

рему Пифагора. Я не последовал этому совету, так как рассмотрения прямоугольных треугольников без приближенного извлечения квадратного корня в литературе по теории относительности я не встречал.

**Благодарность за поддержку.** Работа поддержана грантами НШ-5603.2006.2, НШ-4568.2006.2 и РФФИ-07-02-00830-а.

## Список литературы

1. Окунь Л Б «Формула Эйнштейна:  $E_0 = mc^2$ . "Не смеется ли Господь Бог?"» *УФН* **178** 541 (2008) [Okun L B «The Einstein formula  $E_0 = mc^2$  "Isn't the Lord laughing?"» *Phys. Usp.* **52** (5) (2008)]
2. Klein F *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Erster Band, Arithmetik, Algebra, Analysis* 3 Auflage (Berlin: Verlag von Julius Springer, 1924) [Клейн Ф *Элементарная математика с точки зрения высшей* Т. 1 *Арифметика, Алгебра, Анализ* (М.: Наука, 1987); Klein F *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint, Arithmetics, Algebra, Analysis* (New York: Dover Publ., 2007)]
3. Poincaré H "Sur la dynamique de l'électron" *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* **21** 129 (1906) [Пуанкаре А "О динамике электрона" *Избранные труды* Т. 3 (М.: Наука, 1974) с. 433]
4. Minkowski H "Raum und Zeit" *Phys. Z.* **10** 104–111 (1909) [Минковский Г "Пространство и время", в сб. Лоренц Г А, Пуанкаре А, Эйнштейн А, Минковский Г *Принцип относительности*, Сборник работ классиков релятивизма (Под ред. В К Фредерикса, Д Д Иваненко) (М.–Л.: ОНТИ, 1935) с. 181–203]
5. Hawking S *The Universe in a Nutshell* (New York: Bantam Books, 2001) [Хокинг С *Мир в ореховой скорлупе* (Пер. с англ. А Сергеева) (СПб.: Амфора, 2007)]
6. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Наука, 1988) [Translated into English: Landau L D, Lifshitz E M *The Classical Theory of Fields* (Amsterdam: Reed Elsevier, 2000)]
7. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Механика* (М.: Наука, 1988) [Translated into English: Landau L D, Lifshitz E M *Mechanics* (Amsterdam: Elsevier Sci., 2003)]
8. Okun L B "The concept of mass" *Phys. Today* **42** (6) 31–36 (1989); Okun L B "Putting to rest mass misconceptions" *Phys. Today* **43** (5) 13, 15, 115, 117 (1990)
9. Pound R V, Rebka G A (Jr.) "Apparent weight of photons" *Phys. Rev. Lett.* **4** 337–341 (1960)
10. Pauli W, Jung C *Atom and Archetype: Pauli/Jung Letters. 1932–1958*. (Ed. C A Meyer) (Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 2001); Meier C A (Herausgegeben) *Wolfgang Pauli, C. G. Jung: Ein Briefwechsel 1932–1958* (Berlin: Springer-Verlag, 1992)
11. Окунь Л Б "Что такое масса? (Из истории теории относительности)", в сб. *Исследования по истории физики и механики. 2007* (Отв. ред. Г М Идлис) (М.: Наука, 2007)
12. Okun L B "The evolution of the concepts of energy, momentum and mass from Newton and Lomonosov to Einstein and Feynman", in *Proc. of the 13th Lomonosov Conf. August 23, 2007* (Singapore: World Scientific) (in press)

PACS numbers: **11.15.–q**, **11.25.Tq**, **12.38.–t**  
DOI: 10.3367/UFNr.0178.200806m.0663

## Бьёркеневская и реджевская асимптотики амплитуд рассеяния в квантовой хромодинамике и суперсимметричных калибровочных моделях

Л.Н. Липатов

### 1. Введение

В докладе представлен обзор теоретических подходов к исследованиям глубоко неупругих лептон-адронных

взаимодействий и адрон-адронного рассеяния при высокой энергии в кинематике Редже. Показано, что в квантовой хромодинамике (КХД) глюон реджезован, а померон представляет собой составную систему реджезованных глюонов. Отмечены замечательные свойства уравнения Балицкого – Фаина – Кураева – Липатова (БФКЛ) для померонной волновой функции в КХД и суперсимметричных калибровочных теориях. Показано, что вследствие AdS/CFT (пространство анти-де-Ситтера/конформная теория поля)-соответствия БФКЛ-померон эквивалентен реджезованному гравитону в расширенной  $N = 4$ -суперсимметричной модели. Свойства максимальной трансцендентальности и интегрируемости, реализуемые в этой модели, позволяют вычислить аномальную размерность операторов с твистом 2, вплоть до четырех петель.

