

КОНФЕРЕНЦИИ И СИМПОЗИУМЫ

Научная сессия Отделения физических наук
Российской академии наук

(27 февраля 2008 г.)

PACS number: 01.10.Fv

DOI: 10.3367/UFNr.0178.200807g.0757

27 февраля 2008 г. в конференц-зале Физического института им. П.Н. Лебедева РАН состоялась Научная сессия Отделения физических наук Российской академии наук. На сессии были заслушаны доклады:

1. **Лозовик Ю.Е., Меркулова С.П., Соколик А.А.** (Институт спектроскопии РАН, Троицк, Московская обл.). *Коллективные электронные явления в графене.*

2. **Морозов С.В.** (Институт проблем технологии микроэлектроники РАН, Черноголовка, Московская обл.), **Новоселов К.С., Гейм А.К.** (University of Manchester, Manchester, UK). *Электронный транспорт в графене.* Краткое содержание докладов публикуется ниже.

PACS numbers: 71.35.Ji, 73.20.Mf, **73.21.-b**
DOI: 10.3367/UFNr.0178.200807h.0757

Коллективные электронные явления
в графене

Ю.Е. Лозовик, С.П. Меркулова, А.А. Соколик

1. Введение

Углерод является одним из наиболее интересных химических элементов. Он не только служит основой обширного царства органических веществ, но и сам образует разнообразные кристаллы и наноструктуры. Такое богатство форм связано со способностью атомов углерода по-разному соединяться между собой и создавать различные решетки и цепочки.

В результате гибридизации s - и p -орбиталей четырех валентных электронов атом углерода может образовывать ковалентные связи со своими соседями, причем разные способы гибридизации приводят к различной ориентации и числу связей.

При sp^3 -гибридизации атомы углерода соединяются в трехмерную систему — тетраэдрическую кристаллическую решетку алмаза, а sp^2 -гибридизация приводит к образованию двумерной, плоской, структуры — графена, кристаллическая решетка которого имеет вид шестиугольных сот. Наиболее привычная форма углерода — графит — может рассматриваться как стопка листов графена, относительно слабо связанных между собой силами Ван-дер-Ваальса.

Углерод образует и квазиодномерные структуры — углеродные нанотрубки, разные типы которых со структурной точки зрения можно рассматривать как свернутый различными способами лист графена (см., например, обзоры [1]). Квазиульмерную углеродную наноструктуру — фуллерен — можно рассматривать как результат "замощения" сферы решеткой графена типа "пчелиные соты", причем в силу теоремы Эйлера необходимо внести в решетку как минимум 12 "дефектов", роль которых играют пятиугольные ячейки (см., например, [2]). Таким образом, графен в определенном смысле является ключевой квазидвумерной системой, с точки зрения классификации дающей начало весьма разнообразным структурам: трехмерному графиту, квазиодномерным нанотрубкам и квазиульмерным фуллеренам.

Слабое сцепление и относительная независимость слоев графена в кристалле графита (именно это свойство используется в обычных карандашах) уже давно наталкивали исследователей на мысль о том, что графен может быть получен как изолированный объект, двумерная мембрана толщиной в один атом [3]. Но помимо связанных с этим технических сложностей существовали некоторые сомнения в стабильности графена как двумерной плоской структуры. Из аргументов Ландау и Пайерлса [4] следовало, что в чисто двумерной системе не может быть дальнего кристаллического порядка ввиду логарифмической расходимости длинноволновых флуктуаций двумерных смещений атомов из узлов решетки. Однако после классических работ Березинского [5], Костерлица и Таулеса [6] стало ясно, что хотя дальний кристаллический порядок в двумерной системе отсутствует, в низкотемпературной фазе существует квазидальний степенной порядок, сохраняющий основное свойство кристалла — наличие длинноволнового модуля сдвига (исчезающего в результате плавления, которое имеет характер фазового перехода с расцеплением пар дислокаций [7]). Сказанное относится лишь к упорядочению в чисто двумерной системе, а сомнение заключалось в другом — устойчив ли изолированный лист графена как двумерная мембрана в трехмерном пространстве — иными словами, не приводят ли флуктуации смещений *перпендикулярно* листу к превращению графена в смятый комок.

Новая эпоха для графена началась в 2004 г., когда он был получен К.С. Новоселовым, А.К. Геймом, С.В. Мо-

розовым и др. [8, 9] с помощью микромеханического метода расщепления графита. В этом методе поверхность графита плотно трется о ровную поверхность кремния, покрытого слоем оксида, и оставляет множество чешуек различной толщины. Поверхность двуокиси кремния была подобрана специально, так как на ней чешуйки даже с атомарной толщиной можно увидеть в оптический микроскоп. В первых экспериментах К.С. Новоселов, А.К. Гейм, С.В. Морозов и др. получили образцы одно-, двух- и многослойного графена и исследовали их транспортные свойства [10]. Графен оказался устойчивым в воздухе при комнатной температуре. Находясь на подложке, он является механически стабильным, но на нем образуются небольшие локальные искривления нанометровых размеров — "рипплы" [11].

Получение графена микромеханическим методом оказалось довольно трудоемким, так как каждую достаточно тонкую чешуйку нужно было исследовать с помощью атомного силового микроскопа для того, чтобы убедиться, что она действительно имеет одноатомную толщину. Однако позднее было показано, что количество слоев графена в образце легко определить, изучая, например, спектр комбинационного рассеяния света [12]. Также отметим изобретение широко используемого сейчас альтернативного способа получения графена — эпитаксиального выращивания [13], при котором слои графена образуются на поверхности кристалла SiC, нагреваемого до высокой температуры в вакууме.

Получение графена вызвало большой ажиотаж, который только усилился в связи с экспериментальным обнаружением уникальных свойств этой системы. С точки зрения приложений графен в первую очередь интересен как материал для создания наноэлектронных устройств. Графен, являясь двумерной системой, обеспечивает абсолютный предел миниатюризации, по крайней мере в одном измерении, и идеальным образом подходит к современным планарным технологиям создания интегральных схем. С помощью нанолитографии из графена можно вырезать куски произвольной формы и устанавливать на них контактные и бесконтактные электроды [14]. Кроме того, на основе листа графена можно создавать разнообразные структуры со сверхпериодом (например, нанося на него упорядоченный слой адатомов [15] или проделывая периодически расположенные отверстия [16]), которые могут обладать интересными свойствами. Подвижность носителей заряда в чистых образцах графена достигает рекордно высоких значений [17] и почти не зависит от концентрации, что также является очень ценным для возможных приложений (в частности, для баллистической электроники, принципиально отличающейся от традиционной транзисторной). Отметим, что щель между уровнями Ландау графена в типичных лабораторных магнитных полях величиной 10–20 Тл достигает значения в несколько тысяч градусов, а это позволяет наблюдать квантовый эффект Холла и использовать его для создания эталонов сопротивления даже при комнатной температуре [18].

Графен интересен не только с точки зрения возможных приложений, но и с фундаментальной точки зрения — вследствие своих уникальных электронных свойств. Вблизи уровня Ферми электроны в графене обладают линейной дисперсией, а энергетическая щель между валентной зоной и зоной проводимости отсутствует,

так что электроны могут описываться двумерным уравнением Дирака для безмассовых частиц. Этот замечательный факт был установлен 60 лет назад в классической работе П.Р. Уоллеса [19]. Наверное, прав гениальный поэт Райнер Мария Рильке, написавший: "Все, что наш ум из памяти возьмет, когда-то в жизни обратится в благо". Модель зонной структуры графена служила стартовой площадкой для изучения свойств графита, но в многослойных стопках взаимодействие между слоями существенно искажает свойства графена. И только после 2004 г., когда отдельные слои графена были успешно изолированы, стало ясно, что на примере этой системы фактически можно изучать новый вид частиц — безмассовые заряженные квазичастицы, нигде больше не существующие в природе [20]. Такие свойства этих частиц, как двумерность, спинорная природа, нулевая масса и отсутствие щели в спектре, приводят к ряду электронных явлений, не имеющих аналогов ни в каких других физических системах.

Мы сначала приведем краткий обзор основных особенностей одночастичных (разделы 1–3) и коллективных (раздел 4) свойств графена (см. также обзорные работы [21–23]), а затем изложим наши оригинальные результаты, касающиеся некоторых коллективных электронных явлений (разделы 5–9). В последнем разделе 10 мы обсудим фундаментальные проблемы в физике графена и перспективы его использования.

2. Уравнение Дирака для электронов в графене

Каждый атом углерода в графене находится в окружении трех ближайших соседей и обладает четырьмя валентными электронами. Три электрона образуют sp^2 -гибридизованные орбитали, направленные под углами 120° друг к другу и составляющие ковалентные связи с соседними атомами, ориентированные в одной плоскости. Четвертый электрон, представленный направленной перпендикулярно к этой плоскости $2p_z$ -орбиталью, может перескакивать с одного атома на другой и формирует наполовину заполненную π -зону, ответственную за электронные свойства графена (рис. 1).

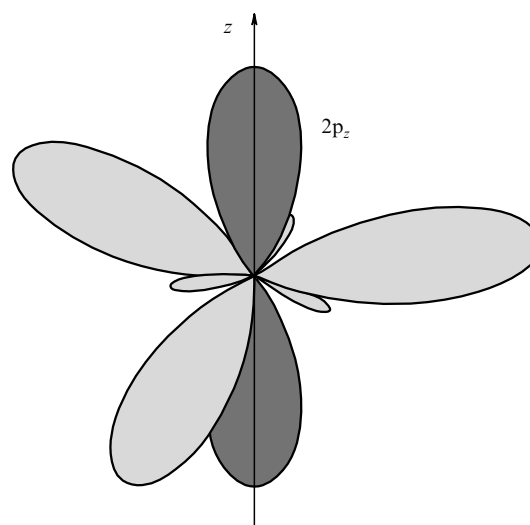


Рис. 1. Три sp^2 -гибридизованные орбитали атома углерода, составляющие направленные под углами 120° ковалентные связи с соседними атомами, и перпендикулярная им $2p_z$ -орбиталь.

Теоретическое изучение электронных свойств графита основывалось на рассмотрении зонной структуры его элементарного блока — графена. Первым к этому вопросу обратился П.Р. Уоллес в 1947 г. В простом приближении сильной связи с учетом взаимодействия ближайших соседей Уоллес показал [19], что дисперсия электронов графена вблизи уровня Ферми является линейной, а щель в спектре отсутствует. Позднее было показано, что линейный характер дисперсии вытекает из характера группы симметрии кристаллической решетки графена вне зависимости от используемого приближения [24]. Впоследствии не только развивалась и уточнялась зонная теория графена и графита [25, 26], но и в связи с экспериментальным изучением интеркалированного графита [27] появился интерес к некоторым многочастичным аспектам электронных свойств графена (например, к экранированию примесей [28], плазмонам [29], времени жизни квазичастиц [30]). Кроме того, были опубликованы интересные работы о влиянии беспорядка [31] и уровнях Ландау в магнитном поле для графена [32].

Осветим кратко основные положения зонной теории графена [19, 24, 33], приводящие к выводу о том, что эффективное уравнение для электронов в графене действительно имеет вид уравнения Дирака для безмассовых частиц. Кристаллическая решетка графена — шестиугольные "пчелиные соты" — может быть представлена в виде совокупности двух взаимопроникающих решеток Бравэ А и В, имеющих элементарную ячейку в форме параллелограмма (рис. 2). Период этих решеток равен $a = 2,46 \text{ \AA}$, а их первая зона Бриллюэна имеет вид шестиугольника со стороной $4\pi/3a$. Поскольку периодический потенциал решетки создается двумя смещенными относительно друг друга подрешетками, то волновая функция электрона в таком потенциале представляет собой линейную комбинацию двух блоховских волн, построенных на этих подрешетках:

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_A(\mathbf{r}) X_A(\mathbf{k}, \mathbf{r}) + \psi_B(\mathbf{r}) X_B(\mathbf{k}, \mathbf{r}), \quad (1)$$

где $\mathbf{k}$ — квазиимпульс электрона. Коэффициенты разложения ψ_j ($j = A, B$) являются огибающими блоховских волн и играют роль эффективной волновой функции электрона, которая подчиняется эффективному уравнению — аналогу приближения "эффективной массы". Поскольку в случае графена таких огибающих две, то

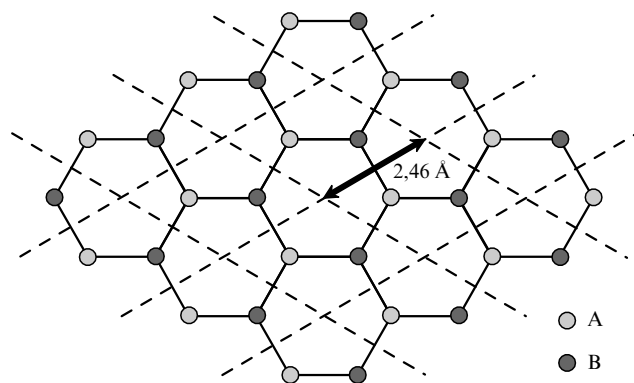


Рис. 2. Двумерная кристаллическая решетка графена типа "пчелиные соты" как совокупность двух взаимопроникающих подрешеток А и В.

эффективная волновая функция электрона является двухкомпонентной.

Волновая функция (1) должна удовлетворять уравнению Шрёдингера

$$\left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m_e} + U(\mathbf{r}) - E \right] \psi(\mathbf{r}) = 0, \quad (2)$$

где $U(\mathbf{r})$ — периодический потенциал. В результате действия оператора кинетической энергии мы получим ряд слагаемых, в которых оператор дифференцирования ∇ действует на функции $\psi_j(\mathbf{r})$ и $X_j(\mathbf{k}, \mathbf{r})$. В дальнейшем рассмотрении важную роль играет $\mathbf{k}\mathbf{p}$ -приближение [25], при котором эффективное уравнение для огибающих выводится в предположении, что квазиимпульс электрона находится в окрестности выбранной точки зоны Бриллюэна $\mathbf{K}$. Строго говоря, сама зависимость огибающих ψ_j от координаты говорит о том, что электрон уже не обладает определенным квазиимпульсом (например, если он находится во внешнем поле). Однако в $\mathbf{k}\mathbf{p}$ -приближении предполагается, что неопределенность квазиимпульса мала по сравнению с размерами зоны Бриллюэна (вектором обратной решетки) или, иными словами, огибающие мало изменяются на масштабах периода решетки. Это обстоятельство дает основание пренебречь членами вида $X_j(\nabla^2 \psi_j)$ вследствие их малости по сравнению с остальными слагаемыми и в формуле (1) положить квазиимпульс равным $\mathbf{K}$. В результате возникает уравнение

$$\sum_{j=A,B} \left\{ \psi_j(\mathbf{r}) \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m_e} + U(\mathbf{r}) - E \right] X_j(\mathbf{K}, \mathbf{r}) + \frac{1}{m_e} \{ -i\hbar \nabla X_j(\mathbf{K}, \mathbf{r}) \} \{ -i\hbar \nabla \psi_j(\mathbf{r}) \} \right\} = 0. \quad (3)$$

Теперь умножим (3) слева сначала на $X_A^*(\mathbf{K}, \mathbf{r})$, а затем на $X_B^*(\mathbf{K}, \mathbf{r})$, и каждый раз проинтегрируем по $\mathbf{r}$ в области, величина которой много больше периода решетки, но в которой огибающие не успевают значительно измениться. При этом учтем, что выражение в квадратных скобках в (3) в "обкладках" функций X_k и X_j даст после интегрирования $\delta_{jk}(E_{\mathbf{K}} - E)$, где $E_{\mathbf{K}}$ — энергия электрона с квазиимпульсом $\mathbf{K}$. Получим два уравнения для $k = A, B$:

$$\sum_{j=A,B} \left\{ -\frac{i\hbar}{m_e} \langle X_k | \nabla | X_j \rangle (-i\hbar \nabla) + \delta_{jk}(E_{\mathbf{K}} - E) \right\} \psi_j = 0. \quad (4)$$

Как уже говорилось, первая зона Бриллюэна графена имеет форму шестиугольника. В недопированном графене энергией Ферми обладают электроны с квазиимпульсами, находящимися в углах этого шестиугольника [19]. Следовательно, для того чтобы провести разложение вблизи энергии Ферми, нужно выбирать $\mathbf{K}$ в углах шестиугольника. Перестроив зону Бриллюэна, легко показать [24], что поверхность Ферми в недопированном графене вырождается в две неэквивалентные точки (дираковские точки), целиком принадлежащие первой зоне Бриллюэна, поэтому для описания состояний электрона достаточно взять любые два угла шестиугольника (рис. 3). Наличие двух долин $\mathbf{K}$ и $\mathbf{K}'$ зоны проводимости приводит к эффективному удвоению числа фермионов в графене (два "аромата" электронов).

Диагональные матричные элементы импульса $\langle X_j | \nabla | X_j \rangle$ равны нулю. Недиagonальные элементы прощ

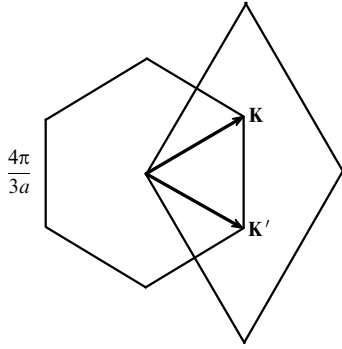


Рис. 3. Первая зона Бриллюэна графена в двух эквивалентных представлениях: в виде шестиугольника и в виде ромба. Две дираковские точки $\mathbf{K}$ и $\mathbf{K}'$ целиком входят в эту зону.

всего вычислить в приближении ближайших соседей, когда учитываются перескоки между $2p_z$ -орбиталями только наиболее близких атомов соседних подрешеток. При этом получается, что

$$\langle X_A | -i\hbar \nabla | X_B \rangle = \langle X_B | -i\hbar \nabla | X_A \rangle^* \propto \mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y.$$

В результате система уравнений (4) записывается как

$$-i\hbar v_F \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix},$$

или в сокращенном виде — как уравнение для двухкомпонентного спинора ψ :

$$v_F(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}) \psi = E \psi. \quad (5)$$

Здесь $v_F \approx 10^6$ см/с — скорость электронов на поверхности Ферми, определяемая параметрами решетки, $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x, \sigma_y\}$ — двумерный вектор, составленный из матриц Паули. Если электрон находится во внешнем потенциале $V(\mathbf{r})$, плавно изменяющемся на расстояниях порядка периода решетки, то он войдет в уравнение (5) в качестве диагональной по подрешеткам добавки к кинетической энергии $v_F(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p})$.

Если потенциал резко изменяется в пространстве, вследствие чего действует на разные подрешетки по-разному, то в уравнении (5) появятся и недиагональные по подрешеткам члены. В том случае, когда на электрон действует плавно изменяющееся внешнее магнитное поле, оно входит в уравнение (5) стандартным калибровочно-инвариантным образом — посредством минимальной подстановки $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} + (e/c) \mathbf{A}$.

Уравнение (5) дает дисперсионную зависимость для свободных частиц $E = \pm v_F |\mathbf{p}|$, характерную для частиц с нулевой массой покоя. Для того чтобы провести более полную аналогию с уравнениями Дирака – Вейля, описывающими нейтрино [34], вспомним о существовании двух долин зоны проводимости. Уравнения для двух спиноров $\psi_{\mathbf{K}}$ и $\psi_{\mathbf{K}'}$, соответствующих электронам в разных долинах, запишем в виде $v_F(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}) \psi_{\mathbf{K}} = E \psi_{\mathbf{K}}$ и $-v_F(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}) \psi_{\mathbf{K}'} = E \psi_{\mathbf{K}'}$ (изменение знака кинетической энергии сводится к калибровочному преобразованию). Объединяя $\psi_{\mathbf{K}}$ и $\psi_{\mathbf{K}'}$ в четырехкомпонентный биспинор ψ , получим уравнение

Дирака для безмассовой частицы¹

$$p_\mu \gamma^\mu \psi = 0, \quad \mu = 0, 1, 2, \quad (6)$$

с "ковариантным" импульсом $p_\mu = \{E/v_F, -\mathbf{p}\}$ и гамма-матрицами

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^{1,2,3} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{x,y,z} \\ -\sigma_{x,y,z} & 0 \end{pmatrix}.$$

По аналогии с квантовой электродинамикой, можно ввести оператор киральности [36]:

$$\gamma^5 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что электроны из разных долин соответствуют состояниям с противоположной киральностью. В случае нулевой массы состояния с противоположной киральностью независимы; отличная от нуля масса привела бы к их смешиванию.

