{V}) &= \sum_L \frac{M \delta V}{\Delta t} = \\ &= -2\pi n q^2 e^2 A_{Mb} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv_{\parallel} g(v_{\parallel})}{u^2} (A\hat{\mathbf{u}} + B\mathbf{h}), \end{aligned} \quad (97)$$

где $A_{Mb} = \ln(\bar{R}/\bar{r}_H)$. В частности, при $V \gg \Delta_{\parallel}$

$$\mathbf{F}_{Mb}(\mathbf{V}) = -\frac{2\pi n q^2 e^2 A_{Mb}}{V^2} (A\hat{\mathbf{V}} + B\mathbf{h}), \quad (98)$$

причем здесь в выражениях для A и B вместо $\hat{\mathbf{u}}$ следует взять $\hat{\mathbf{V}} = \mathbf{V}/V$. При $V \gg \Delta_{\parallel}$ и $M \gg m$ получаем

$$\mathbf{F}_{Mb}(\mathbf{V}) = -\frac{2\pi n q^2 e^2 A_{Mb}}{mV^2} [\hat{\mathbf{V}}(1 - 2(\hat{\mathbf{V}}\mathbf{h})^2) + \mathbf{h}(\hat{\mathbf{V}}\mathbf{h})], \quad (99)$$

или в компонентах:

$$\begin{aligned} F_{Mb}^{\parallel} &= \mathbf{h}\mathbf{F}_{Mb} = -\frac{4\pi n q^2 e^2 A_{Mb}}{mV^3} V_{\parallel} \frac{V_{\perp}^2}{V^2}, \\ F_{Mb}^{\perp} &= -\frac{2\pi n q^2 e^2 A_{Mb}}{mV^3} \mathbf{V}_{\perp} \frac{V^2 - 2V_{\parallel}^2}{V^2}. \end{aligned} \quad (100)$$

Полный вклад от парных столкновений определяется выражением

$$\mathbf{F}_b = \mathbf{F}_{Mb} + \mathbf{F}_{sb}, \quad (101)$$

где вклад \mathbf{F}_{sb} , обусловленный простыми парными (simple binary) столкновениями (72), дается формулой (12), в которую вместо A_b следует подставить $A_{sb} = \ln(\bar{r}_H/R_T)$, R_T определен в (75).

Из (12), (60) и (98) заключаем, что при скоростях (59) выполнено соотношение:

$$\frac{F_{Mb}}{F_{sb}} \sim \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} \gg 1, \quad (102)$$

которое является следствием резкой анизотропии распределения электронов (44) и эффекта замагниченности электронов (см. конец раздела 2), проявляющегося в парных столкновениях в случае (69). Поэтому можно положить

$$\mathbf{F}_b \approx \mathbf{F}_{Mb}. \quad (103)$$

Очевидно, использованный в данном разделе метод последовательных приближений может быть применен также для вывода формулы (12). Эту формулу проще вывести, рассматривая систему центра масс (с.ц.м.) частицы M и электрона из группы (74): в с.ц.м. импульсы частиц поворачиваются в результате взаимодействия на некоторый угол, оставаясь противоположными по направлению и равными по модулю μ .

4. Вклад \mathbf{F}_c в силу трения от коллективных взаимодействий в приближении прямолинейной траектории частицы

В этом разделе получим выражение для \mathbf{F}_c при прямолинейном движении и $\mathbf{H} \neq 0$.

Согласно (22), (25), (29) для прямолинейного равномерного движения

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_c &= -\frac{iq^2}{2\pi^2} \int d^3k \frac{\mathbf{k}}{k^2} \left[\frac{1}{\varepsilon(\mathbf{k}, \mathbf{kV})} - 1 \right] = \\ &= \frac{q^2}{2\pi^2} \int d^3k \frac{\mathbf{k}}{k^2} \text{Im} \frac{1}{\varepsilon}, \end{aligned} \quad (104)$$

где использовано свойство $\varepsilon(-\mathbf{k}, -\mathbf{kV}) = \varepsilon^*(\mathbf{k}, \mathbf{kV})$. Формула (104) верна при условиях, указанных в разделе 3, а также в тех случаях, когда основной вклад в интеграл (104) вносит область коллективных взаимодействий $k < 1/\bar{R}$. Как и в случае $H = 0$ (34), основной логарифмический вклад в \mathbf{F}_c вносит "нерезонансная" область (31), в которой выполняется приближение (33), поэтому

$$\mathbf{F}_c = \mathbf{F}_n + \mathbf{F}_r. \quad (105)$$

Здесь \mathbf{F}_n — "нерезонансное" слагаемое,

$$\mathbf{F}_n = -\frac{q^2}{2\pi^2} \int d^3k \frac{\mathbf{k}}{k^2} \text{Im} \varepsilon, \quad (106)$$

\mathbf{F}_r — "резонансное" слагаемое,

$$\mathbf{F}_r = -\frac{iq^2}{2\pi^2} \int_{\text{res}} d^3k \frac{\mathbf{k}}{k^2} \frac{1}{\varepsilon}, \quad (107)$$

возникающее от полюса

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = 0. \quad (108)$$

Под действием поля частицы M происходит согласованное, коллективное, движение электронов. Часть энергии этого движения преобразуется в энергию их хаотического теплового движения по механизму затухания Ландау [11–16], что и вызывает трение (106). Сила (107) возникает вследствие черенковского излучения частицей коллективных волн, уносящих ее энергию вглубь плазмы.

В формуле (104) можно усмотреть аналогию с ионизационными потерями и потерями, вызванными черенковским излучением при движении заряженной частицы в веществе [18]. При нерелятивистских (в системе покоя пучка) скоростях (6) могут излучаться только продольные волны, для которых $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) \parallel \mathbf{k}$, и поэтому их частота и волновой вектор связаны дисперсионным соотношением (108) [11–18]. Основной вклад в силу \mathbf{F}_r дает испускание плазменных ленгмюровских волн:

$$\omega \sim \omega_p. \quad (109)$$

Испусканием высокочастотных ($\omega \sim \omega_H \gg \omega_p$) циклотронных волн можно пренебречь (см. раздел 5). Согласно [12, 13]

$$\begin{aligned} \text{Im} \varepsilon(\mathbf{k}, \omega) &= -\frac{\pi\omega_p^2}{k^2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d^3v J_l^2 \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_H} \right) \times \\ &\times \delta(\omega - l\omega_H - k_{\parallel} v_{\parallel}) \left(k_{\parallel} \frac{\partial f}{\partial v_{\parallel}} + \frac{l\omega_H}{v_{\perp}} \frac{\partial f}{\partial v_{\perp}} \right), \end{aligned} \quad (110)$$

где J_l — функция Бесселя. Поскольку

$$\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_H} < \frac{v_{\perp}}{\omega_H \bar{R}} \sim \frac{\bar{r}_H}{\bar{R}}, \quad (111)$$

то согласно (70) для замагниченных электронов в (110) можно отбросить слагаемые с $l \neq 0$:

$$\text{Im } \varepsilon(\mathbf{k}, \omega) \approx \frac{\pi m \omega_p^2 \omega}{T_{\parallel} |k_{\parallel}| k^2} g\left(\frac{\omega}{k_{\parallel}}\right).$$

Отсюда и из (106) следует:

$$\mathbf{F}_n = -\frac{q^2 \omega_p^2}{2\pi \Delta_{\parallel}^2} \int d^3 k \frac{\mathbf{k}(\mathbf{kV})}{k^4 |k_{\parallel}|} g\left(\frac{\mathbf{kV}}{k_{\parallel}}\right), \quad (112)$$

где функция $g(v_{\parallel})$ определена в (36). В сферической системе координат в \mathbf{k} -пространстве $d^3 k = k^2 dk d\Omega_{\mathbf{k}}$, поэтому с учетом $\mathbf{k} = \hat{\mathbf{k}}k$ проводим в (111) интегрирование по dk :

$$\int \frac{dk}{k} = \ln \frac{R_{\parallel}}{\bar{R}} \equiv A_n, \quad (113)$$

где в соответствии с (31) и рассуждениями о характере дебаевского экранирования, приведенными в конце раздела 2, выбраны следующие пределы интегрирования:

$$k_{\max} = \frac{1}{\bar{R}}, \quad k_{\min} = \frac{1}{R_{\parallel}}. \quad (114)$$

Окончательно имеем

$$\mathbf{F}_n = -\frac{2q^2 e^2 n A_n V}{m \Delta_{\parallel}^2} \mathbf{I}, \quad (115)$$

$$\mathbf{I} = \int d\Omega_{\mathbf{k}} \frac{\hat{\mathbf{k}}(\hat{\mathbf{k}}\mathbf{V})}{|\hat{\mathbf{k}}\mathbf{h}|} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \Delta_{\parallel}} \exp\left(-\frac{(\hat{\mathbf{k}}\mathbf{V})^2}{2\Delta_{\parallel}^2 \hat{k}_{\parallel}^2}\right). \quad (116)$$

При $\mathbf{V} \parallel \mathbf{H}$

$$\mathbf{F}_n = -\frac{2\sqrt{2\pi} q^2 e^2 n A_n}{m \Delta_{\parallel}^3} \mathbf{V} \exp\left(-\frac{V_{\parallel}^2}{2\Delta_{\parallel}^2}\right). \quad (117)$$

При $V \gg \Delta_{\parallel}$ основной вклад в (115) дают направления $\hat{\mathbf{k}}$, для которых $|\hat{\mathbf{k}}\mathbf{V}| \ll 1$. Направим ось k_z параллельно \mathbf{V} . Из формулы

$$(\hat{\mathbf{k}}\mathbf{V}) \exp\left(-\frac{V^2 k_z^2}{2\Delta_{\parallel}^2 k_{\parallel}^2}\right) \approx -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\Delta_{\parallel} |k_{\parallel}|}{kV} \delta'(k_z),$$

справедливой при $V \gg \Delta_{\parallel}$, находим

$$F_{n\parallel} = -\frac{4\pi n q^2 e^2 A_n}{m V^2} \frac{V_{\perp}^2}{V^2} V_{\parallel}, \quad (118)$$

$$F_{n\perp} = -\frac{2\pi n q^2 e^2 A_n}{m V^2} \frac{V_{\perp}^2 - 2V_{\parallel}^2}{V^3} \mathbf{V}_{\perp}. \quad (119)$$

Выражения (118), (119) получены в [21] другим способом.

Из сопоставления формул (100), (103) и (118), (119) замечаем, что эффект (35) исчезновения промежуточного размера \bar{R} из выражения для полной силы трения имеет место и при наличии магнитного поля.

Рассчитаем \mathbf{F}_r при $V \gg \Delta_{\parallel}$ для замагниченных электронов (66). В этом случае можно положить $T_{\parallel} = 0$ и, кроме того, считать, что электроны могут передвигаться лишь вдоль силовых линий магнитного поля, что описывается системой уравнений:

$$m \frac{dv}{dt} = e \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(nv) = 0, \quad \Delta \varphi = 4\pi e(n - n_0),$$

где ось z направлена вдоль \mathbf{H} , φ — электрический потенциал. После линеаризации $dv/dt \approx \partial v/\partial t$, $n = n_0 + n_1$ и перехода к фурье-компонентам (\mathbf{k}, ω) получаем

$$v = -i\omega \xi = \frac{ek_z}{m\omega} \varphi = \frac{ie}{m\omega} E_z, \quad (120)$$

где ξ — смещение электронов вдоль направления магнитного поля. Из (120) находим вектор электрической индукции

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi(-e)n\xi\mathbf{h} = \mathbf{E} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \mathbf{h}E_z.$$

Отсюда получаем выражения для тензора диэлектрической проницаемости замагниченного электронного облака,

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) = \delta_{\alpha\beta} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} h_{\alpha} h_{\beta}, \quad (121)$$

и продольной диэлектрической проницаемости (18),

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \cos^2 \alpha, \quad (122)$$

где α — угол между \mathbf{k} и \mathbf{H} . Выражение (122) может быть легко получено из тензора диэлектрической проницаемости холодной плазмы [11–18]

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_H^2}, \quad \varepsilon_{zz} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0.$$

Отсюда находим

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 - \omega_p^2 \left(\frac{\sin^2 \alpha}{\omega^2 - \omega_H^2} + \frac{\cos^2 \alpha}{\omega^2} \right). \quad (123)$$

В типичном случае (45) $R_{\parallel} \sim \bar{R}$, поэтому из соотношения

$$\frac{\omega_H}{\omega_p} \sim \frac{A_{\perp}}{\bar{r}_H \omega_p} \sim \frac{R_{\parallel}}{\bar{r}_H} \frac{A_{\perp}}{\Delta_{\parallel}}$$

закключаем, что

$$\frac{\omega_H}{\omega_p} \gg 1. \quad (124)$$

Для наиболее существенных частот (109) из (123) и (124) следует результат (122). Приведенный ранее вывод делает его более ясным.

Согласно принципу причинности полюсы $\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)$ могут находиться только в нижней полуплоскости ω [18], поэтому полюс в (107) следует обходить по правилу

$$\omega \rightarrow \omega + i0, \quad (125)$$

откуда следует выражение

$$\mathbf{F}_r = -\frac{q^2}{2\pi} \int d^3 k \frac{\mathbf{k}(\mathbf{kV})^2 \text{sign}(\mathbf{kV})}{k^2} \delta\left((\mathbf{kV})^2 - \omega_p^2 \frac{(\mathbf{k}\mathbf{h})^2}{k^2}\right). \quad (126)$$

Здесь δ -функция отражает излучение плазмонов с законом дисперсии

$$\omega(\mathbf{k}) = \omega_p |\hat{\mathbf{k}}\mathbf{h}| = \omega_p \frac{|k_{\parallel}|}{k}, \quad (127)$$

который следует из (108), (122). Ось k_z направим вдоль \mathbf{V} , ось k_y — перпендикулярно векторам \mathbf{H} , \mathbf{v} . Переходя к сферическим координатам, проведем интегрирование по dk , что дает

$$k = \frac{\omega_p}{V} \frac{|\hat{\mathbf{k}}\mathbf{h}|}{|\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{V}}|}, \quad (128)$$

$$\mathbf{F}_r = -\frac{q^2 e^2 n}{mV^2} \int d\Omega_k \hat{\mathbf{k}} \text{sign}(\mathbf{kV}) \frac{(\mathbf{k}\mathbf{h})^2}{(\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{V}})^2}, \quad V > \Delta_{||}. \quad (129)$$

Из (126) и соотношений $V > \Delta_{||}$, $R_{||} = \Delta_{||}/\omega_p$ заключаем:

$$k < \frac{1}{\bar{R}}, \quad (130)$$

что соответствует расстояниям $r > \bar{R}$, т.е. области коллективных взаимодействий. Таким образом, расчет \mathbf{F}_r является непротиворечивым. В случае

$$\mathbf{V} \parallel \mathbf{H} \quad (131)$$

из (100), (118), (119) и (129) получаем

$$\mathbf{F}_{Mb} = \mathbf{F}_n = 0, \quad F_{sb} \ll F_r, \quad (132)$$

$$\mathbf{F} \approx \mathbf{F}_r \approx -\frac{2\pi q^2 e^2 n}{mV^2} \hat{\mathbf{V}}, \quad \mathbf{V} \parallel \mathbf{H}, \quad V \gg \Delta_{||}.$$

Таким образом, при движении частицы вдоль поля сила трения в замагниченной плазме практически полностью обусловлена черенковским излучением плазмоннов. Для того чтобы понять физическую причину этого явления, рассмотрим столкновение двух частиц, которое описывается уравнениями

$$M\ddot{z}_1 = -\frac{qez}{r^3}, \quad m\ddot{z}_1 = \frac{qez}{r^3}, \quad (133)$$

где $z = z_1 - z_2$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$. Отделяя в (133) движение центра масс, получаем:

$$V_0 = \dot{X} = \text{const}, \quad X = \frac{Mz_1 + mz_2}{M+m}, \quad \frac{\mu\dot{z}^2}{2} + \frac{qe}{r} = \text{const}.$$

Из этих уравнений следует, что при $q > 0$ (случай, который рассматривается в данном обзоре) энергии частиц, испытывающих столкновения, не изменяются: $E'_1 = E_1$, $E'_2 = E_2$, где $E_1 = M\dot{z}_1^2/2$, $E_2 = m\dot{z}_2^2/2$. Типичное парное столкновение происходит с прицельным параметром $\rho \sim \bar{R}$. Во время взаимодействия этих частиц $r \sim \bar{R}$, на расстоянии $\sim \bar{R}$ от них находится по крайней мере еще одна, третья, частица, взаимодействие с которой по этой причине необходимо учесть. С ней взаимодействует четвертая и т.д. Таким образом, частица M порождает коллективное возбуждение — плазмон, в результате чего ее энергия изменяется.

При произвольном направлении \mathbf{V} и $V > \Delta_{||}$

$$(\mathbf{F}_r)_z = \hat{\mathbf{V}}\mathbf{F}_r \approx -\frac{2\pi q^2 e^2 n}{mV^2} \left[\left(A_1 - \frac{3}{2} \right) \sin^2 \beta + 1 \right],$$

$$(\mathbf{F}_r)_x \approx -\frac{4\pi q^2 e^2 n A_1}{mV^2} \sin \beta \cos \beta,$$

где $A_1 = \ln [V/(\omega_p \bar{R})]$, β — угол между векторами \mathbf{V} и \mathbf{H} , а ориентация осей координат была указана выше.

Формула (132) важна для нахождения установившегося распределения позитронов по продольным скоростям, поэтому в приложении П1 она получена более

простым и физически прозрачным методом, по сравнению с использованным выше формализмом диэлектрической проницаемости. Полученные в данном разделе результаты будут применены к анализу движения позитронов.

5. Сила трения, действующая на легкую частицу в изотропной плазме

Прежде чем перейти к сложному случаю отличного от нуля магнитного поля рассмотрим в данном разделе гораздо более простой случай торможения легкой частицы в изотропной плазме ($T_{\perp} = T_{||} \equiv T$) при нулевом магнитном поле.

Для легкой частицы ($M \sim m$) возникает дополнительное слагаемое $\mathbf{F}^{(2)}$ в силе трения, связанное с изменением ее траектории в результате взаимодействия с электронами. Для расчета силы трения будем рассуждать аналогично тому, как это делалось в разделе 2.

Рассмотрим инерциальную систему отсчета "m", в которой до столкновения покоится частица m . Вследствие (9) можно считать, что частица покоится в начале координат этой системы в течение всего столкновения. Тем же способом, что и при получении (11), находим: $\Delta \mathbf{p}_M^{(2)} = -[2q^2 e^2 / (Mu^3 \rho^2)] \hat{\mathbf{u}}$, поэтому для полного изменения импульса частицы M имеем

$$\Delta \mathbf{p}_M = \Delta \mathbf{p}_M^{(1)} + \Delta \mathbf{p}_M^{(2)} = -\frac{2q^2 e^2}{\mu u^3 \rho^2} \hat{\mathbf{u}}. \quad (134)$$

Для вклада в силу трения от парных столкновений получаем

$$\mathbf{F}_b = \mathbf{F}_b^{(1)} + \mathbf{F}_b^{(2)} = \frac{4\pi n e^2 q^2 A_b}{\mu} \nabla_V \Phi(\mathbf{V}). \quad (135)$$

Здесь $\mathbf{F}_b^{(1)}$ — "динамическая" сила трения, которая дается формулой (12),

$$\mathbf{F}_b^{(2)} = \frac{4\pi n e^2 q^2 A_b}{M} \nabla_V \Phi(\mathbf{V}).$$

Сила $\mathbf{F}_b^{(1)}$ действует на бесконечно тяжелую частицу ($M \rightarrow \infty$), поэтому электроны не оказывают влияния на движение этой частицы.

Рассчитаем теперь коллективное слагаемое \mathbf{F}_c для легкой частицы:

$$\mathbf{F}_c = q \left[\mathbf{E}'(\mathbf{R}(t), t) + \mathbf{E}_p(\mathbf{R}(t), t) \right]. \quad (136)$$

В отличие от расчета, проведенного в разделе 2, здесь учитывается флуктуационное электрическое поле плазмы $\mathbf{E}'(\mathbf{R}(t), t)$, действующее на частицу в точке ее нахождения $\mathbf{R}(t)$. Частица движется по закону $\mathbf{R}(t) = \mathbf{r}(t) + \xi(t)$, $\mathbf{r}(t) = (0, 0, Vt) \equiv \mathbf{V}t$, где $\xi(t)$ — малое отклонение, вызванное флуктуационным полем. Сохраняя в (136) величины нулевого и первого порядка малости по флуктуациям, получаем

$$\ddot{\xi}_x(t) \approx \frac{q}{M} E'_x(\mathbf{r}(t), t). \quad (137)$$

Таким образом, имеем аналогичное (135) выражение: $\mathbf{F}_c = \mathbf{F}_c^{(1)} + \mathbf{F}_c^{(2)}$. Здесь $\mathbf{F}_c^{(1)}$ — динамическая сила, опреде-

ленная соотношениями (22)–(25), (34); $\mathbf{F}_c^{(2)}$ — флуктуационное слагаемое,

$$\mathbf{F}_c^{(2)} = (0, 0, F_{cz}^{(2)}), \quad (138)$$

$$F_{cz}^{(2)} = q \langle E'_z(\mathbf{R}(t), t) \rangle \approx q \left\langle \xi_x(t) \left(\frac{\partial E'_z}{\partial x_x} \right)_{\mathbf{r}(t), t} \right\rangle.$$

В (138) производится статистическое усреднение по состоянию плазмы, не возмущенной полем частицы, в связи с тем, что мы рассматриваем движение пучка частиц M в целом, а не движение каждой частицы в нем. Из (137) и (138), переходя к фурье-компонентам функции $\xi(t)$ и электрического поля

$$E'_z(\mathbf{r}, t) = \int dQ E'_z(\mathbf{k}, \omega) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t), \quad dQ = \frac{d^3k d\omega}{(2\pi)^4},$$

получаем выражение

$$F_{cz}^{(2)} = -\frac{iq^2}{M} \int \frac{dQ k_{\parallel}}{(\Omega - i0)^2} (E^2)_{\mathbf{k}, \omega} = M \frac{\partial D_{z\beta}(V)}{\partial V_{\beta}}. \quad (139)$$

Здесь $\Omega = \omega - k_{\parallel}V$, $k_{\parallel} = \mathbf{k}\mathbf{V}/V$, $D_{z\beta}$ — тензор коэффициентов диффузии частицы M в пространстве скоростей в рассматриваемой в данном разделе изотропной плазме ([14, 22]; см. также приложения П4–П6),

$$D_{z\beta}(\mathbf{V}) = -\frac{iq^2}{M^2} \int dQ E_{z\beta}(\mathbf{k}, \omega) \frac{1}{\Omega - i0} =$$

$$= \frac{q^2}{2M^2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_x k_{\beta}}{k^2} (E^2)_{\mathbf{k}, \mathbf{k}\mathbf{V}} =$$

$$= \frac{2nq^2 e^2}{M^2} \int d^3v f(\mathbf{v}) \int d^3k \frac{k_x k_{\beta} \delta(\mathbf{k}\mathbf{u})}{k^4 |\varepsilon(\mathbf{k}, \mathbf{k}\mathbf{V})|^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{nq^2 e^2}{M^2 \Delta} \int d^3k \frac{k_x k_{\beta}}{k^5 |\varepsilon(\mathbf{k}, \mathbf{k}\mathbf{V})|^2} \exp\left[-\frac{(\mathbf{k}\mathbf{V})^2}{2k^2 \Delta^2}\right], \quad (140)$$

$\mathbf{u} = \mathbf{V} - \mathbf{v}$. В (139), (140) введена корреляционная функция компонент электрического поля (см. приложение П3)

$$E_{z\beta}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{k_x k_{\beta}}{k^2} (E^2)_{\mathbf{k}, \omega}, \quad (141)$$

$$(E^2)_{\mathbf{k}, \omega} = -\frac{8\pi T}{\omega} \operatorname{Im} \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)} =$$

$$= \frac{32\pi^3 n e^2}{k^2 |\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)|^2} \int d^3v f(\mathbf{v}) \delta(\mathbf{k}\mathbf{u}).$$

Учтены также свойство $E_{z\beta}(\mathbf{k}, \omega) = E_{z\beta}^*(-\mathbf{k}, -\omega)$ и формула Сохоцкого

$$\frac{1}{\Omega + i0} = P\left(\frac{1}{\Omega}\right) - \pi i \delta(\Omega). \quad (142)$$

Согласно [12, 14–16] (см. также формулы (17), (18)) для изотропной электронной плазмы продольная диэлектрическая проницаемость равна:

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{k^2} \int d^3v \frac{(\mathbf{k}\mathbf{V}_v f(\mathbf{v}))}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i0} =$$

$$= 1 + \frac{m\omega_p^2}{Tk^2} \left[1 - Z\left(\frac{\omega}{\sqrt{2}k\Delta}\right) \right]. \quad (143)$$

Здесь

$$Z(x) = X(x) - iY(x),$$

$$X(x) = 2x \exp(-x^2) \int_0^x dt \exp t^2, \quad (144)$$

$$Y(x) = \sqrt{\pi} x \exp(-x^2).$$

Приведем нужное для дальнейшего асимптотическое выражение:

$$X(x) \approx 1 + \frac{1}{2x^2}, \quad x \gg 1. \quad (145)$$

Укажем аналог соотношения Эйнштейна в пространстве скоростей:

$$(\mathbf{F}_c^{(1)})_x = -\frac{M^2}{T} D_{z\beta} V_{\beta}, \quad (146)$$

которое следует из (22)–(25), (140), (141) (см. также (104)).