## 2. Глубоко неупругое ер-рассеяние

Инклюзивное электрон-протонное рассеяние в кинематике Бьёркена (рис. 1)

$$2pq \sim Q^2 = -q^2 \rightarrow \infty, \quad x = \frac{Q^2}{2pq}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (1)$$

очень важно, поскольку дает прямую информацию о распределении  $n^q(x)$  кварков внутри протона как функции отношения их энергий  $x = |\mathbf{k}|/|\mathbf{p}|$  ( $|\mathbf{p}| \rightarrow \infty$ ). Действительно, в рамках кварк-партоновой модели Фейнмана – Бьёркена [1, 2] можно получить следующее простое выражение для структурных функций  $F_{1,2}(x)$  этого процесса:

$$\frac{1}{x} F_2(x) = 2F_1(x) = \sum_{i=q,q} Q_i^2 n^i(x), \quad (2)$$

где кварковые заряды равны  $Q_u = 2/3$ ,  $Q_d = -1/3$ .

Оказывается, что партонная картина верна и в перенормируемых теориях поля, если мы введем ограничение на поперечные импульсы партонов  $\mathbf{k}_\perp$  за счет ультрафиолетового обрезания  $k_\perp^2 < \Lambda^2 \sim Q^2$  [3]. В этих теориях бегущая константа связи  $\alpha = g^2/(4\pi)$  в главном логарифмическом приближении (ГЛП) имеет вид

$$\alpha(Q^2) = \frac{\alpha_\mu}{1 + \beta\alpha_\mu/(4\pi) \ln(Q^2/\mu^2)}, \quad (3)$$

где  $\alpha_\mu$  — значение  $\alpha$  в точке перенормировки  $\mu$ . В квантовой электродинамике (КЭД) и квантовой хро-

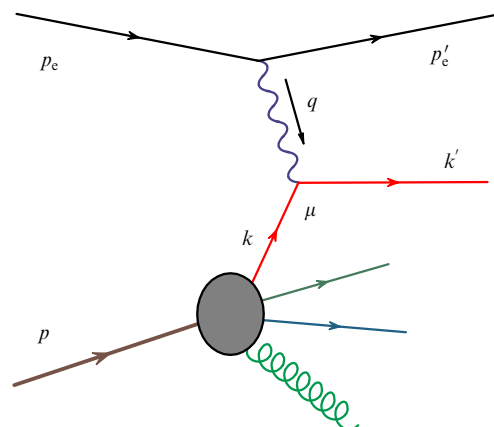


Рис. 1.

динамике коэффициенты  $\beta$  имеют противоположные знаки:

$$\beta_{\text{КЭД}} = -n_e \frac{4}{3}, \quad \beta_{\text{КХД}} = \frac{11}{3} N_c - n_f \frac{2}{3}, \quad (4)$$

где  $N_c$  — ранг калибровочной группы ( $N_c = 3$  для КХД),  $n_e$  и  $n_f$  — число лептонов и число кварков, которые можно рассматривать как безмассовые для заданного  $Q^2$ .

Л.Д. Ландау и И.Я. Померанчук привели аргументы в пользу того, что из-за отрицательного знака  $\beta_{\text{КЭД}}$  в фотонном пропагаторе порождается полюс Ландау, а в локальном пределе это приводит к обращению в нуль физического электрического заряда. Соответственно в КХД неабелево взаимодействие исчезает при больших  $Q^2$  и в силу асимптотической свободы имеет место приближенный бёркеновский скейлинг: структурные функции зависят от  $Q^2$  только логарифмически [4]. Таким образом, в результате экспериментов по глубоко неупругому ер-рассеянию, выполненных на ускорителе в SLAC (Stanford Linear Accelerator Center — Стэнфордский центр линейного ускорителя) в конце 1960-х годов, было открыто, что в сильных взаимодействиях поставленная Ландау проблема "нулевого заряда" отсутствует.