Следует помнить о важных отличиях уравнения для электронов в графене от релятивистских уравнений для безмассовых фермионов:

- 1) уравнение для электронов в графене двумерно;
- 2) представление (6) справедливо только при малых импульсах — много меньших вектора обратной решетки — и соответственно только в плавно изменяющихся внешних полях;
- 3) уравнение (6) справедливо в системе покоящейся решетки и не обладает инвариантностью ни относительно преобразований Галилея, ни относительно преобразований Лоренца.

Последний пункт нуждается в некотором пояснении. Эффективное уравнение для электронов в графене выводится из нерелятивистского уравнения Шрёдингера (2), инвариантного относительно преобразований Галилея (и поэтому описывает *нерелятивистские* электроны). При выводе эффективного уравнения (6) эта инвариантность утрачивается, как и при выводе любого уравнения "эффективной массы" [37]. Что касается преобразований Лоренца, то при переходе в движущуюся систему отсчета координатный вектор x^μ преобразуется по закону, в котором фигурирует скорость света c . Скорость света входит и в калибровочно-инвариантную замену $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} + (e/c) \mathbf{A}$ в (6), которая требуется для описания графена в магнитном поле. В то же время пространственные и временная компоненты вектора импульса p_μ связаны через скорость Ферми $v_F \approx c/300$. Такое несоответствие скоростей приводит к нарушению релятивистской инвариантности.

3. Особенности ультрарелятивистской динамики

Еще в первых экспериментальных исследованиях графена было получено подтверждение того, что электроны ведут себя как безмассовые дираковские частицы [10]. Обработка данных по осцилляциям Шубникова – де Гааза показала, что дисперсия электронов действительно является линейной, а измеренное значение скорости электронов v_F согласуется с результатами вычислений в рамках зонной модели. Более яркой особенностью

¹ Отметим, что уравнение Дирака для массивных частиц широко использовалось для описания узкозонных полупроводников (см. [35] и цитируемую там литературу).

графена явился аномальный целочисленный квантовый эффект Холла. Энергии релятивистских уровней Ландау графена в сильном магнитном поле H равны $E_{\pm n} = \pm \hbar v_F \sqrt{2neH/(\hbar c)}$ [32]. Важным является наличие уровня нулевой энергии $n = 0$, который принадлежит наполовину валентной зоне, а наполовину — зоне проводимости. Вследствие такой особенности уровня $n = 0$ удельная холловская проводимость листа графена в режиме квантового эффекта Холла принимает полуцелые значения в единицах кванта удельной проводимости [38] $\sigma_{xy} = (4e^2/h)(n + 1/2)$, где n — целое число, а множитель 4 отвечает вырождению по спину и долинам. Такая последовательность холловских плато, обнаруженная в эксперименте [10], явилась убедительным подтверждением "ультрарелятивистской" природы электронов в графене.

Зонная структура графена была исследована и наиболее прямым способом — с помощью фотоэмиссионной спектроскопии с угловым разрешением, позволяющей установить распределение электронов в импульсно-энергетическом пространстве [39]. Такое исследование показало, что хотя дисперсия вблизи дираковской точки и является приблизительно линейной, она может искажаться в результате взаимодействий. При сильном допировании графена вследствие электрон-электронного, электрон-фононного и электрон-плазмонного взаимодействий в дисперсионной зависимости при энергиях порядка 1 эВ появляются изломы [40, 41].

При исследованиях графена очень удобной оказалась возможность управления концентрацией носителей заряда с помощью электрического поля [8]. Графен, полученный механическим расщеплением графита, находится на кремниевой подложке, покрытой слоем SiO_2 толщиной $d = 300$ нм. Прикладывая напряжение V_g между листом графена и подложкой, можно создать конденсатор с емкостью на единицу площади $C/S = \varepsilon/(4\pi d)$, где $\varepsilon \approx 4,5$ — диэлектрическая проницаемость SiO_2 . Поверхностная плотность заряда на обкладках такого конденсатора

$$n = \frac{CV_g}{eS} = \frac{\varepsilon}{4\pi ed} V_g. \quad (7)$$

Прикладывая напряжение с различной полярностью, можно допировать графен как электронами, так и дырками. Такая возможность управления концентрацией и типом носителей заряда очень важна с точки зрения наноэлектронных приложений. Более того, это важно и с теоретической точки зрения, так как основное состояние допированного графена отличается от обычно понимаемого вакуумного состояния в квантовой электродинамике. В случае графена мы имеем возможность в некотором смысле "перестраивать" вакуум.

Рассмотрим состояния свободных электронов графена, служащие отправной точкой в решении многочастичных задач. Собственный вектор, удовлетворяющий уравнению (5) и соответствующий электрону с импульсом $\mathbf{p}$, имеет вид $\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \exp(i\mathbf{p}\mathbf{r}/\hbar)f_{\mathbf{p},\gamma}$ — это плоская волна, умноженная на спинор

$$f_{\mathbf{p},\gamma} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \exp\left(-\frac{i}{2}\varphi_{\mathbf{p}}\right) \\ \gamma \exp\left(\frac{i}{2}\varphi_{\mathbf{p}}\right) \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Здесь $\gamma = \pm 1$ — индекс зоны, в которой находится электрон: при $\gamma = 1$ электрон с энергией $E = v_F|\mathbf{p}|$ принадлежит зоне проводимости, при $\gamma = -1$ электрон находится в валентной зоне и его энергия равна $E = -v_F|\mathbf{p}|$. Выражение (8) явным образом зависит от γ и азимутального угла $\varphi_{\mathbf{p}}$ импульса. Такая угловая зависимость векторов одночастичных состояний является важной особенностью графена — она проявляется во всех выражениях, описывающих переходы электронов из одного состояния в другое. Амплитуды перехода $|\mathbf{p}, \gamma\rangle \rightarrow |\mathbf{p}', \gamma'\rangle$ умножаются на выражения вида $f_{\mathbf{p}',\gamma'}^+ f_{\mathbf{p},\gamma}$, зависящие от угла между векторами $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$.

Спинорная природа электронов в графене проявляется в наличии у них фазы Берри, равной π : при обходе электрона в импульсном пространстве по замкнутому контуру вокруг одной из двух дираковских точек его волновая функция меняет знак. Действительно, при повороте вектора $\mathbf{p}$ на 360° выражение (8) меняет знак. В частности, наличие уровней Ландау $n = 0$ ("нулевых мод") может трактоваться как проявление фазы Берри [20]. Особенно наглядно фаза Берри проявляется в эффекте слабой локализации электронов в случайных полях. В самом деле, в обычных двумерных системах слабая локализация возникает в результате конструктивной интерференции между амплитудами электронных волн, рассеиваемых на примесях и движущихся по встречным замкнутым путям. В случае графена из-за фазы Берри между амплитудами этих волн появляется дополнительный фазовый сдвиг π , который превращает их конструктивную интерференцию в деструктивную, приводя вместо слабой локализации к противоположному эффекту — слабой антилокализации [42]. Однако такие факторы, как рассеяние на рипплах и краях образца, а также нарушение изотропии спектра при больших импульсах, разрушают фазу Берри. В результате в реальных образцах графена происходит конкуренция между слабой локализацией и слабой антилокализацией [43].

Наличие аналогии между динамикой электронов в графене и квантовой электродинамикой позволяет надеяться на то, что в графене будут проявляться и такие квантово-электродинамические эффекты, как, например, парадокс Клейна [44, 45]. Проявление этого парадокса заключается в возможности туннелирования электрона с большой вероятностью через потенциальный барьер, высота которого превышает $2m_e c^2$, что связано с вкладом "нижнего" континуума под барьером. Создание таких барьеров в квантовой электродинамике сопряжено с наличием очень сильных электрических полей, поэтому парадокс Клейна мог бы проявляться только в экзотических ситуациях (при столкновении сверхтяжелых ядер, испарении черных дыр и т.п.). В графене эффективная масса равна нулю, поэтому парадокс Клейна должен проявляться при туннелировании через любой барьер. Простой расчет показывает [44], что при нормальном падении на потенциальную ступеньку вероятность прохождения электрона строго равна единице. Отсутствие обратного рассеяния в графене, давно известное на примере нанотрубок, непосредственным образом связано с фазой Берри [46]. Можно объяснить отсутствие отражения назад и исходя из сохранения в плавно изменяющихся внешних полях "псевдоспиральности" $(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})/|\mathbf{p}|$ — проекции импульса электрона на его "псевдоспин", связанный с наличием в графене двух под-

решеток [44]. При падении электронной волны под углом на одномерный потенциальный барьер вероятность ее прохождения может достигать единицы и при некоторых значениях угла, отличных от угла нормального падения.

Прозрачность барьеров, по крайней мере под некоторыми углами, приводит к отсутствию сильной локализации в условиях применимости уравнения Дирака для огибающих [47]. Это означает, что электрон в графене в плавно изменяющемся внешнем поле может образовывать только квазисвязанные состояния с конечным временем жизни [48]. Напротив, на таких "точечных" объектах, как дефекты решетки, могут возникать связанные состояния [49]. Кроме того, в дополнительном внешнем магнитном поле время жизни квазисвязанных состояний может быть значительно увеличено [50].

Клейновское туннелирование может быть использовано для качественного объяснения существования минимума удельной проводимости графена [10, 51], отсутствующего у других квазидвумерных систем. Удельная проводимость допированного графена пропорциональна концентрации электронов или дырок, но при переходе концентрации носителей (7) через нуль величина удельной проводимости не опускается ниже ненулевого универсального значения $4e^2/h$. Удельная проводимость даже загрязненного графена никогда не становится ниже этого значения, что можно связать с отсутствием локализации ультрарелятивистских электронов.

Еще один аналог квантово-электродинамического эффекта, который может изучаться в графене, — это спонтанное рождение электрон-позитронных пар вокруг сверхкритического заряда. В квантовой электродинамике критический заряд ядра атома, при котором уровень энергии основного состояния входит в "нижний" континуум, имеет величину $Z \approx 170$ [52]. Однако в графене по некоторым оценкам заряд $Z = 2$ уже является сверхкритическим. В окрестности такого заряда должны возникать необычные резонансные состояния электронов, а экранирование заряда тоже должно носить аномальный характер [53, 54].

В экспериментах были получены, помимо однослойного графена, образцы, состоящие из нескольких слоев [10]. Наиболее интересным является двухслойный графен, для которого эффективный низкоэнергетический гамильтониан выражается в виде [55]

$$H = \frac{1}{2m^*} \begin{pmatrix} 0 & (p_x - ip_y)^2 \\ (p_x + ip_y)^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где $m^* = 0,033m_e$. Электроны с таким гамильтонианом имеют фазу Берри 2π , которая проявляется в квантовом эффекте Холла необычного вида [56] и в особенностях клейновского туннелирования: при нормальном падении на потенциальную ступеньку в двухслойном графене происходит полное отражение, но при падении под определенными углами имеет место прохождение с единичной вероятностью, как и в однослойном графене [44].

Закон дисперсии в двухслойном графене имеет вид $E = \pm p^2/2m^*$, что соответствует двум соприкасающимся параболическим зонам. Такие "массивные киральные фермионы" не существуют в традиционной квантовой теории поля и представляют собой уникальную особенность двухслойного графена. Интересной и многообещающей является также возможность создания управляемой щели в спектре двухслойного графена, возникаю-

щей при приложении разности потенциалов между слоями [57]. Обычно зонная структура кристалла задана довольно жестко и является весьма устойчивой к внешним воздействиям, поэтому возможность управления щелью выглядит довольно заманчивой с точки зрения возможных применений [58].

4. Особенности коллективных явлений в графене

Характерные черты зонной структуры графена — линейная дисперсия и касание зон в дираковской точке — ответственны за его необычные электронные свойства. Если графен допирован небольшой концентрацией дираковских электронов или дырок, то они взаимодействуют как между собой, так и с заполненной валентной зоной. Валентная зона сильно связана с зоной проводимости, поскольку согласно (8) электроны в валентной зоне отличаются от электронов в зоне проводимости лишь разными соотношениями между амплитудами блоховских волн, составляющих их волновые функции. Если считать, что валентная зона заполнена до бесконечных импульсов, то ряд диаграмм теории возмущений по электрон-электронному взаимодействию расходится. На самом деле валентная зона заполнена вплоть до импульсов p_c порядка вектора обратной решетки, которые на несколько порядков больше любых других импульсов, фигурирующих в задачах об электронных свойствах. Это обстоятельство приводит к тому, что некоторые диаграммы дают конечные, но очень большие вклады в ряды теории возмущений.

Например, простейшая обменная диаграмма для собственной энергии электрона дает [59]

$$\Sigma(p) = \frac{e^2}{\varepsilon} p \ln \frac{p_c}{p}, \quad (10)$$

где ε — диэлектрическая проницаемость окружающей графен среды (если графен окружен с обеих сторон разными средами с проницаемостями ε_1 и ε_2 , то вместо ε берется $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/2$). Это приводит к необычной логарифмической перенормировке скорости Ферми в области малых импульсов. Было показано, что этот результат сохраняется и в более высоких порядках теории возмущений [60].

Из линейной дисперсии электронов в графене следует, что плотность состояний ведет себя как $\mathcal{N} \propto |E|$ и обращается в нуль в дираковской точке $E = 0$ (в отличие от $\mathcal{N} = \text{const}$ в квазидвумерной системе с параболическим законом дисперсии). В недопированном графене химический потенциал находится в дираковской точке. Любое внешнее возмущение при этом не только действует на носители заряда, но и само создает эти носители, поляризуя заполненную валентную зону. Вследствие этого отклики недопированного графена на внешние возмущения должны носить нелинейный характер. Например, статическое экранирование, вычисленное в недопированном графене в приближении линейного отклика, имеет полупроводниковый характер [61]. Однако выход за рамки линейного приближения показывает, что на самом деле экранирование является сильным и существенно нелинейным [28, 62].

Отсутствие щели между валентной зоной и зоной проводимости наводит на мысль о возможности перестройки основного состояния электронной системы в результате спонтанного образования конденсата элект-

рон-дырочных пар, сходного с состоянием экситонного диэлектрика [63]. В работах [64] была рассмотрена возможность такой неустойчивости основного состояния графена в зависимости от параметра N — числа спиновых компонент электронов. Было показано, что хотя при реальном значении $N = 2$ фазового перехода не происходит, его близость может приводить к существенным флуктуациям соответствующего параметра порядка.

Другая особенность многочастичных эффектов в графене связана с линейной дисперсией, из-за которой кинетическая энергия электронного газа в графене, приходящаяся на одну частицу, равна по порядку величины $\hbar v_F/l$, где l — среднее расстояние между частицами. Потенциальная энергия кулоновского взаимодействия имеет порядок $e^2/(\epsilon l)$. Безразмерный параметр r_s , определяющий отношение характерных величин кулоновской и кинетической энергий квантовой системы, в случае графена имеет вид

$$r_s = \frac{e^2}{\epsilon \hbar v_F} \approx \frac{2,19}{\epsilon}.$$

Как видно, этот параметр не зависит от концентрации электронного газа! Единственный способ как-то повлиять на него состоит в изменении диэлектрической проницаемости окружающей среды ϵ . Параметр r_s может изменяться в довольно ограниченных пределах (например, если графен лежит на подложке из SiO_2 с $\epsilon \approx 4,5$, а с другой стороны окружен воздухом, то $r_s \approx 1$, а если графен окружен HfO_2 с $\epsilon \approx 25$, то $r_s \approx 0,1$).

Для сравнения заметим, что в двумерном и трехмерном электронном газе с квадратичным законом дисперсии средняя кинетическая энергия пропорциональна l^{-2} . Поэтому $r_s \propto l$ и уменьшается с увеличением плотности, вследствие чего в достаточно плотном газе энергию кулоновского взаимодействия можно считать малой поправкой к кинетической энергии. В графене, если рассматривать реальные значения r_s , выполнение условий применимости теории возмущения остается под вопросом. Также в графене нельзя создать очень большие значения r_s , что приводит к невозможности сильно-коррелированных состояний, в частности вигнеровской кристаллизации, в отсутствие магнитного поля [65] (однако магнитное поле может индуцировать вигнеровскую кристаллизацию в графене [66], как и в квазидвумерном электронном газе [67]).

Возможность изменять r_s , помещая графен в среды с различными значениями диэлектрической проницаемости ϵ , наводит на мысль о том, что таким образом можно управлять его коллективными электронными свойствами. Кроме того, в графене электрон-электронное взаимодействие, сила которого обратно пропорциональна ϵ , приводит к перенормировке скорости Ферми [68], составляющей по некоторым оценкам [69] 15–20 % от затравочного значения. Следовательно, скорость Ферми должна быть довольно чувствительной к свойствам окружающей среды, что можно использовать для реализации бесконтактных сенсоров.

Коллективные эффекты в графене, находящемся в магнитном поле, также имеют особенности. Магнитное поле напряженностью H задает "магнитную длину" $l_H = (\hbar c/eH)^{1/2}$ — параметр с размерностью длины, соответствующий радиусу циклотронных орбит электронов. Характерная величина кулоновской энергии на одну

частицу имеет порядок $e^2/\epsilon l_H$. В квазидвумерном электронном газе расстояние между уровнями Ландау, отвечающее характерной величине кинетической энергии, равно $\hbar eH/(mc)$. Следовательно, в достаточно сильных магнитных полях кинетическая энергия доминирует, а энергия кулоновского взаимодействия является слабым возмущением. Поэтому в квазидвумерном электронном газе в сильном магнитном поле можно пренебречь смешиванием различных уровней Ландау и рассматривать каждый уровень как изолированный [70, 71]. В графене эффективная масса электрона равна нулю, вследствие чего расстояние между уровнями Ландау задается магнитной длиной и имеет порядок $\hbar v_F/l_H$. Как легко видеть, отношение потенциальной энергии к кинетической не зависит от напряженности поля H и может регулироваться только через диэлектрическую проницаемость окружающей среды ϵ . Поэтому само понятие "сильные магнитные поля" следует использовать с осторожностью, если речь идет о графене.

5. Спаривание Бардина – Купера – Шриффера в электрон-дырочном бислое

В этом разделе мы рассмотрим явление сверхтекучести, связанное с электрон-дырочным спариванием в бислое графена (см. [72]). Здесь бислоем мы будем называть не двухслойный графен, а два параллельных листа графена, разделенных слоем диэлектрика толщиной D , которая достаточно велика для того, чтобы можно было пренебречь туннелированием между листами. С помощью двух независимых электродов можно устанавливать заданную концентрацию носителей заряда и соответствующий химический потенциал μ в каждом из слоев (рис. 4). Будем рассматривать случай равных плотностей носителей, когда в верхнем слое химический потенциал имеет значение $\mu > 0$ и носителями заряда являются электроны, а в нижнем слое химический потенциал равен $-\mu < 0$ и носителями заряда являются дырки.

Такая электрон-дырочная система оказывается неустойчивой по отношению к межслойному спариванию электронов и дырок вследствие их кулоновского притяжения. Близкие аналоги такого спаривания — это спаривание электронов с противоположными спинами в обычных сверхпроводниках, описываемое теорией Бардина – Купера – Шриффера (БКШ) [73], и электрон-

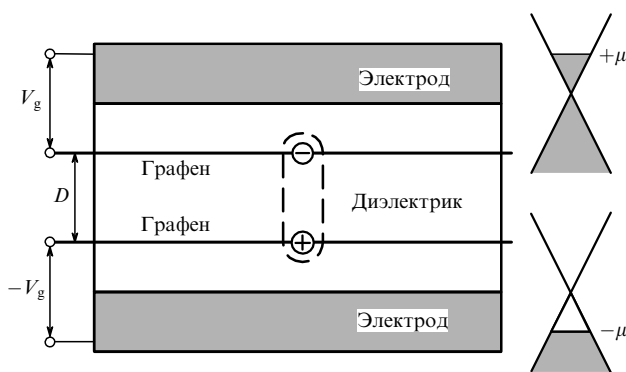


Рис. 4. Схематическое изображение системы для осуществления спаривания пространственно разделенных электронов и дырок в бислое графена. В правой части рисунка показаны положения химического потенциала в двух слоях графена, устанавливаемые затворными напряжениями V_g и $-V_g$.