Для идеальной плазмы (4) формула (140) упрощается. Чтобы сократить выкладки, предположим заранее, что основной вклад дает область $k \geq 1/r_D$, что соответствует расстояниям $\rho \leq r_D$. Тогда, полагая в соответствии с (32) $\varepsilon(\mathbf{k}, \mathbf{k}\mathbf{V}) \approx 1$, с учетом соотношения $\delta(\mathbf{k}\mathbf{u}) = \delta(k_{\parallel})/u$, где $k_{\parallel} = \mathbf{k}\hat{\mathbf{u}}$, приходим к выражению, содержащемуся в интеграле столкновений Ландау (см. подробности в [15, § 46]):

$$B_{z\beta} = \frac{2q^2 e^2}{u} \int d^2k_{\perp} \frac{k_{\perp\alpha} k_{\perp\beta}}{k_{\perp}^4} \approx \frac{2\pi q^2 e^2 \Lambda_c}{u} (\delta_{z\beta} - \hat{u}_z \hat{u}_{\beta}),$$

$$D_{z\beta}(\mathbf{V}) = \frac{n}{M^2} \int d^3v f(\mathbf{v}) B_{z\beta} = \frac{2\pi n q^2 e^2 \Lambda_c}{M^2} \frac{\partial^2 \langle u \rangle}{\partial V_{\alpha} \partial V_{\beta}}. \quad (147)$$

Здесь $\langle u \rangle = \int d^3v f(\mathbf{v}) u$ — второй потенциал Трубникова. Из (139) получаем

$$(\mathbf{F}_c^{(2)})_x = M \frac{\partial D_{z\beta}(V)}{\partial V_{\beta}} = F_c^{(2)} \hat{V}_{\alpha}, \quad (148)$$

$$F_c^{(2)} = \frac{4\pi n e^2 q^2 \Lambda_c}{M} \Phi'(V).$$

Предположение (31) верно при условии $\Lambda_c \gg 1$, которое выполняется для идеальной плазмы. Из (28) и (148) находим коллективную силу трения:

$$\mathbf{F}_c = \frac{4\pi n e^2 q^2 \Lambda_c}{\mu} \nabla_{\mathbf{V}} \Phi(\mathbf{V}). \quad (149)$$

Из (135) и (149) получаем окончательное выражение для полной силы трения:

$$\mathbf{F} = \frac{4\pi n e^2 q^2 \Lambda}{\mu} \nabla_{\mathbf{V}} \Phi(\mathbf{V}). \quad (150)$$

Отметим два замечательных обстоятельства:

А) исчезновение (ср. с (35)) промежуточного размера \bar{R} из суммарной силы (150) и появление результирующего кулоновского логарифма Λ ;

Б) объединение масс тормозящейся частицы (M) и частиц плазмы (m) в приведенную массу μ в формуле для полной силы трения.

Обстоятельство А хорошо известно в физике плазмы [10–16]: каждая частица плазмы находится во флуктуирующем электрическом поле, созданном всеми другими частицами, а парные столкновения можно рассматривать как наиболее кратковременные флуктуации. Из

сравнения объемов расчетов, представленных в разделах 3 и 4, ясно, что это обстоятельство важно в методическом отношении: оно позволяет рассматривать только более простые для расчета коллективные взаимодействия. Парные столкновения тогда автоматически учитываются, если в получающихся логарифмически расходящихся выражениях производить обрезание не на наименьшем "коллективном" размере \bar{R} , а на наименьшем "парном" размере R_T (как указывалось ранее, в случае (44) вместо R_T следует взять \bar{r}_H). Это существенно упрощает расчет в наиболее сложном, но важном в практическом отношении случае ненулевого магнитного поля ($\mathbf{H} \neq 0$), для которого применимость этой процедуры доказана в [23]. Более того, в разделе 7 показано, что роль парных столкновений становится все менее существенной как раз в наиболее важных для замедления позитронов случаях: 1) с возрастанием магнитного поля, 2) с увеличением степени анизотропии T_{\perp}/T_{\parallel} , 3) с уменьшением массы частицы M . Обстоятельство Б является довольно удивительным, поскольку оно справедливо и для коллективных взаимодействий, при которых частица M взаимодействует одновременно с большим числом частиц плазмы. Причина состоит в специфике кулоновского взаимодействия. В разделе 6 показано, однако, что эффект замены массы электрона приведенной массой имеет место только в отсутствие магнитного поля.

6. Кинетика электронного охлаждения легких частиц. Исходные уравнения

При ненулевом магнитном поле движение частиц существенно усложняется и требуется отыскать строгий подход к анализу их замедления, который строго учитывал бы сохранение импульса, приводящее к появлению в формулах приведенной массы. Все необходимые сведения о кинетике замедления содержатся в функции распределения $\Phi(\mathbf{V}, t)$ частиц по скоростям \mathbf{V} . Исходным пунктом при написании уравнения для функции $\Phi(\mathbf{V}, t)$ является предположение (46) об идеальности плазмы. Согласно фундаментальному выводу Н.Н. Боголюбова [24] в этом случае вследствие дальнедействующего характера кулоновских взаимодействий к описанию плазмы и находящихся в ней заряженных частиц применима система бесстолкновительных уравнений Власова–Максвелла, т.е. приближение самосогласованного поля. Согласно [25, 26] это поле можно разделить на два слагаемых — крупно- и мелкомасштабное — и провести усреднение по быстрым флуктуациям мелкомасштабного поля, что дает в правой части уравнения Власова столкновительный член в форме Ландау. С учетом поляризации плазмы, т.е. более крупных масштабов, этот член может быть представлен в виде интеграла столкновений Балеску–Ленарда. Уравнение Власова сводится к уравнению Фоккера–Планка (см., например, [14, § 9.4] и [15, § 47]), что обусловлено малостью изменений скорости ΔV при отдельных актах рассеяния. Это и есть искомое уравнение для $\Phi(\mathbf{V}, t)$:

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{V}, t)}{\partial t} + \frac{q}{M} (\mathbf{V} \times \mathbf{H}) \nabla_{\mathbf{V}} \Phi(\mathbf{V}, t) = \text{St}(\Phi), \quad (151)$$

$$\text{St}(\Phi) = -\frac{\partial j_x}{\partial V_x},$$

где j_x — плотность потока частиц M в пространстве скоростей,

$$j_x = A_x(\mathbf{V}) \Phi(\mathbf{V}, t) - D_{\alpha\beta}(\mathbf{V}) \frac{\partial \Phi(\mathbf{V}, t)}{\partial V_{\beta}}, \quad (152)$$

$$A_x(\mathbf{V}) = \frac{F_x^{(1)}}{M}, \quad (153)$$

здесь $\mathbf{F}^{(1)}(\mathbf{V})$ — введенная ранее динамическая сила.

Действительно, рассмотрим пучок частиц M с начальным распределением

$$\Phi(\mathbf{V}', t=0) = \delta(\mathbf{V}' - \mathbf{V}). \quad (154)$$

В момент времени $t > 0$ скорость пучка

$$\mathbf{V}(t) = \langle \mathbf{V}' \rangle = \int d^3 V' \mathbf{V}' \Phi(\mathbf{V}', t),$$

а ускорение выражается как

$$\begin{aligned} (\mathbf{a})_x &= \frac{d(\mathbf{V}(t))_x}{dt} = \frac{(\mathbf{F})_x}{M} = \frac{d}{dt} \int d^3 V' V'_x \Phi(\mathbf{V}', t) = \\ &= \int d^3 V' V'_x \frac{\partial \Phi(\mathbf{V}', t)}{\partial t} = - \int d^3 V' V'_x \frac{\partial j_{\beta}}{\partial V'_{\beta}} = \int d^3 V' j_x = \\ &= \int d^3 V' \left[A_x(\mathbf{V}') \Phi(\mathbf{V}', t) - D_{\alpha\beta}(\mathbf{V}') \frac{\partial \Phi(\mathbf{V}', t)}{\partial V'_{\beta}} \right] = \\ &= \int d^3 V' A_x(\mathbf{V}') \Phi(\mathbf{V}', t) + \int d^3 V' \Phi(\mathbf{V}', t) \frac{\partial D_{\alpha\beta}(\mathbf{V}')}{\partial V'_{\beta}}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (154) при $t=0$ получаем

$$(\mathbf{a})_x = \frac{(\mathbf{F})_x}{M} = A_x(\mathbf{V}) + \frac{\partial D_{\alpha\beta}(\mathbf{V})}{\partial V_{\beta}}. \quad (155)$$

Сравнивая это соотношение с результатами, приведенными в разделе 5, устанавливаем смысл вектора $\mathbf{A}(\mathbf{V})$ и его связь (153) с динамической силой.

Компоненты тензора диффузии частиц M в пространстве скоростей $D_{\alpha\beta}(\mathbf{V})$, которые при $\mathbf{H} \neq 0$ имеют весьма сложный вид, вычислены в [27]. Однако знать все компоненты нет необходимости, поскольку нас интересует случай азимутальной и аксиальной симметрии: $\Phi = \Phi(\mathbf{V}, t) = \Phi(V_{\perp}, V_{\parallel}, t) = \Phi(V_{\perp}, -V_{\parallel}, t)$. С учетом соотношения $(\mathbf{V} \times \mathbf{H}) \nabla_{\mathbf{V}} \Phi(V_{\perp}, V_{\parallel}, t) = 0$ уравнения (151) и (152) запишем в виде

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{V}, t)}{\partial t} = \text{St}(\Phi), \quad (156)$$

$$\text{St}(\Phi) = -\frac{\partial j_x}{\partial V_x} = -\frac{\partial j_{\parallel}}{\partial V_{\parallel}} - \frac{1}{V_{\perp}} \frac{\partial}{\partial V_{\perp}} (V_{\perp} j_{\perp}), \quad (157)$$

$$j_{\parallel} = A_{\parallel} \Phi(\mathbf{V}, t) - D_{\parallel} \frac{\partial \Phi}{\partial V_{\parallel}} - D_{LT} \frac{\partial \Phi}{\partial V_{\perp}}, \quad (158)$$

$$j_{\perp} = A_{\perp} \Phi(\mathbf{V}, t) - D_{\perp} \frac{\partial \Phi}{\partial V_{\perp}} - D_{LT} \frac{\partial \Phi}{\partial V_{\parallel}}.$$

Здесь коэффициенты A_{\parallel} и A_{\perp} — продольное и поперечное "динамические" ускорения; $D_{\parallel} = D_{\alpha\beta} h_{\alpha} h_{\beta}$ и $D_{\perp} = D_{\alpha\beta} \hat{V}_{\perp\alpha} \hat{V}_{\perp\beta}$ — коэффициенты диффузии позитронов по продольной и поперечной скоростям; $D_{LT} = D_{\alpha\beta} \hat{V}_{\perp\alpha} h_{\beta}$ — недиагональный элемент матрицы коэф-

коэффициентов диффузии $D_{\alpha\beta}$, ответственный за продольно-поперечную релаксацию и описывающий установление равновесия между продольной и поперечной степенями свободы движения позитронов. В разделе 10 показано, что в интересующем нас случае (44) слагаемыми с D_{LT} в (158) можно пренебречь, поэтому далее полагаем

$$j_{\parallel} \approx A_{\parallel} \Phi(\mathbf{V}, t) - D_{\parallel} \frac{\partial \Phi}{\partial V_{\parallel}}, \quad j_{\perp} \approx A_{\perp} \Phi(\mathbf{V}, t) - D_{\perp} \frac{\partial \Phi}{\partial V_{\perp}}. \quad (159)$$

Для установления соотношений, аналогичных (153), (155) для аксиально-симметричного распределения, вместо (154) следует рассмотреть начальное распределение

$$\Phi(V'_{\parallel}, V'_{\perp}, 0) = \frac{1}{2\pi V_{\perp}} \delta(V'_{\parallel} - V_{\parallel}) \delta(V'_{\perp} - V_{\perp}). \quad (160)$$

Это распределение соответствует частицам с одинаковыми значениями $(V_{\parallel}, V_{\perp})$. Повторяя расчет, получаем

$$\begin{aligned} a_{\perp}(V_{\parallel}, V_{\perp}) &= \frac{F_{\perp}(V_{\parallel}, V_{\perp})}{M} = \frac{d}{dt} \langle V_{\perp} \rangle_{t=0} = \\ &= A_{\perp}(V_{\parallel}, V_{\perp}) + \frac{1}{V_{\perp}} \frac{\partial}{\partial V_{\perp}} (V_{\perp} D_{\perp}(V_{\parallel}, V_{\perp})), \\ a_{\parallel}(V_{\parallel}, V_{\perp}) &= \frac{F_{\parallel}(V_{\parallel}, V_{\perp})}{M} = \frac{d}{dt} \langle V_{\parallel} \rangle_{t=0} = \\ &= A_{\parallel}(V_{\parallel}, V_{\perp}) + \frac{\partial D_{\parallel}(V_{\parallel}, V_{\perp})}{\partial V_{\parallel}}. \end{aligned} \quad (161)$$

Отсюда ясно, что $F_{\perp}^{(1)}$, $F_{\parallel}^{(1)}$ — динамические силы,

$$\begin{aligned} F_{\perp}^{(1)}(V_{\parallel}, V_{\perp}) &= M A_{\perp}(V_{\parallel}, V_{\perp}), \\ F_{\parallel}^{(1)}(V_{\parallel}, V_{\perp}) &= M A_{\parallel}(V_{\parallel}, V_{\perp}), \end{aligned} \quad (162)$$

которые будут рассчитаны в разделе 7.

7. Динамическая сила для позитрона

В накопительном кольце позитронов эксперимента ЛЕРТА [6] в объеме $\sim 10^4 \text{ см}^3$ будет находиться $\sim 10^8$ позитронов. Поскольку плотность частиц в позитронном пучке довольно высока,

$$N \sim 10^4 \text{ см}^{-3}, \quad (163)$$

необходимо прежде всего выяснить, каким образом тормозятся позитроны: как единый пучок, коллективно, или независимо один от другого. Другими словами, необходимо исследовать возможность возникновения пучковой неустойчивости, которая привела бы к резкому усилению торможения позитронов, которые возбуждали бы ленгмюровские колебания электронов. Закон дисперсии $\omega = \omega(k_{\parallel})$ этих колебаний в случае холодных пучков электронов и позитронов находится из уравнения [11, 15, 16]:

$$\frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \frac{\Omega_p^2}{(\omega - k_{\parallel} V_0)^2} = 1, \quad (164)$$

где $\Omega_p = \sqrt{4\pi N e^2 / m}$, V_0 — скорость пучка позитронов (как обычно, в системе покоя пучка электронов). Вслед-

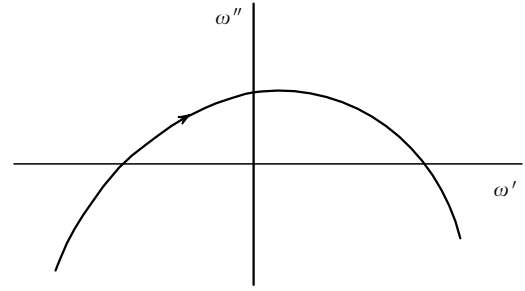


Рис. 2. Качественный вид траекторий корней уравнения (166) $\omega = \omega(k_{\parallel})$ при изменении k_{\parallel} .

ствие (43) приближение холодных электронов является оправданным (поскольку $\mathbf{V}_0 \parallel \mathbf{H}$, то важна только продольная температура T_{\parallel}). Обобщение формулы (164) для произвольного распределения $F(V_{\parallel})$ позитронов по продольным скоростям V_{\parallel} имеет вид

$$\frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \Omega_p^2 \int_{-\infty}^{\infty} dV_{\parallel} \frac{F(V_{\parallel})}{(\omega - k_{\parallel} V_{\parallel})^2} = 1, \quad (165)$$

где $F(V_{\parallel})$ нормирована условием $\int_{-\infty}^{\infty} dV_{\parallel} F(V_{\parallel}) = 1$. Выражение (165) может быть получено из уравнения Власова, записанного для электронов и позитронов. Для распределения позитронов вида

$$F(V_{\parallel}) = \frac{A}{\pi [(V_{\parallel} - V_0)^2 + \Delta^2]}$$

из (125) и (165) получаем

$$\frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \frac{\Omega_p^2}{(\omega - k_{\parallel} V_0 + i k_{\parallel} \Delta)^2} = 1. \quad (166)$$

При изменении k_{\parallel} корни $\omega = \omega' + i\omega''$ уравнения (166) движутся, как изображено на рис. 2. Возбуждаемое позитронным пучком электрическое поле ленгмюровских колебаний зависит от времени как $\exp(-i\omega t)$, поэтому неустойчивость развивается, если хотя бы для одного из корней $\omega'' > 0$. Инкремент неустойчивости $\gamma = \max[\omega''(k_{\parallel})]$. Неустойчивость возникает, когда траектория с наибольшей мнимой частью ω'' касается оси ω' (см. рис. 2):

$$\omega''(k_{\parallel}) = 0, \quad \frac{d\omega''(k_{\parallel})}{dk_{\parallel}} = \text{Im} \left(\frac{d\omega}{dk_{\parallel}} \right) = 0. \quad (167)$$

Из трех уравнений (166), (167) следует, что указанная критическая траектория возникает при значении параметра

$$\Delta = V_0 \sqrt{\frac{N}{n}}. \quad (168)$$

Критическая траектория касается оси ω' при волновом векторе $k_{\parallel} = \omega_p / (V_0 \sqrt{2})$ в точке $\omega' = \omega_p / \sqrt{2}$. Таким образом, условие возникновения пучковой неустойчивости таково:

$$\Delta < V_0 \sqrt{\frac{N}{n}}. \quad (169)$$

Из (42), (163) и (169) заключаем, что в эксперименте ЛЕРТА, для которого характерно условие $V_0 \sim \Delta$, позитроны тормозятся независимо один от другого, поскольку пучковая неустойчивость отсутствует.

В данном разделе рассматриваются позитроны со скоростями из области (56), в которой сосредоточено их стационарное распределение. Таким образом, для типичного столкновения $e^+ + e^-$ (см. (3), где теперь $M = m$)

$$r_{\text{Нр}} \sim \bar{r}_{\text{Н}}, \quad (170)$$

поэтому, вследствие (70), в зависимости от величины прицельного параметра ρ_0 столкновения ларморовских кружков (расстояния между прямыми, по которым движутся ларморовские кружки до столкновения позитрона с электроном), имеются две характерные области: коллективных взаимодействий,

$$\rho_0 > \bar{R}, \quad (171)$$

и парных столкновений,

$$\rho_0 < \bar{R}. \quad (172)$$

Последнюю из них можно разбить еще на две области: неперекрывающихся ларморовских кружков,

$$\bar{r}_{\text{Н}} < \rho_0 < \bar{R}, \quad (173)$$

и перекрывающихся,

$$\rho_0 < \bar{r}_{\text{Н}}. \quad (174)$$

Поскольку позитрон испытывает столкновения различных типов, справедлива формула (10). В этом разделе будет рассчитана коллективная сила \mathbf{F}_c , соответствующая взаимодействиям (171).

Позитрон движется по винтовой линии $\mathbf{R}(t) = V_{\parallel} t \mathbf{h} + \mathbf{R}_{\perp}(t)$, для которой из (24) следует:

$$\rho(\mathbf{k}, \omega) = 2\pi q \sum_{S=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \omega_{\text{Н}} S) J_S(k_{\perp} r_{\text{Нр}}), \quad (175)$$

где $\Omega = \omega - k_{\parallel} V_{\parallel}$, J_S — функция Бесселя. Вследствие малости ларморовского радиуса позитронов и замагниченности электронов (см. (170)) в (175) можно оставить только монополюное ($S = 0$) и дипольные ($S = \pm 1$) слагаемые и опустить квадрупольные и другие ($|S| \geq 2$):

$$\rho(\mathbf{k}, \omega) \approx \rho_{\text{М}} + \rho_{\text{д}}. \quad (176)$$

Здесь $\rho_{\text{М}}$ — плотность заряда при нулевом размере ларморовского кружка позитрона,

$$\rho_{\text{М}}(\mathbf{k}, \omega) \approx 2\pi q \delta(\Omega), \quad (177)$$

$\rho_{\text{д}}$ — плотность заряда, создаваемая вращающимся дипольным моментом ларморовского движения позитрона,

$$\rho_{\text{д}}(\mathbf{k}, \omega) \approx 2\pi q J_1(k_{\perp} r_{\text{Нр}}) [\delta(\Omega - \omega_{\text{Н}}) + \delta(\Omega + \omega_{\text{Н}})]. \quad (178)$$

В соответствии с (177) и (178)

$$\mathbf{F}_c = \mathbf{F}_{c\text{М}} + \mathbf{F}_{c\text{д}}. \quad (179)$$

Ниже показано, что основной вклад в $\mathbf{F}_{c\text{М}}$ вносит вся область коллективного взаимодействия (130), т.е. $k_{\perp} \sim |k_{\parallel}| < 1/\bar{R}$, поэтому вследствие (70) и (170) для

позитронов получаем соотношение $k_{\perp} r_{\text{Нр}} < \bar{r}_{\text{Н}}/\bar{R} \ll 1$, аналогичное (111) для электронов, что позволило в (177) положить аргумент функции Бесселя равным нулю. Мы убедимся, что основной вклад в силу $\mathbf{F}_{c\text{д}}$ вносит лишь часть области (130), а именно:

$$k_{\perp} \sim \frac{1}{r_{\text{Нр}}} \sim \frac{1}{\bar{r}_{\text{Н}}}, \quad |k_{\parallel}| \ll k_{\perp}, \quad (180)$$

поэтому в (178) оставлена функция Бесселя.

Слагаемое (177) описывает точечный заряд q , движущийся со скоростью V_{\parallel} вдоль магнитного поля, поэтому верна формула (104), в которой $\omega = V_{\parallel} k_{\parallel}$:

$$\mathbf{F}_{c\text{М}} = F_{c\text{М}} \mathbf{h}, \quad F_{c\text{М}} = \frac{q^2}{2\pi^2} \int \frac{d^3 k k_{\parallel}}{k^2} \text{Im} \frac{1}{\varepsilon}. \quad (181)$$

Рассчитаем $\mathbf{F}_{c\text{М}}$ для замагниченных электронов (66) при произвольном значении V_{\parallel} . Формулы (121), (122) легко обобщаются для случая $T_{\parallel} \neq 0$:

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) = \delta_{\alpha\beta} + h_{\alpha} h_{\beta} Q(\mathbf{k}, \omega), \quad (182)$$

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \cos^2 \alpha Q(\mathbf{k}, \omega),$$

$$Q(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\omega_{\text{п}}^2}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv_{\parallel} v_{\parallel}}{\omega + i0 - k_{\parallel} v_{\parallel}} \frac{dg(v_{\parallel})}{dv_{\parallel}}.$$

Расчет величин $\varepsilon_{\alpha\beta}$ проводится, так же как и при получении формул (121), (122), на основе кинетического уравнения Власова для функции распределения $f(v_{\parallel}, \mathbf{r}, t)$ замагниченных электронов

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_{\parallel} \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{eE_{\parallel}(\mathbf{r}, t)}{m} \frac{\partial f}{\partial v_{\parallel}} = 0$$

и соотношения

$$\frac{\partial \xi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \bar{v}_{\parallel}(\mathbf{r}, t) = \int dv_{\parallel} v_{\parallel} f(v_{\parallel}, \mathbf{r}, t).$$

Формулы (182) следуют также из строгого выражения для $\varepsilon \equiv \varepsilon_{\parallel}$, справедливого при произвольных значениях магнитного поля [12, 13, 28]:

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \frac{\omega_{\text{п}}^2}{k^2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d^3 v J_l^2 \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_{\text{Н}}} \right) \times \frac{k_{\parallel} \partial f / \partial v_{\parallel} + l \omega_{\text{Н}} / v_{\perp} \partial f / \partial v_{\perp}}{\omega - i0 - l \omega_{\text{Н}} - k_{\parallel} v_{\parallel}}, \quad (183)$$

где f — функция распределения электронов. Для "сплющенного" распределения f определена в (36). В области частот $|\omega| \sim \omega_{\text{п}}$, наиболее существенной для силы $\mathbf{F}_{c\text{М}}$, слагаемыми с $l \neq 0$ в (183), которые экспоненциально малы, можно пренебречь, откуда получаем (182). Из (182) имеем

$$\varepsilon(\mathbf{k}, k_{\parallel} V_{\parallel}) = 1 - \frac{\omega_{\text{п}}^2}{V_{\parallel} \Delta_{\parallel}^2 k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv_{\parallel} v_{\parallel}^2 g(v_{\parallel})}{V_{\parallel} - v_{\parallel} + i0 \text{sign} k_{\parallel}}. \quad (184)$$

Отсюда видно, что $\text{Im} \varepsilon$, а значит, и $\text{Im} (1/\varepsilon)$ являются нечетными функциями k_{\parallel} , поэтому (181) приводится к виду

$$F_{c\text{М}} = \frac{2q^2}{\pi} \text{Im} \left[\int_0^{\infty} dk_{\parallel} k_{\parallel} \int_{k_{\parallel}}^{\infty} \frac{dk}{k\varepsilon(k)} \right], \quad (185)$$

где учтено, что вследствие азимутальной симметрии можно проинтегрировать по углам, что сводится к замене $d^3k \rightarrow 2\pi k_\perp dk_\perp k_\parallel$, и использовано соотношение $k_\perp dk_\perp = k dk$, справедливое при $k_\parallel = \text{const}$. Согласно (184) при $k_\parallel > 0$

$$\varepsilon(k) = 1 + \frac{a}{k^2}, \quad (186)$$

здесь

$$a = \frac{1}{V_\parallel R_\parallel^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv_\parallel g(v_\parallel) v_\parallel^2}{v_\parallel - V_\parallel - i0} = \frac{1}{R_\parallel^2} \left[1 - X \left(\frac{V_\parallel}{\sqrt{2} \Delta_\parallel} \right) + iY \left(\frac{V_\parallel}{\sqrt{2} \Delta_\parallel} \right) \right], \quad (187)$$

функции X и Y определены в (144).