В системе бесконечного импульса  $|\mathbf{p}| \rightarrow \infty$  полезно ввести переменные Судакова для партонных импульсов:

$$\mathbf{k}_i = \beta_i \mathbf{p} + \mathbf{k}_i^\perp, \quad (\mathbf{k}_i^\perp, \mathbf{p}) = 0, \quad \sum_i \mathbf{k}_i = \mathbf{p}. \quad (5)$$

Партонные распределения определяются в терминах протонной волновой функции  $\Psi_m$  как

$$n^i(x) = \sum_m \int \prod_{r=1}^{m-1} \frac{d\beta_r d^2 k_r^\perp}{(2\pi)^2} |\Psi_m|^2 \sum_{r \in i} \delta(\beta_r - x). \quad (6)$$

Они представляют собой функции переменной  $\lambda \sim Q$ , поскольку множитель  $|\Psi_m|^2 \sim \prod_{r=1}^m Z_r$  зависит от  $\lambda$  через константы перенормировки волновых функций  $\sqrt{Z_r}$ ,  $\lambda$  — верхний предел интегралов по поперечным импульсам  $k_r^\perp$ . Учитывая, что число партонов возрастает с увеличением  $\lambda$  в соответствии с динамикой каскадного типа, в ГЛП можно получить эволюционные уравнения Докшицера, Грибова, Липатова, Альтарелли и Паризи [3, 5]:

$$\frac{d}{d\xi(Q^2)} n_i(x) = -w_i n_i(x) + \sum_r \int_x^1 \frac{dy}{y} w_{r \rightarrow i} \left( \frac{x}{y} \right) n_r(y), \quad (7)$$

$$w_i = \sum_k \int_0^1 dx x w_{i \rightarrow k}(x), \quad (8)$$

где

$$\xi(Q^2) = \frac{N_c}{2\pi} \int_{\mu^2}^{Q^2} \frac{d\mathbf{k}_\perp^2}{\mathbf{k}_\perp^2} \alpha(\mathbf{k}_\perp^2). \quad (9)$$

Уравнение (7) имеет ясную вероятностную интерпретацию: число партонов  $n_i$  убывает вследствие их распада на другие партоны в открывающемся фазовом объеме  $d\xi(Q^2)$  и возрастает из-за того, что продукты распада других партонов  $r$  могут содержать партоны типа  $i$  [3].

Моменты партонных распределений

$$n_i^j = \int_0^1 dx x^{j-1} n_i(x), \quad (10)$$

удовлетворяющие уравнениям ренормализационной группы

$$\frac{d}{d\xi(Q^2)} n_i^j = \sum_r w_{r \rightarrow i}^j n_r^j, \quad (11)$$

связаны с матричными элементами операторов твиста 2:

$$n_i(j) = \langle p | O_i^j | p \rangle. \quad (12)$$

Твист  $t$  определяется как разность между их канонической размерностью  $d$ , измеренной в единицах массы, и лоренцевым спином  $j$  соответствующего тензора. Величины  $w_{r \rightarrow i}^j$  представляют собой элементы матрицы аномальной размерности для операторов  $O_i^j$ .

### 3. Взаимодействия при высоких энергиях

Адрон-адронное рассеяние в кинематике Редже (рис. 2)

$$s = (p_A + p_B)^2 = (2E)^2 \gg q^2 = -(p_{A'} - p_A)^2 \sim m^2 \quad (13)$$

обычно описывается в терминах обмена реджеоном в  $t$ -канале (рис. 3):

$$A_p(s, t) = \xi_p(t) g(t) s^{j_p(t)} g(t), \quad j_p(t) = j_0 + \alpha' t, \quad (14)$$

$$\xi_p = \frac{\exp(-i\pi j_p(t)) + p}{\sin(\pi j_p)}, \quad (15)$$

где  $j_p(t)$  — траектория Редже, которая предполагается линейной,  $j_0$  и  $\alpha'$  — соответственно ее интерсепт и наклон. Множитель  $\xi_p$  является комплексной величиной, зависящей от сигнатуры реджеона  $p = \pm 1$ . Специальный реджеон — померон — вводится для объяснения приближенно постоянного поведения полных сечений рассеяния при высоких энергиях, удовлетворяющего

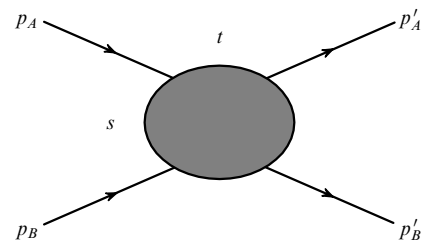


Рис. 2.