дырочное спаривание в экситонном диэлектрике [63], в котором, однако, сверхтекучесть пар отсутствует из-за фиксации фазы параметра порядка (связанной с межзонными переходами). Задача об электрон-дырочном спаривании в системе двух связанных квантовых ям, содержащих квазидвумерный электронный газ с квадратичной дисперсией, рассмотрена теоретически в [74, 75].

Рассмотрим эффективный гамильтониан системы, ответственный за спаривание электронов верхнего слоя графена с дырками нижнего слоя. Влияние той части полного гамильтониана, которая соответствует взаимодействию электронов и дырок в пределах отдельных слоев, проявляется посредством экранирования межслойного электрон-дырочного взаимодействия. Эффективный гамильтониан, отвечающий спариванию квазичастиц с противоположными импульсами, имеет вид

$$H = g_s g_v \sum_{\mathbf{p}} \xi_{\mathbf{p}} (a_{\mathbf{p}}^+ a_{\mathbf{p}} + b_{\mathbf{p}}^+ b_{\mathbf{p}}) + \frac{g_s g_v}{S} \times \\ \times \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} V(\mathbf{q}) \frac{1 + \cos \varphi}{2} a_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}^+ b_{-\mathbf{p}-\mathbf{q}}^+ b_{-\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}, \quad (11)$$

где $a_{\mathbf{p}}$ и $b_{\mathbf{p}}$ — операторы уничтожения дираковских электронов и дырок с импульсом $\mathbf{p}$, $\xi_{\mathbf{p}} = v_F |\mathbf{p}| - \mu$ — энергия частиц, отсчитываемая от уровня Ферми, $V(\mathbf{q})$ — потенциал экранированного электрон-дырочного взаимодействия, $\mathbf{q}$ — импульс, переданный в акте рассеяния, φ — угол между $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p} + \mathbf{q}$, т.е. угол рассеяния электрона и дырки, S — площадь системы. Угловой фактор $(1 + \cos \varphi)/2$, специфический для графена, происходит от сворачивания по спинорным компонентам волновых функций электрона и дырки вида (8) в состояниях до и после акта рассеяния (см. раздел 3). Коэффициенты $g_s = g_v = 2$ отвечают за вырождение электронных состояний по спину и долинам.

Диагонализуя гамильтониан (11) с помощью преобразований Боголюбова, получим самосогласованное уравнение для щели

$$\Delta_{\mathbf{p}} = -\frac{1}{4\pi^2} \int d\mathbf{q} V(\mathbf{q}) \frac{1 + \cos \varphi}{2} \frac{\Delta_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}}{2E_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}}, \quad (12)$$

где $E_{\mathbf{p}} = (\xi_{\mathbf{p}}^2 + \Delta_{\mathbf{p}}^2)^{1/2}$. Заметим, что уравнение (12) отличается от своего аналога в связанных квантовых ямах тремя особенностями. Во-первых, это линейная зависимость $\xi_{\mathbf{p}}$ от $\mathbf{p}$ вместо квадратичной в связанных квантовых ямах. Вторая особенность — это присутствие углового фактора $(1 + \cos \varphi)/2$, подавляющего обратное рассеяние в графене. В случае слабой связи этот коэффициент мало отличается от единицы благодаря преобладанию малых углов рассеяния в интеграле в уравнении (12), но при сильной связи он может ослабить спаривание.

В уравнении (12) главный вклад в интеграл дает область вблизи энергии Ферми, в которой динамически экранированное межслойное электрон-дырочное взаимодействие $V(\mathbf{q}, \omega)$ является притягивающим. В приближении линейного отклика

$$V(\mathbf{q}, \omega) = \frac{-v_q \exp(-qD)}{1 - v_q (P_1 + P_2) + v_q^2 P_1 P_2 [1 - \exp(-2qD)]}, \quad (13)$$

где P_1 и P_2 — динамические поляризационные операторы верхнего и нижнего слоев графена. В случае равных плотностей, благодаря симметрии между электронами и

дырками, поляризуемость обоих слоев графена одинакова: $P_1 = P_2 = P$. Уравнение, получаемое приравнением нулю знаменателя (13), описывает две ветви $\omega_{\pm}(q)$ плазменной дисперсии в бислое, соответствующие плазменным колебаниям, синфазным и противофазным в обоих слоях графена [61, 74, 76].

Режим слабой связи (или БКШ) реализуется, если ширина области спаривания вблизи энергии Ферми мала по сравнению со значением энергии Ферми. В таком случае можно расцепить радиальное интегрирование по переменной $\xi \equiv \xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}$ в уравнении для щели (12) и интегрирование по полярному углу φ . В духе теории БКШ интегрирование по ξ будем проводить в области, которая ограничена энергией обрезания $\hbar\tilde{\omega}$ и в которой динамически экранированное взаимодействие (13) является притягивающим. Предположим, что главный вклад в интеграл по φ дают малые q , не превышающие по порядку величины значения $\tilde{q}$, на котором статическое взаимодействие $V(\mathbf{q}) \equiv V(\mathbf{q}, 0)$ уменьшается в два раза: $V(\tilde{q}) = V(0)/2$. Явный вид $V(\mathbf{q})$ определяется статической поляризуемостью [61, 62, 77]

$$P(\mathbf{q}, 0) = -\frac{g_s g_v \mu}{2\pi \hbar^2 v_F^2} \equiv -\frac{\varepsilon}{\pi e^2 a}, \quad (14)$$

где a — томас-фермиевская длина экранирования в графене.

Введем импульс Ферми $k_0 = \mu/\hbar v_F$ и безразмерный параметр

$$\alpha = \frac{2\varepsilon \hbar v_F}{g_s g_v e^2} = \frac{1}{2r_s} \approx 0,23 \varepsilon.$$

В рассматриваемой системе имеются три характерные длины: a , D и среднее расстояние между носителями заряда $l \sim 1/k_0$ в каждом из слоев графена. Поведение системы зависит от соотношения между a , D и l . Можно показать, что $a/l = \alpha$ и $D/l = k_0 D$. Следовательно, поведение системы определяется двумя безразмерными параметрами: α и $k_0 D$.

Из (13) и (14) видно, что характерный импульс $\tilde{q}$ определяется либо обрезанием ввиду наличия множителя $\exp(-qD)$ в числителе (13), либо томас-фермиевским экранированием в знаменателе:

$$\tilde{q} = \min \left(\frac{4k_0}{\alpha}, \frac{2}{D} \right). \quad (15)$$

Энергия обрезания $\hbar\tilde{\omega}$ определяется характерной частотой нижней ветви плазменных колебаний и может быть оценена как $\hbar\tilde{\omega} = \hbar\omega_{-}(\tilde{q})$. В первом порядке по электрон-электронному взаимодействию динамическая поляризуемость при $q \rightarrow 0$ и $\omega > v_F q$ [61, 77]

$$P(\mathbf{q}, \omega) = \frac{g_s g_v \mu q^2}{4\pi \hbar^2 \omega^2}. \quad (16)$$

При $\alpha \ll k_0 D$ имеем $\omega_{-}(q) = v_F q (k_0 D/\alpha)^{1/2}$ и $\omega_{+}(q) = v_F (2k_0 q/\alpha)^{1/2}$. Следовательно, энергия обрезания равна $\hbar\tilde{\omega} = 2\mu/(k_0 D\alpha)^{1/2}$. В случае $\alpha \gg k_0 D$ приближенное выражение (16) неприменимо, так как формально найденная из него нижняя ветвь плазменных колебаний попадает в область одночастичных возбуждений $\omega < v_F q$. На самом деле, в этом случае $\omega_{-}(q) = v_F q$ и $\omega_{+}(q) = v_F (2k_0 q/\alpha)^{1/2}$ и энергия обрезания равна $\hbar\tilde{\omega} = 4\mu/\alpha$.

Электрон-дырочные куперовские пары имеют размер порядка $1/\tilde{q}$ в направлении, параллельном слоям графена. Режим слабой связи требует малости среднего расстояния между соседними парами по сравнению с размером одной пары, т.е. $\tilde{q}l \ll 1$. Используя (15), можно сделать вывод о том, что режим слабой связи имеет место тогда, когда хотя бы один из параметров, α или k_0D , много больше единицы.

Спаривание в нашем случае не обязательно должно быть s-волновым. Вследствие пространственного разделения электронов и дырок принцип Паули не накладывает никаких ограничений ни на взаимный орбитальный момент, ни на спины и долины спаривающихся частиц. Будем искать l -волновое решение (12), предполагая, что $\Delta_{\mathbf{p}} = \Delta \exp(i l \varphi_{\mathbf{p}})$ при $|\xi| \leq \hbar\tilde{\omega}$ и $\Delta_{\mathbf{p}} = 0$ при $|\xi| > \hbar\tilde{\omega}$. Приближенное решение имеет вид

$$\Delta = 2\hbar\tilde{\omega} \exp \left\{ -\frac{4\pi\alpha}{V_l} \right\}. \quad (17)$$

Безразмерная l -волновая гармоника потенциала $V(\mathbf{q})$ с включенным в нее угловым фактором выражается в виде

$$V_l = \int_0^{2\pi} \frac{\exp(-k_0Dx)(1 + \cos \varphi)/2}{x + 4/\alpha + 4[1 - \exp(-2k_0Dx)]/\alpha^2x} \times \\ \times \exp(-il\varphi) d\varphi, \quad (18)$$

где $x = q/k_0 = 2 \sin(\varphi/2)$.

Конденсация будет происходить при таком значении l , для которого гармоника V_l — наибольшая по величине. Численно мы определили, что при любых значениях α и k_0D доминирует s-волновое спаривание, хотя при очень слабой связи разница между значениями V_l с соседними l становится очень мала. В дальнейшем мы будем рассматривать только s-волновое спаривание. Выводя асимптотические выражения для V_l и подставляя их в (17), найдем щель при различных соотношениях между α , k_0D и единицей.

При $\alpha \ll k_0D$

$$\Delta = \frac{4\mu}{(k_0D\alpha)^{1/2}} \exp \left[-8\pi k_0D \left(1 + \frac{k_0D}{\alpha} \right) \right]. \quad (19)$$

Выражение (19) применимо при значениях α как больших единицы, так и много меньших единицы.

При $\alpha \gg k_0D$ будем различать случаи малых и промежуточных межслойных расстояний. В первом случае, в котором $k_0D \ll 1 \ll \alpha$, щель

$$\Delta = \frac{8\mu}{\alpha} \exp \left\{ -\frac{2\pi\alpha}{\ln(1 + \alpha/2)} \right\}. \quad (20)$$

Во втором случае, в котором $1 \ll k_0D \ll \alpha$,

$$\Delta = \frac{8\mu}{\alpha} \exp \left\{ -\frac{\pi\alpha/2}{\ln(\alpha/4k_0D) - \gamma} \right\}, \quad (21)$$

где $\gamma \approx 0,577$ — постоянная Эйлера.

Мы рассмотрели режим слабой связи, но что будет при сильной связи? В системах спаривающихся фермионов (например, охлажденной системе ферми-атомов) по мере увеличения силы связи происходит кроссовер от

БКШ-подобного состояния к бозе-эйнштейновской конденсации (БЭК) в разреженном газе локализованных, неперекрывающихся пар [78]. Аналогично, в связанных квантовых ямах с электронами и дырками при $T = 0$ в режиме сильной связи происходит кроссовер к БЭК разреженного газа локализованных электрон-дырочных пар (или экситонов в квазиравновесном состоянии, созданном в результате лазерной накачки). При $T \neq 0$ как БКШ-подобное состояние, так и газ локальных пар находятся в сверхтекучем состоянии при температурах, меньших температуры перехода Костерлица — Таулеса в нормальное состояние [6, 75]. Вследствие отсутствия щели в энергетическом спектре в бислое графена не существует локализованных электрон-дырочных пар. Следовательно, поведение электрон-дырочного бислоя графена при увеличении силы связи будет кардинально отличаться от поведения, характеризуемого кроссовером БКШ — БЭК в связанных квантовых ямах. Можно ожидать, что в этом случае образуется своеобразное "ультрарелятивистское" БКШ-состояние с довольно высокой критической температурой.

В недавней работе [79] рассмотрено уравнение для щели, учитывающее конусообразную зонную структуру графена, но в отличие от уравнения (12) не содержащее углового фактора. Интегрирование в уравнении распространялось на обе энергетические зоны, что соответствует режиму сильной связи. Мы рассмотрели случай слабой связи, при котором задействованы только зона проводимости верхнего слоя графена и валентная зона нижнего слоя, вследствие чего вклад от межзонных переходов не вошел в уравнение для щели. Однако в случае сильной связи необходимо учитывать все четыре зоны, в результате чего уравнение для щели должно принять матричный вид по зонным индексам (что не отражено в работе [79]).

Рассмотрим более внимательно условия слабой связи при $\alpha \ll 1$ и $\alpha \sim 1$. Такие значения α могут быть осуществлены, например, с традиционно используемой подложкой из SiO_2 ($\epsilon \approx 4,5$). В этом случае сила связи определяется только значением k_0D . Импульс Ферми k_0 пропорционален химическому потенциалу μ , который можно изменять в электрически допированном графене от нуля до максимального значения $\approx 0,3$ эВ [10]. При разумных значениях концентрации носителей заряда режим слабой связи ($k_0D \gg 1$) может быть достигнут при межслойных расстояниях $D > 100$ Å. С другой стороны, устремляя μ к нулю, всегда можно осуществить режим сильной связи. Таким образом, в эксперименте с помощью изменения затворного напряжения может быть прослежен переход от слабой связи к сильной.

Случай $\alpha \gg 1$ имеет место при больших значениях диэлектрической проницаемости ϵ окружающей среды (как минимум, $\epsilon > 5$) и может быть реализован, например, при использовании HfO_2 ($\epsilon \approx 25$). В этом случае режим слабой связи сохраняется даже при $\mu \rightarrow 0$, т.е. при сколь угодно малых концентрациях носителей заряда, а щель при этом стремится к нулю как $\Delta \propto \mu$, согласно формуле (20). Это резко отличается от ситуации в связанных квантовых ямах, где при исчезающе малых концентрациях носителей заряда неизбежно наступает режим сильной связи.

При типичном значении химического потенциала $\mu \approx 0,1$ эВ и довольно малом межслойном расстоянии

$D = 50 \text{ \AA}$, а также при $\varepsilon = 7$ (при этом приближение слабой связи еще достаточно надежно) мы получаем значение щели $\Delta = 4 \times 10^{-6} \text{ эВ}$, эквивалентное температуре $0,05 \text{ К}$. Максимальное значение щели может быть получено в режиме сильной связи, когда $\alpha \sim k_0 D \sim 1$. Тогда щель может достигать значений $\Delta \sim \mu$, вплоть до нескольких сотен градусов Кельвина.

Электрон-дырочное спаривание в бислое графена недавно было рассмотрено в работе [80] в хартри-фоковском приближении. Вычисления температуры перехода Костерлица–Таулеса также показали, что она может достигать комнатной температуры. Однако рассмотренная в [80] ситуация, несомненно, относится к случаю сильной связи и требует как учета динамических эффектов, так и рассмотрения не задействованных при слабой связи зон. Тем не менее все сказанное выше позволяет надеяться на то, что при сильной связи температура сверхпроводящего перехода действительно может достигать высоких значений.

Оценим теперь влияние примесей и беспорядка. В случае традиционной фононной сверхпроводимости присутствие магнитных примесей разрушительно воздействует на состояние БКШ, так как они по-разному рассеивают электроны с антипараллельными спинами, составляющие куперовскую пару. В нашем случае любая примесь, находящаяся в любом из слоев графена, воздействует разрушительно на конденсат пар, так как она рассеивает только один компонент пары. Наши вычисления показывают, что критическая температура перехода T_c , которая вычисляется исходя из мацубаровской диаграммной техники и служит верхней оценкой температуры перехода Костерлица–Таулеса, в присутствии примесей равна

$$T_c = T_c^{(0)} - \frac{\hbar}{2\pi\tau},$$

где $T_c^{(0)} = \Delta_{T=0}/2\pi$ — температура перехода в отсутствие примесей, τ — время свободного пробега [81]. Таким образом, БКШ-подобное состояние разрушается, если $\tau > \hbar/\Delta$. Из выражения для диффузионной проводимости [82] получаем $\tau \approx (\mu/ev_F^2)\mu_c$, где μ_c — подвижность носителей заряда в графене. В "грязных" образцах графена $\mu_c \approx 1000 \text{ см}^2 \text{ В}^{-1} \text{ с}$ при комнатной температуре [8], а время свободного пробега $\tau \approx 10^{-14} \text{ с}$ соответствует щели $\Delta \approx 0,07 \text{ эВ}$. Напротив, в чистом графене при температуре жидкого гелия $\mu_c \approx 10^6 \text{ см}^2 \text{ В}^{-1} \text{ с}$, так что $\tau \approx 10^{-11} \text{ с}$ соответствует щели $\Delta \approx 7 \times 10^{-5} \text{ эВ}$. Сравнивая последнее значение с вышеприведенными оценками величины щели в разных режимах, получаем, что в режиме слабой связи БКШ-подобное состояние может быть осуществлено только в достаточно чистых образцах графена. В то же время в случае сильной связи конденсат может сохраниться и при довольно сильном беспорядке.

Возникновение сверхтекучей фазы с электрон-дырочным спариванием может быть обнаружено экспериментально как появление особенностей в эффекте кулоновского увлечения при изменении температуры. Для связанных квантовых ям было показано, что конденсация пар приводит к резкому увеличению коэффициента увлечения [83, 84]. Другой способ обнаружения конденсата заключается в наблюдении эффектов, подобных эффекту Джозефсона (см. [85] и цитируемую там литературу).

Кроме того, конденсация меняет характер отклика системы на внешнее электромагнитное поле. В частности, приложение внешнего магнитного поля, параллельного плоскости слоев графена, ведет к появлению незатухающих токов, которые могут быть обнаружены непосредственно [74, 85, 86].

6. Бозе-конденсация

и сверхтекучесть магнитоэкситонов в графене

Рассмотрим теперь такой же, как и в разделе 5, электрон-дырочный бислой, но помещенный в перпендикулярное к нему магнитное поле. Как говорилось в разделе 5, в связи с отсутствием щели в спектре графена в бислое графена не могут образовываться локализованные электрон-дырочные пары. В магнитном поле электроны группируются на уровнях Ландау [38] и в спектре возникает щель, вследствие чего могут образовываться локализованные магнитоэкситоны [87]. В этом разделе мы рассмотрим бозе-конденсацию и сверхтекучесть газа магнитоэкситонов в бислое графена (см. [88]).

Некоторая концентрация магнитоэкситонов в бислое может быть создана как равновесным способом с помощью регулировки заполнения уровней Ландау электрическим полем управляющих электродов, так и квазиравновесно посредством лазерной накачки. Благодаря относительно большому расстоянию между слоями рекомбинация носителей будет сильно подавлена и можно говорить о квазиравновесных химических потенциалах электронов и дырок.