В (185) проведем интегрирование по частям:

$$\begin{aligned} F_{\text{сМ}} &= \frac{q^2}{\pi} \text{Im} \int_0^\infty \frac{dk_\parallel k_\parallel}{\varepsilon(k_\parallel)} = \\ &= \frac{q^2}{\pi} \text{Im} \int_0^\infty dk_\parallel k_\parallel \left(\frac{1}{\varepsilon(k_\parallel)} - 1 \right) = \\ &= -\frac{q^2}{\pi} \text{Im} \left(a \int_0^\infty \frac{dk_\parallel k_\parallel}{k_\parallel^2 + a} \right). \end{aligned}$$

Из (130) ясно, что верхний предел интегрирования ∞ следует заменить величиной $1/\bar{R}$, тогда

$$F_{\text{сМ}} = -\frac{q^2}{\pi} \text{Im} (a \ln p), \quad (188)$$

где $p = \ln [1 + 1/(a\bar{R}^2)]$. Согласно (187) величины a и p являются комплексными функциями вещественного параметра $x = V_\parallel/(\sqrt{2} \Delta_\parallel)$. Качественный вид траектории $p = p(x) = p_1(x) + ip_2(x)$ изображен на рис. 3. При $V_\parallel \ll \Delta_\parallel$

$$\begin{aligned} a &\approx \frac{1}{R_\parallel^2} \left(1 + \frac{i\sqrt{\pi} V_\parallel}{\sqrt{2} \Delta_\parallel} \right), \\ F_{\text{сМ}} &\approx -\frac{\sqrt{2}\pi q^2 e^2 n V_\parallel}{m \Delta_\parallel^3} \ln \left(1 + \frac{R_\parallel^2}{\bar{R}^2} \right). \end{aligned}$$

При продольных скоростях $V_\parallel \gg \Delta_\parallel$ (см. рис. 3) $\ln p \approx -\pi i$, поэтому в соответствии с формулой (132) имеем

$$F_{\text{сМ}} \approx -\frac{2\pi q^2 e^2 n}{m V_\parallel^2}. \quad (189)$$

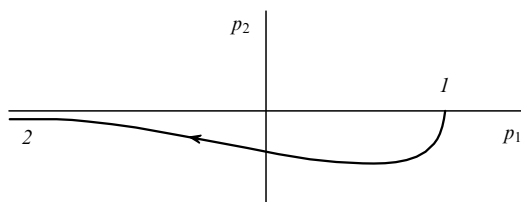


Рис. 3. Траектория значений функции $p = p(x)$. Точка 1 соответствует $x = 0$ (в этой точке $p_1 = 1 + R_\parallel^2/\bar{R}^2$, $p_2 = 0$). Область 2 на кривой соответствует $x \rightarrow +\infty$.

При произвольных значениях V_\parallel сила $F_{\text{сМ}}$ вычисляется по формулам

$$\begin{aligned} F_{\text{сМ}} &= -\frac{2q^2 e^2 n}{m \Delta_\parallel^3} \left[-\varphi(1 - X) + \frac{1}{2} Y \ln(p_1^2 + p_2^2) \right], \\ \varphi &= \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{p_1}{p_2}, \quad p_1 = 1 + \frac{R_\parallel^2(1 - X)}{\bar{R}^2 D}, \\ p_2 &= \frac{R_\parallel^2 Y}{\bar{R}^2 D}, \quad D = (1 - X)^2 + Y^2. \end{aligned}$$

Теперь рассчитаем силу $F_{\text{сд}}$. Начнем с вычисления работы этой силы в единицу времени:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE_\perp}{dt} + \frac{dE_\parallel}{dt} = q \langle \mathbf{V} \mathbf{E}_p \rangle,$$

где

$$E_\perp = \frac{m V_\perp^2}{2}, \quad E_\parallel = \frac{m V_\parallel^2}{2}, \quad (190)$$

$$\frac{dE_\perp}{dt} = q \langle \mathbf{V}_\perp \mathbf{E}_p \rangle, \quad \frac{dE_\parallel}{dt} = q \langle V_\parallel E_{p\parallel} \rangle,$$

\mathbf{E}_p — электрическое поле плазмы в точке нахождения позитрона (см. (25)). Угловыми скобками в (190) обозначено усреднение по ларморовскому периоду, что дает соотношения (см. также [12]):

$$\frac{dE_\parallel}{dt} = V_\parallel F_{\text{сМ}}, \quad (191)$$

$$\begin{aligned} \frac{dE_\perp}{dt} &= V_\perp F_{\text{сд}} = \\ &= 4\pi q^2 \sum_{S=-\infty}^{\infty} \omega_H S \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2} \text{Im} \left(\frac{1}{\varepsilon_S} \right) J_S^2(k_\perp r_{\text{Нр}}) \approx \\ &\approx 4\pi q^2 \omega_H \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2} R(\mathbf{k}) J_1^2(k_\perp r_{\text{Нр}}), \end{aligned} \quad (192)$$

где $\varepsilon_S \equiv \varepsilon(\mathbf{k}, k_\parallel V_\parallel + \omega_H S)$,

$$R(\mathbf{k}) = \text{Im} \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_{-1}} \right). \quad (193)$$

При расчете были использованы выражения (22), (23), (175). При усреднении по ларморовскому периоду ненулевой вклад в (191) остается только от слагаемого с $S = 0$, т.е. от монополюсной плотности заряда (177). Основной вклад в (192) дают слагаемые с $S = \pm 1$, т.е. дипольная плотность (178). При упрощениях в (192) учтено соотношение (176).

Таким образом, сила трения $F_{\text{сМ}}$ направлена вдоль магнитного поля (см. (181), (189)), поэтому она уменьшает энергию продольного движения позитрона E_\parallel . Усредненная сила $F_{\text{сд}}$ не влияет на E_\parallel и уменьшает E_\perp , т.е. она направлена поперек магнитного поля:

$$\mathbf{F}_{\text{сд}} = F_{\text{сд}} \hat{\mathbf{V}}_\perp, \quad \hat{\mathbf{V}}_\perp = \frac{\mathbf{V}_\perp}{V_\perp}, \quad (194)$$

$$F_{\text{сд}} = \frac{4\pi q^2 \omega_H}{V_\perp} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2} R(\mathbf{k}) J_1^2(k_\perp r_{\text{Нр}}),$$

где использовано соотношение (192). Основной вклад в величину ε_S дает резонансное слагаемое в (183) с $l = S$. Однако получающееся выражение остается весьма слож-

ным, поэтому рассмотрим предельный случай $V_{\parallel} \gg \Delta_{\parallel}$, в котором можно положить $T_{\parallel} \rightarrow 0$, что дает выражение (123). Отсюда с учетом (124), (125), пренебрегая членами $\sim \omega_p^2/\omega_H^2$, получаем

$$\text{Im} \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)} = -\pi \text{sign}(\omega) \omega_p \sin \alpha \delta(\omega^2 - \Omega^2(\mathbf{k})), \quad (195)$$

где $\Omega(\mathbf{k})$ — закон дисперсии "быстрых" циклотронных волн,

$$\Omega(\mathbf{k}) = \sqrt{\omega_H^2 + \omega_p^2 \sin^2 \alpha} \approx \omega_H + \frac{\omega_p^2}{2\omega_H} \sin^2 \alpha, \quad (196)$$

в предельном случае [11–13, 16, 17, 29]. Из соотношений (193)–(195) имеем

$$R(\mathbf{k}) = -\frac{\pi \omega_p^2 \sin^2 \alpha}{2\omega_H V_{\parallel}} [\delta(k_{\parallel} - p) + \delta(k_{\parallel} + p)], \quad p = \frac{\omega_p^2 \sin^2 \alpha}{2\omega_H V_{\parallel}}, \quad (197)$$

$$F_{cd} = -\frac{4\pi q^2 e^2 n}{m V_{\perp} V_{\parallel}} f_0, \quad (198)$$

где

$$f_0 = \int_0^{\infty} \frac{dk_{\perp} k_{\perp}^3}{(k_{\perp}^2 + p^2)^2} J_1^2(k_{\perp} r_{\text{Нр}}).$$

Учитывая, что $\alpha \approx \pi/2$ (см. (202)), получаем

$$p = \frac{\omega_p^2}{2\omega_H V_{\parallel}}, \quad p r_{\text{Нр}} = \frac{\omega_p^2 V_{\perp}}{2\omega_H^2 V_{\parallel}}.$$

В типичном случае при установившемся распределении позитронов (см. раздел 9)

$$V_{\perp} \sim \Delta_{\perp}, \quad V_{\parallel} \sim \Delta_{\parallel}, \quad (199)$$

поэтому с учетом (124)

$$p r_{\text{Нр}} \sim \frac{\Delta_{\parallel}}{\Delta_{\perp}} \ll 1. \quad (200)$$

Следовательно, в (198) можно положить $p = 0$, что дает $f_0 = 1/2$, а также

$$F_{cd} = -\frac{2\pi q^2 e^2 n}{m V_{\perp} V_{\parallel}}. \quad (201)$$

Согласно формулам (197) и (198) основной вклад в F_{cd} возникает от области в пространстве волновых векторов, определяемой соотношениями

$$k_{\perp} \sim \frac{1}{r_{\text{Нр}}} \sim \frac{1}{\bar{r}_{\text{Н}}}, \quad |k_{\parallel}| = p \ll k_{\perp}, \quad \sin^2 \alpha = \frac{k_{\perp}}{k} \approx 1. \quad (202)$$

Эта область соответствует пространственной области, в которой расстояние ρ_0 между центрами орбит взаимодействующих позитрона и электрона и расстояние z между ними вдоль магнитного поля удовлетворяют соотношениям

$$\rho_0 \sim r_{\text{Нр}} \sim \bar{r}_{\text{Н}}, \quad |z| \sim \frac{1}{p} \sim d = \frac{2\omega_H V_{\parallel}}{\omega_p^2}. \quad (203)$$

Следовательно, такие электроны находятся внутри тонкого цилиндра с радиусом $\sim r_{\text{Нр}}$ на расстоянии $\sim d \gg r_{\text{Нр}}$ от позитрона. Поскольку $d \gg \bar{R}$, эти электроны расположены в области коллективных взаимодействий, вследствие чего обеспечивается справедливость результата (201), полученного в приближении непрерывной электронной жидкости. Физический смысл указанной цилиндрической области обсуждается в приложении П2. Оттуда же видно, что в этой области находится большое число электронов, которые и создают совместно силу \mathbf{F}_{cd} , что свидетельствует о ее коллективном характере.

Асимптотические выражения (189), (201) впервые были получены в [9] иным, чем в данном разделе, путем, что оправдывает приведение здесь подробностей вывода этих важных для дальнейшего формул. Не менее важно приведенное здесь выяснение пределов применимости этих формул, их обоснование, что не в должном объеме имеется в [9]. Так, формула (201) оказывается верной при скоростях $V_{\parallel} \gg \Delta_{\parallel} \ln(T_{\perp}/T_{\parallel})$ и, кроме того, $V_{\perp} \gg \Delta_{\perp}$. Следовательно, формула (201) непригодна в наиболее важной области (56), поэтому ниже получим более общую формулу.

Для анализа кинетики замедления позитронов необходимо знать силу F_{cd} при произвольных значениях V_{\parallel} и V_{\perp} (а также F_{cm} и коэффициенты диффузии D_{\parallel} и D_{\perp} в пространстве скоростей). Из свойства

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = \varepsilon^*(-\mathbf{k}, -\omega) \quad (204)$$

и (193), (194) следует:

$$F_{cd} = \frac{2\pi q^2 \omega_H}{\pi V_{\perp}} \int_0^{\infty} \frac{dk_{\perp}}{k_{\perp}} J_1^2(k_{\perp} r_{\text{Нр}}) A_0, \quad (205)$$

$$A_0 = \int_{-\infty}^{\infty} dk_{\parallel} \text{Im} \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - 1 \right), \quad (206)$$

где учтено то, что согласно (202) $k^2 \approx k_{\perp}^2$. В выражении $\varepsilon(\mathbf{k}, \omega_H + k_{\parallel} V_{\parallel}) \equiv \varepsilon_1$ сохраняем слагаемое с резонансным знаменателем (см. (183)):

$$\varepsilon_1 \approx 1 - \frac{m\omega_p^2}{k_{\perp}^2} \int d^3 v J_1^2 \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_H} \right) f(\mathbf{v}) L, \quad (207)$$

$$L = \frac{k_{\parallel} v_{\parallel} / T_{\parallel} + \omega_H / T_{\perp}}{k_{\parallel} (V_{\parallel} - v_{\parallel}) + i0}. \quad (208)$$

Заранее предполагая, что основной вклад в \mathbf{F}_{cd} (205) вносит "труба" (202), (203) (что подтвердится далее), замечаем, что в случае интересующей нас замагниченной плазмы (66) первым членом в числителе (208) можно пренебречь. Действительно,

$$\frac{|k_{\parallel} v_{\parallel}| T_{\perp}}{T_{\parallel} \omega_H} \sim \frac{\Delta_{\parallel} T_{\perp}}{d T_{\parallel} \omega_H} \sim \frac{\bar{r}_{\text{Н}}^2}{R^2} \ll 1. \quad (209)$$

Интегрирование в (207) по $d^2 v_{\perp}$ (см. (36)) производится по формуле

$$\int d^2 v_{\perp} G(v_{\perp}) J_1^2 \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_H} \right) = \exp(-\beta^2) I_1(\beta^2), \quad (210)$$

где $\beta = k_{\perp} \bar{r}_{\text{Н}}$. Последующее интегрирование по продольным скоростям электронов $d v_{\parallel}$ дает:

$$\varepsilon_1 = 1 - \frac{b_0}{k_{\parallel}}, \quad b_0 = \frac{x - i s Y}{d} P_1(\beta^2), \quad (211)$$

где функции X и Y определены в (144), $s = \text{sign } k_{\parallel}$, параметр d приведен в (203),

$$P_1(x) = \frac{2 \exp(-x) I_1(x)}{x}, \quad (212)$$

где I_1 — модифицированная функция Бесселя единичного индекса. Выражение (206) преобразуем к виду

$$A_0 = \int_0^{\infty} dk_{\parallel} \text{Im} \left(\frac{b_0}{k_{\parallel} - b_0} + \frac{b_0^*}{k_{\parallel} + b_0^*} \right).$$

В качестве верхнего предела следует взять $k_{\parallel \text{max}} = 1/\bar{r}_H$:

$$A_0 = \text{Im} \left[b_0 \ln \left(1 - \frac{1}{b_0 \bar{r}_H} \right) - b_0^* \ln \left(1 + \frac{1}{b_0^* \bar{r}_H} \right) \right]. \quad (213)$$

С логарифмической точностью $\sim 1/\ln(T_{\perp}/T_{\parallel})$ в аргументах логарифмов в (213) можно положить $P_1(\beta^2) \rightarrow 1$, тогда получим

$$F_{cd} = -\frac{4q^2 e^2 n}{m V_{\perp} V_{\parallel}} \Phi \left(\frac{V_{\perp}}{A_{\perp}} \right) G_1 \left(\frac{V_{\parallel}}{\sqrt{2} A_{\parallel}} \right),$$

$$G_1(x) = X(x)(\varphi_1 - \varphi_2) + Y(x)(\kappa_1 + \kappa_2),$$

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{X - (X^2 + Y^2)\delta/x}{Y},$$

$$\varphi_2 = \arctan \frac{Y}{(X^2 + Y^2)\delta Y/x + X}, \quad (214)$$

$$\kappa_1 = \frac{1}{2} \ln \left\{ \left[1 - \frac{Xx}{(X^2 + Y^2)\delta} \right]^2 + \left[\frac{Xx}{(X^2 + Y^2)\delta} \right]^2 \right\},$$

$$\kappa_2 = \frac{1}{2} \ln \left\{ \left[1 + \frac{Xx}{(X^2 + Y^2)\delta} \right]^2 + \left[\frac{Xx}{(X^2 + Y^2)\delta} \right]^2 \right\},$$

$$\delta = \frac{\omega_p^2 A_{\perp}}{2\sqrt{2} \omega_H^2 A_{\parallel}}, \quad \Phi(z) = 2 \int_0^{\infty} \frac{d\beta}{\beta^3} J_1^2(z\beta) \exp(-\beta^2) I_1(\beta^2).$$

Отметим, что $\delta \sim A_{\parallel}/A_{\perp} \ll 1$. В предельных случаях функции G_1 и Φ из (214) сводятся к выражениям:

$$G_1 \approx \pi, \quad V_{\parallel} \gg A_{\parallel}, \quad G_1 \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{V_{\parallel}}{A_{\parallel}} \ln \left(\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} \right), \quad V_{\parallel} \ll A_{\parallel},$$

$$\Phi \approx \frac{1}{2}, \quad V_{\perp} \gg A_{\perp}, \quad \Phi \approx \frac{1}{4} \left(\frac{V_{\perp}}{A_{\perp}} \right)^2, \quad V_{\perp} \ll A_{\perp}.$$

8. Оценка вклада парных столкновений позитронов с электронами

Теперь обсудим парные столкновения (172), которые описываются уравнениями

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = \omega_H(\dot{\mathbf{r}}_1 \times \mathbf{h}) - \frac{e^2}{m} \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad \dot{\mathbf{r}}_2 = -\omega_H(\dot{\mathbf{r}}_2 \times \mathbf{h}) + \frac{e^2}{m} \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad (215)$$

где \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 — радиусы-векторы позитрона и электрона соответственно, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = (x, y, z)$.

Отделяем движение центра масс:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2, \quad \mathbf{V}_c = \frac{\dot{\mathbf{r}}_1 + \dot{\mathbf{r}}_2}{2}.$$

Из (215) следуют уравнения:

$$\mathbf{V}_c(t) = \frac{1}{2} \omega_H(\mathbf{r} \times \mathbf{h}) + \mathbf{V}_0, \quad (216)$$

где $\mathbf{V}_0 = \mathbf{V}_{0\perp} + \mathbf{V}_{0\parallel} = \text{const}$ — постоянная интегрирования, и

$$\dot{\mathbf{v}} = 2\omega_H(\mathbf{V}_c \times \mathbf{h}) - \frac{2e^2}{m} \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (217)$$

Постоянная $\mathbf{V}_{0\parallel}$ соответствует равномерному движению центра масс вдоль магнитного поля. Для нахождения постоянной $\mathbf{V}_{0\perp}$ рассмотрим движение частиц при временах $t \rightarrow -\infty$, т.е. до столкновения, пока они движутся по двум сближающимся, еще не возмущенным кулоновским взаимодействием частиц ларморовским орбитам. Пусть центр орбиты позитрона движется вначале по оси z , а центр орбиты электрона — вдоль прямой, параллельной оси z и пересекающей ось x в точке $x = \rho_0$. Расписывая явным образом зависимость координат частиц от времени, легко получить соотношения

$$V_{cx} = \frac{1}{2} \omega_H y, \quad V_{cy} = -\frac{1}{2} \omega_H (x + \rho_0). \quad (218)$$

Отсюда и из (216) следует:

$$V_{0x} = 0, \quad V_{0y} = -\frac{1}{2} \omega_H \rho_0, \quad \mathbf{V}_0 = V_{0\parallel} \mathbf{h} + \frac{1}{2} \omega_H (\boldsymbol{\rho}_0 \times \mathbf{h}),$$

что вместе с (216) и (217) дает:

$$\mathbf{V}_c = \frac{1}{2} \omega_H (\mathbf{R}_{\perp} \times \mathbf{h}) + V_{0\parallel} \mathbf{h}, \quad (219)$$

$$\ddot{\mathbf{R}}_{\perp} + \left(\omega_H^2 + \frac{2e^2}{mr^3} \right) \mathbf{R}_{\perp} = \frac{2e^2}{m} \frac{\boldsymbol{\rho}_0}{r^3}, \quad (220)$$

$$r = \sqrt{z^2 + r_{\perp}^2} = \sqrt{z^2 + (\boldsymbol{\rho}_0 - \mathbf{R}_{\perp})^2}, \quad \ddot{z} = -\frac{2e^2}{m} \frac{z}{r^3}, \quad (221)$$

где вместо радиуса-вектора $\mathbf{r}_{\perp} = (x, y)$ введен двумерный радиус-вектор $\mathbf{R}_{\perp} = \mathbf{r}_{\perp} + \boldsymbol{\rho}_0$. Уравнение (217) предпочтительнее записывать в форме (220) в случае дальних парных столкновений (173): $R_{\perp} \ll \rho_0$, $r = (z^2 + \rho_0^2)^{1/2}$. Кулоновское взаимодействие частиц $|U| \sim e^2/\bar{r}_H$ при столкновении ларморовских кружков можно считать слабым возмущением, поскольку для типичного столкновения (см. (77))

$$\frac{|U|}{E_1} \sim \frac{|U|}{T_{\perp}} \sim \frac{R_{\perp}}{\bar{r}_H} \sim 1,5 \times 10^{-3}. \quad (222)$$

В типичном случае такое столкновение длится в течение времени $\tau_c \sim \rho_0/A_{\parallel} \sim \bar{r}_H/A_{\parallel}$ и является адиабатическим:

$$\xi_0 = \omega_H \tau_c \sim \frac{\omega_H \bar{r}_H}{A_{\parallel}} \sim \frac{A_{\perp}}{A_{\parallel}} \gg 1. \quad (223)$$

Притяжение кружков (221) уменьшает τ_c лишь в $\sim 1,5$ раза, поэтому остается справедливым вывод об адиабатичности, вследствие которой ларморовские кружки практически не обмениваются между собой внутренней энергией:

$$\frac{\Delta E_{\perp}}{E_{\perp}} \sim \exp(-\xi_0) \ll 1. \quad (224)$$

Отметим, что в данном отношении модель осцилляторов, рассмотренная в приложении П2 (см. формулу (П2.20)), оказывается неправильной. Согласно формуле

(П2.21) в системе двух взаимодействующих осцилляторов имеются две близкие собственные частоты $\omega_{1,2}$, что приводит к эффекту биений.

Биения — это резонансный обмен внутренней энергией, происходящий за время $\sim 1/|\omega_1 - \omega_2|$. Две частоты соответствуют двум типам собственных колебаний осцилляторов: в фазе ($\xi_1 = \xi_2$) и в противофазе ($\xi_1 = -\xi_2$). Два вращающихся в магнитном поле разноименных заряда колеблются относительно друг друга только в противофазе, а одноименные заряды — в фазе. Поэтому, как видно из (220), в этих случаях имеется только одна собственная частота и, следовательно, эффект биений, резонансного обмена энергией, отсутствует.

Таким образом, как в случае (173), так и в случае (174) в типичном парном столкновении обмен поперечной энергией пренебрежимо мал, что справедливо также и для обмена продольной энергией (см. рассуждения после формулы (133)). Обмен энергией в парных столкновениях (172) происходит лишь в случае (174) в результате редких сильных ударов с $\rho \sim R_T$ ("томсоновских столкновений"), которые дают в силу трения вклад (12), причем вследствие замагниченности парных столкновений (66) вместо размера \bar{R} в (11) следует взять \bar{r}_H : $A_b = \ln(\bar{r}_H/R_T)$. Этот вывод согласуется с результатами численных расчетов [7]. Вследствие малости R_T и большой величины поперечной энергии частиц $\varepsilon_{\perp} \sim T_{\perp}$ этот вклад мал по сравнению с коллективным вкладом (179) и им можно пренебречь:

$$\frac{F_{c\perp}}{F_{b\perp}} \sim \sqrt{\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}}}, \quad \frac{F_{c\parallel}}{F_{b\parallel}} \sim \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}}.$$

В заключение данного раздела добавим, что в области типичных значений $V_{\parallel} \sim \Delta_{\parallel} \ll V_{\perp} \sim \Delta_{\perp}$ (см. раздел 3) траектория позитрона представляет собой винтовую линию с малым шагом:

$$l = \frac{2\pi V_{\parallel}}{\omega_H} \sim \frac{2\pi \Delta_{\parallel}}{\omega_H}, \quad \frac{l}{r_{Hp}} \sim \frac{2\pi \Delta_{\parallel}}{\omega_H r_{Hp}} \sim \frac{\Delta_{\parallel}}{\Delta_{\perp}} \ll 1.$$

Поскольку $l/R_T \sim 100$, то несмотря на малость шага винта l частицы могут испытать только один томсоновский удар при столкновении ларморовских кружков (174), поэтому многократные столкновения близких частиц на винтовых траекториях невозможны.

9. Качественное обсуждение стационарного распределения позитронов $\Phi(V)$ по скоростям

Согласно выводам работ [8, 9, 21, 30] (см. разделы 7 и 8) основными механизмами потери продольной энергии E_{\parallel} позитроном является черенковское испускание плазмонов и затухание Ландау возмущений, производимых в плазме движущимся позитроном. В результате обратного процесса — поглощения плазмонов — позитрон будет набирать энергию. Совместное действие этих двух противоположных процессов приводит к установлению стационарного распределения по продольным скоростям V_{\parallel} . Здесь уместно заметить, что время нахождения позитронов в накопительном кольце достаточно велико для того, чтобы могло установиться стационарное распределение. Напротив, начальное распределение (36) электронов, которые совершают в кольце лишь порядка полуоборота, практически не изменяется.