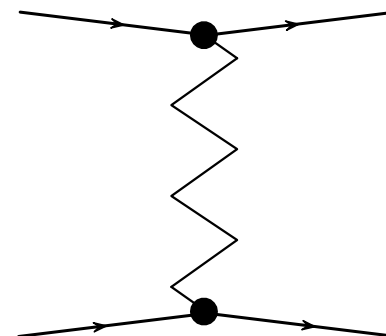


Рис. 3.

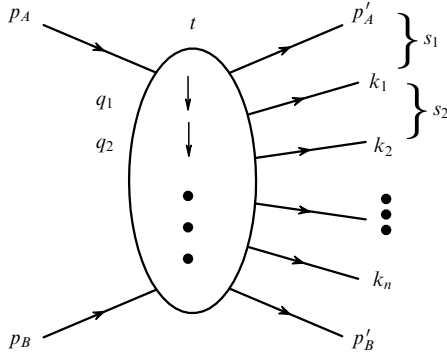


Рис. 4.

теореме Померанчука  $\sigma_{hh}/\sigma_{hh} \rightarrow 1$ . Его сигнатура  $p$  положительна, а интерсепт близок к единице:  $j_0^p = 1 + \Delta$ ,  $\Delta \ll 1$ . Теория поля для померонных взаимодействий построена В.Н. Грибовым приблизительно 40 лет назад.

Рождение частиц при высоких энергиях можно исследовать в мультиреджевской кинематике (рис. 4):

$$s \gg s_1, \quad s_2, \dots, \quad s_{n+1} \gg t_1, \quad t_2, \dots, \quad t_{n+1}, \quad (16)$$

где  $s_r$  — квадраты сумм импульсов соседних частиц  $k_{r-1}$ ,  $k_r$ ;  $-t_r$  — квадраты переданных импульсов  $q_r$ . Эту амплитуду можно также выразить в терминах обменов реджеонами в каждом  $t_r$ -канале:

$$A_{2 \rightarrow 2+n} \sim \prod_{r=1}^{n+1} s_r^{j_p(t_r)}. \quad (17)$$

#### 4. Реджезация глюона в квантовой хромодинамике

В борновском приближении в КХД амплитуда рассеяния для двух рассеивающихся цветных частиц факторизована (см. рис. 2):

$$M_{AB}^{A'B'}(s, t)|_{\text{Борна}} = \Gamma_{A'A}^c \frac{2s}{t} \Gamma_{B'B}^c, \quad \Gamma_{A'A}^c = g T_{A'A}^c \delta_{\lambda_A' \lambda_A}, \quad (18)$$

где  $T^c$  — генераторы цветовой группы  $SU(N_c)$  в соответствующем представлении,  $\lambda_r$  — спиральности сталкивающихся частиц и частиц в конечном состоянии. В ГЛП амплитуду рассеяния в КХД можно записать как [6]

$$M_{AB}^{A'B'}(s, t) = M_{AB}^{A'B'}(s, t)|_{\text{Борна}} s^{\omega(t)}, \quad \alpha_s \ln s \sim 1, \quad (19)$$

где глюонная траектория Редже имеет вид

$$\omega(-|q|^2) = - \int \frac{d^2 k}{4\pi^2} \frac{\alpha_s N_c |q|^2}{|k|^2 |q-k|^2} \approx - \frac{\alpha_s N_c}{2\pi} \ln \frac{|q|^2}{\lambda^2}. \quad (20)$$

Здесь введена фиктивная глюонная масса  $\lambda$  для регуляризации инфракрасной расходимости. Эта траектория была также вычислена в двухпетлевом приближении в КХД [7] и в суперсимметричных калибровочных теориях [8].