Для электрон-дырочной пары в магнитном поле $\mathbf{H}$ роль суммарного импульса играет сохраняющийся магнитный импульс [89] $\mathbf{P} = \mathbf{p}_e + \mathbf{p}_h + (e/c)(\mathbf{A}_e - \mathbf{A}_h) - (e/c)[\mathbf{H} \times (\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_h)]$. Сохранение импульса $\mathbf{P}$ связано с инвариантностью гамильтониана системы относительно двумерных трансляций с одновременным калибровочным преобразованием [90]. Состояние магнитоэкситона задается индексами n_1 и n_2 уровней Ландау составляющих его электрона и дырки, а также его магнитным импульсом $\mathbf{P}$. Оператор кулоновского взаимодействия между пространственно разделенными электроном и дыркой имеет вид $V(r) = -e^2/\varepsilon(\mathbf{r}^2 + D^2)^{1/2}$, где $\mathbf{r} = \mathbf{r}_e - \mathbf{r}_h$ — двумерный радиус-вектор, параллельный слоям графена. Предположим, что энергия кулоновского взаимодействия является малой по сравнению с расстоянием между уровнями Ландау (ниже мы установим условия применимости такого приближения), тогда энергия магнитоэкситона может быть вычислена в первом порядке теории возмущений [87]:

$$E_{n_1, n_2} = 2^{\delta_{n_1, 0} + \delta_{n_2, 0} - 2} \left[E_{|n_1|, |n_2|}^{\text{CQW}} + (1 - \delta_{n_1, 0}) E_{|n_1| - 1, |n_2|}^{\text{CQW}} + (1 - \delta_{n_2, 0}) E_{|n_1|, |n_2| - 1}^{\text{CQW}} + (1 - \delta_{n_1, 0})(1 - \delta_{n_2, 0}) E_{|n_1| - 1, |n_2| - 1}^{\text{CQW}} \right]. \quad (22)$$

Здесь $E_{|n_1|, |n_2|}^{\text{CQW}}$ — энергия такого магнитоэкситона в связанных квантовых ямах [70, 91], у которого электрон находится на уровне Ландау с номером $|n_1|$, а дырка — на уровне с номером $|n_2|$. В приближении слабого кулоновского взаимодействия эта энергия равна среднему значению оператора $V(r)$ по собственному состоянию нерелятивистского гамильтониана электрон-дырочной пары. Для малого магнитного импульса, удовлетворяющего

условиям $P \ll \hbar/l_H$ и $P \ll \hbar D/l_H^2$, мы получаем [91]

$$E_{|n_1|, |n_2|}^{\text{CQW}} \approx \mathcal{E}_{|n_1|, |n_2|}^{\text{CQW}} + \frac{P^2}{2M_{|n_1|, |n_2|}^{\text{CQW}}},$$

где энергия связи "нерелятивистского" магнитоэкситона $\mathcal{E}_{|n_1|, |n_2|}^{\text{CQW}}$ и его эффективная магнитная масса $M_{|n_1|, |n_2|}^{\text{CQW}}$ являются функциями параметров системы H и D . Подставляя это разложение в (22), мы можем получить эффективную массу M_{n_1, n_2} и энергию связи $\mathcal{E}_{n_1, n_2}$ магнитоэкситона в бислое графена как функции H и D .

Среднеквадратичный радиус покоящегося магнитоэкситона при не очень больших по модулю квантовых числах n_1 и n_2 имеет порядок нескольких магнитных длин. При больших расстояниях между слоями $D \gg l_H$ энергия связи $\mathcal{E}_{|n_1|, |n_2|}^{\text{CQW}}$ и эффективная масса $M_{|n_1|, |n_2|}^{\text{CQW}}$ нерелятивистских магнитоэкситонов при любых $|n_1|$ и $|n_2|$ выходят на универсальные асимптотики $\mathcal{E}^{\text{CQW}} = -e^2/(\epsilon D)$ и $M^{\text{CQW}} = \epsilon D^3 H^2 / c^2 = \epsilon D^3 \hbar^2 / (e^2 l_H^4)$. Следовательно, согласно (22), энергия связи и эффективная масса магнитоэкситона в бислое графена выходят на такие же асимптотики:

$$\mathcal{E} = -\frac{e^2}{\epsilon D}, \quad M = \frac{\epsilon D^3 \hbar^2}{e^2 l_H^4}. \quad (23)$$

Итак, энергия магнитоэкситона, отсчитываемая от его энергии связи, при малых P имеет вид $\epsilon(P) = P^2/(2M)$. Если D больше среднего расстояния между электроном и дыркой в плоскости бислоя $\langle r \rangle$, то магнитоэкситоны можно рассматривать как взаимодействующие параллельно ориентированные электрические диполи. В магнитном поле имеется связь между движением центра масс магнитоэкситона и его внутренней структурой [70], приводящая к результату $\langle r \rangle = Pl_H^2/\hbar$ (другими словами, в системе отсчета движущегося в магнитном поле со скоростью v экситона возникает поляризующее его электрическое поле $\mathbf{E} = [\mathbf{v} \times \mathbf{H}]/c$). Если концентрация магнитоэкситонов с параболическим законом дисперсии равна n , то типичные значения магнитных импульсов $P \sim \hbar\sqrt{n}$. Следовательно, соотношение $D \gg \langle r \rangle$ справедливо при $D \gg l_H^2\sqrt{n}$. При этом выполняется и одно из условий применимости приближения эффективной массы $P \ll \hbar D/l_H^2$. Второе условие $P \ll \hbar/l_H$ выполняется при $l_H\sqrt{n} \ll 1$. Как легко видеть, при этом среднеквадратичный радиус покоящегося магнитоэкситона, равный по порядку величины l_H , много больше среднего расстояния между частицами $n^{-1/2}$. Наконец, вспомним про вышеупомянутое условие малости кулоновского взаимодействия по сравнению с расстоянием между уровнями Ландау. Это условие означает, что $e^2/\epsilon D \ll \hbar v_F/l_H$, или $D \gg r_s l_H$.

В разделе 4 обращалось внимание на то, что в графене степень смешивания уровней Ландау не зависит от напряженности магнитного поля, так как характерные величины как кулоновской, так и кинетической энергий пропорциональны $H^{1/2}$. Однако в бислое графена характерная величина кинетической энергии по-прежнему пропорциональна $H^{1/2}$, в то время как характерная энергия межслойного кулоновского взаимодействия при $D \gg l_H$ перестает зависеть от H и определяется расстоянием D .

Итак, мы получаем, что при $D \gg l_H$ и $l_H\sqrt{n} \ll 1$ (т.е. при достаточно малой концентрации, большом расстоя-

нии между слоями и сильным магнитном поле) магнитоэкситоны ведут себя как параллельно ориентированные диполи, обладающие эффективной массой M . Магнитоэкситоны взаимодействуют между собой посредством диполь-дипольного отталкивающего потенциала [75, 92] $U(R) = e^2 D^2 / (\epsilon R^3)$. При этом перекрытие волновых функций соседних магнитоэкситонов и смешивание уровней Ландау пренебрежимо малы, что позволяет нам спроецировать состояние системы на нижние уровни Ландау электронов и дырок. В результате этого матричный (по подрешеткам электрона и дырки) гамильтониан электрон-дырочной пары сводится к своей скалярной проекции на нижние уровни Ландау. Таким образом, при перечисленных выше условиях магнитоэкситоны образуют слабонеидеальный бозе-газ отталкивающихся диполей.

При $T = 0$ слабонеидеальный бозе-газ магнитоэкситонов образует бозе-конденсат [93]. Для рассматриваемой разреженной системы адекватным приближением является суммирование лестничных диаграмм по межэкситонному диполь-дипольному взаимодействию. По аналогии с [74, 94] (см. также [95]) мы можем записать уравнение для вершинной части, в котором вместо массы пары фигурирует магнитная масса, а вместо ее импульса — магнитный импульс:

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; \mathbf{P}, \Omega) &= \tilde{U}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') + \\ &+ \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi\hbar)^2} \frac{\tilde{U}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \Gamma(\mathbf{q}, \mathbf{p}'; \mathbf{P}, \Omega)}{(\kappa^2/M) + \Omega - \mathbf{P}^2/(4M) - q^2/M + i\delta}, \\ \mu &= \frac{n}{4} \Gamma(0, 0; 0, 0), \end{aligned} \quad (24)$$

где $\mu \equiv \kappa^2/2M$ — химический потенциал системы, $\tilde{U}(\mathbf{p})$ — фурье-образ потенциала взаимодействия $U(R)$, $\delta \rightarrow 0^+$. При условии $U(\kappa) \ll \mu$ может быть получено простое аналитическое решение уравнения (24) относительно химического потенциала. В соответствии с асимптотическим выражением для магнитной массы это условие выполняется, если $(D/l_H)^5 \ll 1/(l_H\sqrt{n})$. Тогда

$$\mu = \frac{\pi \hbar^2 n}{M \ln [\hbar^4 e^2 / (2\pi n M^2 e^4 D^4)]}. \quad (25)$$

При малых магнитных импульсах уравнение (24) дает звуковой спектр коллективных возбуждений $\epsilon(P) = c_s P$, где скорость звука $c_s = \sqrt{\mu/M}$, а μ дается выражением (25). Звуковой спектр возникает благодаря диполь-дипольному отталкиванию магнитоэкситонов и удовлетворяет критерию сверхтекучести Ландау, что делает возможной магнитоэкситонную сверхтекучесть в бислое графена при низких температурах. Переход двумерного слабонеидеального бозе-газа из нормального состояния в сверхтекучее является переходом Костерлица — Таулеса [6]. Температура $T_{\text{КТ}}$ этого перехода определяется соотношением $T_{\text{КТ}} = \pi \hbar^2 n_s(T_{\text{КТ}}) / (2k_B M)$, где n_s — сверхтекучая плотность как функция температуры, k_B — постоянная Больцмана.

Сверхтекучую плотность можно найти как $n_s = n/4 - n_n$, где n_n — плотность нормальной компоненты, а суммарная плотность n поделена на 4 для учета дополнительного (по сравнению с таковым в связанных квантовых ямах) вырождения по долинам. Величина n_n может быть определена с помощью процедуры Ландау

(см., например, [93, 96]) как линейный отклик полного тока системы на внешнее поле скоростей (в этом приближении нормальная компонента определяется газом невзаимодействующих возбуждений):

$$n_n(T) = \frac{3\zeta(3)}{2\pi\hbar^2} \frac{k_B^3 T^3}{Mc_s^4}, \quad (26)$$

где $\zeta(z)$ — дзета-функция Римана ($\zeta(3) \approx 1,202$). В итоге получаем следующее выражение для температуры перехода:

$$T_{KT} = \frac{T_{KT}^0}{2^{1/3}} \left\{ \left[1 + \sqrt{\frac{32}{27} \left(\frac{4Mk_B T_{KT}^0}{\pi\hbar^2 n} \right)^3 + 1} \right]^{1/3} - \left[\sqrt{\frac{32}{27} \left(\frac{4Mk_B T_{KT}^0}{\pi\hbar^2 n} \right)^3 + 1} - 1 \right]^{1/3} \right\}. \quad (27)$$

Здесь $T_{KT}^0 = k_B^{-1} [\pi\hbar^2 n c_s^4 M / 6\zeta(3)]^{1/3}$ — вспомогательная величина, равная температуре, при которой сверхтекучая плотность исчезает в приближении среднего поля, т.е. $n_s(T_{KT}^0) = 0$.

Температура T_{KT} как функция параметров системы H и D может быть использована для оценки области кроссовера, в которой для магнитоэкситонов проявляется локальная сверхтекучая плотность на масштабах, меньших или порядка среднего расстояния между вихрями в системе. Локальная сверхтекучая плотность может проявить себя в локальных оптических или транспортных свойствах. Зависимость T_{KT} от магнитного поля и плотности представлена на рис. 5. Согласно (27) температура перехода в сверхтекучее состояние *при фиксированной плотности магнитоэкситонов* уменьшается при увеличении напряженности магнитного поля H и межслойного расстояния D , что объясняется возрастанием магнитной массы M при увеличении H и D . Величина T_{KT} при $D \gg l_H$ убывает как H^{-2} .

Эффективная масса магнитоэкситона в бислое графена, не ограниченная массами составляющих его элект-

рона и дырки, может быть сделана очень малой. А так как температура перехода в сверхтекучее состояние обратно пропорциональна массе, то изучение БЭК магнитоэкситонов в бислое графена может оказаться более простым, чем в связанных квантовых ямах.

7. Коллективные свойства магнитоэкситонов в трехслойной системе

В этом разделе мы обсудим основные результаты работ [97, 98], касающиеся БЭК и сверхтекучести магнитоэкситонов в трехслойной системе.

Рассмотрим систему, представляющую собой стопку из трех слоев графена, разделенных слоями диэлектрика, которые препятствуют быстрой рекомбинации электронов и дырок, находящихся в разных слоях. Допустим, что слои с электронами и дырками чередуются — это может быть достигнуто либо электрическим допированием с помощью затворных электродов, либо соответствующим химическим допированием слоев графена. В таком случае дипольные моменты магнитоэкситонов, сформированных зарядами одной пары слоев, направлены параллельно, но дипольные моменты магнитоэкситонов с соседних пар слоев ориентированы антипараллельно. Такая ситуация, характерная для трехслойной системы типа $e-h-e$ или $h-e-h$, отличается от случая электрон-дырочного бислоя, в котором магнитоэкситонная система стабильна благодаря диполь-дипольному отталкиванию.

Мы рассмотрим БЭК и сверхтекучесть магнитоэкситонов, представляющих собой связанные состояния пар магнитоэкситонов с противоположно ориентированными дипольными моментами. Взаимодействие магнитоэкситонов на больших расстояниях как электрических квадруполь является отталкивающим и обеспечивает стабильность их системы.

Будем работать в рамках приближений, описанных в разделе 6: при $D \gg l_H$ и $l_H \sqrt{n} \ll 1$ магнитоэкситоны ведут себя как бозоны с массой M , роль которой играет эффективная магнитная масса. В пределе низкой плотности два параллельно или антипараллельно ориентированных магнитоэкситона на расстоянии R взаимодействуют посредством потенциалов $U_+(R)$ или $U_-(R)$ соответственно.

Эффективный гамильтониан системы магнитоэкситонов в рассматриваемом приближении может быть представлен как $H_{tot} = H_0 + H_{int}$. Эффективный гамильтониан системы невзаимодействующих магнитоэкситонов H_0 имеет вид

$$H_0 = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}} \epsilon_0(\mathbf{p}) (a_{\mathbf{p}}^+ a_{\mathbf{p}} + b_{\mathbf{p}}^+ b_{\mathbf{p}} + a_{-\mathbf{p}}^+ a_{-\mathbf{p}} + b_{-\mathbf{p}}^+ b_{-\mathbf{p}}),$$

где $\epsilon_0(\mathbf{p}) = p^2/2M$ — энергия невзаимодействующих магнитоэкситонов, $\mathbf{p}$ — магнитный импульс, $a_{\mathbf{p}}$ и $b_{\mathbf{p}}$ — операторы уничтожения магнитоэкситонов с дипольными моментами, ориентированными соответственно вверх и вниз. Эффективный оператор взаимодействия магнитоэкситонов выражается в виде

$$H_{int} = \frac{1}{2S} \sum_{\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4} [U_+(a_{\mathbf{p}_4}^+ a_{\mathbf{p}_3}^+ a_{\mathbf{p}_2} a_{\mathbf{p}_1} + b_{\mathbf{p}_4}^+ b_{\mathbf{p}_3}^+ b_{\mathbf{p}_2} b_{\mathbf{p}_1}) - U_-(a_{\mathbf{p}_4}^+ b_{\mathbf{p}_3}^+ a_{\mathbf{p}_2} b_{\mathbf{p}_1})], \quad (28)$$

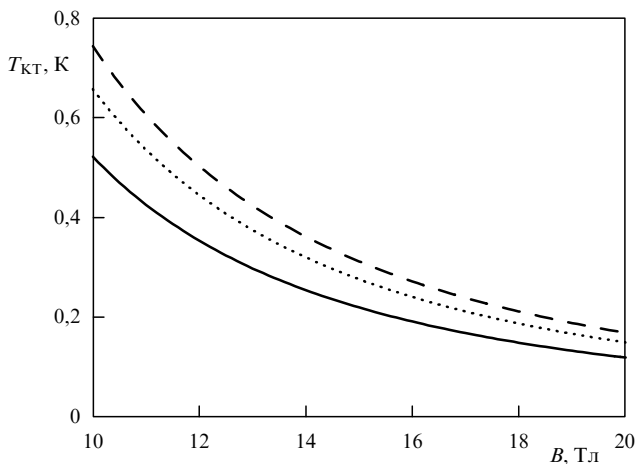


Рис. 5. Зависимость температуры перехода Костерлица–Таулеса T_{KT} от магнитного поля B в бислое графена, разделенном SiO_2 ($\epsilon \approx 4,5$). Концентрация магнитоэкситонов $n = 4 \times 10^{11} \text{ см}^{-2}$. Расстояние D между слоями равно: 30 нм (сплошная кривая), 28 нм (пунктирная кривая) и 27 нм (штриховая кривая).

где U_+ и U_- — двумерные фурье-образы $U_+(R)$ и $U_-(R)$ при $\mathbf{p} = 0$, S — площадь системы. Заметим, что подходящим параметром обрезания для преобразования Фурье является классическая точка поворота диполь-дипольного взаимодействия. При этом параметр обрезания для потенциала $U_+(R)$ много больше, чем для $U_-(R)$. Следовательно, можно утверждать, что $U_+ > 0$, $U_- < 0$ и $|U_-| > |U_+|$.

Применим при $T = 0$ приближение Боголюбова и допустим, что $(N - N_0)/N_0 \ll 1$, где N — полное число частиц, N_0 — число частиц в конденсате. В приближении Боголюбова пренебрегается взаимодействием между надконденсатными частицами и учитывается взаимодействие частиц конденсата между собой и надконденсатных частиц с частицами конденсата. При этом полный гамильтониан принимает вид

$$H_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p} \neq 0} \left\{ [\epsilon_0(p) + (U_+ + U_-)n] \times \right. \\ \times (a_{\mathbf{p}}^+ a_{\mathbf{p}} + b_{\mathbf{p}}^+ b_{\mathbf{p}} + a_{-\mathbf{p}}^+ a_{-\mathbf{p}} + b_{-\mathbf{p}}^+ b_{-\mathbf{p}}) + \\ + 2U_+ n (a_{\mathbf{p}}^+ a_{-\mathbf{p}}^+ + a_{\mathbf{p}} a_{-\mathbf{p}} + b_{-\mathbf{p}}^+ b_{\mathbf{p}}^+ + b_{-\mathbf{p}} b_{\mathbf{p}}) + \\ + U_- n (a_{\mathbf{p}}^+ b_{-\mathbf{p}}^+ + a_{\mathbf{p}} b_{-\mathbf{p}} + a_{-\mathbf{p}}^+ b_{\mathbf{p}}^+ + a_{-\mathbf{p}} b_{\mathbf{p}} + \\ \left. + a_{\mathbf{p}}^+ b_{\mathbf{p}} + a_{-\mathbf{p}}^+ b_{-\mathbf{p}} + a_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{p}}^+ + a_{-\mathbf{p}} b_{-\mathbf{p}}^+) \right\}. \quad (29)$$

Диагонализуем полный гамильтониан с помощью унитарного преобразования боголюбовского типа [99]

$$a_{\mathbf{p}} = \frac{\alpha_{\mathbf{p}} + A_{\mathbf{p}} \alpha_{-\mathbf{p}}^+ + B_{\mathbf{p}} \beta_{-\mathbf{p}}^+ + C_{\mathbf{p}} \beta_{\mathbf{p}}}{(1 - A_{\mathbf{p}}^2 - B_{\mathbf{p}}^2 - C_{\mathbf{p}}^2)^{1/2}}, \\ b_{\mathbf{p}} = \frac{\beta_{\mathbf{p}} + A_{\mathbf{p}} \beta_{-\mathbf{p}}^+ + B_{\mathbf{p}} \alpha_{-\mathbf{p}}^+ + C_{\mathbf{p}} \alpha_{\mathbf{p}}}{(1 - A_{\mathbf{p}}^2 - B_{\mathbf{p}}^2 - C_{\mathbf{p}}^2)^{1/2}},$$

где коэффициенты $A_{\mathbf{p}}$, $B_{\mathbf{p}}$ и $C_{\mathbf{p}}$ находятся из условия равенства нулю коэффициентов при недиагональных членах гамильтониана. В результате получаем

$$H_{\text{tot}} = \sum_{\mathbf{p} \neq 0} \epsilon(p) (\alpha_{\mathbf{p}}^+ \alpha_{\mathbf{p}} + \beta_{\mathbf{p}}^+ \beta_{\mathbf{p}})$$

со спектром квазичастиц

$$\epsilon_1^2(p) = \epsilon_0^2(p) + 2nU_+ \epsilon_0(p),$$

$$\epsilon_2^2(p) = \epsilon_0^2(p) + 2n(U_+ + U_-) \epsilon_0(p).$$

Так как $U_+ > 0$, $U_- < 0$, то $\epsilon_1^2(p) > \epsilon_2^2(p)$ при $p > 0$. Следовательно, будут возбуждаться только квазичастицы со спектром $\epsilon_2^2(p)$, поскольку их возбуждение требует меньших энергий, чем возбуждение квазичастиц со спектром $\epsilon_1^2(p)$. Так как $U_+ + U_- < 0$, то из (4) легко видеть, что при малых импульсах $p < \sqrt{4Mn|U_+ + U_-|}$ спектр возбуждений становится чисто мнимым. Таким образом, система слабо взаимодействующих не прямых магнитоэкситонов в сверхрешетке является нестабильной. Эта нестабильность усиливается при возрастании напряженности магнитного поля H , поскольку при этом увеличивается магнитная масса M и, следовательно, расширяется область p , в которой энергия коллективных возбуждений является чисто мнимой.