Частота плазмона $\sim \omega_p \sim 4 \times 10^8 \text{ с}^{-1}$, его энергия $\sim \hbar\omega_p \sim 3 \times 10^{-3} \text{ К} \ll E_{\parallel}$, поэтому к описанию этих процессов применима классическая механика (в рамках которой и проводился расчет прямого процесса (см. раздел 7)). Как и везде ранее, плазма предполагается идеальной. Для распределения (36) критерий (4) записывается как (46). Вследствие (46) число электронов в дебаевской сфере также велико:

$$N_D \sim nR_{\parallel}^3 \sim \xi_{\parallel}^{3/2} \gg 1. \quad (225)$$

Равновесный, тепловой, спектр колебаний плазмы устанавливается за время $\sim \omega_p^{-1} \sim 10 \text{ нс}$, малое по сравнению со временем совместного движения электронов и позитронов в кулере (для эксперимента LEPTA $\sim 400 \text{ нс}$). Плазменные колебания характеризуются масштабами времени, длины и объема соответственно

$$\tau_p \sim \frac{1}{\omega_p}, \quad l \sim R_{\parallel}, \quad V_p \sim R_{\parallel}^3. \quad (226)$$

В идеальной плазме (46) частицы движутся практически свободно, поэтому флуктуации числа частиц в объеме V_p порядка $\delta N \sim \sqrt{N_D}$. Следовательно, характерные амплитуды флуктуаций электрического потенциала и поля в плазме составляют

$$\delta\varphi \sim \frac{e\sqrt{N_D}}{R_{\parallel}} \sim \sqrt{\frac{T_{\parallel}}{R_{\parallel}}}, \quad E \sim \frac{\delta\varphi}{R_{\parallel}} \sim \frac{T_{\parallel}^{1/2}}{R_{\parallel}^{3/2}}. \quad (227)$$

Сначала рассмотрим частицу M с большой массой (1). Для оценок будем считать, что поле (227) существует в течение времени $\sim \tau_p$, после чего меняет направление — и все повторяется. Под действием этого поля частица M в пространстве скоростей совершает броуновское движение с коэффициентом

$$D \sim \frac{(\Delta V)^2}{\tau_p} \sim \frac{ne^4}{M^2 \Delta_{\parallel}}, \quad (228)$$

где $|\Delta V| \sim eE\tau_p/M$ — изменение скорости частицы за один "период" флуктуации. Вклад в D от парных столкновений с электронами меньше (228) в $\Delta_{\perp}/\Delta_{\parallel}$ раз вследствие малости томсоновского радиуса (75). Если в начальный момент $t = 0$ частица покоилась, то с течением времени ее скорость будет возрастать по характерному для броуновского движения закону

$$\overline{V^2} \sim Dt \quad (229)$$

до тех пор, пока это возрастание не будет подавлено силой трения. Согласно работам [9, 30], результаты которых представлены в разделе 7, при $V < \Delta_{\parallel}$ и замагниченных электронах

$$F \sim -\frac{ne^4 V}{m\Delta_{\parallel}^3}. \quad (230)$$

Согласно (229), (230) средняя энергия частиц изменяется по закону

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{M\overline{V^2}}{2} \right) \sim \langle MD \rangle + \langle \mathbf{FV} \rangle \sim \frac{ne^4}{M\Delta_{\parallel}} - \frac{ne^4}{m\Delta_{\parallel}^3} \overline{V^2}. \quad (231)$$

Отсюда заключаем, что установившееся ($d\bar{E}/dt = 0$) значение энергии составляет [2, 3]

$$\bar{E} \sim \bar{E}_{\parallel} \sim \bar{E}_{\perp} \sim T_{\parallel}. \quad (232)$$

Оценка (232) верна для обеих степеней свободы в случае (1) тяжелой частицы. Для позитронов (случай (2)) формула (230) верна только для F_{\parallel} , поэтому

$$\bar{E}_{\parallel} \sim T_{\parallel}. \quad (233)$$

Согласно результатам, приведенным в разделе 7, для позитронов при поперечных скоростях $V_{\perp} < \Delta_{\perp}$

$$F_{\perp} \sim \frac{ne^4 V_{\perp}}{m \Delta_{\perp}^2 \Delta_{\parallel}}, \quad V_{\perp} < \Delta_{\perp}, \quad |V_{\parallel}| \sim \Delta_{\parallel}. \quad (234)$$

Для оценки коэффициента диффузии D_{\perp} по компонентам скорости \mathbf{V}_{\perp} воспользуемся физическим представлением, изложенным в приложении П2. Вследствие экранирования позитрон взаимодействует только с электронами, расположенными в "трубе". Рассмотрим один из этих электронов. Его поле также экранируется, поэтому в точке нахождения позитрона оно определяется формулой (П2.15), в которой вместо $\exp(-i\omega_{\text{H}}t)$ следует взять $\exp(-i\omega t)$, учитывая тем самым рассогласование их частот

$$\Delta\omega \sim \frac{\omega_{\text{p}}^2}{\omega_{\text{H}}} \quad (235)$$

(см. (П2.17), (П2.18), (П2.26)). Таким образом, суммарное электрическое поле в точке нахождения позитрона выражается в виде

$$E_{\perp}(t) \sim \sum_a E_a \cos(\omega_a t + \varphi_a), \quad (236)$$

где $E_a \sim E_0 = e/(d_0 r_{\text{H}})$ (см. (П2.15)), φ_a — фаза ларморовского вращения a -го электрона, общее число которых в трубе составляет

$$N_t \sim nV_t \sim \xi^{3/2} \frac{\omega_{\text{H}}}{\omega_{\text{p}}} \gg 1. \quad (237)$$

Ввиду расстройки частот ω_a (см. (235)) можно считать, что поле $E_{\perp}(t)$ состоит из независимых пугов длительностью $\tau_c \sim 1/\Delta\omega$. Из модели осциллятора (см. формулу (П2.3)) следует, что за время τ_c скорость V_{\perp} позитрона изменяется на величину

$$\Delta V_{\perp} \sim \frac{eE_0 \tau_c \sum_a \cos \varphi_a}{m},$$

поэтому

$$D_{\perp} \sim \frac{\Delta V_{\perp}^2}{\tau_c} \sim \frac{e^2 E_0^2 \tau_c}{m^2} N_t \sim \frac{ne^4}{m^2 \Delta_{\parallel}}. \quad (238)$$

Квадрат амплитуды электрического поля E_0^2 найден из оценки

$$\bar{E}_{\perp}^2 \sim E_0^2 N_t \sim \frac{ne^2}{d_0}. \quad (239)$$

Как и следовало ожидать, вследствие случайности фаз φ_a электроны, находящиеся в трубе, дают независимые вклады в коэффициент диффузии позитрона D_{\perp} , а также

в \bar{E}_{\perp}^2 . Из (234), (238) и уравнения

$$\frac{d\bar{E}_{\perp}}{dt} = \langle 2mD_{\perp} \rangle + \langle \mathbf{F}_{\perp} \mathbf{V}_{\perp} \rangle$$

получаем

$$\bar{V}_{\perp}^2 \sim \Delta_{\perp}^2, \quad \bar{E}_{\perp} \sim T_{\perp}. \quad (240)$$

Оценки (233), (240) впервые были приведены (без доказательства) в [9].

В заключение данного раздела поясним соотношение $\bar{E}_{\perp} \sim T_{\parallel}$ (см. (232)), справедливое для тяжелых частиц. Поперечную степень свободы электронов будем рассматривать как нагреватель с температурой T_{\perp} , а продольную — как холодильник с температурой T_{\parallel} . Если "отключить" силу трения, то ионы нагреются до температуры T_{\perp} за время τ_{h} , определяемое из соотношения (229): $D\tau_{\text{h}} \sim T_{\perp}/M$. Следовательно,

$$\tau_{\text{h}} \sim \frac{Mm\Delta_{\parallel}\Delta_{\perp}^2}{ne^4}. \quad (241)$$

Если "отключить" диффузию ($D \rightarrow 0$), то согласно (230) скорость иона будет уменьшаться по закону

$$M \frac{dV}{dt} = -\frac{ne^4 V}{m\Delta_{\parallel}^3}.$$

Отсюда для времени охлаждения до температуры T_{\parallel} получаем оценку

$$\tau_{\text{cool}} \sim \frac{Mm\Delta_{\parallel}^3}{ne^4}. \quad (242)$$

В общем случае средняя энергия E_{\perp} перпендикулярного магнитному полю движения ионов подчиняется уравнению

$$\frac{d\bar{E}_{\perp}}{dt} = \lambda_{\text{h}}(T_{\perp} - \bar{E}_{\perp}) - \lambda_{\text{cool}}(\bar{E}_{\perp} - T_{\parallel}), \quad (243)$$

где $\lambda_{\text{h}} = 1/\tau_{\text{h}}$, $\lambda_{\text{cool}} = 1/\tau_{\text{cool}}$. В стационарном состоянии $d\bar{E}_{\perp}/dt = 0$, поэтому

$$\bar{E}_{\perp} = \frac{\lambda_{\text{h}} T_{\perp} + \lambda_{\text{cool}} T_{\parallel}}{\lambda_{\text{h}} + \lambda_{\text{cool}}},$$

$$\frac{\Delta \bar{E}_{\perp}}{T_{\parallel}} = \frac{\lambda_{\text{h}}}{\lambda_{\text{h}} + \lambda_{\text{cool}}} \frac{T_{\perp} - T_{\parallel}}{T_{\parallel}}, \quad \Delta \bar{E}_{\perp} = \bar{E}_{\perp} - T_{\parallel}.$$

Поскольку $\lambda_{\text{h}}/\lambda_{\text{cool}} \sim T_{\parallel}/T_{\perp} \ll 1$, то $\bar{E}_{\perp} \sim T_{\parallel}$. Другими словами, вследствие того, что охлаждение происходит гораздо быстрее, чем нагревание, поперечная температура ионов \bar{E}_{\perp} оказывается близкой к температуре холодильника.

10. Стационарная функция распределения позитронов

В установившемся состоянии $\Phi(\mathbf{V}, t) = \Phi(\mathbf{V})$, поэтому

$$\text{St}(\Phi) = 0. \quad (244)$$

Согласно (233), (240)

$$\bar{E}_{\parallel} \ll \bar{E}_{\perp}, \quad (245)$$

отсюда из (159), (244) следует соотношение

$$|j_{\parallel}| \sim \frac{A_{\parallel}}{A_{\perp}} |j_{\perp}| \ll |j_{\perp}|. \quad (246)$$

Вследствие (245), (246) приближенное решение уравнения (244) имеет вид

$$\Phi(\mathbf{V}) = G(V_{\perp}) g_0(V_{\parallel}; V_{\perp}), \quad (247)$$

где функция распределения позитронов по продольным скоростям $g_0(V_{\parallel}; V_{\perp})$ удовлетворяет уравнению

$$A_{\parallel}(V_{\parallel}, V_{\perp}) g_0(V_{\parallel}; V_{\perp}) - D_{\parallel}(V_{\parallel}, V_{\perp}) \frac{\partial g_0(V_{\parallel}; V_{\perp})}{\partial V_{\parallel}} = 0 \quad (248)$$

и условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_0(V_{\parallel}; V_{\perp}) dV_{\parallel} = 1.$$

Точкой с запятой в аргументе g_0 отмечено то обстоятельство, что $|\partial g_0 / \partial V_{\parallel}| \gg |\partial g_0 / \partial V_{\perp}|$, благодаря чему и возникает решение уравнения (244) в виде (247).

По сути, приближение (247) соответствует методу разделения быстрых и медленных переменных (в качестве примера см. задачу об атоме в сверхсильном магнитном поле [31, 32]). Уравнение для функции распределения позитронов по поперечным скоростям $G(V_{\perp})$ получается в результате интегрирования уравнения (244) по dV_{\parallel} :

$$A_{\perp}(V_{\perp}) G(V_{\perp}) - D_{\perp}(V_{\perp}) \frac{dG(V_{\perp})}{dV_{\perp}} = 0, \quad (249)$$

где

$$\begin{aligned} A_{\perp}(V_{\perp}) &= \int_{-\infty}^{\infty} dV_{\parallel} g_0(V_{\parallel}; V_{\perp}) \times \\ &\times \left[A_{\perp}(V_{\parallel}, V_{\perp}) + \frac{\partial D_{\perp}(V_{\parallel}, V_{\perp})}{\partial V_{\perp}} \right] - \frac{dD_{\perp}(V_{\perp})}{dV_{\perp}}, \\ D_{\perp}(V_{\perp}) &= \int_{-\infty}^{\infty} dV_{\parallel} g_0(V_{\parallel}; V_{\perp}) D_{\perp}(V_{\parallel}, V_{\perp}). \end{aligned}$$

Решение (248) имеет вид

$$\begin{aligned} g_0(V_{\parallel}; V_{\perp}) &= B(V_{\perp}) \exp \left[\int_0^{V_{\parallel}} \frac{A_{\parallel}(V'_{\parallel}, V_{\perp})}{D_{\parallel}(V'_{\parallel}, V_{\perp})} dV'_{\parallel} \right] = \\ &= B(V_{\perp}) \exp \left[\int_0^{V_{\parallel}} \frac{F_{\parallel}^{(1)}(V'_{\parallel}, V_{\perp})}{MD_{\parallel}(V'_{\parallel}, V_{\perp})} dV'_{\parallel} \right], \end{aligned} \quad (250)$$

где $B(V_{\perp})$ — нормировочная постоянная, зависящая от V_{\perp} как от параметра. В (250) учтена связь (162). Аналогично, из уравнения (249) имеем

$$\begin{aligned} G(V_{\perp}) &= C_0 \exp \left[\int_0^{V_{\perp}} dV'_{\perp} \frac{A_{\perp}(V'_{\perp})}{D_{\perp}(V'_{\perp})} \right] = \\ &= C_0 \exp \left[\int_0^{V_{\perp}} dV'_{\perp} \frac{F_{\perp}^{(1)}(V'_{\perp})}{MD_{\perp}(V'_{\perp})} \right], \end{aligned} \quad (251)$$

где C_0 — другая нормировочная постоянная, определенная условием

$$\int G(V_{\perp}) d^2 V_{\perp} = 2\pi \int_0^{\infty} G(V_{\perp}) V_{\perp} dV_{\perp} = 1.$$

В анизотропном случае (44) несложные преобразования с использованием формул (162), (181), (183), а также (П2.17), (П2.19) и (П5.16) приводят к выводу, что для коэффициентов A_{\parallel} , D_{\parallel} , A_{\perp} , D_{\perp} выполняется соотношение, подобное (146):

$$A_{\parallel}(V_{\parallel}, V_{\perp}) = -\frac{MV_{\parallel}}{T_{\parallel}} D_{\parallel}(V_{\parallel}, V_{\perp}). \quad (252)$$

Аналогичным образом доказывается формула

$$A_{\perp}(V_{\perp}) = -\frac{MV_{\perp}}{T_{\perp}} D_{\perp}(V_{\perp}). \quad (253)$$

Из (250)–(253) заключаем, что стационарное распределение позитронов ($M = m$) совпадает с электронным и дается выражением [30]

$$g_0(V_{\parallel}; V_{\perp}) = g(V_{\parallel}) = \left(\frac{M}{2\pi T_{\parallel}} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{MV_{\parallel}^2}{2T_{\parallel}} \right), \quad (254)$$

$$G(V_{\perp}) = G_e(V_{\perp}) = \frac{M}{2\pi T_{\perp}} \exp \left(-\frac{MV_{\perp}^2}{2T_{\perp}} \right).$$

Этот вывод не является неожиданным. Действительно, согласно результатам, представленным в разделах 6 и 8, передачей энергии от поперечно движущихся электронов продольно перемещающимся позитронам (ЛТ-переходы) можно пренебречь. (Эффект подавления ЛТ-переходов в сильном магнитном поле был обнаружен на установке МОСОЛ (сокращ. от "модель соленоида") Института ядерной физики им. Г.И. Будкера СО РАН в эксперименте [20].) В этом приближении обмен энергией происходит только при продольно-продольных (LL) и поперечно-поперечных (ТТ) переходах. В каждой из этих степеней свободы электроны имеют равновесное максвелловское распределение с соответствующими температурами, что приводит к установлению такого же распределения для позитронов.

Иное дело — случай тяжелых частиц (см. конец раздела 9). Траектории таких частиц являются практически прямолинейными, а электроны "замагничены", т.е. могут перемещаться только вдоль магнитного поля, как бусинки, нанизанные на спицу. Такая картина верна для замагниченных электронов (70) в случае, когда характерное расстояние между взаимодействующими частицей M и электроном превышает ларморовский радиус орбиты электрона. Тогда ионы обмениваются продольной и поперечной энергией с продольным движением электронов и не обмениваются с поперечным. Из этих соображений ясно, что для тяжелых частиц (1) стационарное распределение в соответствии с оценкой (232) имеет вид

$$dW = \left(\frac{M}{2\pi T_{\parallel}} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{M(V_{\parallel}^2 + V_{\perp}^2)}{2T_{\parallel}} \right] d^3 V. \quad (255)$$

В заключение данного раздела оценим погрешность результата (254). В первом приближении по малому коэффициенту $D_{\text{ЛТ}}$ вместо уравнения (248) получаем

$$\begin{aligned} A_{\parallel}(V_{\parallel}, V_{\perp}) g_0(V_{\parallel}; V_{\perp}) - D_{\parallel}(V_{\parallel}, V_{\perp}) \frac{\partial g_0(V_{\parallel}; V_{\perp})}{\partial V_{\parallel}} - \\ - D_{\text{ЛТ}} \left(-\frac{MV_{\perp}}{T_{\perp}} \right) g_0(V_{\parallel}; V_{\perp}) = 0. \end{aligned} \quad (256)$$

Вследствие адиабатичности (224) столкновений по отношению к поперечному движению коэффициенты D_{LT} для замагниченных электронов (66) со сплюснутым распределением (36) при дальних столкновениях экспоненциально малы (см. также [33]). Основной вклад в них вносят столкновения с прицельными параметрами $\rho \leq \bar{r}_H$, когда возможны парные столкновения, в которых адиабатический инвариант может не сохраняться. Согласно дрейфовому приближению [34] (см. также [15, § 60])

$$D_{LT} \approx \frac{2\pi n q^2 e^2 A_1 V_{\perp} V_{\parallel}}{M^2 (V_{\perp}^2 + V_{\parallel}^2)^{3/2}}, \quad A_1 = \ln \frac{\bar{R}}{\bar{r}_H}.$$

Из (256) и (252) получаем соотношение для продольной температуры позитронов $T_{p\parallel}$:

$$\frac{1}{T_{p\parallel}} - \frac{1}{T_{\parallel}} \sim - \frac{D_{LT}}{D_{\parallel} \sqrt{T_{\perp} T_{\parallel}}}.$$

Отсюда из (257) и (П5.20) (см. приложение П5) получаем оценку

$$\frac{T_{p\parallel} - T_{\parallel}}{T_{\parallel}} \sim \left(\frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} \right)^{3/2}, \quad (257)$$

означающую, что результат (254) достаточно точен. Коэффициенты D_{LT} и D_{\parallel} обусловлены соответственно парными столкновениями и коллективными процессами, поэтому по смыслу результат (257) количественно описывает уменьшение роли парных столкновений при возрастании анизотропии T_{\perp}/T_{\parallel} .

Результат (254) справедлив для наиболее интересного в практическом отношении замагниченного электронного пучка (66) со сплюснутым распределением (36), (44). При уменьшении магнитного поля условие (66) нарушается и тогда стационарное распределение позитронов существенно отличается от электронного.

11. Поперечное охлаждение электронов. Качественный анализ

Ранее было указано, что при условии (70) тяжелые частицы охлаждаются до малой температуры T_{\parallel} — наименьшей из двух температур, T_{\parallel} и T_{\perp} , характеризующих электронный пучок. В своем роде это подарок природы для специалистов по ускорителям. В случае позитронов достигаемая продольная температура T_{\parallel} мала, но поперечная температура T_{\perp} оказывается большой.

Для ряда приложений желательнее увеличить степень охлаждения позитронов, что сводится к задаче уменьшения поперечной температуры электронов. Очевидная мысль — заставить электроны сбросить поперечную энергию в процессе циклотронного излучения. Изолированный электрон излучает очень медленно — характерное время составляет $\tau \sim 200(H_0/H)^2$ [с], $H_0 = 1000$ Гс. Для ускорения излучения естественно использовать коллективные процессы — мазерную циклотронную неустойчивость электронной плазмы. При анализе этого важного для практики процесса обнаруживается много подводных камней, поэтому обсудим его, используя несколько подходов.

При развитии циклотронной неустойчивости по механизму Гапонова-Грехова [35, 36] возникает группиро-

вание электронов по фазе (углу φ) их ларморовского вращения, происходящее вследствие зависимости ларморовской частоты от скорости электронов, обусловленной релятивистскими эффектами:

$$\begin{aligned} \Omega_H &= \frac{\omega_H}{\gamma} = \omega_H \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx \omega_H - \frac{\omega_H v^2}{2c^2} \approx \\ &\approx \omega_H - \frac{\omega_H v_{\perp}^2}{2c^2} \equiv \Omega_H(v_{\perp}). \end{aligned} \quad (258)$$

Вращающийся дипольный момент образующихся сгустков пропорционален числу частиц в них, а интенсивность циклотронного излучения, пропорциональная квадрату этого числа, резко возрастает. Процесс завершается сверхизлучением, в котором поперечная энергия электронов уносится фотонами [37–41]. Важно, что для кулеров $\omega_H/\omega_p \sim 100 \gg 1$, поэтому поперечная энергия именно излучается, а не переходит в плазменные колебания, как это следует из теории циклотронных волн [29] (критическая точка зрения изложена в [42]). Оценим время τ поперечного охлаждения электронов и инкремент $\gamma = 1/\tau$ мазерной неустойчивости.

Вращающиеся электроны возбуждают в плазме циркулярно поляризованную циклотронную необыкновенную волну с вращающимся вслед за электронами электрическим полем с компонентами $\mathbf{E}_d = (E_d \cos \omega t, E_d \sin \omega t, 0)$ (ось z направлена вдоль магнитного поля \mathbf{H}). Амплитуду поля E_d пока будем считать постоянной. Рассмотрим отдельный электрон со скоростью $\mathbf{v} = (v \cos \varphi, v \sin \varphi, 0)$, где φ — угол между \mathbf{v} и осью x (вследствие (44) продольной скоростью электрона пренебрегаем). Угол между \mathbf{v} и \mathbf{E} равен $\psi = \varphi - \omega t$. При $\psi \neq \pi/2, 3\pi/2$ в единицу времени электрическое поле совершает над электроном работу

$$W_E = -e E_d \cos \psi, \quad (259)$$

изменяя его скорость и, вследствие зависимости (258), его ларморовскую частоту. Это приводит к изменению угла ψ . Только в двух случаях этот угол не изменяется: при значениях $\psi = \pi/2$ (рис. 4а) и $\psi = 3\pi/2$ (рис. 4б). При этом электрон, помимо определенного угла между векторами \mathbf{v} и \mathbf{E} , должен иметь вполне определенную "резонансную" скорость v_0 , при которой он вращается с той же частотой, что и электрическое поле возбуждаемой циклотронной волны: $\Omega_H(v_0) = \omega$.

Рассмотрим случай $\psi = \pi/2$. При $v > v_0$ согласно (258) $\Omega_H(v) < \omega$, поэтому угол ψ для такого электрона уменьшается, а значит, наступает режим торможения,

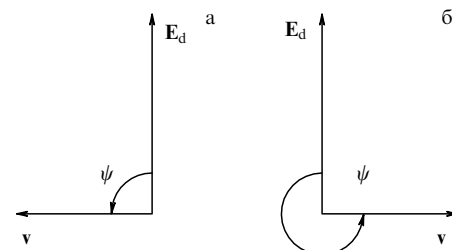


Рис. 4. Возможные относительные ориентации вращающегося электрического поля \mathbf{E}_d и скорости электрона \mathbf{v} в стационарных состояниях. Магнитное поле направлено "к нам". В лабораторной системе отсчета электрон и поле вращаются против часовой стрелки.

поскольку при $0 < \psi < \pi/2$ мощность отрицательна: $W_E < 0$. В результате скорость электрона уменьшается до резонансной величины v_0 . Рассуждения такого рода приводят к заключению, что состояние $\psi = \pi/2$ является устойчивым, а состояние $\psi = 3\pi/2$ — неустойчивым. Следовательно, электроны с течением времени группируются в состояниях, близких к $\psi = \pi/2$. Это и есть фазировка по Гапонову-Грехову.