Далее, амплитуду рождения глюонов в мультиреджевской кинематике можно записать в факторизованном

виде [6]

$$M_{2 \rightarrow 1+n} = 2s \Gamma_{A'A}^{c_1} \frac{s_1^{\omega_1}}{|q_1|^2} g T_{c_2 c_1}^{d_1} C(q_2, q_1) \times \\ \times \frac{s_2^{\omega_2}}{|q_2|^2} \dots C(q_n, q_{n-1}) \frac{s_n^{\omega_n}}{|q_n|^2} \Gamma_{B'B}^{c_n}. \quad (21)$$

Реджеон-реджеон-глюонная вершина для рождающегося глюона с определенной спиральностью имеет вид

$$C(q_2, q_1) = \frac{q_2 q_1^*}{q_2^* - q_1^*}, \quad (22)$$

где мы используем комплексные обозначения для поперечных компонент импульсов частиц. Амплитуда рождения позволяет вычислить полное сечение рассеяния [6]

$$\sigma_t = \sum_n \int d\Gamma_n |M_{2 \rightarrow 1+n}|^2, \quad (23)$$

где  $\Gamma_n$  — фазовое пространство импульсов рожденных частиц в мультиреджевской кинематике.

#### 5. Уравнение Балицкого – Фадына – Кураева – Липатова

На основе факторизации амплитуд рождения частиц в КХД можно записать уравнение типа уравнения Бете – Солпитера для полного сечения рассеяния  $\sigma_t$ . Используя также оптическую теорему, его можно представить как уравнение БФКЛ для померонной волновой функции [6]

$$E \Psi(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = H_{12} \Psi(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2), \quad \Delta = - \frac{\alpha_s N_c}{2\pi} E, \quad (24)$$

где  $\sigma_t \sim s^{\Delta}$ , а гамильтониан БФКЛ в координатном представлении имеет вид

$$H_{12} = \ln |p_1 p_2|^2 + \frac{1}{p_1 p_2^*} (\ln |\rho_{12}|^2) p_1 p_2^* + \\ + \frac{1}{p_1^* p_2} (\ln |\rho_{12}|^2) p_1^* p_2 - 4\psi(1), \quad \rho_{12} = \rho_1 - \rho_2. \quad (25)$$

Он инвариантен относительно мёбиусовских преобразований [9, 10]

$$\rho_k \rightarrow \frac{a\rho_k + b}{c\rho_k + d}. \quad (26)$$

Здесь использованы комплексные обозначения для поперечных координат и их канонически сопряженных импульсов. Конформные веса для главной серии унитарных представлений группы Мёбиуса имеют вид

$$m = \gamma + \frac{n}{2}, \quad \tilde{m} = \gamma - \frac{n}{2}, \quad \gamma = \frac{1}{2} + i\nu, \quad (27)$$

где  $\gamma$  — аномальная размерность операторов с твистом 2,  $n$  — конформный спин.

Уравнение Бартельса – Квичинского – Прашаловича для бесцветных составных состояний нескольких реджезованных глюонов имеет вид [11]

$$E \Psi(\mathbf{p}_1, \dots) = H \Psi(\mathbf{p}_1, \dots), \quad H = \sum_{k < l} \frac{\mathbf{T}_k \mathbf{T}_l}{-N_c} H_{kl}, \quad (28)$$

где  $H_{kl}$  — гамильтониан БФКЛ. Кроме симметрии Мёбиуса, его волновая функция в КХД с большим

числом цветов ( $N_c \rightarrow \infty$ ) обладает свойством голоморфной факторизации [12]

$$\Psi(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) = \sum_{r,s} a_{r,s} \Psi_r(\rho_1, \dots, \rho_n) \Psi_s(\rho_1^*, \dots, \rho_n^*), \quad (29)$$

где суммирование проводится по вырожденному набору решений для соответствующих голоморфных и антиголоморфных уравнений БФКЛ. Эти уравнения обладают дуальной симметрией,  $p_k \rightarrow \rho_{k,k+1} \rightarrow p_{k+1}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) [13], и  $n$  интегралами движения  $q_r, q_r^*$  [14]. Соответствующие гамильтонианы  $h$  и  $h^*$  представляют собой локальные гамильтонианы интегрируемой спиновой модели Гейзенберга, в которой спины являются генераторами группы Мёбиуса [15]. Можно ввести трансфер-матрицу ( $T$ ) и матрицу монодромии ( $t$ ) согласно определениям [14]

$$T(u) = \text{tr } t(u), \quad t(u) = L_1 L_2 \dots L_n = \sum_{r=0}^n u^{n-r} q_r, \quad (30)$$

$$L_k = \begin{pmatrix} u + \rho_k p_k & p_k \\ -\rho_k^2 p_k & u - \rho_k p_k \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Тогда матрица монодромии  $t(u)$  удовлетворяет уравнению Янга – Бакстера [14]

$$t_{r_1}^{s_1}(u) t_{r_2}^{s_2}(v) l_{r_1 r_2}^{s_1 s_2}(v-u) = l_{s_1 s_2}^{r_1 r_2}(v-u) t_{r_2}^{s_2'}(v) t_{r_1}^{s_1'}(u), \quad (32)$$

где  $\hat{l}(u)$  — матрица монодромии для обычной спиновой модели Гейзенберга,  $\hat{P}$  — оператор перестановки. Это уравнение можно решить с помощью бете-анзаца и подхода Бакстера – Склянина.