Рассмотрим теперь основное состояние системы, представляющей собой слабонеидеальный бозе-газ магнитоэкситонов, образованных парами антипараллель-

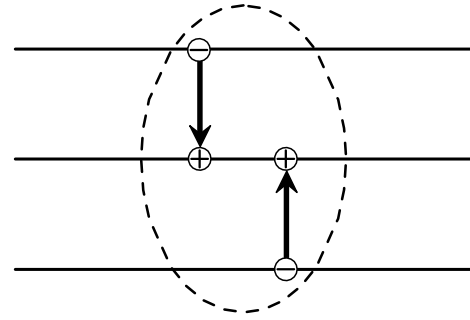


Рис. 6. Схематическое изображение структуры квазидвумерного непрямого магнитоэкситона, составленного из двух антипараллельно ориентированных не прямых магнитоэкситонов, расположенных в двух соседних парах слоев графена.

но ориентированных магнитоэкситонов, располагающихся в соседних парах слоев графена (рис. 6). Если энергия связи магнитоэкситона много меньше энергий связи составляющих его магнитоэкситонов, а радиус магнитоэкситона много больше размеров магнитоэкситонов, то можно использовать адиабатическое приближение и рассматривать магнитоэкситоны как бесструктурные частицы. Условия применимости такого приближения будут установлены ниже. Из ранее сделанных приближений следует, что D больше размера магнитоэкситона, поэтому потенциальная энергия взаимодействия магнитоэкситонов на расстоянии r выражается в виде

$$U(r) = \frac{e^2}{\epsilon r} - \frac{2e^2}{\epsilon(r^2 + D^2)^{1/2}} + \frac{e^2}{\epsilon(r^2 + 4D^2)^{1/2}}. \quad (30)$$

Магнитоэкситоны притягиваются при $r > 1,11D$ и отталкиваются при $r < 1,11D$. Минимум потенциальной энергии находится при $r = r_0 \approx 1,67D$.

Для расчета параметров магнитоэкситона рассмотрим задачу о связанном состоянии двух магнитоэкситонов в системе их центра масс. Для оценок аппроксимируем потенциальную яму в окрестности r_0 прямоугольной потенциальной ямой глубиной $V_0 = 0,04e^2/(\epsilon D)$

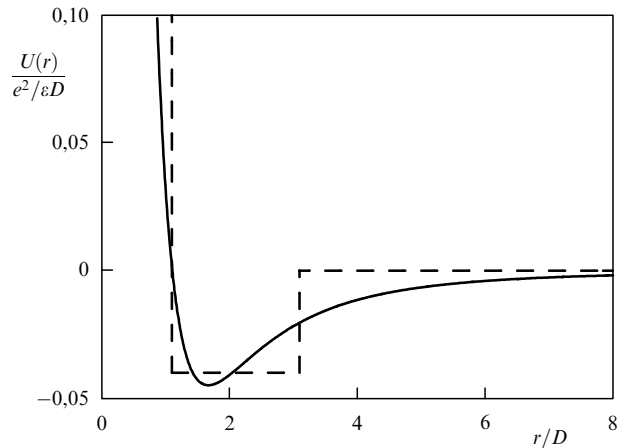


Рис. 7. Потенциал взаимодействия (30) двух антипараллельно ориентированных магнитоэкситонов (сплошная линия) и аппроксимирующая его прямоугольная потенциальная яма (штриховая линия).

и шириной $a = 2D$, как показано на рис. 7. Если записать волновую функцию относительного движения в виде $\psi(r, \varphi) = \exp(im\varphi)f(r)/\sqrt{r}$, где m — относительный орбитальный момент, то функция $f(r)$ будет подчиняться одномерному уравнению Шрёдингера для частицы с приведенной массой $\mu = M/2$, находящейся в вышеупомянутой прямоугольной потенциальной яме (см. рис. 7) и в дополнительном центробежном потенциале $U_{cf}(r) = \hbar^2(m^2 - 1/4)/(2\mu r^2)$. Поскольку безразмерный параметр $2\mu V_0 a^2/\hbar^2 = 0,32(D/l_H)^4$, характеризующий свойства ямы, много больше единицы при $D \gg l_H$, то в этой яме, как можно показать (в пренебрежении центробежным потенциалом), существует большое количество связанных состояний. При этом энергия основного состояния равна $E = -V_0 + \pi^2 e^2 l_H^4/(8\epsilon D^5) \approx -V_0$. Центробежным потенциалом можно пренебречь, так как его значение внутри ямы имеет порядок $e^2 l_H^4/(\epsilon D^5)$ и много меньше энергии связи $|E|$.

Итак, энергия связи магнито-бизекситона при $D \gg l_H$ приближенно равна $0,04e^2/(\epsilon D)$, а характерный "размер" его волновой функции имеет порядок $a \sim D$, тогда как энергии связи составляющих магнито-экситонов равны $e^2/(\epsilon D)$, а радиусы имеют порядок l_H . Таким образом, при $D \gg l_H$ адиабатическое приближение справедливо.

Рассмотренный выше магнито-бизекситон обладает ненулевым квадрупольным моментом $Q_0 = 2eD^2$ (большая ось квадрупольного момента нормальна к плоскости слоев графена). Следовательно, непрямые магнито-бизекситоны взаимодействуют на расстояниях $R \gg D$ как отталкивающиеся параллельно ориентированные квадруполь: $U(R) = 9e^2 D^4/(\epsilon R^5)$. Используя, как и в разделе 6, теорию двумерного бозе-газа [74, 94], вычислим в лестничном приближении химический потенциал μ магнито-бизекситонов:

$$\mu = \frac{4\pi\hbar^2 n_{\text{бex}}}{M_{\text{бex}} \ln \left\{ \hbar^{4/3} \epsilon^{2/3} / [8\pi(9M_{\text{бex}} e^2 D^4)^{2/3} n_{\text{бex}}] \right\}}, \quad (31)$$

где $n_{\text{бex}} = n/2$ — плотность магнито-бизекситонов, $M_{\text{бex}} = 2M$ — их масса. При малых импульсах коллек-

тивный спектр возбуждений системы магнито-бизекситонов имеет звуковой вид $\epsilon(p) = c_s p$ ($c_s = \sqrt{\mu/M_{\text{бex}}}$ — скорость звука) и удовлетворяет критерию сверхтекучести Ландау. Для оценки плотности сверхтекучей компоненты и температуры перехода Костерлица–Таулеса в сверхтекучее состояние могут быть использованы формулы (26) и (27) с заменой $n \rightarrow n_{\text{бex}}$, $M \rightarrow M_{\text{бex}}$ и со скоростью звука, соответствующей химическому потенциалу (31). Зависимости $T_{\text{КТ}}$ от концентрации магнито-экситонов при различных напряженностях магнитного поля приведены на рис. 8.

Таким образом, в рассматриваемой трехслойной структуре при низких температурах может исчезнуть экситонная линия и остаться линия магнито-бизекситонов. Как и в системе магнито-экситонов, изученной в разделе 6, температура перехода Костерлица–Таулеса в сверхтекучее состояние при фиксированной плотности магнито-бизекситонов уменьшается при увеличении напряженности магнитного поля и межслойного расстояния вследствие возрастания эффективной магнитной массы. Температура уменьшается как H^{-2} при $D \gg l_H$. Отталкивание магнито-бизекситонов обеспечивает устойчивость системы.

8. Сверхтекучее состояние системы композитных фермионов в бислое графена

Рассмотрим, как и в разделе 6, электрон-дырочный бислой — две управляемые электродами и разделенные барьером плоскости графена (см. рис. 4), помещенные в сильное магнитное поле, но при таких управляющих параметрах (магнитном поле H и химических потенциалах $\mu_1 = \mu_2$ или $\mu_1 = -\mu_2$), при которых фактор заполнения уровней Ландау в обоих листах графена $\nu = 1/2$. Такая система во многом похожа на экспериментально изученный группой Эйзенштайна [100] электронный бислой в полупроводнике (различие связано со спинорным характером волновой функции электрона в графене, наличием фазы Берри и т.п.). При половинном факторе заполнения удобно провести калибровочное преобразование Гальперина–Ли–Рида [101] и перейти к представлению композитных фермионов [102], что, по сути, означает следующее. Заполнение $\nu = 1/2$ отвечает двум квантам магнитного потока, приходящимся на один электрон. Присоединяя по два кванта потока к каждому электрону (это отвечает калибровочному преобразованию Гальперина–Ли–Рида), получаем новые квазичастицы — композитные фермионы.

В приближении среднего поля, т.е. при однородном "размазывании" квантов потока, "привязанных" к электронам, магнитное поле не действует на электроны. Поэтому в обоих слоях имеются ферми-сферы композитных электронов (или, в силу электрон-дырочной симметрии, ферми-сферы композитных дырок). Можно показать [103], что между композитными электронами разных слоев имеется эффективное отталкивание, а между композитным электроном одного слоя и композитной дыркой другого — притяжение. В результате возникает ситуация, аналогичная рассмотренной в разделе 5 в отсутствие магнитного поля, — происходит электрон-дырочное спаривание между слоями и образуется сверхтекучая система пар композитных фермионов в бислое графена (причем как в случае, когда химические потенциалы слоев совпадают, так и в случае, когда они противоположны).

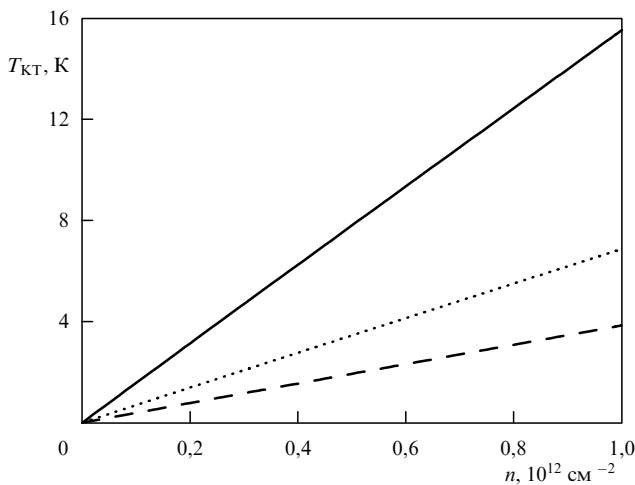


Рис. 8. Зависимость температуры перехода Костерлица–Таулеса $T_{\text{КТ}}$ от концентрации магнито-экситонов n в структуре трех слоев графена, разделенных слоями SiO_2 ($\epsilon \approx 4,5$) толщиной $D = 10 \text{ нм}$. Напряженность магнитного поля B равна: 10 Тл (сплошная линия), 15 Тл (пунктирная линия) и 20 Тл (штриховая линия).

9. Магнитоплазмы в слоистых структурах на основе графена

В этом разделе мы изложим некоторые результаты, касающиеся свойств магнитоплазмонов в однослойном графене, в бислой графене и в сверхрешетке слоев графена (см. [104]). Магнитоплазмы представляют собой коллективные электронные колебания, дисперсионное соотношение $\epsilon(q)$ которых удовлетворяет уравнению $\epsilon(q, \epsilon(q)) = 0$, где $\epsilon(q, \omega)$ — динамическая диэлектрическая проницаемость, определяющая эффективное взаимодействие электронов в графене.

В приближении хаотических фаз динамическая диэлектрическая проницаемость $\epsilon(q, \omega) = 1 - v(q) \Pi(q, \omega)$, где $v(q) = 2\pi e^2 / (\epsilon_b q)$ — затравочное кулоновское взаимодействие, ϵ_b — диэлектрическая проницаемость окружающей среды, $\Pi(q, \omega)$ — поляризационный оператор. Используя явный вид волновых функций электронов в однослойном графене в магнитном поле, приведенный, например, в [87], найдем, что в приближении линейного отклика

$$\Pi(q, \omega) = \frac{g_s g_v}{2\pi l_H^2} \sum_{n, n'} \frac{f_n - f_{n'}}{\hbar\omega + \epsilon_n - \epsilon_{n'} + i\delta} F_{n, n'}(q), \quad (32)$$

где $\delta \rightarrow 0^+$, $\epsilon_n = \text{sgn}(n) \hbar v_F \sqrt{2|n|} / l_H$ — энергия n -го уровня Ландау ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), f_n — число заполнения этого уровня. Коэффициент перекрытия $F_{n, n'}(q)$ уровней n и n' имеет вид

$$F_{n, n'}(q) = \frac{2^{\delta_{n,0} + \delta_{n',0} - 2}}{[(|n| - |n'|)!]^2} \left[-\frac{q^2 l_H^2}{2} \right]^{|n| - |n'|} \times \\ \times \left[\text{sgn}(n) \text{sgn}(n') \frac{(|n| - 1)!}{(|n'| - 1)!} + \frac{|n|!}{|n'|!} \right].$$

При $T = 0$ наивысший уровень Ландау и все более низкие уровни целиком заполнены, а остальные уровни пустые. В наших вычислениях мы учли только переходы между пятью низшими уровнями Ландау зоны проводимости и пятью высшими уровнями валентной зоны. На рисунке 9

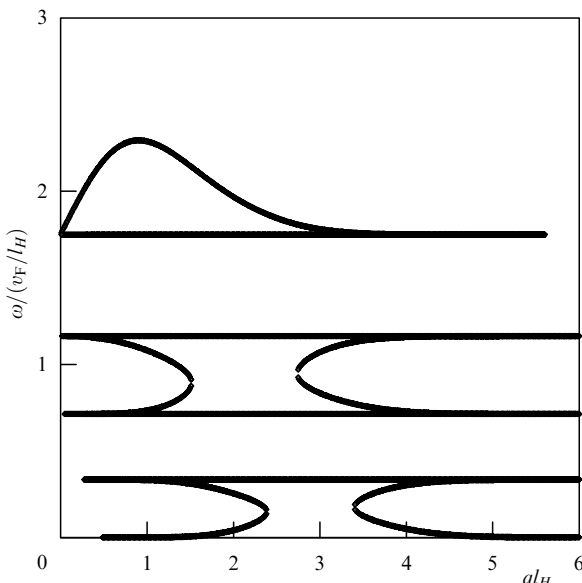


Рис. 9. Дисперсионная зависимость для магнитоплазмонов в однослойном графене — решения с вещественной частотой.

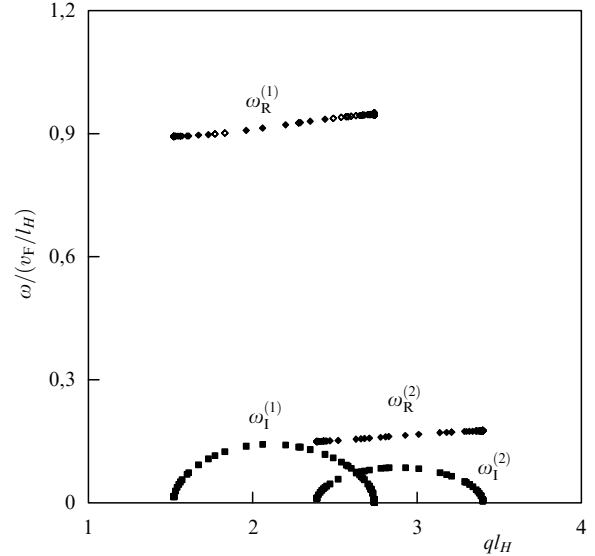


Рис. 10. Вещественная ω_R и мнимая ω_I части частоты магнитоплазмона в однослойном графене — решения с комплексными частотами.

приведены решения дисперсионного уравнения в однослойном графене, соответствующие вещественным частотам (горизонтальные линии отвечают одночастичным переходам между уровнями Ландау). В этом случае магнитоплазмы являются самоподдерживающимися возбуждениями, но при входе в область электрон-дырочных одночастичных возбуждений они приобретают конечное время жизни за счет затухания Ландау (распада плазмона на электрон-дырочные пары или, как было более наглядно показано В.Л. Гинзбургом, вследствие обратного эффекта Вавилова — Черенкова). На рисунке 10 показаны решения дисперсионного уравнения, соответствующие комплексным частотам.

Затухающие магнитоплазменные моды обладают линейной по q вещественной частью частоты и существуют в тех областях q , где групповая скорость незатухающих магнитоплазмонов отрицательна. Отрицательная групповая скорость при $ql_H > 1$ возникает в результате действия магнитного поля [105]. Мы повторили вычисление дисперсионных кривых, представленных на рис. 9, учитывая большее число уровней Ландау в обеих зонах. Качественно результаты при этом не меняются, за исключением того, что увеличивается количество линий одночастичных возбуждений. Однако нижние ветви коллективных возбуждений изменяются незначительно.

Рассмотрим теперь магнитоплазмы в двуслойном графене, для которого гамильтониан электрона имеет вид (9). Явный вид волновых функций электрона в магнитном поле приведен в [55], а энергии уровней Ландау равны $\epsilon_n^{(b)} = \text{sgn}(n) \hbar \omega_c \sqrt{|n|(|n| - 1)}$, где $n = 0, 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, $\omega_c = eH/(m^*c)$, $m^* = 0.033m_e$. Поляризационный оператор двуслойного графена вычисляется по формуле (32), но с заменой $\epsilon_n \rightarrow \epsilon_n^{(b)}$ и с использованием следующего выражения для интеграла перекрытия:

$$F_{n, n'}^{(b)}(q) = 2^{\delta_{n,0} + \delta_{n,1} + \delta_{n',0} + \delta_{n',1} - 2} \times \\ \times \left\{ \left| \int dx \exp(iqx) \Phi_{|n|}(x) \Phi_{|n'|}(x + l_H^2 q_y) \right|^2 + \text{sgn}(n) \times \right. \\ \left. \times \text{sgn}(n') \left| \int dx \exp(iqx) \Phi_{|n|-2}(x) \Phi_{|n'|-2}(x + l_H^2 q_y) \right|^2 \right\}.$$

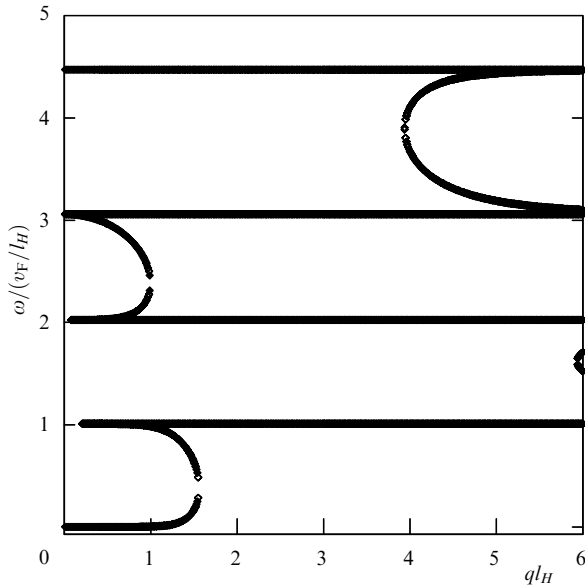


Рис. 11. Вещественные решения дисперсионного уравнения для магнитоплазмонов в двуслойном графене с фактором заполнения $\nu = 1$.

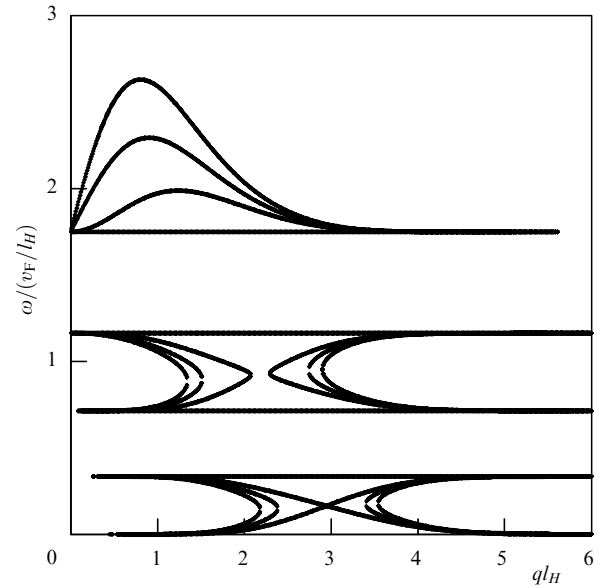


Рис. 12. Вещественные решения дисперсионного уравнения для магнитоплазмонов в бислое графена при $D = l_H$. В валентной зоне заполнен только наивысший уровень Ландау.