Пусть при $t = 0$ электроны равномерно распределены по углу ψ и имеют одинаковую скорость $v = v_0 \sim \Delta_{\perp}$. За время τ они приобретут характерный разброс по скорости $|\Delta v| \sim (eE_d/m)\tau$ и вследствие (258) по ларморовской частоте:

$$|\Delta\Omega_H| \sim \frac{\omega_H v_0 |\Delta v|}{c^2} \sim \frac{\omega_H v_0 e E_d \tau}{m c^2}. \quad (260)$$

Фазировка, которая является лимитирующей, наиболее медленной стадией всего процесса мазерного излучения (см. оценку (271)), произойдет за время $\tau \sim 1/|\Delta\Omega_H|$, что вместе с (260) дает искомую оценку:

$$\gamma = \frac{1}{\tau} \sim \frac{\Delta_{\perp}}{c} \omega_p. \quad (261)$$

При переходе от (260) к (261) учтено соотношение $E_d \approx -4\pi\mathbf{P}$, где \mathbf{P} — вектор поляризации, которое сводится к

$$E_d \sim 4\pi n e r_H \sim 4\pi n e \frac{\Delta_{\perp}}{\omega_H} \sim 0,5 \text{ В см}^{-1}. \quad (262)$$

Результат (261) важен для последующих оценок, поэтому получим его строгим образом, с точными безразмерными множителями. Дисперсионные соотношения $\omega = \omega(\mathbf{k})$ для волн в плазме выводятся из уравнений Власова – Максвелла. При отличном от нуля магнитном поле эти дисперсионные соотношения весьма сложны, поэтому рассмотрим наиболее простой случай, в котором волна распространяется вдоль магнитного поля: $k_{\perp} = 0$, $k_{\parallel} = k$. Для частоты ω такой поперечной циклотронной волны имеем уравнение (см., например, [16, § 2.7], [29, 43]):

$$\omega^2 - k^2 c^2 \approx \frac{\omega_p^2}{2} \int d^3 v v_{\perp} \left[\frac{\omega - k v_z}{k v_z - \omega + \omega_H} \frac{\partial f(\mathbf{v})}{\partial v_{\perp}} + \frac{k^2 v_{\perp} f(\mathbf{v})}{(k v_z - \omega + \omega_H)^2} \right]. \quad (263)$$

Отметим, что в левой части этого уравнения уже содержится скорость света, что позволяет в правой части положить $\Omega_H \approx \omega_H$. Из (36) и (263) в пределе $\Delta_{\parallel} \rightarrow 0$ (см. (44)) получаем

$$\omega^2 - k^2 c^2 = \frac{\omega_p^2 \omega}{\omega - \omega_H} + \frac{\omega_p^2 k^2 \Delta_{\perp}^2}{(\omega - \omega_H)^2}. \quad (264)$$

Предположим заранее, что

$$\frac{\omega^2}{k^2 c^2} \gg 1. \quad (265)$$

Это позволяет упростить уравнение (264) и получить искомый результат, подтверждающий исходное предпо-

ложение (265):

$$\omega(k) = \omega'(k) + i\gamma(k), \quad \omega'(k) = \omega_H - \frac{\omega_p^2 \omega_H}{2k^2 c^2}, \quad (266)$$

$$\gamma(k) = \frac{\Delta_{\perp}}{c} \omega_p \sqrt{1 - \left(\frac{k_{cr}}{k}\right)^4}, \quad k_{cr} = \sqrt{\frac{\omega_p \omega_H}{2c \Delta_{\perp}}}.$$

Таким образом, в анизотропной электронной плазме (44), имеющейся в кулерах, возникает мазерный эффект с испусканием волн с волновыми векторами $k > k_{cr} \sim \sim 7 \text{ см}^{-1}$ (соответствующие длины волн $\lambda < \lambda_{cr} \sim 1 \text{ см}$). Поперечная температура электронов убывает по закону

$$T_{\perp} = T_{\perp}^0 (1 + \gamma_0 t)^{-2} = T_{\perp}^0 \left(1 + \frac{x}{L}\right)^{-2},$$

где $\gamma_0 = (\omega_p/c)(T_{\perp}^0/m)^{1/2}$ — величина инкремента при некоторой начальной температуре T_{\perp}^0 , $L = u/\gamma_0$ — характерная длина охлаждения, t — время, x — пройденное пучком расстояние.

Укажем условия, при которых становится возможным поперечное охлаждение электронов. Можно выбирать наиболее выгодные значения скорости электронов u и магнитного поля H . При изменении магнитного поля H и энергии электронов $\varepsilon = mu^2/2$ (которую они имеют в лабораторной системе отсчета) сохраняются величины:

$$nuS = \text{const}, \quad SH = \text{const}, \quad \frac{\Delta_{\perp}^2}{H} = \text{const},$$

где S — сечение пучка. Отсюда получаем следующую рабочую формулу:

$$L = L_0 \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{3/4}, \quad L_0 = 50 \text{ м}, \quad \varepsilon_0 = 10 \text{ кэВ}. \quad (267)$$

Отметим, что величина L не зависит от магнитного поля. При $\varepsilon = 0,1 \text{ кэВ}$ из (267) находим $L = 1,5 \text{ м}$. Видно, что возможность поперечного охлаждения электронного пучка имеется только в самом начале его разгона.

Убедимся теперь, что, как и предполагалось в этом разделе, лимитирующей стадией всего процесса мазерного излучения является фазировка. Рассмотрим электронное облако диаметром $D \sim 1 \text{ см}$ с плотностью частиц $n \sim 10^9 \text{ см}^{-3}$, находящееся в магнитном поле $H \sim 1000 \text{ Гс}$. Длина излучаемых циклотронных волн составляет $\lambda = 2\pi c/\omega_H \sim 10 \text{ см}$. Поскольку

$$D \ll \lambda, \quad (268)$$

в области сгустка запаздыванием можно пренебречь. За время $\tau \sim c/\Delta_{\perp} \omega_H$ происходит фазировка, группирование электронов по углу циклотронного вращения φ . Образуется коллективный вращающийся дипольный момент $d \sim er_H N$, где $N \sim nD^3$ — число частиц в сгустке. В единицу времени облако частиц излучает энергию [44]

$$I = \frac{2(\dot{\mathbf{d}})^2}{3c^3} \sim \frac{\omega_H^4 e^2 r_H^2 N^2}{c^2} \sim \frac{\omega_H^4 e^2 r_H^2 n^2 D^6}{c^2}. \quad (269)$$

Энергия облака $E_e \sim m \Delta_{\perp}^2 n D^3$ уменьшается по закону

$$\frac{dE_e}{dt} = -I(t), \quad (270)$$

поэтому при полностью завершившейся фазировке время излучения составляет $\tau_R \sim c^3/\omega_p^2 \omega_H^2 D^3$. Для отно-

шения времен получаем

$$\frac{\tau}{\tau_R} \sim \frac{\omega_p \omega_H^2 D^3}{c^2 \Delta_{\perp}} \sim 100 \gg 1. \quad (271)$$

Таким образом, характерное время уменьшения Δ_{\perp} , т.е. искомое время поперечного охлаждения электронов, как и предполагалось выше, равно τ . Кинетическая энергия частиц уменьшается из-за того, что на каждую из них действует сила $\mathbf{F} = (-e)\mathbf{E}_c$. Коллективное поле $\mathbf{E}_c = \mathbf{E}_d + \mathbf{E}_R$, где \mathbf{E}_d — суммарное, среднее поле (262), созданное вращающимися диполями, $\mathbf{E}_R = 2\dot{\mathbf{d}}/3c^3$ — поле радиационного трения [43]. В единицу времени, согласно (269), поле совершает над каждой частицей работу

$$\begin{aligned} \langle W \rangle &= \langle \dot{\mathbf{r}}(-e)\mathbf{E}_c \rangle \sim \frac{1}{N} \langle \dot{\mathbf{d}}\mathbf{E}_R \rangle \sim \frac{1}{c^3 N} \langle \dot{\mathbf{d}}\ddot{\mathbf{d}} \rangle = \\ &= -\frac{1}{c^3 N} \langle (\dot{\mathbf{d}})^2 \rangle \sim \frac{I}{N} \end{aligned}$$

(для сгруппированного по фазе сгустка работа дипольного поля \mathbf{E}_d равна нулю).

Рассмотренная в [38, 39] циклотронная неустойчивость электронов с анизотропным распределением хорошо известна (см., например, [16]). Такая неустойчивость развивается и в неограниченной плазме. Для ее возникновения не требуются резонаторы (хотя, как предполагается в [38, 39], их использование может ускорить процесс). Это первая, наиболее длительная, линейная по коллективному электрическому полю часть процесса поперечного охлаждения электронов. Охлаждение завершается нелинейной стадией — потерей поперечной энергии электронов в режиме сверхизлучения [40, 41].

При подготовке данного обзора автор обнаружил статью [45], в которой рассматривался, по сути, тот же самый процесс: импульсное мазерное излучение сгустка электронов с анизотропным распределением. В этом процессе, как и в рассматриваемом в данном разделе, кинетическая энергия электронов также переходит в энергию излучаемых плазмой электромагнитных волн.

На основе приведенной картины исследуем кинетику процесса поперечного охлаждения более детально. Имеется резко анизотропное распределение электронов (36), (44). Сначала электроны распределены по фазе ψ изотропно, поэтому направления их скоростей можно изобразить точками, равномерно распределенными по окружности. Для оценок возникающую далее фазировку будем представлять как "сворачивание" заполненной точками окружности в сектор $-\pi/2 + \Delta\psi(t) < \psi < 3\pi/2 - \Delta\psi(t)$ (рис. 5). Согласно (271) достаточно считать, что $\Delta\psi(t) \ll 1$. При $t = 0$ в результате типичной флуктуации возникает неравномерное распределение, при котором числа частиц слева и справа (см. рис. 5) различаются на $\sim \sqrt{N}$, что соответствует

$$\Delta\psi(0) \sim \frac{1}{\sqrt{N}}, \quad E_d(0) \sim \frac{ne\Delta_{\perp}(0)}{\sqrt{N}}, \quad (272)$$

где $\Delta_{\perp}(0) = \Delta_{\perp}$ — начальный разброс поперечной скорости. В соответствии с (259) модули скоростей частиц в верхней полуплоскости рис. 5 к моменту t уменьшаются на величину $\Delta v(t)$, а в нижней — увеличиваются на такую же величину. Из (259) и (260) получаем приближенные уравнения

$$\frac{d\Delta v(t)}{dt} \sim \frac{eE_d(t)}{m}, \quad \frac{d\Delta\psi(t)}{dt} \sim \frac{\omega_H}{c^2} \Delta_{\perp}(t) \Delta v(t). \quad (273)$$

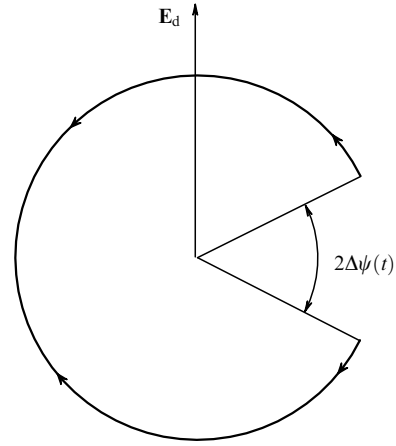


Рис. 5. Качественный вид распределения направлений скоростей электронов в произвольный момент времени.

К ним следует добавить уравнения

$$E_d(t) \sim 4\pi ne \Delta\psi(t), \quad \frac{d\Delta_{\perp}(t)}{dt} \sim -\frac{Ne^2 \omega_H^2}{mc^3} \Delta_{\perp}(t) [\Delta\psi(t)]^2, \quad (274)$$

первое из которых следует из оценки для вектора поляризации $P \sim ne \Delta\psi(t)$, а второе — из (270). Решая уравнения (273), (274), получаем

$$\begin{aligned} \Delta_{\perp}(t) &\approx \frac{\Delta_{\perp}}{1 + A \exp(2\gamma t)}, \\ I(t) &\approx Nm\Delta_{\perp}^2 \gamma \frac{A \exp(2\gamma t)}{(1 + A \exp(2\gamma t))^2}, \end{aligned} \quad (275)$$

где $A = \omega_p c / (\omega_H \Delta_{\perp} \sqrt{N}) \sim 0,01$. Из (275) заключаем, что характерное время поперечного охлаждения составляет

$$t_{\text{cool}} \sim \frac{1}{2\gamma} A_{\text{cool}} \sim 4 \text{ мкс}, \quad A_{\text{cool}} = \ln \frac{1}{A}. \quad (276)$$

Интенсивность излучения $I(t)$ сначала экспоненциально возрастает ($\sim \exp(2\gamma t)$), достигая при $t_{\text{max}} = \ln(1/2A)/2\gamma$ наибольшей величины $I_{\text{max}} = (4/27)Nm\Delta_{\perp}^2 \gamma$, а затем экспоненциально убывает ($\sim \exp(-2\gamma t)$). Видно, что I_{max} меньше величины (269). Причина — незавершенность фазировки из-за быстрого излучения циклотронных волн ($\Delta\psi \leq 0,3$).

Логарифм в (276) описывает известный эффект задержки импульса сверхизлучения [37] и возникает из-за малости величины начального флуктуационного электрического поля (272), осуществляющего фазировку электронов. Отсюда ясно, что время поперечного охлаждения электронов t_{cool} уменьшится в $\sim A_{\text{cool}} \sim 5$ раз, если создать "затравочную" циркулярно поляризованную электромагнитную волну, величина электрического вектора \mathbf{E} которой сравнима с величиной вектора собственного поля сгустка (262):

$$E \leq E_d \sim 0,5 \text{ В см}^{-1}. \quad (277)$$

Этот вопрос требует дополнительного изучения с применением методов, изложенных в разделе 12.

В работах [46–48] предложено охлаждать электроны электромагнитной волной с $E \sim 100 \text{ В см}^{-1}$. В этом случае собственным полем сгустка \mathbf{E}_d (262) и тем более

полем радиационного трения E_R можно пренебречь. Движение каждого электрона тогда описывается гамильтонианом [43]

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = c \sqrt{\left(\mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)\right)^2 + m^2 c^2} + e\varphi(\mathbf{r}, t),$$

где $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ и $\varphi(\mathbf{r}, t)$ — векторный и электрический потенциалы волны. В связи с этим справедлива теорема Лиувилля и сохраняется фазовый объем сгустка (вообще говоря, шестимерный, но в интересующем нас случае (44) — четырехмерный). Таким образом, охлаждения электронов по методу [46–48] не происходит [49, 50]. По сути, возникает циклотронный резонанс, в результате которого скорость электронов достигает величины $v = eE_0 / [m(\omega_H - \Omega)]$. В этом установившемся режиме скорость перпендикулярна электрическому полю и поэтому уже не возрастает. При учете радиационного трения угол между скоростью и вектором электрического поля немного отличается от прямого, поэтому поле совершает над частицей работу, которая полностью преобразуется в энергию излучаемых электромагнитных волн. Предварительные численные расчеты (см. раздел 12) показали, что для охлаждения электронов поле волны E должно удовлетворять условию (277), поскольку при дальнейшем его увеличении охлаждение замедляется.

Отметим, что рассмотренный в данном разделе мазерный механизм поперечного охлаждения хорошо известен в физике плазмы, где теперь он называется "неустойчивостью бернштейновских мод". Впервые этот механизм обсуждался, по-видимому, в работе [51]. Сейчас он считается главным механизмом излучения некоторых астрофизических объектов [13, 52–54].

12. Роль диполь-дипольного взаимодействия электронных ларморовских орбит в явлении поперечного охлаждения

В разделе 11 показано, что под действием только одного внешнего поля охлаждения электронов не происходит. В этом случае электроны одновременно участвуют в двух движениях: внешнем и внутреннем (рис. 6). Внешнее — это совместное круговое движение вслед за электрическим полем. Внутреннее движение изображено на рис. 6 замкнутой кривой со стрелками. При отключении

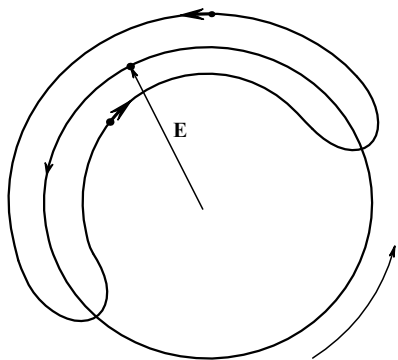


Рис. 6. Движение частиц сгустка в сопутствующей инерциальной системе отсчета при наложении вращающегося электрического поля E .

поля внешнее движение адиабатически исчезает и остается внутреннее.

Охлаждение электронов — это уменьшение энергии внутреннего движения. Если пренебречь взаимодействием электронов, то эти движения становятся независимыми. Внешнее движение создает коллективный вращающийся дипольный момент. Потери энергии на возникающее излучение восполняются работой внешнего поля. Дипольный момент, соответствующий внутреннему движению, равен нулю, поэтому энергия этого движения не изменяется и охлаждение отсутствует.

Вывод о наличии охлаждения при самопроизвольном механизме, рассмотренном в разделе 11, был основан на приближении самосогласованного поля (ПСП) E_d (262). Действие этого поля приближенно заменяет действие на данную частицу всех других частиц. Поле одинаково для каждой из них, поэтому в ПСП снова имеем гамильтоново движение, а значит — отсутствие охлаждения. В этом приближении снова возникают независимые внешнее и внутреннее движения, между которыми нет обмена энергией.

Правильный ответ состоит в следующем: охлаждение имеется и все оценки его характеристик на основе ПСП, приведенные в разделе 11, верны. К такому заключению приводит учет флуктуационных эффектов, которые игнорируются в ПСП. Флуктуационное электрическое поле $E_{fl} \sim ner_H$ создают главным образом ближайшие к данному электрону частицы (нас интересует резонансное поле, создаваемое вращающимися дипольными моментами ларморовских орбит). Поскольку $E_{fl} \sim E_d$, какой-либо малый параметр, позволяющий разделить внешнее и внутреннее движения, отсутствует. Избыточная энергия быстро "перекачивается" из внутреннего движения во внешнее и уносится электромагнитными волнами. Ниже показано, что этот процесс настолько эффективен, что основная часть энергии электронов излучается по механизму сверхизлучения (СИ) в виде кратковременного импульса.

Таким образом, к выводам, полученным на основе ПСП, следует относиться с осторожностью. К артефактам, связанным с ПСП, относится, например, указанное в работе [37] явление неполного излучения энергии в системе, состоящей из заряженных осцилляторов. В той же работе высказано предположение о разрушении метастабильных состояний такой системы диполь-дипольным взаимодействием осцилляторов, доказанное численными расчетами [40, 41].

Ввиду отсутствия малого параметра предсказания ПСП можно проверить только с помощью численного расчета, результаты которого обсуждаются в данном разделе. Такой расчет полностью, без приближений, учитывает диполь-дипольное взаимодействие электронных ларморовских орбит. Добавим, что это взаимодействие характеризуется пространственным масштабом $\sim \bar{R} = n^{-1/3}$ и поэтому является тем мелкомасштабным фактором, который согласно Ван-дер-Мееру [49] необходим для охлаждения частиц.

Для обсуждения роли диполь-дипольного взаимодействия рассмотрим систему заряженных нелинейных осцилляторов с размером (268), которая полностью аналогична рассмотренному в разделе 11 сгустку электронов в магнитном поле [37, 40, 41].

Пусть заряды величиной e , массой m находятся в точках с координатами $\mathbf{r}_a + \xi_a$ ($a = 1, 2, \dots, N$) на концах

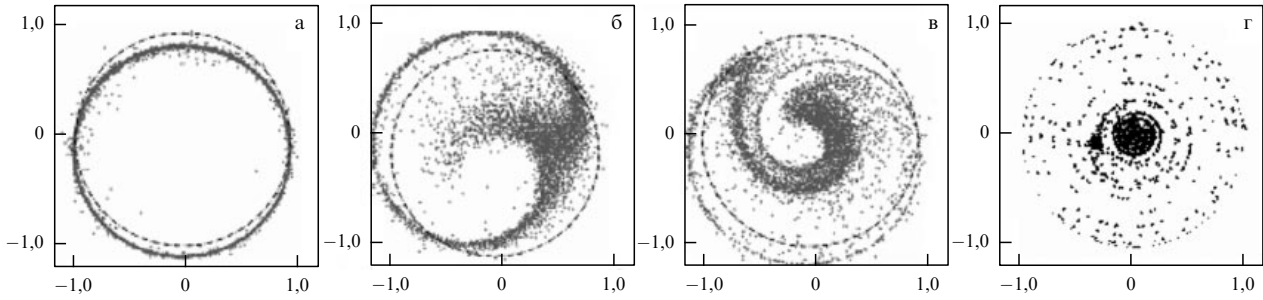


Рис. 7. Временная эволюция фазового распределения осцилляторов (изображены точками). По осям отложены координаты осцилляторов $\rho_a = (\text{Re}(F_a), \text{Im}(F_a))$ (см. формулу (282)). Штриховая окружность имеет единичный радиус. Число осцилляторов $N = 5 \times 10^3$.

пружинок с коэффициентами жесткости k , закрепленных в точках \mathbf{r}_a , в которых находятся также компенсирующие заряды $-e$. Уравнение движения осцилляторов имеет вид [44]

$$\ddot{\xi}_a + \omega_0^2(1 + \gamma \xi_a^2)\xi_a = -\frac{2e^2\omega_0^2}{3mc^3} \sum_b \dot{\xi}_b + \frac{e^2}{m} \sum_{b \neq a} \nabla_a \times \left(\nabla_a \times \frac{\xi_b(t_{ab})}{r_{ab}^3} \right). \quad (278)$$

Здесь $\nabla_a = \partial/\partial \mathbf{r}_a$, $\mathbf{r}_{ab} = \mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b$, $t_{ab} = t - r_{ab}/c$ — время запаздывания, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ — собственные частоты осцилляторов, γ — параметр нелинейности. После подстановки $\xi_a = b[\mathbf{F}_a(t) \exp(-i\omega t) + \mathbf{F}_a^*(t) \exp(i\omega t)]$, где b — характерная начальная амплитуда колебаний осцилляторов, система (278) принимает вид

$$\dot{\mathbf{F}}_a + i\delta(|\mathbf{F}_a|^2 - 1)\mathbf{F}_a = i\beta \sum_{b \neq a} \nabla_a \times \left[\nabla_a \frac{\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}_{ab})}{r_{ab}} \times \mathbf{F}_b(t) \right] - \frac{1}{2} \beta_0 \sum_b \mathbf{F}_b. \quad (279)$$

В (279) опущены вторые производные от функций $\mathbf{F}_a(t)$, которые изменяются медленно по сравнению с экспонентами $\exp(\pm i\omega t)$, и выбрана частота $\omega = \omega_0 + \delta$, $\delta = 3\gamma\omega_0 b^2/2$. Отметим, что случаю частиц, вращающихся в магнитном поле, соответствует $\delta < 0$. Для системы малого размера из (279) получаем

$$\dot{\mathbf{F}}_a + i\delta(|\mathbf{F}_a|^2 - 1)\mathbf{F}_a = i\beta \sum_{b \neq a} \frac{3\mathbf{n}_{ab}(\mathbf{n}_{ab}\mathbf{F}_b) - \mathbf{F}_b}{r_{ab}^3} - \frac{1}{2} \beta_0 \sum_b \mathbf{F}_b, \quad (280)$$

где $\beta = e^2/(2m\omega_0)$, $\beta_0 = 2e^2\omega_0^2/(3mc^3)$, $\mathbf{n}_{ab} = \mathbf{r}_{ab}/r_{ab}$. Первый член в правой части (280) описывает диполь-дипольное взаимодействие осцилляторов, второй — радиационное трение.

Следуя [55], рассмотрим одномерные осцилляторы, т.е. будем считать, что диполи колеблются вдоль оси x и поэтому векторы \mathbf{F}_a параллельны ей: $\mathbf{F}_a = F_a \mathbf{i}$, $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$. В произвольный момент времени t имеем $F_a(t) = \rho_a(t) \exp(i\varphi_a(t))$. Дипольные моменты атомов выражаются как $\mathbf{d}_a(t) = e\xi_a(t) = ebi\rho_a \cos(\omega t + \varphi_a)$. Интенсивность излучения, усредненная по быстрым осцилляциям диполей, дается выражением

$$I(t) = e^2\omega^4 b^2 \sum_{a,b} |F_a| |F_b| \frac{\cos(\varphi_a - \varphi_b)}{3c^3}. \quad (281)$$

Задача сводится, таким образом, к численному решению системы (280) для системы N осцилляторов, находящихся в теле произвольной формы, с заданной случайным образом начальной фазой $\varphi_a(0)$.

Для пояснения результатов расчетов рассмотрим комплексную плоскость $(x, y) = (\text{Re}(F), \text{Im}(F))$. Состояние системы осцилляторов изображается N точками (x_a, y_a) . Точки перемещаются в этой плоскости согласно уравнениям, следующим из (280):

$$\dot{\mathbf{v}}_a = \boldsymbol{\omega}(\rho_a) \times \rho_a + \mathbf{f} + \sum_b \mathbf{d}(\rho_a, \rho_b; \mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b). \quad (282)$$

Здесь $\rho_a = (\text{Re}(F_a), \text{Im}(F_a), 0)$, $\mathbf{v}_a = \dot{\rho}_a$, $\mathbf{f} = -\beta_0 \sum_a \rho_a/2$, $\boldsymbol{\omega}(\rho) = (0, 0, -\delta(\rho^2 - 1))$, $\mathbf{d}(\rho_a, \rho_b; \mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b)$ — слагаемое, учитывающее диполь-дипольное взаимодействие (не приводится из-за его громоздкости). Вектор $-\mathbf{f}$ пропорционален суммарному дипольному моменту системы $\mathbf{d} = e b \sum_a \rho_a/2$. В начальный момент времени точки равномерно разбросаны по окружности с единичным радиусом $\rho = 1$, поэтому $\omega(\rho_a) = 0$ при $t = 0$.

Для определенности будем считать, что $\gamma > 0$, т.е. частота колебаний осциллятора возрастает с увеличением амплитуды (картина возникающих явлений не зависит от знака параметра γ). Вследствие флуктуаций плотности распределения начальных фаз осцилляторов $\varphi_a(0)$ начальная величина вектора \mathbf{f} отлична от нуля. При $t = 0$ из (282) следует: $d\mathbf{d}/dt = -\mathbf{d}/\tau_{\text{SR}}$, где $\tau_{\text{SR}} = 1/(N\beta_0)$ — характерная длительность импульса СИ в рассматриваемой осцилляторной модели [37].

Согласно (282) система начнет движение со скоростью \mathbf{f} в направлении, противоположном дипольному моменту \mathbf{d} . Система точек за время $\sim \tau_{\text{SR}}$ смещается как целое на расстояние $\sim \mathbf{d}(0)/(Ne)$ (рис. 7а). В результате этого смещения половина точек оказывается в области $\rho > 1$, где $\omega > 0$, а другая половина — в области $\rho < 1$, где $\omega < 0$. Точки, находящиеся вне единичной окружности, начнут вращаться по часовой стрелке, внутри — против часовой стрелки. Такое вращение с разными угловыми скоростями приводит к формированию сгустка точек (рис. 7б). Момент начала формирования сгустка соответствует первому максимуму СИ (рис. 8), при котором излучается основная часть запасенной в осцилляторах энергии. Это происходит при $t \sim 10\tau_{\text{SR}}$, что согласуется со временем задержки для двухуровневых атомов $t_0 \sim \tau_{\text{SR}} \ln N$ [56]. Через пол-оборота указанные группы точек оказываются по разные стороны от начала координат (рис. 7в). В этот момент становится минимальным дипольный момент системы, что соответствует первому минимуму на рис. 8. В дальнейшем все повторяется, что

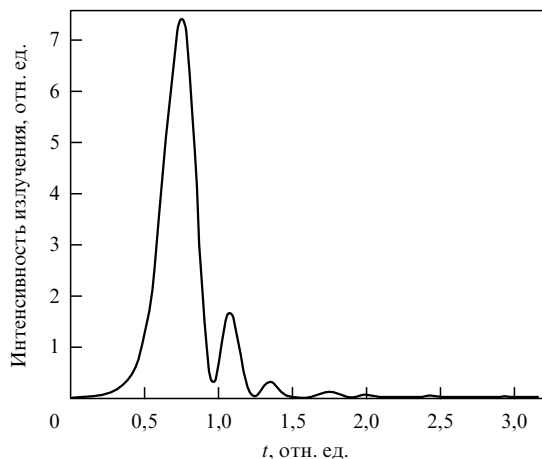


Рис. 8. Зависимость интенсивности излучения от времени при $N = 5 \times 10^3$.

дает импульсы СИ с гораздо меньшей интенсивностью. Повторные импульсы характерны для СИ в классических системах малого размера [55]. В квантовых системах, состоящих из двухуровневых атомов, они отсутствуют [56].

В работах [40, 41] показано также, что, как предполагалось в [37], при увеличении концентрации осцилляторов n происходит подавление СИ. Это объясняется хаотическим характером электрических полей диполей, который разрушает фазировку. Применительно к охлаждению электронов подавление СИ происходит при недостижимых на практике плотностях $n \geq 10^{12} \text{ см}^{-3}$.

Рассмотренную задачу об излучении системой заряженных осцилляторов несложно решить в рамках ПСП [37]. Ответ таков: при малой анизотропии начальных фаз $\varphi_a(0)$ за время $\sim \tau_{\text{SR}}$ излучается лишь малая доля энергии, после чего излучение прекращается. Таким образом, флуктуации электрического поля, созданные ближайшими диполями, играют ключевую роль в превращении всей запасенной осцилляторами энергии в излучение. Отметим, что на языке, привычном для специалистов по физике плазмы, эти флуктуации есть не что иное как перенос энергии внутри плазмы циклотронными волнами.

13. Заключение

В начале обзора на качественном уровне обсуждаются основные эффекты электронного охлаждения пучков тяжелых частиц, что необходимо для понимания более сложной задачи о торможении легких частиц — позитронов. Особое внимание уделено эффекту замагниченности электронов, т.е. увеличению тормозящей частицу силы трения с возрастанием величины магнитного поля. Поясняется, что, помимо "замораживания" поперечного движения электронов, ключевую роль в эффекте замагниченности играют "сплюснутость" их распределения (36) и характерные для этой сплюснутости новые свойства экранирования зарядов в электронном облаке: с возрастанием магнитного поля дебаевское облако уменьшается и поэтому возрастает действующее на заряд со стороны плазмы тормозящее электрическое поле. Это коллективный эффект, в котором в случае идеальной плазмы участвует большое число электронов.

В обзоре показано, что роль коллективных эффектов в электронном охлаждении возрастает: а) при уменьшении массы замедляющейся частицы; б) при увеличении анизотропии электронного облака T_{\perp}/T_{\parallel} ; в) при возрастании магнитного поля. Отсюда вытекает, что поведение позитронов в кулерах практически полностью определяется коллективными эффектами. Это отличие от случая замедления тяжелых частиц требует разработки новой теории, начало которой заложено недавними работами [8, 9, 21, 30, 38–41]. В данном обзоре обсуждаются эти работы, а также рассматриваются новые результаты, полученные на основе обобщения результатов указанных работ.

Диссипация энергии частицы происходит в пределах дебаевской сферы по механизму затухания Ландау, суть которого заключается в следующем. Вместе с частицей по плазме перемещается область, в которой движение электронов возмущено полем частицы. Образование такого облака электронов можно объяснить излучением и поглощением частицей виртуальных, не уходящих на бесконечность плазмонов. Часть энергии этого коллективного движения переходит в энергию одночастичного хаотического теплового движения, что порождает действующую на частицу силу трения.

При движении частицы вдоль магнитного поля со скоростью, превышающей характерную продольную скорость электронов $A_{\parallel} = \sqrt{T_{\parallel}/m}$, основным механизмом потери энергии частицей становится испускание реальных плазмонов, распространяющихся на расстояния, намного превышающие дебаевский радиус, т.е. черенковское излучение плазмонов. Эти механизмы играют основную роль в потере продольной энергии позитронов в облаке замагниченных электронов, поэтому они детально исследованы в данном обзоре.

Другой вклад в силу трения возникает от парных столкновений частицы с электронами, которые в сильном магнитном поле совершают практически одномерное движение вдоль силовых линий. Согласно [2, 3] при движении тяжелой частицы под некоторым углом к силовым линиям магнитного поля возникает асимметрия в зависимости от времени, в течение которого на частицу действует сила со стороны электрона, что обуславливает передачу импульса от электрона к частице. Такая асимметрия связана с ускорением электрона под действием электрического поля частицы. Этот эффект детально рассмотрен в разделе 3 на основе решения уравнений движения по методу последовательных приближений по электрическому полю частицы.

Для позитронов данный механизм оказывается несущественным, как и вообще парные столкновения с электронами. Основную роль для них играют коллективные эффекты: энергия продольного движения позитронов теряется и восполняется в результате испускания и поглощения реальных и виртуальных плазмонов, а энергия поперечного движения — в подобных процессах с возбуждением циклотронных волн, поскольку позитроны вращаются в магнитном поле в резонансе с электронами.

В обзоре приведено детальное качественное и количественное изучение этих процессов. Установлен своеобразный характер экранирования переменной части электромагнитного поля позитрона, вращающегося в облаке электронов. Это поле сосредоточено в "трубе" (203), вытянутой вдоль магнитного поля. Вне трубы поле

спадает по степенному закону. В трубе по механизму затухания Ландау происходит поглощение основной части энергии поперечного движения позитрона. Небольшая часть энергии "вытекает" из трубы и попадает в квазистатическую зону (П2.10), где вследствие действия эффектов запаздывания создаются расходящиеся циклотронные волны. Этот эффект экранирования поля вращающегося заряда, на наш взгляд, объясняет отмеченное в [28] подавление циклотронного излучения на основной гармонике в плотной плазме.

В обзоре проведено вычисление компонент динамической силы трения и коэффициентов продольной и поперечной диффузии позитронов в пространстве скоростей, которые необходимы для анализа кинетики замедления позитронов в кулерах. Показано, что в результате замедления в накопительном кольце устанавливается стационарная функция распределения позитронов, практически совпадающая с электронной.

Обзор завершается анализом возможности уменьшения энергии поперечного движения электронов в кулере, которое позволило бы снизить разброс позитронного пучка по импульсам.

В данном обзоре также приведены и проанализированы новые результаты, важные для планирования экспериментов с позитронными пучками, характерными для установки LEPТА [6].

Автору приятно поблагодарить за полезные обсуждения И.Н. Мешкова, А.О. Сидорина, А.В. Смирнова, Г.В. Трубникова, Е.М. Сыресина, С.Л. Яковенко, В.В. Березовского, Б.А. Трубникова, В.Д. Шафранова, В.И. Ильгисониса, В.С. Лисицу, В.П. Пастухова и К.В. Чукбара.

14. Приложения

П1. Черенковское торможение как возбуждение плазменных осцилляторов

Рассчитаем силу F_r из (132) по методу, заимствованному из [17], что позволит глубже понять ее природу. Полагаем, что частица М движется вдоль силовых линий однородного магнитного поля \mathbf{H} (ось z), а электроны замагничены. В соответствии с (25)

$$F_r = -q \left. \frac{\partial \varphi_p}{\partial z} \right|_{z=Vt}. \quad (\text{П1.1})$$

Линеаризованные уравнения движения замагниченных электронов имеют вид

$$m \frac{\partial v}{\partial t} = -qe \frac{z - Vt}{r^3} + e \frac{\partial \varphi_p}{\partial z}, \quad \frac{\partial n_1}{\partial t} + n \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \\ n_e = n + n_1, \quad |n_1| \ll n, \quad (\text{П1.2})$$

$$\Delta \varphi_p = 4\pi e n_1, \quad r = \sqrt{\rho^2 + (z - Vt)^2}, \\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \dot{z} = v.$$

Здесь $\mathbf{r} = (x, y, z)$ — координаты электрона; электроны рассматриваются как жидкость, движущаяся вдоль силовых линий магнитного поля со скоростью $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. В (П1.2) переходим к фурье-компонентам по пространственным координатам, например,

$$v(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} v(\mathbf{k}, t) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}).$$

Исключая v и n_1 , получаем уравнение для $\varphi_p(\mathbf{k}, t)$:

$$\frac{\partial^2 \varphi_p}{\partial t^2} + \omega^2(\mathbf{k}) \varphi_p = -q \frac{4\pi k_{\parallel}^2 \omega_p^2}{k^4} \exp(-ik_{\parallel} Vt), \quad (\text{П1.3})$$

где $\omega(\mathbf{k})$ — частота плазмона, определенная формулой (127). Уравнение (П1.3) имеет ясный физический смысл: движущаяся частица М возбуждает "плазменные осцилляторы" (если представить плазму как механическую систему с собственными частотами $\omega(\mathbf{k})$).

Рассмотрим случай, в котором при временах $t < 0$ частица покоится, а при $t > 0$ движется со скоростью V . Это означает, что уравнение (П1.3) следует решать с начальным условием $\varphi_p = 0, \partial \varphi_p / \partial t = 0$ при $t = 0$. Решение имеет вид

$$\varphi_p(\mathbf{k}, t) = \frac{2\pi k_{\parallel}^2 \omega_p^2}{\omega_k k^4} Q(\mathbf{k}, t), \quad (\text{П1.4})$$

где $\omega_k \equiv \omega(\mathbf{k})$,

$$Q(\mathbf{k}, t) = \frac{\exp(-ik_{\parallel} Vt) - \exp(-i\omega_k t)}{\omega_k - k_{\parallel} V} + \\ + \frac{\exp(-ik_{\parallel} Vt) - \exp(-i\omega_k t)}{\omega_k + k_{\parallel} V}.$$

Нас интересует установившееся дебаевское облако, т.е. случай, когда $t \gg \omega_p^{-1}$. Тогда выражение (П1.4) можно преобразовать, используя формулу из приложения 1 в книге [57]:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - \exp(-ixt)}{\alpha} = \frac{1}{\alpha - i0}.$$

Согласно последней формуле при $t \rightarrow \infty$ имеем

$$\varphi_p(\mathbf{k}, t) \rightarrow \frac{2\pi k_{\parallel}^2 \omega_p^2}{\omega_k k^4} \left(\frac{1}{\omega_k - k_{\parallel} V - i0} + \frac{1}{\omega_k + k_{\parallel} V + i0} \right) \times \\ \times \exp(-ik_{\parallel} Vt).$$

Отсюда и из (П1.1) следует:

$$F_r = -q \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} k_{\parallel} \varphi_p(\mathbf{k}, t) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{R}(t)) = \\ = \frac{q^2 \omega_p^2}{4\pi} \int d^3 k \frac{k_{\parallel}^3}{\omega_k k^4} [\delta(\omega_k - k_{\parallel} V) - \delta(\omega_k + k_{\parallel} V)], \quad (\text{П1.5})$$

где $\mathbf{R}(t) = \mathbf{V}t$. Интегрирование с использованием формулы

$$\delta\left(\omega_p \frac{|k_{\parallel}|}{k} - \lambda k_{\parallel} V\right) = \frac{k}{\omega_p |k_{\parallel}|} \delta\left(k - \frac{\omega_p}{V} \lambda \text{sign } k_{\parallel}\right)$$

дает результат (132). Здесь $\lambda = +1$ и $\lambda = -1$ соответствуют первой и последней δ -функциям в формуле (П1.5). Отсюда заключаем, что, во-первых, выполняется соотношение $\text{sign } k_{\parallel} = \lambda$ и, во-вторых, величина волнового вектора испускаемых плазмонов равна $k = \omega_p / V$.

П2. Экранирование поля позитрона, вращающегося в магнитном поле в облаке замагниченных электронов

Рассмотрим неподвижный ($V_{\parallel} = 0$) позитрон, вращающийся по ларморовской орбите и находящийся внутри

облака замагниченных электронов с резко анизотропным распределением (44). Он излучает циклотронные волны с частотой $\omega \approx \omega_H$ и длиной волны

$$\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega_H n_0}, \quad (\text{П2.1})$$

где n_0 — коэффициент преломления плазмы на данной частоте (и для данного типа волн).

Выражения для n_0 приведены во многих книгах (см., например, [11–17, 58]), однако они сложны, поэтому для большей наглядности здесь мы ограничимся оценкой этой величины. Пренебрегая пространственной дисперсией (что равнозначно случаю холодной плазмы), рассмотрим электрон в однородных полях: постоянном магнитном и переменном электрическом

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 \cos \omega t = \text{Re} [\mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t)].$$

Это движение описывается уравнениями

$$m\ddot{\mathbf{r}} - \frac{e}{c} (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{H}) = -e\mathbf{E}(t).$$

Отсюда, предполагая наличие слабого затухания, получаем решение указанных уравнений для установившегося движения:

$$\mathbf{r}(t) = \frac{e}{m(\omega^2 - \omega_H^2)} \left(\mathbf{E} - i \frac{\omega_H}{\omega} (\mathbf{h} \times \mathbf{E}) \right) + \frac{e}{m\omega^2} (\mathbf{Eh}) \mathbf{h}.$$

Как и при выводе формулы (121), введем векторы поляризации \mathbf{P} и электрической индукции \mathbf{D} , как это делается в теории плазмы по аналогии с диэлектриками [59]. Учитывая связь $D_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta} E_\beta$, приходим к формуле (123), описывающей холодную плазму. Из нее следует искомая оценка:

$$n_0 = \sqrt{\varepsilon}, \quad |\varepsilon - 1| \sim \frac{\omega_p^2}{\omega_H |\Delta\omega|}, \quad (\text{П2.2})$$

$$\Delta\omega = \omega - \omega_H, \quad |\Delta\omega| \ll \omega_H.$$

Оценку (П2.2) можно получить еще более простым способом, рассматривая каждый электрон как одномерный (для простоты) осциллятор, который описывается уравнением:

$$\ddot{\xi} + \omega_H^2 \xi = -\frac{e}{m} E. \quad (\text{П2.3})$$

Решение последнего уравнения

$$\xi = \frac{e}{m(\omega^2 - \omega_H^2)} E \approx \frac{e}{2m\omega_H \Delta\omega} E$$

вновь приводит к оценке (П2.2).

При типичных параметрах электронного охлаждения (42), (44) ширина циклотронного резонанса определяется доплеровским механизмом, поэтому

$$\Delta\omega \sim \Delta\omega_D = b_{\parallel} \omega_H, \quad b_{\parallel} = \frac{A_{\parallel}}{c},$$

$$|\varepsilon - 1| \sim \frac{\omega_p^2}{\omega_H^2} \frac{1}{\beta_{\parallel}} \sim 10^2, \quad \beta_{\parallel} = \frac{A_{\parallel}}{c}, \quad (\text{П2.4})$$

$$n_0 = \sqrt{\varepsilon} \sim \frac{\omega_p}{\omega_H \sqrt{\beta_{\parallel}}} \sim 10, \quad \lambda_0 \sim 1 \text{ см.}$$

При малом значении $r_{\text{Нр}}$, свойственном случаю (170) и замагниченным электронам, за возбуждение циклотронных волн отвечает дипольное слагаемое (178), в котором следует положить $V_{\parallel} = 0$, $\Omega = \omega$. Для электрического потенциала в плазме получаем выражения:

$$\varphi(\mathbf{k}, \omega) = \frac{8\pi^2 q}{k^2} \left[\frac{\delta(\omega - \omega_H)}{\varepsilon(\mathbf{k}, \omega_H)} + \frac{\delta(\omega + \omega_H)}{\varepsilon(\mathbf{k}, -\omega_H)} \right] J_1(k_{\perp} r_{\text{Нр}}),$$

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^3 k d\omega}{(2\pi)^4} \varphi(\mathbf{k}, \omega) \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}) =$$

$$= \frac{2q}{\pi} \text{Re} [J \exp(-i\omega_H t)], \quad (\text{П2.5})$$

$$J = \int \frac{d^3 k}{k^2} \frac{\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})}{\varepsilon(\mathbf{k}, \omega_H)} J_1(k_{\perp} r_{\text{Нр}}). \quad (\text{П2.6})$$

При $V_{\parallel} = 0$ сохраним в (183) резонансные слагаемые ($S = \pm 1$) и положим $J_1(k_{\perp} V_{\perp} / \omega_H) \approx k_{\perp} V_{\perp} / \omega_H$, что дает погрешность $\sim 20\%$. В соответствии с результатами, приведенными в разделе 7, заранее предположим, что при $|\omega| \approx \omega_H$ наиболее важна область (202), (203) (это подтвердится расчетом). Получаем выражения:

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega_H) \approx 1 + \frac{i}{|k_{\parallel}| d_0}, \quad (\text{П2.7})$$

$$d_0 = \frac{\omega_H A_{\parallel}}{\omega_p^2 \sqrt{2\pi}} \sim 0,04 \text{ см}, \quad (\text{П2.8})$$

$$J \approx 2\pi I_1 I_2, \quad (\text{П2.9})$$

$$I_1 = \int_0^{\infty} \frac{dk_{\perp}}{k_{\perp}} J_0(k_{\perp}, r_{\perp}) J_1(k_{\perp} r_{\text{Нр}}) \approx$$

$$\approx \left(1 + \frac{1}{3} \alpha_0^2 + A_0 \alpha_0^4 \right)^{-3/4},$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_{\parallel} |k_{\parallel}|}{|k_{\parallel}| + i/d_0} \exp(ik_{\parallel} z) =$$

$$= -\frac{i}{d_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_{\parallel} \exp(ik_{\parallel} z)}{|k_{\parallel}| + i/d_0} \approx \frac{2i}{\alpha_0} \ln \left(\frac{\beta_0}{1 + \beta_0^3} \right),$$

$$A_0 = \left(\frac{2}{3} \right)^{4/3}, \quad \alpha_0 = \frac{r_{\perp}}{r_{\text{Нр}}}, \quad \beta_0 = \frac{|z|}{d_0}.$$

Приведенные здесь интерполяционные формулы для интегралов I_1 и I_2 являются точными в предельных случаях малых и больших значений параметров α_0 и β_0 . Из (П2.5), (П2.9) следует, что в квазистатической области

$$r < \lambda_0, \quad (\text{П2.10})$$

где можно пренебречь запаздыванием ($c \rightarrow \infty$), электрический потенциал, создаваемый в плазме вращающимся по ларморовской орбите позитроном, сосредоточен в области (203). Последняя представляет собой узкую длинную трубу с радиусом $\sim r_{\text{Нр}}$, вытянутую вдоль магнитного поля на расстояние $\sim d_0$ по обе стороны от позитрона, причем:

$$\frac{d_0}{r_{\text{Нр}}} \sim \frac{A_{\perp}}{A_{\parallel}} = \sqrt{\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}}} \gg 1. \quad (\text{П2.11})$$

При удалении от оси трубы электрический потенциал убывает по закону $\sim r_{\perp}^{-3}$. Внутри трубы, т.е. при расстояниях $r_{\perp} \leq r_{\text{Нр}}$ от ее оси, на расстоянии $|z|$ от позитрона

потенциал имеет вид

$$\varphi \sim \frac{qd_0}{|z|^2}, \quad |z| \gg d_0, \quad (\text{П2.12})$$

$$\varphi \sim \frac{q}{d_0} \ln \left(\frac{d_0}{|z|} \right), \quad r_0 \ll |z| \ll d_0. \quad (\text{П2.13})$$

При расстояниях $|z| < r_0 \sim (r_{\text{Нр}}^2 d_0)^{1/3}$ формулы (П2.12), (П2.13) становятся несправедливыми. В этом случае приближенно имеем поле квадруполья, поскольку дипольный момент орбиты позитрона перпендикулярен магнитному полю, т.е. направлению на точку наблюдения:

$$\varphi \sim \frac{qr_{\text{Нр}}^2}{|z|^3}, \quad r_{\text{Нр}} < |z| < r_0. \quad (\text{П2.14})$$

Оценим суммарный дипольный момент \mathbf{D}' электронов в трубе. Для этого исходим из простейшей осцилляторной модели, задаваемой уравнением (П2.3), в которое в качестве электрического поля следует подставить значение, следующее из (П2.5), (П2.9) и (П2.13):

$$E_{\perp} = -\frac{\partial \varphi}{\partial r_{\perp}} \sim \frac{q}{d_0 r_{\text{Нр}}} \exp(-i\omega_{\text{Н}} t). \quad (\text{П2.15})$$

Из (П2.3) и (П2.15) для наведенного дипольного момента одного электрона получаем оценку

$$d_1 \sim e \xi_1 \sim \frac{e^3}{m d_0 r_{\text{Нр}} \omega_{\text{Н}} \Delta \omega}. \quad (\text{П2.16})$$

В качестве $\Delta \omega$ в (П2.16) следует подставить величину

$$\Delta \omega = \max(\Delta \omega_{\text{dd}}, \Delta \omega_{\text{D}}). \quad (\text{П2.17})$$

Здесь $\Delta \omega_{\text{dd}}$ — характерное изменение ларморовской частоты электрона (см. (196)),

$$\Delta \omega_{\text{dd}} \sim \frac{\omega_{\text{p}}^2}{\omega_{\text{H}}}, \quad (\text{П2.18})$$

вызванное диполь-дипольным взаимодействием с соседними электронами:

$$V_{\text{dd}} \sim e^2 \frac{\xi_1 \xi_2}{r^3(t)} \sim e^2 n \xi_1 \xi_2, \quad (\text{П2.19})$$

где $\mathbf{r}(t)$ — разность координат центров ларморовских кружков для орбит этих электронов. Оценку (П2.18) получим, рассматривая два электрона как два взаимодействующих осциллятора:

$$m \ddot{\xi}_1 + m \omega_{\text{H}}^2 \xi_1 = -\frac{\partial V_{\text{dd}}}{\partial \xi_1} = -\frac{e^2}{r^3} \xi_2, \quad (\text{П2.20})$$

$$m \ddot{\xi}_2 + m \omega_{\text{H}}^2 \xi_2 = -\frac{\partial V_{\text{dd}}}{\partial \xi_2} = -\frac{e^2}{r^3} \xi_1.$$

Согласно (П2.20) при неизменном расстоянии $r(t) = \text{const} \sim \bar{R}$ имеются два собственных колебания с близкими частотами

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\omega_{\text{H}}^2 \pm \frac{e^2}{m r^3}} \approx \omega_{\text{H}} \pm \frac{e^2}{2m r^3 \omega_{\text{H}}}, \quad (\text{П2.21})$$

откуда следует оценка (П2.18).