Здесь $\Phi_n(x) = (2^n n! \sqrt{\pi} l_H)^{-1/2} \exp[-x^2/(2l_H^2)] H_n(x/l_H)$ — собственная функция одномерного осциллятора, H_n — полином Эрмита.

Решения дисперсионного уравнения для двуслойного графена, соответствующие незатухающим плазмонным модам, приведены на рис. 11. Как и в однослойном графене, для ряда значений волновых векторов групповая скорость в результате действия магнитного поля оказывается отрицательной. Передача энергии между электронами и коллективными возбуждениями происходит только тогда, когда фазовая скорость коллективной моды равна скорости одного из электронов.

Для бислоя графена, в котором туннелирование между слоями, разделенными расстоянием D , пренебрежимо мало, дисперсионное уравнение имеет вид [76, 106]

$$v(p) \Pi(q, \omega) [1 - \exp(-2qD)] - 1 = \pm \exp(-qD), \quad (33)$$

где мы предположили, что поляризационный оператор $\Pi(q, \omega)$, определяемый выражением (32), одинаков для обоих слоев графена. Межслойное кулоновское взаимодействие приводит к смешиванию плазмонных мод каждого из слоев, в результате чего образуются две дисперсионные ветви. Решения уравнения (33) с вещественными частотами приведены на рис. 12. Здесь также существуют области затухания магнитоплазмонов.

Наконец, рассмотрим сверхрешетку из слоев графена, параллельных плоскости (x, y) и отстоящих друг от друга на расстояние D по оси z . При этом слои графена заключены в среду с диэлектрической проницаемостью ϵ_b , а туннелированием между ними можно пренебречь. Дисперсионное уравнение для магнитоплазмонов в сверхрешетке имеет вид [29, 107] $1 - v(q) \Pi(q, \omega) S(q, k_z) = 0$, где $\Pi(q, \omega)$ — поляризационный оператор одного листа графена, $S(q, k_z) = \sinh(qD)/[\cosh(qD) - \cos(k_z D)]$ — структурный фактор, определяющий фазовую когерентность между коллективными возбуждениями в разных слоях. Мы решили дисперсионное уравнение для комплексной частоты

магнитоплазмонов, результаты приведены на рис. 13 при $k_z l_H = 0,1$ и различных значениях D .

Результаты наших численных расчетов для бесконечной сверхрешетки показывают, что существуют как магнитоплазмонные моды, так и возбуждения, соответствующие одночастичным электронным переходам между уровнями Ландау. Коллективная мода с наибольшей энергией обладает возрастающей частотой при $ql_H < 1$ и имеет затухание Ландау при больших волновых векторах. Из рисунка 13 видно, что мнимая часть частоты коллективной моды, ответственная за ее затухание, заметно увеличивается в сверхрешетке по сравнению с таковой в однослойном графене. Кроме того,

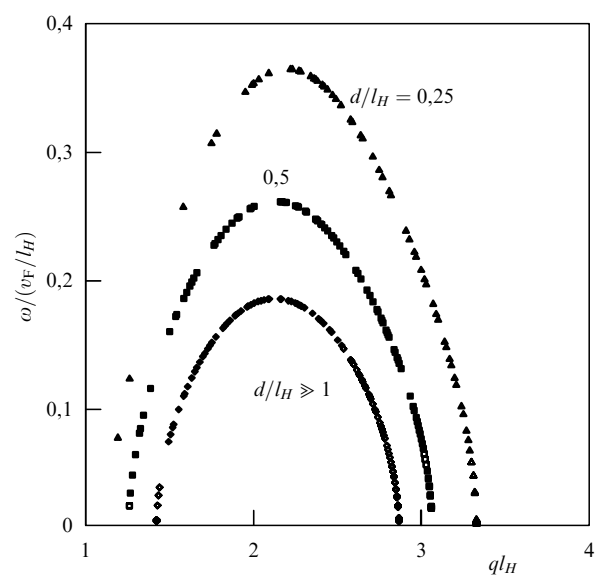


Рис. 13. Мнимая часть частоты магнитоплазмона в одном слое графена в сравнении с результатами для бесконечной сверхрешетки слоев графена при $\nu = 1$, $k_z l_H = 0,1$ и периодах сверхрешетки $D = 0,25l_H$, $D = 0,5l_H$ и $D \gg l_H$.

благодаря синфазной суперпозиции колебаний в отдельных слоях резко увеличиваются как действительная, так и мнимая части частоты. Этот эффект усиливается по мере уменьшения отношения D/l_H .

Усиленная нестабильность магнитоплазмонов в сверхрешетке может быть использована для превращения энергии магнитоплазменных мод в электромагнитное излучение терагерцевого диапазона. Например, в магнитном поле напряженностью 10 Тл, соответствующем фактору заполнения $\nu = 1$, частота магнитоплазмона лежит в области 3,6 ТГц. Дополнительным преимуществом таких источников излучения является возможность управления частотой излучения посредством изменения напряженности магнитного поля.

10. Заключение

Со времени экспериментального открытия графена в 2004 г. уже получено множество как теоретических, так и экспериментальных результатов, опубликовано несколько сотен работ, касающихся графена. Был открыт ряд новых эффектов, не имеющих аналогов ни в каких других веществах, и еще большее число необычных эффектов предсказано теоретически и ожидает экспериментального исследования.

Вклад в фундаментальную науку, который вносит изучение графена, трудно переоценить, так как этот материал дает возможность работать с безмассовыми заряженными фермионами, не имеющими аналогов среди элементарных частиц. Графен уникален не только с точки зрения электронных свойств — среди всех полученных экспериментально наноструктур он наиболее близок к идеалу двумерного кристалла, так как обладает толщиной в один атом и четко выраженной кристаллической структурой. Поэтому получение графена произвело сразу два переворота: в фундаментальной физике твердого тела и в физике наноструктур. Экспериментальное изучение удивительных свойств графена можно считать самым ярким открытием в физике мезоскопических систем за последние 20 лет, стоящим в одном ряду с открытиями целочисленного и дробного квантового эффектов Холла.

Отметим, что К.С. Новоселовым, А.К. Геймом, С.В. Морозовым и др. были получены и другие двумерные кристаллы, помимо графена [9]. Это открывает новую область физики наноструктур — изучение мембран с одноатомной толщиной.

Обратим внимание на некоторые важные вопросы фундаментальной физики графена, которые пока остаются открытыми. Во-первых, это недавно обнаруженные аномалии в квантовом эффекте Холла. Как уже говорилось в разделе 3, квантование удельной холловской проводимости $\sigma_{xy} = \nu e^2/h$ при $\nu = \pm 2, \pm 6, \dots$, хотя и не является характерным для обычных двумерных систем, но объясняется исходя из одночастичной ультрарелятивистской динамики электронов в графене. Однако в работе [108] было обнаружено, что в сильных магнитных полях ($B > 20$ Тл) образуются новые холловские ступеньки при $\nu = 0, \pm 1, \pm 4$. Последующие эксперименты [109] показали, что расщепления при $\nu = 0$ и $\nu = \pm 4$ соответствуют снятию спинового вырождения, а величины соответствующих щелей в спектре пропорциональны $|B|$, как и должно быть при зеемановском расщеплении. Однако щель при $\nu = 0$, располагаясь в дираковской точке, обладает особенностями, отличающими ее от

аналогичных зеемановских щелей на уровнях Ландау $n \neq 0$ [110]. Что касается щелей при $\nu = \pm 1$, то они пропорциональны $\sqrt{B_\perp}$, где $B_\perp$ — перпендикулярная плоскости графена составляющая поля, а это указывает на их многочастичную природу. Таким образом, в достаточно сильных магнитных полях снимается вырождение уровня $n = 0$ как по спинам, так и по долинам: $\nu = 0$ соответствует спиновому расщеплению, а $\nu = \pm 1$ соответствуют какому-то коллективному электронному явлению, нарушающему долинную симметрию. Был предложен ряд вариантов теоретического объяснения этого явления (например, ферромагнетизм в режиме квантового эффекта Холла, спонтанное образование массы, спаривание композитных фермионов и др.), но окончательной ясности еще не достигнуто (см., например, [109, 111] и цитируемую там литературу).

Другой открытый вопрос — это природа минимальной удельной проводимости графена, которая согласно экспериментам равна $4e^2/h$ [10, 51], когда энергия Ферми находится в дираковской точке. Долгое время существование минимальной удельной проводимости связывали с наличием беспорядка (в том числе, рипплов), создающего электрон-дырочные лужи (см., например, [112] и цитируемую там литературу), но теория дает значение минимальной удельной проводимости в π раз меньшее, чем экспериментальное. Впоследствии было показано, что такое же значение удельной проводимости получается теоретически из рассмотрения абсолютно чистого графена [113] и является характерным свойством киральных частиц, не требуя, таким образом, привлечения какого-либо беспорядка. Следовательно, необходимо выяснить, какую роль в образовании минимальной удельной проводимости играют киральность, беспорядок, а также электрон-электронные взаимодействия.

Киральная природа электронов должна теоретически проявляться в ряде квантово-электродинамических эффектов, которые в графене должны быть особенно сильными в связи с отсутствием щели между зоной проводимости и валентной зоной. В частности, для изучения предсказанного клейновского туннелирования через потенциальный барьер в графене [44] были проведены соответствующие транспортные измерения [114], но рассеяние на примесях внесло существенные искажения в их результаты.

Представляют большой интерес оптические исследования графена. Помимо замечательного результата об универсальности коэффициента поглощения графена в широкой спектральной области [115], который определяется лишь постоянной тонкой структуры α и равняется $\pi\alpha$, представляется интересным непосредственно изучить скорость затухания квазичастиц как функцию их энергии с помощью спектроскопии с разрешением по времени (см., например, [116]). Это дало бы важную информацию о свойствах электронной ферми-жидкости в графене и возможных отклонениях от теории Ландау [59, 68, 117].

Открытыми остаются и вопросы, связанные с механической стабильностью графена. Расчет в гармоническом приближении показывает, что среднеквадратичные смещения участков листа графена перпендикулярно его плоскости расходятся как L^2 , где L — линейный размер листа. Это указывает на нестабильность по отношению к смятию. Однако учет эффектов ангармонизма дает зависимость L^r , где $r \approx 0,6$, что в каком-то смысле

стабилизирует графеновую мембрану (см., например, [118], а также [23] и цитируемую там литературу). Эксперименты [11] показали, что графен покрыт слабыми локальными искривлениями — рипплами, имеющими размеры в несколько нанометров. Численное моделирование [119] дало такой же результат, но многое относительно свойств рипплов остается пока неясным. Механические свойства графена как двумерной мембраны нуждаются в дальнейшем изучении.

Обсудим теперь основные направления прикладных исследований графена. Из нанoeлектронных приложений графена сейчас наиболее активно рассматривается создание полевых транзисторов, в которых используются такие свойства графена, как высокая подвижность носителей и легкость обработки и присоединения электродов. Созданы простейшие образцы полевых транзисторов на основе графена и исследованы их характеристики [120]. К сожалению, из-за существования минимальной удельной проводимости графена такие транзисторы имеют большие токи утечки, поэтому уникальная зонная структура графена является помехой при создании традиционных электронных устройств. Для улучшения характеристик транзистора необходимо наличие щели в спектре, которая может появиться, например, при химической модификации графена [121] или в результате взаимодействия с подложкой [122]. Менее привычными прототипами возможных будущих электронных устройств являются одноэлектронные транзисторы на основе квантовых точек, в работе которых используется явление кулоновской блокады. Особенности зонной структуры графена приводят к тому, что в графеновых квантовых точках расстояние между энергетическими уровнями, образующимися в результате пространственного конфайнмента, намного больше, чем в аналогичных устройствах на основе других материалов [14, 123]. Это позволяет одноэлектронным транзисторам работать при комнатной температуре.

Благодаря своим уникальным свойствам графен является привлекательным кандидатом в материалы для реализации электронных устройств, принципиально отличающихся от стандартных. Например, графен может быть применен для создания элементной базы спинтроники [124], в которой для передачи сигналов используется спиновая степень свободы электронов. Очень малая спин-орбитальная связь и большая подвижность зарядов в графене делают возможным спиновый транспорт на субмикронных расстояниях при комнатной температуре [125]. Дополнительная — долинная — степень свободы электронов в графене также может быть использована для передачи сигналов. При определенных условиях вырождение по долинам может быть снято, в результате чего можно создавать и детектировать долинную поляризацию [126].

Графен как двумерный материал обладает ценностью не только для электронных приложений. В связи с этим можно упомянуть хранение больших объемов водорода, адсорбированного на поверхности графена [127], создание новых композитных материалов [128] и высокочувствительных газовых сенсоров на основе графена [129]. Графен также может быть использован в качестве почти прозрачного электрода в жидкокристаллических индикаторах [130] и в качестве наномеханического резонатора, позволяющего детектировать сверхмалые массы [131]. Постоянство коэффициента оптического поглощения

графена в широком спектральном диапазоне можно использовать для создания оптически нейтральных покрытий и детекторов электромагнитного излучения (в виде стопок несоприкасающихся листов графена), чувствительность которых не зависела бы от длины волны в области от терагерцевого диапазона до дальнего инфракрасного диапазона [16]. Конечно, здесь уместно вспомнить высказывание Нильса Бора: "Тяжело предсказывать, особенно будущее". Таким образом, перспективы технологического применения графена сильно зависят от того, будет ли его изготовление достаточно удобным и дешевым.

Подчеркнем, что графен обладает огромным потенциалом для создания на его основе разнообразных структур, свойства которых могут сильно отличаться от свойств исходного графена. С помощью химической модификации можно изменять геометрию [132] и электронные свойства [121] листа графена. На листе графена также можно создавать различные сверхрешетки, которые позволят модифицировать его зонную структуру. Такие сверхрешетки могут быть получены с помощью контролируемой адсорбции атомов [15], литографических методов [133] или внешних полей [134].

Представленные в докладе оригинальные результаты показывают, что графен и наноструктуры на его основе являются весьма интересными объектами для реализации сверхтекучести и других когерентных эффектов. Высокое качество образцов графена и возможность изготовления компактных многослойных систем позволяют надеяться на то, что наблюдать коллективные эффекты в них будет проще, чем в традиционных квазидвумерных системах. Специфическая черта графена — линейная дисперсия — приводит к новым соотношениям между кинетической и потенциальной энергиями системы электронов, тем самым позволяя реализовывать новые режимы поведения квантовых систем.

Ю.Е.Л. благодарен О.Л. Берману, Д.К. Ефимкину, Г. Гамбсу и Р.Я. Кезерашвили за сотрудничество и Ю.В. Копаеву за полезные обсуждения. Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ и Президиума РАН. А.А.С. благодарит за поддержку фонд некоммерческих программ "Династия" и Фонд содействия отечественной науке.

Список литературы

1. Лозовик Ю Е, Попов А М *УФН* **177** 786 (2007) [Lozovik Yu E, Popov A M *Phys. Usp.* **50** 749 (2007)]; Saito R, Dresselhaus G, Dresselhaus M S (Eds) *Physical Properties of Carbon Nanotubes* (London: Imperial College Press, 1998)
2. Лозовик Ю Е, Попов А М *УФН* **167** 751 (1997) [Lozovik Yu E, Popov A M *Phys. Usp.* **40** 717 (1997)]
3. Dresselhaus M S, Dresselhaus G *Adv. Phys.* **51** 1 (2002)
4. Peierls R E *Ann. Inst. Henri Poincaré* **5** 177 (1935); Landau L D *Phys. Z. Sowjetunion* **11** 26 (1937)
5. Березинский В Л *Низкотемпературные свойства двумерных систем с непрерывной группой симметрии* (М.: Физматлит, 2007)
6. Kosterlitz J M, Thouless D J *J. Phys. C: Solid State Phys.* **6** 1181 (1973); Nelson D R, Kosterlitz J M *Phys. Rev. Lett.* **39** 1201 (1977)
7. Nelson D R, Halperin B I *Phys. Rev. B* **19** 2457 (1979)
8. Novoselov K, Geim A K, Morozov S V et al. *Science* **306** 666 (2004)
9. Novoselov K S et al. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **102** 10451 (2005)
10. Novoselov K S, Geim A K, Morozov S V et al. *Nature* **438** 197 (2005)
11. Meyer J C et al. *Nature* **446** 60 (2007)
12. Ferrari A C et al. *Phys. Rev. Lett.* **97** 187401 (2006); Gupta A et al. *Nano Lett.* **6** 2667 (2006)

13. de Heer W A et al. *Solid State Commun.* **143** 92 (2007)
14. Özyilmaz B et al. *Appl. Phys. Lett.* **91** 192107 (2007)
15. Chernozatonskii L A, Sorokin P B, Brüning J W, arXiv:0709.1015
16. Лозовик Ю Е, Меркулова С П (будет опубликовано)
17. Morozov S V et al. *Phys. Rev. Lett.* **100** 016602 (2008); Bolotin K I et al. *Solid State Commun.* **146** 351 (2008); Garcia N et al., arXiv:0803.2203
18. Novoselov K S et al. *Science* **315** 1379 (2007)
19. Wallace P R *Phys. Rev.* **71** 622 (1947)
20. Katsnelson M I, Novoselov K S *Solid State Commun.* **143** 3 (2007)
21. Katsnelson M I *Mater. Today* **10** (1–2) 20 (2007)
22. Geim A K, Novoselov K S *Nature Mater.* **6** 183 (2007)
23. Castro Neto A H et al., arXiv:0709.1163
24. Slonczewski J C, Weiss P R *Phys. Rev.* **109** 272 (1958)
25. McClure J W *Phys. Rev.* **108** 612 (1957)
26. Painter G S, Ellis D E *Phys. Rev. B* **1** 4747 (1970)
27. Dresselhaus M S, Dresselhaus G *Adv. Phys.* **30** 139 (1981)
28. DiVincenzo D P, Mele E J *Phys. Rev. B* **29** 1685 (1984)
29. Shung K W-K *Phys. Rev. B* **34** 979 (1986)
30. Shung K W-K *Phys. Rev. B* **34** 1264 (1986)
31. Fradkin E *Phys. Rev. B* **33** 3257 (1986)
32. Haldane F D M *Phys. Rev. Lett.* **61** 2015 (1988)
33. Semenoff G W *Phys. Rev. Lett.* **53** 2449 (1984)
34. Боголюбов Н Н, Ширков Д В *Введение в теорию квантованных полей* 4-е изд. (М.: Наука, 1984) [Translated into English: Bogolyubov N N, Shirkov D V *Introduction to the Theory of Quantized Fields* (New York: John Wiley, 1980)]
35. Волков Б А, Идлис Б Г, Усманов М Ш *УФН* **165** 799 (1995) [Volkov B A, Idlis B G, Usmanov M Sh *Phys. Usp.* **38** 761 (1995)]
36. Gusynin V P, Sharapov S G, Carbotte J P *Int. J. Mod. Phys. B* **21** 4611 (2007)
37. Kawamura K, Brown R A *Phys. Rev. B* **37** 3932 (1988)
38. Gusynin V P, Sharapov S G *Phys. Rev. Lett.* **95** 146801 (2005)
39. Bostwick A et al. *Nature Phys.* **3** 36 (2007)
40. McChesney J L et al., arXiv:0705.3264
41. Bostwick A et al. *New J. Phys.* **9** 385 (2007)
42. Wu X et al. *Phys. Rev. Lett.* **98** 136801 (2007)
43. Morozov S V et al. *Phys. Rev. Lett.* **97** 016801 (2006); Tikhonenko F V et al. *Phys. Rev. Lett.* **100** 056802 (2008)
44. Katsnelson M I, Novoselov K S, Geim A K *Nature Phys.* **2** 620 (2006)
45. Beenakker C W J, arXiv:0710.3848
46. Ando T, Nakanishi T, Saito R *J. Phys. Soc. Jpn.* **67** 2857 (1998)
47. Nomura K, Koshino M, Ryu S *Phys. Rev. Lett.* **99** 146806 (2007)
48. Silvestrov P G, Efetov K B *Phys. Rev. Lett.* **98** 016802 (2007); Matulis A, Peeters F M *Phys. Rev. B* **77** 115423 (2006)
49. Pereira V M et al. *Phys. Rev. Lett.* **96** 036801 (2008)
50. De Martino A, Dell'Anna L, Egger R *Phys. Rev. Lett.* **98** 066802 (2007); Chen H-Y, Apalkov V, Chakraborty T *Phys. Rev. Lett.* **98** 186803 (2007)
51. Tan Y-W et al. *Phys. Rev. Lett.* **99** 246803 (2007)
52. Ахиезер А И, Берестецкий В Б *Квантовая электродинамика* 4-е изд. (М.: Наука, 1981) [Translated into English: Akhiezer A I, Berestetskii V B *Quantum Electrodynamics* (New York: Intersci. Publ., 1965)]
53. Fogler M M, Novikov D S, Shklovskii B I *Phys. Rev. B* **76** 233402 (2007)
54. Shytov A V, Katsnelson M I, Levitov L S *Phys. Rev. Lett.* **99** 236801 (2007); *Phys. Rev. Lett.* **99** 246802 (2007)
55. McCann E, Fal'ko V I *Phys. Rev. Lett.* **96** 086805 (2006)
56. Novoselov K S et al. *Nature Phys.* **2** 177 (2006)
57. McCann E *Phys. Rev. B* **74** 161403(R) (2006)
58. Oostinga J B et al. *Nature Mater.* **7** 151 (2007)
59. González J, Guinea F, Vozmediano M A H *Nucl. Phys. B* **424** 595 (1994)
60. Mishchenko E G *Phys. Rev. Lett.* **98** 216801 (2007)
61. Hwang E H, Das Sarma S *Phys. Rev. B* **75** 205418 (2007)
62. Katsnelson M I *Phys. Rev. B* **74** 201401(R) (2006)
63. Келдыш Л В, Копаев Ю В *ФТТ* **6** 2791 (1964) [Keldysh L V, Kopayev Yu V *Sov. Phys. Solid State* **6** 2219 (1965)]; Гусейнов Р Р, Келдыш Л В *ЖЭТФ* **63** 2255 (1972) [Guseinov R R, Keldysh L V *Sov. Phys. JETP* **36** 1193 (1973)]
64. Khvshchenko D V *Phys. Rev. Lett.* **87** 246802 (2001); Herbut I F *Phys. Rev. Lett.* **97** 146401 (2006); Son D T *Phys. Rev. B* **75** 235423 (2007)
65. Dahal H P et al. *Phys. Rev. B* **74** 233405 (2006)
66. Zhang C-H, Joglekar Y N *Phys. Rev. B* **75** 245414 (2007)
67. Лозовик Ю Е, Юдсон В И *Письма в ЖЭТФ* **22** 26 (1975) [Lozovik Yu E, Yudson V I *JETP Lett.* **22** 11 (1975)]
68. González J, Guinea F, Vozmediano M A H *Phys. Rev. B* **59** R2474 (1999)
69. Barlas Y et al. *Phys. Rev. Lett.* **98** 236601 (2007); Roldán R, López-Sancho M P, Guinea F *Phys. Rev. B* **77** 115410 (2008)
70. Лернер И В, Лозовик Ю Е *ЖЭТФ* **78** 1167 (1980) [Lerner I V, Lozovik Yu E *Sov. Phys. JETP* **51** 588 (1980)]
71. Лернер И В, Лозовик Ю Е *ЖЭТФ* **80** 1488 (1981) [Lerner I V, Lozovik Yu E *Sov. Phys. JETP* **53** 763 (1981)]; Lerner I V, Lozovik Yu E *J. Low Temp. Phys.* **38** 333 (1980)
72. Lozovik Yu E, Sokolik A A *Письма в ЖЭТФ* **87** 61 (2008) [*JETP Lett.* **87** 55 (2008)]
73. Bardeen J, Cooper L N, Schrieffer J R *Phys. Rev.* **108** 1175 (1957)
74. Лозовик Ю Е, Юдсон В И *Письма в ЖЭТФ* **22** 556 (1975) [Lozovik Yu E, Yudson V I *JETP Lett.* **22** 274 (1975)]; *Solid State Commun.* **19** 391 (1976); *ЖЭТФ* **71** 738 (1976) [*Sov. Phys. JETP* **44** 389 (1976)]; Лозовик Ю Е, Нишанов В Н, в сб. *Всесоюз. совещание по диэлектрической электронике, Ташкент 1973. Тезисы докладов* (Ташкент: Фан, 1973) с. 70
75. Лозовик Ю Е, Берман О Л *Письма в ЖЭТФ* **64** 526 (1996) [Lozovik Yu E, Berman O L *JETP Lett.* **64** 573 (1996)]; *ЖЭТФ* **111** 1879 (1997) [*JETP* **84** 1027 (1997)]
76. Das Sarma S, Madhukar A *Phys. Rev. B* **23** 805 (1981)
77. Wunsch B et al. *New J. Phys.* **8** 318 (2006)
78. Nozières P, Schmitt-Rink S *J. Low Temp. Phys.* **59** 195 (1985)
79. Kopnin N B, Sonin E B, arXiv:0803.3772
80. Min H et al., arXiv:0802.3462
81. Лозовик Ю Е, Ефимкин Д К (будет опубликовано)
82. Adam S et al. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **104** 18392 (2007)
83. Conti S, Vignale G, MacDonald A H *Phys. Rev. B* **57** R6846 (1998)
84. Лозовик Ю Е, Никитков М В *ЖЭТФ* **116** 1440 (1999) [Lozovik Yu E, Nikitkov M V *JETP* **89** 775 (1999)]
85. Lozovik Yu E, Poushnov A V *Phys. Lett. A* **228** 399 (1997)
86. Balatsky A V, Joglekar Y N, Littlewood P B *Phys. Rev. Lett.* **93** 266801 (2004)
87. Iyengar A et al. *Phys. Rev. B* **75** 125430 (2007)
88. Berman O L, Lozovik Yu E, Gumbs G *Phys. Rev. B* **77** 155433 (2008)
89. Горьков Л П, Дзялошинский И Е *ЖЭТФ* **53** 717 (1967) [Gor'kov L P, Dzyaloshinskii I E *Sov. Phys. JETP* **26** 449 (1968)]
90. Lozovik Yu E, Ruvinsky A M *Phys. Lett. A* **227** 271 (1997)
91. Лозовик Ю Е, Рувинский А М *ЖЭТФ* **112** 1791 (1997) [Lozovik Yu E, Ruvinskii A M *JETP* **85** 979 (1997)]
92. Lozovik Yu E, Berman O L, Willander M *J. Phys.: Condens. Matter* **14** 12457 (2002)
93. Griffin A *Excitations in a Bose-Condensed Liquid* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993)
94. Lozovik Yu E, Yudson V I *Physica A* **93** 493 (1978)
95. Lozovik Yu E, Berman O L, Tsvetov V G *Phys. Rev. B* **59** 5627 (1999)
96. Лифшиц Е М, Питаевский Л П *Статистическая физика* Ч. 2 (М.: Наука, 1978) [Translated into English: Lifshitz E M, Pitaevskii L P *Statistical Physics* Vol. 2 (Oxford: Pergamon Press, 1980)]
97. Berman O L, Kezerashvili R Ya, Lozovik Yu E, arXiv:0711.0976
98. Berman O L, Kezerashvili R Ya, Lozovik Yu E, arXiv:0801.1094
99. Moskalenko S A et al. *Phys. Rev. B* **66** 245316 (2002)
100. Eisenstein J P, MacDonald A H *Nature* **432** 691 (2004)
101. Halperin B I, Lee P A, Read N *Phys. Rev. B* **47** 7312 (1993)
102. Heinonen O (Ed.) *Composite Fermions: A Unified View of the Quantum Hall Regime* (Singapore: World Scientific, 1998)
103. Лозовик Ю Е, Прохоренко Д В (будет опубликовано)
104. Berman O L, Gumbs G, Lozovik Yu E *Phys. Rev. B* (submitted)
105. Chiu K W, Quinn J J *Phys. Rev. B* **9** 4724 (1974)
106. Eguiluz A et al. *Phys. Rev. B* **11** 4989 (1975)
107. Das Sarma S, Quinn J J *Phys. Rev. B* **25** 7603 (1982)
108. Zhang Y et al. *Phys. Rev. Lett.* **96** 136806 (2006)
109. Jiang Z et al. *Phys. Rev. Lett.* **99** 106802 (2007)

110. Abanin D A et al. *Phys. Rev. Lett.* **98** 196806 (2007)
111. Shibata N, Nomura K, arXiv:0803.2418
112. Cortijo A, Vozmediano M A H, arXiv:0709.2698
113. Katsnelson M I *Eur. Phys. J. B* **51** 157 (2006); Tworzydło J et al. *Phys. Rev. Lett.* **96** 246802 (2006)
114. Huard B et al. *Phys. Rev. Lett.* **98** 236803 (2007)
115. Nair R R et al. *Science* **320** 1308 (2008); arXiv:0803.3718
116. Добряков А Л и др. *ЖЭТФ* **119** 309 (2001) [Dobryakov A L et al. *JETP* **92** 267 (2001)]
117. Das Sarma S, Hwang E H, Tse W-K *Phys. Rev. B* **75** 121406(R) (2007)
118. Le Doussal P, Radzihovsky L *Phys. Rev. Lett.* **69** 1209 (1992)
119. Fasolino A, Los J H, Katsnelson M I *Nature Mater.* **6** 858 (2007); Abedpour N et al. *Phys. Rev. B* **76** 195407 (2007)
120. Chen Z et al. *Physica E* **40** 228 (2007); Lemme M C et al. *IEEE Electron Device Lett.* **28** 282 (2007)
121. Echtermeyer T J et al., arXiv:0712.2026
122. Zhou S Y et al. *Nature Mater.* **6** 770 (2007)
123. Stampfer C et al. *Appl. Phys. Lett.* **92** 012102 (2008); Ponomarenko L A et al. *Science* **320** 356 (2008)
124. Žutić I, Fabian J, Das Sarma S *Rev. Mod. Phys.* **76** 323 (2004)
125. Hill E W et al. *IEEE Trans. Magn.* **42** 2694 (2006); Ohishi M et al. *Jpn. J. Appl. Phys.* **46** L605 (2007); Cho S, Chen Y-F, Fuhrer M S *Appl. Phys. Lett.* **91** 123105 (2007)
126. Xiao D, Yao W, Niu Q *Phys. Rev. Lett.* **99** 236809 (2007); Yao W, Xiao D, Niu Q *Phys. Rev. B* **77** 235406 (2008); Rycerz A *Phys. Status Solidi A* **205** 1281 (2008)
127. Boukhvalov D W, Katsnelson M I, Lichtenstein A I *Phys. Rev. B* **77** 035427 (2008)
128. Stankovich S et al. *Nature* **442** 282 (2006)
129. Schedin F et al. *Nature Mater.* **6** 652 (2007)
130. Blake P et al., arXiv:0803.3031
131. Bunch J S et al. *Science* **315** 490 (2007)
132. Lusk M T, Carr L D *Phys. Rev. Lett.* **100** 175503 (2008)
133. Sevincli H, Topsakal M, Ciraci S, arXiv:0711.2414
134. Park C-H et al. *Nature Phys.* **4** 213 (2008)

PACS numbers: 72.80.Rj, **73.43.-f**, 81.05.Uw
DOI: 10.3367/UFNr.0178.200807i.0776

Электронный транспорт в графене

С.В. Морозов, К.С. Новоселов, А.К. Гейм

1. Двумерные кристаллы

Углерод — один из удивительных элементов, формирующий самые разнообразные структуры. Кроме известных с давних времен графита и алмаза в центре внимания научного сообщества находятся недавно открытые фуллерены [1–3] и нанотрубки [4]. Однако для экспериментального изучения были доступны только 3-мерные (графит, алмаз), 1-мерные (нанотрубки) и 0-мерные (фуллерены) формы углерода, поскольку до недавнего времени все попытки получить экспериментально *двумерную* форму углерода оказывались безуспешными.

Эта загадочная двумерная форма (планарная гексагональная упаковка углеродных атомов) была названа графеном и, как ни удивительно, оказалась, может быть, наиболее изученной теоретически по сравнению с другими аллотропами углерода по той причине, что графен является стартовой точкой для всех расчетов по графиту, фуллеренам и нанотрубкам. В то же время многочисленные попытки синтезировать такие двумерные кристаллы заканчивались неудачей, их результатом было получение кристаллитов нанометрового размера [5]. Это не являлось сюрпризом в свете общего мнения о том, что истинно двумерные кристаллы не могут существовать

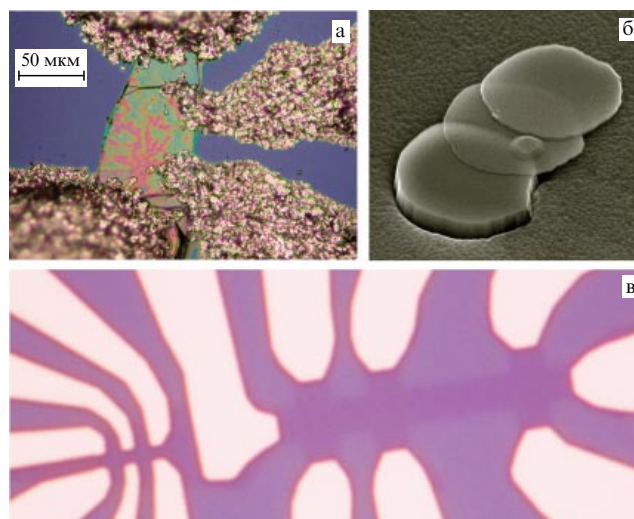


Рис. 1. (а) Фотография *первого* холловского транзистора на основе тонкой пленки графита. Изображение в электронном микроскопе расщепленных графитовых микродисков (б) и холловского транзистора на основе графена (в) (ширина канала 1 мкм).

[6–10] (в отличие от хорошо известных квазидвумерных систем). Действительно, в процессе синтеза зародыши графена будут иметь очень большое отношение периметра к площади поверхности, что должно способствовать трансформации в другие аллотропы углерода.

Так продолжалось до 2004 г., в котором группа исследователей из Манчестера и Черноголовки использовала удивительно простой и даже несколько наивный подход для получения графена (рис. 1), сделавший графен одной из самых горячих тем современной физики твердого тела [11, 12]. Отдельная плоскость (монослойной толщины) была выделена из трехмерного кристалла графита с помощью техники, называемой микромеханическим расслоением (графит обладает ярко выраженными слоистыми свойствами и может рассматриваться как совокупность двумерных графеновых кристаллов, слабо связанных между собой). Более того, тем же способом были получены двумерные кристаллы других материалов [12], таких как нитрид бора, некоторые диалкогениды и высокотемпературный сверхпроводник Bi–Sr–Ca–Cu–O. Фактически, появился новый класс материалов — двумерные кристаллы, стабильные в свободном состоянии.

Удивительно, но этот сравнительно простой способ позволил получать достаточно большие (размером до 100 мкм) кристаллиты и немедленно инициировал огромную экспериментальную активность [13]. Более того, качество получаемого материала оказалось настолько высоким, что позволило реализовать баллистический транспорт [11, 14] и наблюдать квантовый эффект Холла [15, 16]. Свойства этого нового материала позволяют говорить о нем как о многообещающем кандидате в материалы для будущих приборов микроэлектроники, например для баллистического полевого транзистора. Однако, хотя предложенная нами техника позволяет получать наиболее качественный на сегодня графен в лабораторных условиях, для промышленного применения требуются более производительные технологии. Сегодня наибольших успехов достигла технология рас-

слоения с помощью интеркаляции графита [17–21] и эпитаксия графена путем сублимации кремния с поверхности подложек SiC [22, 23].

2. Линейный закон дисперсии

По своим электронным свойствам графен является двумерным полупроводником с нулевой запрещенной зоной (рис. 2). Квазичастицы в графене формально описываются гамильтонианом дираковского вида $H = -i\hbar v_F \sigma \nabla$, где $v_F \approx 10^6$ м с⁻¹ — фермиевская скорость, $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y)$ — матрица Паули [24–27]. Такое описание, которое является теоретически строгим в пренебрежении многочастичными эффектами, было подтверждено экспериментальными измерениями [15] циклотронной массы носителей в графене в зависимости от их энергии (рис. 3). Эти измерения подтвердили, что квазичастицы в графене подчиняются линейному закону дисперсии. Пожалуй, наиболее яркое проявление этого представляет собой наблюдение релятивистского аналога целочисленного квантового эффекта Холла, который мы обсудим в разделе 4.

Тот факт, что носители заряда в графене описываются уравнением Дирака, а не привычным в твердо-

тельной физике уравнением Шрёдингера, обусловлен симметрией кристаллической решетки графена, которая состоит из двух эквивалентных углеродных подрешеток А и В (см. рис. 2). Электронные подзоны, образованные симметричной и антисимметричной комбинацией волновых функций на этих двух подрешетках, пересекаются на краю зоны Бриллюэна, что приводит к конусообразному энергетическому спектру вблизи "дираковских" точек К и К'. Как следствие, квазичастицы в графене, подобно безмассовым релятивистским частицам, имеют линейный закон дисперсии $E = \hbar k v_F$, где роль скорости света играет фермиевская скорость $v_F \approx c/300$. Вследствие линейности спектра можно ожидать, что поведение квазичастиц в графене будет в корне отличаться от поведения квазичастиц в обычных металлах и полупроводниках, имеющих параболический закон дисперсии и подобных свободным электронам.

Линейный закон дисперсии является важнейшей, но далеко не единственной особенностью квантового транспорта, обусловленного уравнением Дирака. При положительных энергиях (выше дираковской точки) токонесящие состояния подобны электронам и заряжены отрицательно. При отрицательных энергиях, если валентная зона не целиком заполнена, квазичастицы ведут себя как положительно заряженные частицы (дырки) и могут рассматриваться как твердотельный аналог позитронов. Отметим, однако, что электроны и дырки в физике твердого тела, как правило, описываются отдельными независимыми уравнениями Шрёдингера со своими эффективными массами (в соответствии с правилом сумм Зейтца). В противоположность этому электроны и дырки в графене оказываются взаимосвязанными, проявляя свойства зарядово-сопряженной симметрии. В графене это обусловлено симметрией его кристаллической решетки и тем, что квазичастицы в графене описываются двухкомпонентной волновой функцией, построенной на основе подрешеток А и В. Двухкомпонентное описание для графена аналогично описанию в квантовой электродинамике (КЭД), использующему спинорные волновые функции, но "спин"-индекс в случае графена обусловлен принадлежностью разным подрешеткам, а не "реальному" спину обычных электронов, и поэтому обычно именуется псевдоспином σ .

Имеются и другие аналогии с КЭД. Конический вид закона дисперсии в графене является результатом пересечения подзон, обусловленного подрешетками А и В. В результате, электроны с энергией E , движущиеся в положительном направлении, принадлежат той же ветви спектра, что и дырки с энергией $-E$, движущиеся в противоположном направлении. Это означает, что электроны и дырки, находящиеся на одной и той же ветви спектра, имеют одинаковый псевдоспин σ , который параллелен квазиимпульсу для электронов и антипараллелен для дырок. Это позволяет ввести киральность (chirality) [27], которая является проекцией псевдоспина на направление движения и имеет положительный знак для электронов и отрицательный для дырок.

Квазиклассически те же эффекты можно описать с помощью так называемой фазы Берри (Berry). Так как волновые функции электронов являются двухкомпонентными спинорами, они меняют знак при обходе электронами замкнутого контура. Таким образом, волновые функции приобретают дополнительную фазу Берри, равную π .

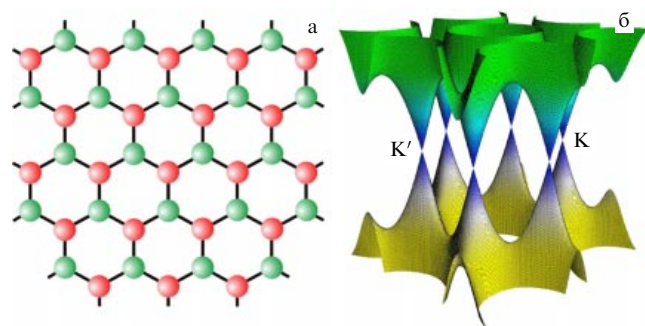


Рис. 2. (а) Кристаллическая структура графена. Две подрешетки обозначены разным цветом. (б) Зонная структура графена: зона проводимости и валентная зона соприкасаются в точках К и К'.