Характерное уширение циклотронного резонанса, вызванное эффектом Доплера

$$\Delta \omega'_{\text{D}} \sim |k_{\parallel}| d_{\parallel}. \quad (\text{П2.22})$$

Отметим, что $\Delta \omega'_{\text{D}} \neq \Delta \omega_{\text{D}}$ (см. (П2.4)). Причина разной величины этих частотных расстройек состоит в том, что уходящие циклотронные волны формируются слишком далеко — на границе $r \sim \lambda_0$ между квазистатической (П2.10) и волновой ($r > \lambda_0$) зонами. В связи с этим заметим, что

$$\frac{\lambda_0}{d_0} \sim n_0 \gg 1. \quad (\text{П2.23})$$

В формировании поля в интересующей нас области конструктивно интерферируют, т.е. дают основной вклад, волны с длиной

$$\lambda \sim d_0 \ll \lambda_0, \quad |k_{\parallel}| = \frac{2\pi}{\lambda} \sim \frac{1}{d_0}, \quad (\text{П2.24})$$

поэтому из (П2.20), (П2.22) заключаем:

$$\Delta \omega_{\text{D}} \sim \frac{d_{\parallel}}{d_0}. \quad (\text{П2.25})$$

Отсюда и из (П2.8), (П2.18) следует:

$$\Delta \omega'_{\text{D}} \sim \Delta \omega_{\text{dd}}, \quad \Delta \omega \sim \Delta \omega'_{\text{D}} \sim \Delta \omega_{\text{dd}}. \quad (\text{П2.26})$$

Объем трубы $V_t \sim r_{\text{Нр}}^2 d_0$. Из (П2.16), (П2.18), (П2.26) имеем

$$|\mathbf{D}'| \sim d_1 n V_t \sim e r_{\text{Нр}}. \quad (\text{П2.27})$$

Приведенные оценки позволяют установить природу электромагнитного поля позитрона в квазистатической зоне. Как указывалось в разделе 2, статическое поле (поле неподвижного заряда, диполя, квадруполья и т.д.) в облаке замагниченных электронов с анизотропным распределением экранируется на расстоянии $\sim R_{\parallel}$. Осциллирующая с частотой $\approx \omega_{\text{H}}$ часть поля позитрона проникает в плазму гораздо глубже: на расстояние $\sim d_0 \gg R_{\parallel}$. В результате столкновения электронного и позитронного ларморовских кружков ($\rho_0 \sim \bar{r}_{\text{H}} \sim r_{\text{Нр}}$) движение электрона возмущается. Поскольку эти возмущения производятся одним и тем же позитроном, они являются коррелированными для разных электронов, испытавших указанное столкновение. Это когерентное возмущение ларморовского движения электронов переносится ими вдоль силовых линий магнитного поля на некоторое расстояние L .

Для оценки расстояния L рассмотрим два электрона, испытавших столкновение с позитроном. Из-за наличия небольшой разницы в их собственных частотах (П2.17) когерентность между этими электронами исчезнет, когда разность фаз их ларморовского вращения составит

$$\Delta \varphi \sim \Delta \omega \frac{L}{v_{\parallel}} \sim \frac{\omega_{\text{p}}^2 L}{\omega_{\text{H}} v_{\parallel}} \sim \pi. \quad (\text{П2.28})$$

Отсюда следует оценка для L , совпадающая с оценкой для d_0 (см. (П2.8)). Указанное когерентное возмущение

движения электронов приводит к появлению в трубе самосогласованного электрического потенциала. Здесь необходимо, впрочем, пояснить, что возмущение лармовского движения происходит не в результате парного взаимодействия (см. раздел 7), а в результате коллективного.

В плазме происходит полное экранирование не только постоянной, но и переменной во времени части поля позитрона: оценку (П2.27) следует понимать как $\mathbf{D} + \mathbf{D}' \approx 0$. Из изменения характера зависимости φ от z при $|z| \sim d_0$ (см. (П2.12), (П2.13)) ясно, что характерный размер вдоль оси z , на котором осуществляется это экранирование, составляет $\sim d_0$. Такое экранирование сильно подавляет циклотронное излучение при большом значении показателя преломления n_0 (см. (П2.4)), на что указано в работе [28] (некоторые проявления этого эффекта обсуждаются также в [37]). Согласно [28] подавление объясняется несовпадением направлений вращения электрона и векторов поляризации циклотронных волн. Однако, как мы видели, подавляется также и циклотронное излучение позитрона, находящегося в электронном облаке. Таким образом, этот эффект не зависит от направления вращения излучающей частицы, поэтому данное выше объяснение, основанное на экранировании, на наш взгляд, предпочтительнее.

Итак, при условии

$$n_0 \sim \frac{\omega_p}{\omega_H} \sqrt{\frac{c}{\Delta_{\parallel}}} \gg 1, \quad (\text{П2.29})$$

т.е. при достаточно большой плотности плазмы, внутри квазистатической зоны (П2.10) появляется труба (203). По ней переносятся и в ней же практически полностью поглощается (по механизму затухания Ландау) энергия поперечного движения частицы. Запаздывание сигналов в трубе несущественно, поэтому процесс потери энергии является нерелятивистским (скорость света не входит в (201)). В работе [12] эти потери энергии частицей названы поляризационными.

Вследствие экранирования напряженность электромагнитного поля на расстоянии $r \sim \lambda$ от позитрона в $\sim \lambda_0/d_0 \sim n_0$ раз меньше, чем напряженность поля позитрона в вакууме. По этой причине интенсивность циклотронных волн, уходящих на бесконечность, в $\sim n_0^2$ раз меньше, чем в вакууме. Эти волны образуются вследствие эффекта запаздывания и поэтому их интенсивность намного меньше энергии, поглощаемой в единицу времени в трубе.

П3. Корреляционные функции напряженностей электрического поля в идеальной нерелятивистской плазме в магнитном поле

В однородной плазме корреляционная функция $\langle E_x(\mathbf{r}, t) E_\beta(\mathbf{r}', t') \rangle$ зависит лишь от разностей $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$, $t - t'$:

$$\begin{aligned} \langle E_x(\mathbf{r}, t) E_\beta(\mathbf{r}', t') \rangle &= E_{x\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'; t - t') = \\ &= \int dQ E_{x\beta}(\mathbf{k}, \omega) \exp [i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - i\omega(t - t')], \quad (\text{П3.1}) \end{aligned}$$

где $dQ = d^3k d\omega / (2\pi)^4$.

Для расчета тензора $E_{x\beta}(\mathbf{k}, \omega)$ применим метод из [12]. Аналогичная (П3.1) формула справедлива для флуктуа-

ций плотности заряда:

$$\begin{aligned} \langle \rho(\mathbf{r}, t) \rho(\mathbf{r}', t') \rangle &= R(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \\ &= \int dQ R(\mathbf{k}, \omega) \exp [i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - i\omega(t - t')]. \quad (\text{П3.2}) \end{aligned}$$

Из (П3.1), (П3.2) и фурье-разложений

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}, t) &= \int dQ \rho(\mathbf{k}, \omega) \exp (i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t), \\ E_x(\mathbf{r}, t) &= \int dQ E_x(\mathbf{k}, \omega) \exp (i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t) \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} \langle E_x(\mathbf{k}, \omega) E_\beta(\mathbf{k}', \omega') \rangle &= S E_{x\beta}(\mathbf{k}, \omega), \\ G \equiv \langle \rho(\mathbf{k}, \omega) \rho(\mathbf{k}', \omega') \rangle &= S R(\mathbf{k}, \omega), \end{aligned} \quad (\text{П3.3})$$

где $S = (2\pi)^4 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \delta(\omega + \omega')$. Из (21) и (П3.3) следует:

$$E_{x\beta}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{16\pi^2 k_x k_\beta}{k^4 |\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)|^2} R(\mathbf{k}, \omega), \quad (\text{П3.4})$$

где использовано свойство $\varepsilon(-\mathbf{k}, -\omega) = \varepsilon^*(\mathbf{k}, \omega)$.

Для системы из N точечных электронов в объеме V плотность заряда выражается в виде

$$\rho(\mathbf{r}, t) = -e \sum_{a=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)).$$

Здесь $\mathbf{r}_a(t)$ — радиус-вектор a -го электрона. Фурье-компонента плотности имеет вид

$$\rho(\mathbf{k}, \omega) = -e \sum_{a=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp [i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}_a(t)].$$

Отсюда и из (П3.3) находим

$$G = e^2 \sum_{a,a'} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dt dt' \exp (i\omega t + i\omega' t') F_{aa'}, \quad (\text{П3.5})$$

где

$$F_{aa'} = \langle \exp [-i\mathbf{k}\mathbf{r}_a(t) - i\mathbf{k}'\mathbf{r}_{a'}(t')] \rangle. \quad (\text{П3.6})$$

Для слагаемых с $a \neq a'$, соответствующих разным электронам, в приближении идеальной плазмы имеем разбиение на два независимых множителя:

$$F_{aa'} = \langle \exp [-i\mathbf{k}\mathbf{r}_a(t)] \rangle \langle \exp [-i\mathbf{k}'\mathbf{r}_{a'}(t')] \rangle.$$

Поскольку все электроны равноправны, то множитель $Q = \langle \exp [-i\mathbf{k}\mathbf{r}_a(t)] \rangle$ не зависит от номера a электрона, поэтому индекс a опускаем:

$$Q = \langle \exp [-i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)] \rangle. \quad (\text{П3.7})$$

Пусть \mathbf{r}_0 , \mathbf{v}_0 — начальные (при $t = 0$) положение и скорость электрона:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \int_0^t \dot{\mathbf{r}}(t_1, \mathbf{v}_0) dt_1. \quad (\text{П3.8})$$

Угловые скобки в (П3.5), (П3.6) означают усреднение по начальным данным $(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$. В приближении идеальной плазмы при расчете скорости электрона $\dot{\mathbf{r}}(t, \mathbf{v})$ следует

пренебречь его взаимодействием с другими электронами. Проведем сначала усреднение по \mathbf{r}_0 :

$$Q = \left\langle \exp \left[-i\mathbf{k} \int_0^t \dot{\mathbf{r}}(t_1, \mathbf{v}) dt_1 \right] \right\rangle_{\mathbf{v}_0} Q_{\mathbf{r}_0},$$

где в первом множителе правой части проводится усреднение по скоростям электронов \mathbf{v}_0 (далее индекс у \mathbf{v}_0 опускаем). Во втором множителе производится усреднение по начальному положению электрона \mathbf{r}_0 :

$$Q_{\mathbf{r}_0} = \frac{1}{V} \int d^3 r_0 \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_0) = \delta_{\mathbf{k},0} = \frac{(2\pi)^3}{V} \delta(\mathbf{k}). \quad (\text{П3.9})$$

Поскольку нас интересует случай $\mathbf{k} \neq 0$, то $Q_{\mathbf{r}_0} = 0$. Следовательно, для различных электронов ($a \neq a'$) корреляции отсутствуют: $F_{aa'} = 0$. Отсюда заключаем, что $F_{aa'} = \delta_{aa'} F$, где $F = \langle \exp[-i\mathbf{k}\mathbf{r}(t) - i\mathbf{k}'\mathbf{r}(t')] \rangle$. Аналогично Q функция F не зависит от номера электрона. Усреднение по начальному положению \mathbf{r}_0 дает следующие результаты:

$$\frac{1}{V} \int d^3 r_0 \exp[-i(\mathbf{k} + \mathbf{k}')\mathbf{r}_0] = \frac{(2\pi)^3}{V} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}'),$$

$$F = \frac{(2\pi)^3}{V} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') F_{\mathbf{k}}, \quad (\text{П3.10})$$

$$F_{\mathbf{k}} = \langle \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{R}(t, t')) \rangle_{\mathbf{v}} = F_1 F_2,$$

$$F_1 = \langle \exp(-i\mathbf{k}_{\perp} \mathbf{R}_{\perp}(t, t')) \rangle_{\mathbf{v}_{\perp}}, \quad (\text{П3.11})$$

$$F_2 = \langle \exp(-ik_{\parallel} v_{\parallel}(t - t')) \rangle_{v_{\parallel}}, \quad (\text{П3.12})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(t, t') &= \int_{t'}^t \dot{\mathbf{r}}(t_1, \mathbf{v}) dt_1 = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t') = \\ &= \mathbf{R}_{\perp}(t, t') + v_{\parallel}(t - t') \mathbf{h}. \end{aligned}$$

Пусть две частицы при $t = 0$ начинают движение из одной и той же точки с одинаковыми значениями $v_{\perp} \equiv |\mathbf{v}_{\perp}|$ и v_{\parallel} , но с разными направлениями векторов \mathbf{v}_{\perp} . Тогда вектор $\mathbf{R}(t, t')$ для второй частицы получится из такого же вектора для первой частицы в результате его поворота вокруг оси, параллельной магнитному полю, на угол, который составляют между собой векторы \mathbf{v}_{\perp} этих двух частиц. Следовательно, усреднение по направлениям \mathbf{v}_{\perp} в (П3.11) эквивалентно усреднению по направлениям вектора \mathbf{R}_{\perp} :

$$F_1 = \langle \exp(-i\mathbf{k}_{\perp} \mathbf{R}_{\perp}(t, t')) \rangle_{\varphi, v_{\perp}} = \langle J_0(k_{\perp} R_{\perp}) \rangle_{v_{\perp}}. \quad (\text{П3.13})$$

Для группы электронов с одинаковыми v_{\perp} величина $\mathbf{R}_{\perp}(t, t')$ равна длине хорды, соединяющей две точки на окружности с радиусом $r_{\text{H}} = v_{\perp}/\omega_{\text{H}}$ и угловой мерой дуги $\varphi = \omega_{\text{H}}(t - t')$:

$$R_{\perp}(t, t') = 2r_{\text{H}} \sin \left[\frac{1}{2} \omega_{\text{H}}(t - t') \right]. \quad (\text{П3.14})$$

Из соотношений (П3.11)–(П3.14) видно, что $F_{\mathbf{k}}$ в (П3.10) зависит от t и t' только в комбинации $\tau = t - t'$, $F_{\mathbf{k}} \equiv F_{\mathbf{k}}(\tau)$. Это свойство с учетом (П3.9) позволяет привести (П3.5) к виду

$$G = S \frac{e^2}{V} \sum_a F_{\mathbf{k}}(\omega), \quad (\text{П3.15})$$

где

$$F_{\mathbf{k}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau F_{\mathbf{k}}(\tau) \exp(i\omega\tau). \quad (\text{П3.16})$$

Суммирование по номеру a электрона дает N , поэтому из сравнения (П3.15) с (П3.3) получаем $R(\mathbf{k}, \omega) = ne^2 F_{\mathbf{k}}(\omega)$. Отсюда и из (П3.4), (П3.13), (П3.14) следует:

$$E_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{16\pi^2 ne^2 k_{\alpha} k_{\beta}}{k^4 |\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)|^2} F_{\mathbf{k}}(\omega), \quad (\text{П3.17})$$

$$F_{\mathbf{k}}(\omega) = \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \exp(i\Omega\tau) J_0 \left(z \sin \frac{\omega_{\text{H}}\tau}{2} \right) \right\rangle_{\mathbf{v}},$$

где $\Omega = \omega - k_{\parallel} v_{\parallel}$, $z = 2k_{\perp} r_{\text{H}}$.

Введем переменную $\varphi = \omega_{\text{H}}\tau$, разобьем область интегрирования по $d\varphi$ на интервалы длиной 2π ($\varphi = 2\pi l + \psi$, $0 < \psi < 2\pi$). На каждом интервале проинтегрируем по $d\psi$. С учетом формулы

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp(i\beta_0 l) = 2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\beta_0 - 2\pi l)$$

получим

$$F_{\mathbf{k}}(\omega) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left\langle \delta(\Omega - \omega_{\text{H}} l) \int_0^{2\pi} d\varphi \exp(i l \varphi) J_0 \left(y \sin \frac{\varphi}{2} \right) \right\rangle,$$

где $y = 2k_{\perp} r_{\text{H}}$. Из формулы (см. [60])

$$\int_0^{\pi} dx \cos(2lx) J_0(c \sin x) = \pi J_l^2 \left(\frac{c}{2} \right)$$

находим

$$F_{\mathbf{k}}(\omega) = 2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \langle \delta(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega_{\text{H}} l) \rangle_{v_{\parallel}} \langle J_l^2(k_{\perp} r_{\text{H}}) \rangle_{v_{\perp}}. \quad (\text{П3.18})$$

При $|\omega| \sim \omega_{\text{p}} \ll \omega_{\text{H}}$ в (П3.18) достаточно оставить член с $l = 0$:

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{k}}(\omega) &\approx 2\pi \langle \delta(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}) \rangle_{v_{\parallel}} \langle J_0^2(k_{\perp} r_{\text{H}}) \rangle_{v_{\perp}} = \\ &= \frac{2\pi}{|k_{\parallel}|} g \left(\frac{\omega}{k_{\parallel}} \right) P_0(\beta^2), \end{aligned} \quad (\text{П3.19})$$

где $\beta = k_{\perp} \bar{r}_{\text{H}}$, $P_0(x) = \exp(-x) I_0(x)$, здесь I_0 — модифицированная функция Бесселя нулевого индекса. Кроме того, согласно (183) имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathbf{k}, \omega) &\approx 1 + \frac{P_0(\beta^2)}{k^2 R_{\parallel}^2} \left[1 - X \left(\frac{\omega}{\sqrt{2} k_{\parallel} \Delta_{\parallel}} \right) + \right. \\ &\quad \left. + i \operatorname{sign}(k_{\parallel}) Y \left(\frac{\omega}{\sqrt{2} k_{\parallel} \Delta_{\parallel}} \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{П3.20})$$

где функции X , Y определены в (144). При $|\omega| \approx \omega_{\text{H}}$ в (П3.18) достаточно оставить члены с $l = \pm 1$, что дает

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{k}}(\omega) &\approx \frac{2\pi}{|k_{\parallel}|} \left[g \left(\frac{\omega - \omega_{\text{H}}}{k_{\parallel}} \right) + g \left(\frac{\omega + \omega_{\text{H}}}{k_{\parallel}} \right) \right] \times \\ &\quad \times \exp(-k_{\perp}^2 \bar{r}_{\text{H}}^2) I_1(k_{\perp}^2 \bar{r}_{\text{H}}^2). \end{aligned} \quad (\text{П3.21})$$

Как и в разделе 7, находим, что при $|\omega| \approx \omega_H$ в трубе (202)

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) \approx 1 - \frac{\omega_p^2 P_1(\beta^2)}{2\sqrt{2} \omega_H |k_{\parallel}| A_{\parallel} x_1} [X(x_1) - i \operatorname{sign}(\omega) Y(x_1)], \quad (\text{П3.22})$$

где $x_1 = |\omega - \omega_H|/(\sqrt{2} k_{\parallel} A_{\parallel})$, функция P_1 дается формулой (212).

П4. Диффузия позитронов в пространстве скоростей, происходящая в изотропной электронной плазме

Тензор коэффициентов диффузии частицы M в пространстве скоростей, входящий в уравнение Фоккера–Планка (152), определяется как

$$D_{\alpha\beta}(\mathbf{V}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta t} \langle \Delta V_{\alpha} \Delta V_{\beta} \rangle, \quad (\text{П4.1})$$

где ΔV_{α} — изменение за время Δt скорости частицы, вызванное флуктуирующей частью электрического поля $\mathbf{E}'(\mathbf{r}, t)$: $V_{\alpha}(t + \Delta t) = V_{\alpha}(t) + \Delta V_{\alpha}$. С целью нахождения $D_{\alpha\beta}(\mathbf{V})$ рассмотрим величину $G_{\alpha\beta}(t) = \langle V_{\alpha}(t) V_{\beta}(t) \rangle$. Флуктуации поля в интервалах $(-\infty, t)$ и $(t, t + \Delta t)$ независимы, поэтому

$$\langle V_{\alpha}(t) \Delta V_{\beta} \rangle = 0,$$

$$G_{\alpha\beta}(t + \Delta t) = \langle V_{\alpha}(t + \Delta t) V_{\beta}(t + \Delta t) \rangle = G_{\alpha\beta}(t) + 2\Delta t D_{\alpha\beta}.$$

Отсюда следует:

$$\begin{aligned} D_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \frac{dG_{\alpha\beta}(t)}{dt} = \frac{1}{2} \left[\langle \dot{V}_{\alpha}(t) V_{\beta}(t) \rangle + \langle V_{\alpha}(t) \dot{V}_{\beta}(t) \rangle \right] = \\ &= \frac{q}{2M} (K_{\alpha\beta} + K_{\beta\alpha}), \end{aligned}$$

где $K_{\alpha\beta} = \langle E'_{\alpha}(\mathbf{V}t, t) V_{\beta}(t) \rangle$.

Пусть при временах $t \rightarrow -\infty$ скорость частицы равна $\mathbf{V}^{(i)}$. Тогда

$$\mathbf{V}(t) = \mathbf{V}^{(i)} + \frac{q}{M} \int_{-\infty}^t \mathbf{E}'(\mathbf{V}t_1, t_1) dt_1.$$

Поскольку $\langle E'_{\alpha}(\mathbf{V}t, t) V_{\beta}^{(i)} \rangle = 0$, то

$$\begin{aligned} K_{\alpha\beta} &= \frac{q}{M} \int_{-\infty}^t dt_1 \langle E'_{\alpha}(\mathbf{V}t, t) E'_{\beta}(\mathbf{V}t_1, t_1) \rangle = \\ &= \frac{q}{M} \int dQ E_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) \int_0^{\infty} d\tau \exp[-i(\Omega - i0)\tau] = \\ &= -\frac{iq}{M} \int \frac{dQ}{\Omega - i0} E_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$D_{\alpha\beta} = -\frac{iq}{M^2} \int \frac{dQ}{\Omega - i0} E_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega). \quad (\text{П4.2})$$

П5. Коэффициент продольной диффузии позитронов в пространстве скоростей, происходящей в электронной плазме

Согласно результатам, представленным в разделе 7, продольная диффузия позитрона определяется главным образом флуктуациями электрического поля с характерными частотами порядка ленгмюровской (см. (226)). Аналогично тому, как это сделано в приложении П4,

получим выражение для продольного коэффициента диффузии:

$$\begin{aligned} D_{\parallel}(V_{\parallel}, V_{\perp}) &= \frac{d}{dt} \left\langle \frac{1}{2} \langle V_{\parallel}^2(t) \rangle \right\rangle = \langle \dot{V}_{\parallel}(t) V_{\parallel}(t) \rangle = \\ &= \frac{q^2}{M^2} \int_{-\infty}^t dt' \langle E'_z(V_{\parallel}t, t) E'_z(V_{\parallel}t', t') \rangle = \\ &= \frac{q^2}{M^2} \int_{-\infty}^0 dt' \langle E_z(0, 0) E_z(V_{\parallel}t', t') \rangle. \end{aligned} \quad (\text{П5.1})$$

Выражение для корреляционной функции напряженности электрических полей получено в приложении П3, откуда следует формула

$$\begin{aligned} D_{\parallel} &= \frac{q^2}{M^2} \int_{-\infty}^0 dt' \int dQ E_{zz}(\mathbf{k}, \omega) \exp[i(k_{\parallel} V_{\parallel} - \omega)t'] = \\ &= -\frac{iq^2}{M^2} \int dQ E_{zz}(\mathbf{k}, \omega) \frac{1}{\omega - k_{\parallel} V_{\parallel} - i0}, \end{aligned} \quad (\text{П5.2})$$

где $dQ = d^3k d\omega / (2\pi)^4$. Как и в случае продольной силы $\mathbf{F}_{\text{см}}$ (см. раздел 7), основной вклад в коэффициент продольной диффузии D_{\parallel} вносит область (130). Вместе с (66) это дает: $k\bar{\tau}_H \ll 1$, поэтому в (П3.19) можно положить $\bar{\tau}_H = 0$:

$$F_{\mathbf{k}}(\omega) \approx \frac{2\pi}{|k_{\parallel}|} g\left(\frac{\omega}{k_{\parallel}}\right). \quad (\text{П5.3})$$

Согласно (П3.17)

$$E_{zz}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{16\pi^2 n e^2 k_{\parallel}^2}{k^4 |\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)|^2} F_{\mathbf{k}}(\omega). \quad (\text{П5.4})$$

Подынтегральное выражение в (П5.2) преобразуем по формуле Сохоцкого:

$$\frac{1}{\omega - k_{\parallel} V_{\parallel} - i0} = P\left(\frac{1}{\omega - k_{\parallel} V_{\parallel}}\right) + \pi i \delta(\omega - k_{\parallel} V_{\parallel}).$$

Первое слагаемое в правой части этой формулы дает нулевой вклад в D_{\parallel} , поскольку согласно (П5.3) и (П5.4) $E_{zz}(-\mathbf{k}, -\omega) = E_{zz}(\mathbf{k}, \omega)$. Проводя интегрирование по $d\omega$, получаем

$$\begin{aligned} D_{\parallel} &= \frac{q^2}{2M^2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} E_{zz}(\mathbf{k}, k_{\parallel} V_{\parallel}) = \\ &= \frac{2nq^2 e^2}{M^2} g(V_{\parallel}) \int \frac{d^3k |k_{\parallel}|}{k^4 |\varepsilon(\mathbf{k}, k_{\parallel} V_{\parallel})|^2}. \end{aligned} \quad (\text{П5.5})$$

Согласно (П3.20)

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathbf{k}, k_{\parallel} V_{\parallel}) &= \\ &= 1 + \frac{1}{k^2 R_{\parallel}^2} \left[1 - X\left(\frac{V_{\parallel}}{\sqrt{2} A_{\parallel}}\right) + i \operatorname{sign}(k_{\parallel}) Y\left(\frac{V_{\parallel}}{\sqrt{2} A_{\parallel}}\right) \right]. \end{aligned}$$

Сингулярность в ε при $k \rightarrow 0$ есть не что иное, как дебаевское экранирование поля позитрона в замагниченном электронном облаке (66). Вследствие этого экранирования интеграл (П5.5) при малых волновых векторах $k \rightarrow 0$ сходится. Однако он логарифмически расходится при $k \rightarrow \infty$, поскольку в (П3.19) и (П3.20) в соответствии с (66) мы положили $\bar{\tau}_H = 0$, $\beta = 0$. В представляющей

наибольший интерес области скоростей позитронов (199) с логарифмической точностью $\sim 1/A_{\parallel}$, где $A_{\parallel} = \ln(k_{\max}/k_{\min}) = \ln(R_{\parallel}/\bar{r}_H)$, в (П5.5) можно положить $\varepsilon = 1$, что дает

$$D_{\parallel} \approx \frac{4\pi n q^2 e^2}{M^2} A_{\parallel} g(V_{\parallel}), \quad V_{\parallel} \leq A_{\parallel} \ln \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}}, \quad V_{\perp} \leq A_{\perp}. \quad (\text{П5.6})$$

При скоростях позитрона $V_{\parallel} \geq A_{\parallel} \ln(T_{\perp}/T_{\parallel})$ формула (П5.6) становится неверной и из (П5.5) получаем

$$D_{\parallel} \approx \frac{2\pi n q^2 e^2 T_{\parallel}}{m M^2 V_{\parallel}^3}. \quad (\text{П5.7})$$

В этом случае основной вклад в коэффициент продольной диффузии D_{\parallel} дает резкий максимум в подынтегральном выражении (П5.5), порождаемый малостью знаменателя $|\varepsilon(\mathbf{k}, k_{\parallel} V_{\parallel})|^2$, что соответствует черенковскому испусканию плазмонов. Более простой способ получения формулы (П5.7) состоит в использовании выражений (189) и (252).