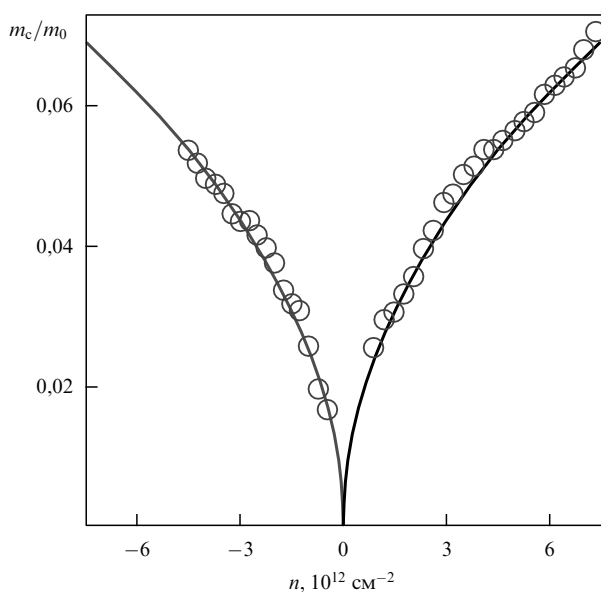


Рис. 3. Экспериментальные зависимости электронной и дырочной циклотронной массы от концентрации носителей в графене. Корневая зависимость свидетельствует о линейном законе дисперсии.

3. Эффект электрического поля

Большинство экспериментальных групп пока использует образцы, изготовленные с помощью оригинальной техники микромеханического расслоения [11, 12], которая позволяет получать высококачественные двумерные кристаллы площадью до 1000 мкм^2 , достаточной для большинства научных задач. Ключевым моментом успешности этого метода является то, что графен становится видимым в оптический микроскоп, когда он расположен на пластине окисленного кремния с точно выбранной толщиной SiO_2 , хотя и слабо, но контрастируя с чистой подложкой [28]. Если бы не этот достаточно простой, но эффективный способ сканирования подложки для поиска отдельных кристаллов графена, то, скорее всего, графен до сих пор так бы и не был открыт. Даже если забыть про ранние теоретические аргументы, ставящие под сомнение существование двумерных кристаллов в принципе, современные методы исследования атомно-тонких и малых объектов (например, сканирующая атомно-силовая микроскопия), имеют слишком малую производительность для нахождения редких и изолированных графеновых кристаллов. Сканирующая электронная микроскопия имеет большую производительность, но с ее помощью трудно различить кристаллы с разной толщиной. Однако отметим, что рамановская спектроскопия позволяет отличить графен от многослойных кристаллов и может быть использована для его идентификации [29, 30], хотя и требует предварительного отбора оптическим методом.

Подложка из SiO_2 служит еще и изолирующим слоем. Таким образом, легированный кремний играет роль затвора и позволяет управлять концентрацией носителей заряда в графене. Под действием электрического поля тип носителей может быть изменен с электронного на дырочный (рис. 4). В электрических полях, ограниченных значением, при котором происходит пробой диэлектрика, можно достигать концентрации носителей n до 10^{13} см^{-2} . При этом во всем интервале concentra-

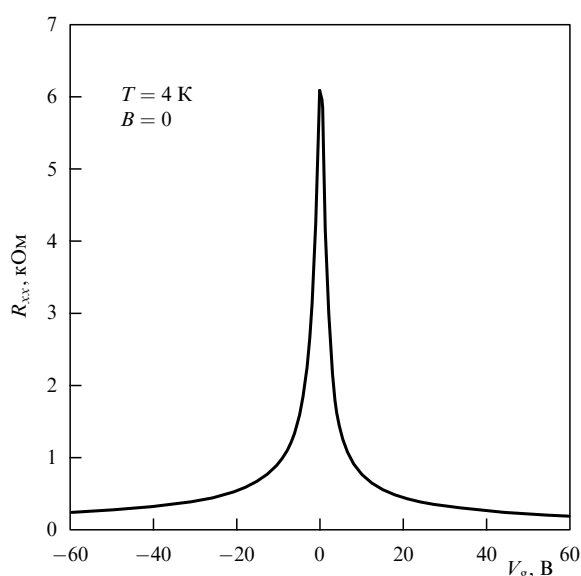


Рис. 4. Амбиполярный эффект электрического поля в графене. Положительное (отрицательное) напряжение на затворе индуцирует электроны (дырки) с концентрацией $n = \alpha V_g$, где $\alpha \approx 7,2 \times 10^{10} \text{ см}^{-2} \text{ В}^{-1}$ при толщине подзатворного SiO_2 -диэлектрика 300 нм.

ций сохраняется высокая подвижность носителей (до $20000 \text{ см}^2 \text{ В}^{-1} \text{ с}^{-1}$), слабо зависящая от температуры [11]. Как следствие, баллистический транспорт субмикронного масштаба реализуется даже при комнатной температуре. Подвижность носителей в графене, которая в современных образцах при комнатной температуре лимитируется наличием примесей или нановолнистостью кристалла, имеет огромный потенциал для роста — по нашим экспериментальным оценкам она ограничена величиной $200000 \text{ см}^2 \text{ В}^{-1} \text{ с}^{-1}$, обусловленной фононным рассеянием [31].

Другой необычной особенностью графена является то, что его проводимость σ остается конечной даже при стремлении к нулю концентрации носителей n и, более того, приближается по величине к кванту проводимости $4e^2/h$ [15]. Подчеркнем, что в этом случае, в отличие от других известных квантовых транспортных эффектов, квантуется именно проводимость, а не контактанс. Минимум квантовой проводимости для дираковских фермионов был предсказан в теоретических работах [32–38]. В некоторых из них ключевым моментом является стремящаяся к нулю плотность состояний вблизи дираковской точки в линейном двумерном спектре. В то же время двухмонослойный графен с параболическим законом дисперсии квазичастиц также демонстрирует наличие минимальной проводимости порядка $4e^2/h$, которое свидетельствует о важности именно киральности, а не линейного спектра [39]. Кроме того, большинство теорий предсказывает значение минимальной проводимости в π раз меньше, чем наблюдаемое экспериментально. Такое противоречие известно как "загадка пропавшего пирога" ("the mystery of a missing pie"), и остается неясным, является ли это следствием теоретических приближений или ограниченности параметров экспериментальных образцов. В частности, эксперимент свидетельствует о том, что при низкой концентрации ($< 10^{11} \text{ см}^{-2}$) носители в графене разбиваются на сеть "луж" с электронами и дырками. Такая микроскопическая неоднородность, безусловно, должна присутствовать вблизи дираковской точки, но пока не учитывалась в теоретических работах. Кроме того, в эксперименте важную роль может играть макроскопическая неоднородность (на масштабе, превышающем длину свободного пробега). Экспериментальный опыт свидетельствует о том, что в более однородных образцах, например с меньшими размерами или после мягкого отжига, минимальная проводимость принимает значение $4e^2/h$ с меньшим разбросом.

4. Квантовый эффект Холла в графене

В начальный период после открытия графена основные экспериментальные усилия были направлены на изучение электронных свойств графена, подтверждающих то, что квазичастицы в нем описываются законами квантовой электродинамики. Одними из таких наиболее ярких проявлений стали два новых ("киральных") типа квантового эффекта Холла (КЭХ).

Рисунок 5 демонстрирует КЭХ в графене. В монослойном графене КЭХ проявляется в виде непрерывных эквидистантных ступенек в холловской проводимости σ_{xy} , которая проходит через нуль в точке электронейтральности (дираковской точке), где тип проводимости меняется с дырочного на электронный. Последовательность плат имеет ожидаемую высоту ступенек, но

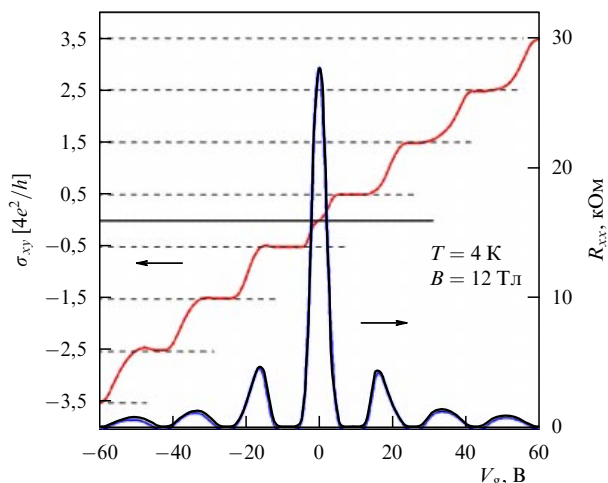


Рис. 5. Продольное магнетосопротивление и холловская проводимость в графене как функции напряжения на затворе. Полуцелое квантование подтверждает то, что квазичастицы в графене являются безмассовыми дираковскими фермионами.

сдвинута по сравнению со "стандартной" на $1/2$, так что холловская проводимость выражается в виде

$$\sigma_{xy} = 4 \frac{e^2}{h} \left(N + \frac{1}{2} \right),$$

где N — целое число, а множитель 4 обусловлен двукратным спиновым и долинным вырождением. Таким образом, в монослойном графене мы имеем "полуцелый" КЭХ. Такое необычное поведение сейчас уже хорошо понято — оно обусловлено спецификой квантования дираковских фермионов в графене с линейным законом дисперсии в магнитном поле B , которое описывается выражением $E_N = \pm v_F \sqrt{2e\hbar BN}$, где знаки $+$ и $-$ относятся соответственно к электронам и дыркам [26, 27, 40–42]. Самое существенное, что при $E = 0$ имеется нулевой уровень Ландау (рис. 6), принадлежащий одновременно и электронам, и дыркам, чем и объясняется

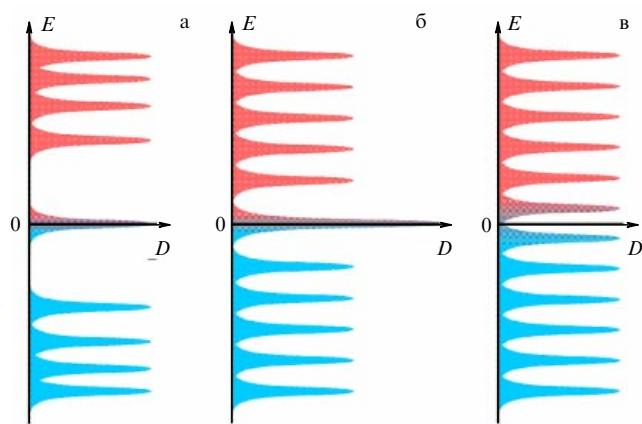


Рис. 6. Уровни Ландау для дираковских безмассовых электронов в монослойном графене (а), для массивных киральных электронов в двухмонослойном графене (б) и для шрёдингеровских электронов с двумя параболическими зонами, соприкасающимися при нулевой энергии (в).

необычное квантование холловской проводимости [39, 41, 42].

Альтернативное рассмотрение причины полуцелого КЭХ состоит в том, что суперпозиция псевдоспина и орбитального движения приводит к появлению у электронов дополнительной фазы Бэрри, равной π , аккумулируемой вдоль циклотронной траектории. Добавочная фаза приводит к полупериодному сдвигу фазы квантовых осцилляций и после перехода в режим квантового эффекта Холла — к сдвигу холловских плато на $1/2$ [15, 16].

Линейный спектр в графене и большая величина скорости Ферми приводит к огромному орбитальному расщеплению. Расстояние между уровнями Ландау с $N = 0$ и $N = 1$ равно $\Delta E \approx 400 \text{ [K]} \sqrt{B}$, где B — магнитное поле в теслах. Это означает, что при $B = 30 \text{ Тл}$ расщепление первых уровней примерно равно 2200 К , что почти на порядок превышает комнатную температуру. Более того, весьма слабая зависимость подвижности носителей в графене от температуры приводит к тому, что соотношение $\mu B \gg 1$ выполняется уже при величине B , исчисляемой в нескольких теслах. Это позволило наблюдать квантовый эффект Холла даже при комнатной температуре [43], что может быть важным в метрологии.

В квантовой электродинамике киральность непосредственно связана с релятивистской природой частиц и соответственно с линейным законом дисперсии для безмассовых частиц. Открытие графена предоставляет возможность исследования еще одного принципиально нового типа частиц — *киральных* квазичастиц с *параболическим* (нерелятивистским) законом дисперсии, которые имеются в двухмонослойном графене [39]. По теоретическим расчетам [39, 44] двухмонослойный графен является полупроводником с нулевой запрещенной зоной, но в отличие от монослойного графена имеет параболические валентную зону и зону проводимости, которые касаются в точках К и К' зоны Бриллюэна. В то же время, как и в монослойном графене, в двухмонослойном графене квазичастицы обладают киральностью, но характеризуются фазой Бери 2π (а не π). Точное квантово-механическое решение [39, 44] для такого рода квазичастиц дает следующие значения энергий уровней Ландау: $E_N \propto \sqrt{N(N-1)}$. Таким образом, по-прежнему при нулевой энергии имеется уровень Ландау, но кратность его вырождения в два раза больше, чем остальных уровней. При этом уровни Ландау вне ультраквантового предела ($N \gg 1$) расположены по энергии практически эквидистантно, как и в случае электронов с постоянной массой. В результате, КЭХ в двухмонослойном графене отличается от КЭХ как в монослойном графене, так и в двумерном электронном газе в обычных полупроводниках.

Как отмечалось в разделе 2, дираковское описание квазичастиц в графене непосредственно связано с тем, что двухкомпонентные волновые функции квазичастиц обусловлены симметрией кристаллической решетки монослойного графена и наличием в ней двух подрешеток А и В. В двухмонослойном графене ситуация во многом аналогична, но подрешетки теперь разнесены по разным монослоям. В последнем случае имеется уникальная возможность по-разному воздействовать на эти подрешетки. В частности, перпендикулярное внешнее электрическое поле приводит к снятию вырождения в

К-точках и образованию запрещенной зоны [44–46]. В режиме КЭХ этот эффект проявляется в возникновении нулевого плато в холловской проводимости [46]. Существование, что в достижимых электрических полях ширина запрещенной зоны может варьироваться от 0 до 0,3 эВ, что может оказаться весьма перспективным для приложений.

5. Заключение

Графен стал первым и пока самым ярким представителем нового класса материалов — двумерных кристаллов. Фактически графен открывает новую научную парадигму — "релятивистскую" физику твердого тела, в которой квантовые релятивистские явления, часть из которых не реализуема даже в физике высоких энергий, теперь могут быть исследованы в обычных лабораторных условиях. Уникальность электронных свойств графена обусловлена тем, что носители заряда в нем подобны безмассовым релятивистским фермионам и описываются релятивистским уравнением Дирака, а не уравнением Шрёдингера. Впервые в твердотельном эксперименте можно исследовать все нюансы и многообразие квантовой электродинамики.

Графен немедленно проявил себя в качестве реального кандидата на роль одного из основных материалов микроэлектроники в посткремниевую эпоху. Достаточно упомянуть первые реализованные прототипы будущих устройств на его основе. Это — полевые транзисторы с баллистическим транспортом при комнатной температуре, газовые сенсоры с экстремальной чувствительностью [47], графеновый одноэлектронный транзистор [48], жидкокристаллические дисплеи и солнечные батареи (в которых графен используется в качестве прозрачного проводящего электрода) [49], спиновый транзистор [50] и многие другие. Несмотря на короткую предысторию, несомненно одно — графен находится только в начале своего восхождения.

Благодарности. С.В.М. благодарен за финансовую поддержку РФФИ (грант 08-02-01067) и программами РАН.

Список литературы

1. Curl R F *Rev. Mod. Phys.* **69** 691 (1997); Керл Р Ф *УФН* **168** 331 (1998)
2. Kroto H *Rev. Mod. Phys.* **69** 703 (1997); Крото Г *УФН* **168** 343 (1998)
3. Smalley R E *Rev. Mod. Phys.* **69** 723 (1997); Смолли Р Е *УФН* **168** 323 (1998)
4. Iijima S *Nature* **354** 56 (1991)
5. Oshima C, Nagashima A *J. Phys.: Condens. Matter* **9** 1 (1997)
6. Peierls R E *Helv. Phys. Acta* **7** 81 (1934)
7. Peierls R E *Ann. Inst. Henri Poincaré* **5** 177 (1935)
8. Landau L D *Phys. Z. Sowjetunion* **11** 26 (1937)
9. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Статистическая физика Ч. 1* (М.: Наука, 1976) [Translated into English: Landau L D, Lifshitz E M *Statistical Physics Pt. I* (Oxford: Pergamon Press, 1980)]
10. Mermin N D *Phys. Rev.* **176** 250 (1968)
11. Novoselov K S et al. *Science* **306** 666 (2004)
12. Novoselov K S et al. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **102** 10451 (2005)
13. Geim A K, Novoselov K S *Nature Mater.* **6** 183 (2007)
14. Morozov S V et al. *Phys. Rev. B* **72** 201401(R) (2005)
15. Novoselov K S et al. *Nature* **438** 197 (2005)
16. Zhang Y et al. *Nature* **438** 201 (2005)
17. Dresselhaus M S, Dresselhaus G *Adv. Phys.* **51** 1 (2002)
18. Shioyama H *J. Mater. Sci. Lett.* **20** 499 (2001)
19. Viculis L M, Mack J J, Kaner R B *Science* **299** 1361 (2003)
20. Horiuchi S et al. *Appl. Phys. Lett.* **84** 2403 (2004)
21. Stankovich S et al. *J. Mater. Chem.* **16** 155 (2006)
22. Van Bommel A J, Crombeen J E, Van Tooren A *Surf. Sci.* **48** 463 (1975)
23. Berger C et al. *J. Phys. Chem. B* **108** 19912 (2004)
24. Wallace P R *Phys. Rev.* **71** 622 (1947)
25. Slonczewski J C, Weiss P R *Phys. Rev.* **109** 272 (1958)
26. McClure J W *Phys. Rev.* **104** 666 (1956)
27. Haldane F D M *Phys. Rev. Lett.* **61** 2015 (1988)
28. Blake P et al. *Appl. Phys. Lett.* **91** 063124 (2007)
29. Ferrari A C et al. *Phys. Rev. Lett.* **97** 187401 (2006)
30. Graf D et al. *Nano Lett.* **7** 238 (2007)
31. Morozov S V et al. *Phys. Rev. Lett.* **100** 016602 (2008)
32. Katsnelson M I *Eur. Phys. J. B* **51** 157 (2006)
33. Tworzydło J et al. *Phys. Rev. Lett.* **96** 246802 (2006)
34. Fradkin E *Phys. Rev. B* **33** 3263 (1986)
35. Lee P A *Phys. Rev. Lett.* **71** 1887 (1993)
36. Ludwig A W W et al. *Phys. Rev. B* **50** 7526 (1994)
37. Ziegler K *Phys. Rev. Lett.* **80** 3113 (1998)
38. Nomura K, MacDonald A H *Phys. Rev. Lett.* **96** 256602 (2006)
39. Novoselov K S et al. *Nature Phys.* **2** 177 (2006)
40. Zheng Y, Ando T *Phys. Rev. B* **65** 245420 (2002)
41. Gusynin V P, Sharapov S G *Phys. Rev. Lett.* **95** 146801 (2005)
42. Peres N M R, Guinea F, Castro Neto A H *Phys. Rev. B* **73** 125411 (2006)
43. Novoselov K S et al. *Science* **315** 1379 (2007)
44. McCann E, Fal'ko V I *Phys. Rev. Lett.* **96** 086805 (2006)
45. Ohta T et al. *Science* **313** 951 (2006)
46. Castro E V et al. *Phys. Rev. Lett.* **99** 216802 (2007)
47. Schedin F et al. *Nature Mater.* **6** 652 (2007)
48. Ponomarenko L A et al. *Science* **320** 356 (2008)
49. Blake P et al. *Nano Lett.* (2008), to be published
50. Hill E W et al. *IEEE Trans Magn.* **42** 2694 (2006)