В проекте LEPTA согласно (77) $\bar{r}_H \sim R_{\parallel}$, поэтому погрешность формулы (П5.6) значительна: $\sim 100\%$. Если не использовать условие замагничности (66), то расчет становится громоздким. Однако принципиальных отличий от проделанных выше выкладок не возникает, поэтому ниже приводятся лишь основные шаги и опускаются детали.

При отказе от приближения замагничности, которое соответствует предельному случаю $r_H \rightarrow 0$, $r_{HP} \rightarrow 0$, вместо (П5.1) и (П5.2) получаем

$$\begin{aligned} D_{\parallel} &= \frac{q^2}{M^2} \int_{-\infty}^t dt' \langle E_z(\mathbf{r}(t), t) E_z(\mathbf{r}(t'), t') \rangle = \\ &= \frac{q^2}{M^2} \int_{-\infty}^t dt' \int dQ E_{zz}(\mathbf{k}, \omega) \times \\ &\times \exp[\mathbf{i}\mathbf{k}_{\perp}(\mathbf{r}_{\perp}(t) - \mathbf{r}_{\perp}(t'))] \exp(-i\Omega\tau), \end{aligned}$$

где $\tau = t - t'$, $\Omega = \omega - k_{\parallel} V_{\parallel}$. Вектор $\mathbf{r}_{\perp}(t)$ вращается с ларморовской частотой, поэтому экспоненты в данном выражении преобразуем по формуле

$$\exp(\mathbf{i}\mathbf{k}_{\perp} \mathbf{r}_{\perp}(t)) = \sum_{S=-\infty}^{\infty} J_S(k_{\perp} r_{HP}) \exp(iS\omega t). \quad (\text{П5.8})$$

Делая замену $t' = t - \tau$, проводим интегрирование по dt в интервале $(0, +\infty)$. Кроме того, учитывая, что временной масштаб $T_H = 2\pi/\omega_H$ мал по сравнению с характерным временем релаксации позитронной функции распределения $\Phi(\mathbf{V}, t)$, проводим усреднение D_{\parallel} по ларморовскому периоду, что сводится к интегралу

$$\frac{1}{T_H} \int_0^{T_H} dt \exp[i\omega_H(S - S')t] = \delta_{SS'}.$$

Вместо (П5.5) получаем

$$\begin{aligned} D_{\parallel} &= \frac{\pi q^2}{M^2} \sum_{S=-\infty}^{\infty} \int dQ J_S^2(k_{\perp} r_{HP}) E_{zz}(\mathbf{k}, \omega) \times \\ &\times \delta(\omega - k_{\parallel} V_{\parallel} - \omega_H S) \approx \\ &\approx \frac{q^2}{2M^2} \int d^3k J_0^2(k_{\perp} r_{HP}) E_{zz}(\mathbf{k}, k_{\parallel} V_{\parallel}), \end{aligned} \quad (\text{П5.9})$$

где опущены экспоненциально малые слагаемые с $S \neq 0$ (что связано с множителем $g(\omega/k_{\parallel})$ в (П3.19)). Отсюда и из (П5.4) следует

$$D_{\parallel} = \frac{2\pi n q^2 e^2}{M^2} g(V_{\parallel}) \int \frac{d^3k |k_{\parallel}| J_0^2(k_{\perp} r_{HP}) P_0(\beta^2)}{k^4 |\varepsilon(\mathbf{k}, k_{\parallel} V_{\parallel})|^2}. \quad (\text{П5.10})$$

Согласно формуле (П3.20)

$$|\varepsilon(\mathbf{k}, k_{\parallel} V_{\parallel})|^2 = \left(1 + \frac{p}{k^2}\right)^2 + \frac{q^2}{k^4}, \quad (\text{П5.11})$$

$$p = R_{\parallel}^{-2} P_0(\beta^2) \left[1 - X\left(\frac{V_{\parallel}}{\sqrt{2} A_{\parallel}}\right)\right],$$

$$q = R_{\parallel}^{-2} P_0(\beta^2) Y\left(\frac{V_{\parallel}}{\sqrt{2} A_{\parallel}}\right).$$

Подынтегральная функция в (П5.9) является четной по k_{\parallel} , что позволяет свести область интегрирования по dk_{\parallel} к интервалу $(0, +\infty)$. Поскольку $k_{\parallel} dk_{\parallel} = k dk$, интегрирование по азимутальному углу дает $d^3k k_{\parallel} \rightarrow 2\pi k_{\perp} dk_{\perp} k dk$. Выражение (П5.9) приводится к двойному интегралу

$$\int_0^{\infty} k_{\perp} dk_{\perp} \int_{k_{\perp}}^{\infty} \frac{dk}{k^3} \dots,$$

который после интегрирования по частям дает:

$$D_{\parallel} = \frac{4\pi n q^2 e^2}{M^2} g(V_{\parallel}) \int_0^{\infty} \frac{dk_{\perp} J_0^2(k_{\perp} r_{HP}) P_0(\beta^2)}{k_{\perp} [(1 + p/k_{\perp}^2)^2 + q^2/k_{\perp}^4]}.$$

Переходя к безразмерной переменной, получаем окончательную формулу, пригодную для описания эксперимента LEPTA:

$$D_{\parallel} = \frac{4\pi n q^2 e^2}{M^2} g(V_{\parallel}) \int_0^{\infty} \frac{d\beta J_0^2(\gamma\beta) P_0(\beta^2)}{\beta [(1 + k_1/\beta^2)^2 + k_2^2/\beta^4]}, \quad (\text{П5.12})$$

$$k_1 = P_0(\beta^2) \left[1 - X\left(\frac{V_{\parallel}}{\sqrt{2} A_{\parallel}}\right)\right] \left(\frac{\bar{r}_H}{R_{\parallel}}\right)^2,$$

$$k_2 = P_0(\beta^2) Y\left(\frac{V_{\parallel}}{\sqrt{2} A_{\parallel}}\right) \left(\frac{\bar{r}_H}{R_{\parallel}}\right)^2, \quad \gamma = \frac{r_{HP}}{\bar{r}_H}.$$

П6. Коэффициент поперечной диффузии D_{\perp} позитронов в пространстве скоростей, происходящей в облаке замагниченных электронов

В разделе 7 и приложении П5 были рассчитаны продольная сила трения $\mathbf{F}_{\text{см}}$ и коэффициент диффузии D_{\parallel} . Расчет верен при условии (46) идеальности плазмы со сплюсненным распределением. В отличие от продольной силы $\mathbf{F}_{\text{см}}$, поперечная сила $\mathbf{F}_{\text{сд}}$ рассчитана в разделе 7 при дополнительном предположении о замагничности электронов (66). Во избежание превышения точности коэффициент диффузии D_{\perp} будет рассчитан в тех же приближениях (46), (66).

Аналогично тому, как это сделано в приложениях П4 и П5, получим выражение для поперечного коэффициента диффузии:

$$\begin{aligned} D_{\perp}(V_{\parallel}, V_{\perp}) &= \hat{V}_{\perp\alpha} \hat{V}_{\perp\beta} D_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \langle V_{\perp}^2(t) \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \langle \dot{V}_{\perp}(t) \mathbf{V}_{\perp}(t) \rangle \equiv \frac{1}{2} \langle \dot{V}_{\alpha}(t) V_{\alpha}(t) \rangle. \end{aligned} \quad (\text{П6.1})$$

Здесь и далее латинскими буквами обозначаются двумерные индексы $a = (x, y) \equiv (1, 2)$; по повторяющимся индексам идет, как обычно, суммирование, $V_a \equiv (\mathbf{V}_\perp)_a$. Компоненты скорости \mathbf{V}_\perp подчиняются уравнению движения, в которое входит флуктуационная часть поля:

$$\dot{V}_a = \omega_H \varepsilon_{ab} V_b + \frac{q}{M} E'_a, \quad (\text{П6.2})$$

где ε_{ab} — абсолютно антисимметричный тензор в двумерном пространстве (x, y) ,

$$\varepsilon_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \varepsilon_{ab} h_\gamma.$$

Из (П6.1), (П6.2) следует

$$D_\perp = \frac{q}{2M} \langle V_a(t) E'_a(\mathbf{r}(t), t) \rangle, \quad (\text{П6.3})$$

где $\mathbf{r}(t)$ — невозмущенная винтовая траектория позитрона (без учета флуктуаций). Из (П6.2) имеем

$$V_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{ab}(t-t') \frac{q}{M} E'_b(\mathbf{r}(t'), t') dt', \quad (\text{П6.4})$$

здесь $G_{ab}(\tau) = [\delta_{ab} \cos(\omega_H \tau) + \varepsilon_{ab} \sin(\omega_H \tau)] \theta(\tau)$ — функция Грина уравнения (П6.2), $\dot{G}_{ab} - \omega_H \varepsilon_{ac} G_{cb} = \delta_{ab} \delta(\tau)$, где $\tau = t - t'$. Из (П3.1) и (П6.3) следует

$$D_\perp = \frac{q^2}{2M^2} \int dt' dQ G_{ab} E_{ab}(\mathbf{k}, \omega) \exp[\mathbf{i}\mathbf{k}(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t')) - i\omega\tau]. \quad (\text{П6.5})$$

Дальнейшие преобразования аналогичны тем, которые привели от формулы (П5.7) к (П5.9):

$$D_\perp = -\frac{iq^2}{2M^2} \sum_{S=-\infty}^{\infty} \int dQ J_S^2(k_\perp r_{\text{Нр}}) E_{aa}(\mathbf{k}, \omega) \times \left[\frac{1}{\Omega - i0 - (S+1)\omega_H} + \frac{1}{\Omega - i0 - (S-1)\omega_H} \right],$$

где $\Omega = \omega - k_\parallel V_\parallel$ и учтена симметричность корреляционной функции электрических полей (П3.4) по индексам. Из четности (П3.4) по отношению к изменению знаков всех аргументов следует

$$D_\perp = \frac{\pi q^2}{4M^2} \sum_{S=-\infty}^{\infty} \int dQ J_S^2(k_\perp r_{\text{Нр}}) E_{aa}(\mathbf{k}, \omega) \times \left\{ \delta[\Omega - (S+1)\omega_H] + \delta[\Omega - (S-1)\omega_H] \right\}. \quad (\text{П6.6})$$

Оставим в этой сумме наиболее существенные слагаемые:

$$D_\perp = D_\perp^{(1)} + D_\perp^{(2)}. \quad (\text{П6.7})$$

Здесь $D_\perp^{(1)}$ соответствует слагаемому с $S = 0$:

$$D_\perp^{(1)} = \frac{\pi q^2}{4M^2} \int dQ J_0^2(k_\perp r_{\text{Нр}}) E_{aa}(\mathbf{k}, \omega) \times [\delta(\Omega - \omega_H) + \delta(\Omega + \omega_H)], \quad (\text{П6.8})$$

а $D_\perp^{(2)}$ — слагаемым с $S = \pm 1$,

$$D_\perp^{(2)} = \frac{\pi q^2}{2M^2} \int dQ J_1^2(k_\perp r_{\text{Нр}}) E_{aa}(\mathbf{k}, \omega) \delta(\Omega). \quad (\text{П6.9})$$

Основной вклад в член $D_\perp^{(1)}$ дает труба (165). Из (П6.8), учитывая (П3.17), (П3.21) и (П3.22), с логарифмической точностью $\sim 1/\ln(T_\perp/T_\parallel) \sim 0,15$ получаем

$$D_\perp^{(1)} = \frac{\pi n q^2 e^2}{M^2} g(V_\parallel) \ln \frac{T_\perp}{T_\parallel}. \quad (\text{П6.10})$$

Основной вклад в слагаемое $D_\perp^{(2)}$ дает область $|k_\parallel| \sim \sim k_\perp \sim 1/R_\parallel$. Для замагниченных электронов (66) из (П3.17), (П3.19), (П3.20), (П6.9) получаем

$$D_\perp^{(2)} \sim \frac{n q^2 e^2}{M^2} g(V_\parallel) \ln \frac{R_\parallel}{\bar{r}_H}. \quad (\text{П6.11})$$

Для эксперимента ЛЕРТА $\bar{r}_H \sim R_\parallel$, поэтому из (П6.10), (П6.11) заключаем, что

$$\frac{D_\perp^{(2)}}{D_\perp^{(1)}} \sim \frac{1}{\ln(T_\perp/T_\parallel)}. \quad (\text{П6.12})$$

Следовательно, с той же логарифмической точностью имеем

$$D_\perp \approx D_\perp^{(1)}. \quad (\text{П6.13})$$

Список литературы

1. Будкер Г И *Атомная энергия* **22** 346 (1967) [Budker G I *Sov. At. Energy* **22** 438 (1967)]
2. Мешков И Н *ЭЧАЯ* **25** 1487 (1994) [Meshkov I N *Phys. Part. Nucl.* **25** 631 (1994)]
3. Пархомчук В В, Скринский А Н *УФН* **170** 473 (2000) [Parkhomchuk V V, Skrinkskii A N *Phys. Usp.* **43** 433 (2000)]
4. Мешков И Н *ЭЧАЯ* **28** 495 (1997) [Meshkov I N *Phys. Part. Nucl.* **28** 198 (1997)]
5. Meshkov I, Skrinksky A *Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res. A* **379** 41 (1996)
6. Meshkov I N, Sidorin A O *Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res.* **391** 216 (1997)
7. Meshkov I et al. *Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res. A* **441** 145 (2000)
8. Artamonov A, Derbenev Ya, Saldin E *Part. Accel.* **23** 79 (1988)
9. Artamonov A S, Derbenev Ya S *Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res. A* **284** 248 (1989)
10. Трубников Б А, в сб. *Вопросы теории плазмы* Вып. 1 (Под ред. М А Леонтовича) (М.: Госатомиздат, 1963) с. 98 [Translated into English: Trubnikov B A, in *Reviews of Plasma Physics* Vol. 1 (Ed. M A Leontovich) (New York: Consultants Bureau, 1965) p. 105]
11. Трубников Б А *Теория плазмы* (М.: Энергоатомиздат, 1996)
12. Шафранов В Д, в сб. *Вопросы теории плазмы* Вып. 3 (Под ред. М А Леонтовича) (М.: Госатомиздат, 1963) с. 3 [Translated into English: Shafranov V D, in *Reviews of Plasma Physics* Vol. 3 (Ed. M A Leontovich) (New York: Consultants Bureau, 1967) p. 1]
13. Железняков В В *Излучение в астрофизической плазме* (М.: Янус-К, 1997); Zheleznyakov V V *Radiation in Astrophysical Plasmas* (Dordrecht: Kluwer, 1996)
14. Александров А Ф, Рухадзе А А *Лекции по электродинамике плазмopodobных сред* (М.: Изд-во МГУ, 1999)
15. Лифшиц Е М, Питаевский Л П *Физическая кинетика* (М.: Наука, 1979) [Translated into English: Lifshitz E M, Pitaevskii L P *Physical Kinetics* (Oxford: Pergamon Press, 1981)]
16. Арцимович А А, Сагдеев Р З *Физика плазмы для физиков* (М.: Атомиздат, 1979)
17. Гинзбург В Л *Распространение электромагнитных волн в плазме* (М.: Физматгиз, 1960) [Translated into English: Ginzburg V L *Propagation of Electromagnetic Waves in Plasma* (New York: Gordon and Breach, 1962)]

18. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Электродинамика сплошных сред* (М.: Наука, 1982) [Translated into English: Landau L D, Lifshitz E M *Electrodynamics of Continuous Media* (Oxford: Pergamon Press, 1984)]
19. Будкер Г И, Булышев А Ф, Диканский Н С, в сб. *Труды V Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц* Т. 1 (М.: Наука, 1977) с. 236; Препринт № 76-92 (Новосибирск: ИЯФ СО АН СССР, 1976)
20. Куделайнен В И и др. *ЖЭТФ* **83** 2056 (1982) [Kudelainen V I et al. *Sov. Phys. JETP* **56** 1191 (1982)]
21. Дербенев Я С, Скринский А Н *Физика плазмы* **4** 492 (1978) [Derbenev Ya S, Skriskii A N *Sov. J. Plasma Phys.* **4** 273 (1978)]
22. Хинтон Ф "Явления переноса в столкновительной плазме", в сб. *Основы физики плазмы* Т. 1 (Под ред. А А Галеева, Р Судана) (М.: Энергоатомиздат, 1983); Hinton F, in *Basic Plasma Physics* (Handbook of Plasma Physics, Vol. 1, Eds A A Galeev, R N Sudan) (Amsterdam: North-Holland, 1983)
23. Montgomery D, Joyce G, Turner L *Phys. Fluids* **17** 2201 (1974)
24. Боголюбов Н Н *Проблемы динамической теории в статистической физике* (М.-Л.: ГИТТЛ, 1946) [Translated into English: Bogoliubov N N *The Dynamical Theory in Statistical Physics* (Delhi: Hindustan Publ. Corp., 1965)]; Боголюбов Н Н *Избранные труды по статистической физике* (М.: Изд-во МГУ, 1979)
25. Rostoker N *Nucl. Fusion* **1** 101 (1961)
26. Климонтович Ю Л, Силин В П *ЖЭТФ* **42** 286 (1962) [Klimontovich Yu L, Silin V P *Sov. Phys. JETP* **15** 199 (1962)]
27. Rostoker N, Rosenbluth M N *Phys. Fluids* **3** 1 (1960)
28. Гинзбург В Л, Железняков В В *Изв. вузов. Радиофизика* **1** 59 (1958)
29. Тимофеев А В *Резонансные явления в колебаниях плазмы* (М.: Физматлит, 2000)
30. Меньшиков Л И *ЖЭТФ* **134** (6) (2008) (в печати)
31. Elliott R J, Loudon R J *Phys. Chem. Solids* **15** 196 (1960)
32. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Квантовая механика: Нерелятивистская теория* (М.: Наука, 1974) [Translated into English: Landau L D, Lifshitz E M *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory* (Oxford: Pergamon Press, 1977)]
33. Меньшиков Л И, Ландау Р У *УФН* **173** 233 (2003) [Men'shikov L I, Landau R *Phys. Usp.* **46** 227 (2003)]
34. Беляев С Т, в сб. *Физика плазмы и проблемы управляемых термоядерных реакций* Т. 3 (Под ред. М А Леонтовича) (М.: Изд-во АН СССР, 1958) [Translated into English: Belyaev S T, in *Plasma Physics and the Problem of Controlled Thermonuclear Reactions* Vol. 3 (Ed. M A Leontovich) (New York: Pergamon Press, 1959)]
35. Гапонов А В *Изв. вузов. Радиофизика* **2** 450 (1959)
36. Гапонов А В, Петелин М И, Юлпатов В К *Изв. вузов. Радиофизика* **10** 1414 (1967) [Gaponov A V, Petelin M I, Yulpatov V K *Radiophys. Quantum Electron.* **10** 794 (1967)]
37. Меньшиков Л И *УФН* **169** 113 (1999) [Men'shikov L I *Phys. Usp.* **42** 107 (1999)]
38. Березовский В В, Меньшиков Л И *Письма в ЖЭТФ* **86** 411 (2007) [Berezovskii V V, Men'shikov L I *JETP Lett.* **86** 355 (2007)]
39. Меньшиков Л И *Письма в ЖЭТФ* **87** 211 (2008) [Men'shikov L I *JETP Lett.* **87** 182 (2008)]
40. Berezovsky V, Men'shikov L, Öberg S, Latham C J. *Opt. Soc. Am. B* **25** 458 (2008)
41. Березовский В В, Меньшиков Л И, Оберг С, Лэссем К Д *Физика плазмы* **34** (2008) (в печати)
42. Пархомчук В В *Письма в ЖЭТФ* **87** 210 (2008) [Parkhomchuk V V *JETP Lett.* **87** 181 (2008)]
43. Дэвидсон Р "Кинетическая теория волн и неустойчивостей в однородной плазме", в сб. *Основы физики плазмы* Т. 1 (Под ред. А А Галеева, Р Судана) (М.: Энергоатомиздат, 1983) с. 479; Davidson R C, in *Basic Plasma Physics* (Handbook of Plasma Physics, Vol. 1, Eds A A Galeev, R N Sudan) (Amsterdam: North-Holland, 1983) p. 521
44. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Наука, 1988) [Translated into English: Landau L D, Lifshitz E M *The Classical Theory of Fields* (Oxford: Pergamon Press, 1983)]
45. Голубев С В, Шалашов А Г *Письма в ЖЭТФ* **86** 98 (2007) [Golubev S V, Shalashov A G *JETP Lett.* **86** 91 (2007)]
46. Ikegami H *Phys. Rev. Lett.* **64** 1737, 2593 (1990)
47. Ikegami H *Phys. Scripta* **48** 32 (1993)
48. Ikegami H, in *Workshop on Beam Cooling and Related Topics, Montreux, Switzerland, 4–8 October, 1993* (CERN 94-03, Ed. J Bosser) (Geneva: European Organization for Nuclear Research, 1994) p. 81
49. Van der Meer S, in *Workshop on Beam Cooling and Related Topics, Montreux, Switzerland, 4–8 October, 1993* (CERN 94-03, Ed. J Bosser) (Geneva: European Organization for Nuclear Research, 1994) p. 123
50. Mohl D, Sessler A M, in *Workshop on Beam Cooling and Related Topics, Montreux, Switzerland, 4–8 October, 1993* (CERN 94-03, Ed. J Bosser) (Geneva: European Organization for Nuclear Research, 1994) p. 429
51. Сагдеев Р З, Шафранов В Д *ЖЭТФ* **39** 181 (1960) [Sagdeev R Z, Shafranov V D *Sov. Phys. JETP* **12** 130 (1961)]
52. Willes A J, Robinson P A *J. Plasma Phys.* **58** 171 (1997)
53. Willes A J, Robinson P A *Astrophys. J.* **467** 465 (1996)
54. Willes A J, Wu K *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **348** 285 (2004); *astro-ph/0302583*
55. Ильинский Ю А, Маслова Н С *ЖЭТФ* **94** 171 (1988) [Il'inskiy Yu A, Maslova N S *Sov. Phys. JETP* **67** 96 (1988)]
56. Dicke R H *Phys. Rev.* **93** 99 (1954)
57. Давыдов А С *Квантовая механика* (М.: Наука, 1973) [Translated into English: Davydov A S *Quantum Mechanics* (Oxford: Pergamon Press, 1976)]
58. Bekefi G *Radiation Processes in Plasma* (New York: Wiley, 1966) [Бекефи Дж *Радиационные процессы в плазме* (М.: Мир, 1971)]
59. Кадомцев Б Б *Коллективные явления в плазме* 2-е изд. (М.: Наука, 1988) [Translated into English: Kadomtsev B B "Cooperative effects in plasmas", in *Reviews of Plasma Physics* Vol. 22 (Ed. V D Shafranov) (New York: Kluwer Acad./Consultants Bureau, 2001) p. 1]
60. Прудников А П, Брычков Ю А, Маричев О И *Интегралы и ряды. Специальные функции* (М.: Наука, 1983) [Translated into English: Prudnikov A P, Brychkov Yu A, Marichev O I *Integrals and Series* Vols 2, 3 (New York: Gordon and Breach, 1986, 1990)]

New directions in the theory of electron cooling

L.I. Men'shikov

Russian Research Centre "Kurchatov Institute",
pl. Kurchatova 1, 123182 Moscow, Russian Federation
E-mail: mleonid1954@mail.ru

The electron cooling of ions and positrons is reviewed theoretically. Arbitrary magnetic field formulas are discussed for the drag force of ions in an electron beam with a squashed velocity distribution characteristic of electron cooling. For positrons, the practically most important cases of medium to high magnetic fields are considered. The friction force and the components of the velocity diffusion tensor of positrons are calculated. The relaxation to a steady state distribution of electron-cooled storage ring positrons is discussed, showing that the steady state distribution function of positrons is practically identical to that of electrons. The possibility of reducing the transverse electron temperature — and thus creating the necessary condition for reducing the electron momentum spread — is explored.

PACS numbers: 29.27.Bd, 42.50.Fx, 52.25.Os
Bibliography — 60 references
Uspekhi Fizicheskikh Nauk **178** (7) 673–708 (2008)

DOI: 10.3367/UFN.R0178.200807a.0673
Received 4 July 2007, revised 12 March 2008
Physics – Uspekhi **51** (7) (2008)