## 6. Померон в $N=4$ -суперсимметричной модели

Интегральное ядро для уравнения БФКЛ можно вычислить и в двух петлях [16]. Его собственное значение можно записать в виде

$$\omega = 4\hat{a} \chi(n, \gamma) + 4\hat{a}^2 \Delta(n, \gamma), \quad \hat{a} = \frac{g^2 N_c}{16\pi^2}, \quad (33)$$

где

$$\chi(n, \gamma) = 2\psi(1) - \psi\left(\gamma + \frac{|n|}{2}\right) - \psi\left(1 - \gamma + \frac{|n|}{2}\right) \quad (34)$$

и  $\psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$ . Однопетлевая поправка  $\Delta(n, \gamma)$  в КХД содержит неаналитические члены — символы Кронекера  $\delta_{|n|,0}$  и  $\delta_{|n|,2}$  [8]. Но в  $N=4$ -суперсимметричной модели они сокращаются и в результате для  $\Delta(n, \gamma)$  получается следующий результат в эрмитово сепарабельной форме [8, 17]:

$$\Delta(n, \gamma) = \phi(M) + \phi(M^*) - \frac{\rho(M) + \rho(M^*)}{2\hat{a}/\omega}, \quad (35)$$

$$M = \gamma + \frac{|n|}{2},$$

$$\rho(M) = \beta'(M) + \frac{1}{2} \zeta(2),$$

$$\beta'(z) = \frac{1}{4} \left[ \psi'\left(\frac{z+1}{2}\right) - \psi'\left(\frac{z}{2}\right) \right]. \quad (36)$$

Интересно, что все функции, входящие в эти выражения, имеют свойство максимальной трансцендентальности [17]. Более того,  $\phi(M)$  можно записать в виде

$$\phi(M) = 3\zeta(3) + \psi''(M) - 2\Phi(M) + 2\beta'(M)(\psi(1) - \psi(M)), \quad (37)$$

$$\Phi(M) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+M} \left( \psi'(k+1) - \frac{\psi(k+1) - \psi(1)}{k+M} \right). \quad (38)$$

Здесь  $\psi(M)$  имеет трансцендентальность 1, ее производные  $\psi^{(n)}$  имеют трансцендентальности  $n+1$ , дополнительные полюсы в сумме по  $k$  увеличивают трансцендентальность функции  $\Phi(M)$  до трех, что совпадает с трансцендентальностью  $\zeta(3)$ . Гипотеза максимальной трансцендентальности верна и для аномальных размерностей операторов с твистом 2 в  $N=4$ -суперсимметричной модели [18, 19], в отличие от случая КХД [20]. Этот результат обсуждается в разделе 7.

Уравнение БФКЛ в диффузионном приближении можно записать в простом виде [6]:

$$j = 2 - \Delta - Dv^2, \quad (39)$$

где  $v$  связана с аномальной размерностью операторов твиста 2 следующим образом [16]:

$$\gamma = 1 + \frac{j-2}{2} + iv. \quad (40)$$

Параметры  $\Delta$  и  $D$  являются функциями константы связи  $\hat{a}$  и известны вплоть до двух петель. Пертурбативные поправки высшего порядка можно получить, используя эффективное действие [21, 22]. Для больших констант взаимодействия можно ожидать, что главная померонная сингулярность в  $N=4$ -суперсимметричной модели сдвигается в точку  $j=2$  и померон асимптотически совпадает с гравитонным полюсом Редже. Это предположение связано с AdS/CFT-соответствием, сформулированным в рамках гипотезы Малдасены о том, что  $N=4$ -суперсимметричная модель эквивалентна суперструнной модели, живущей на 10-мерном пространстве анти-де-Ситтера [23–25]. Поэтому представляется естественным наложить на уравнение БФКЛ в диффузионном приближении физическое условие, что  $\gamma$  равняется нулю для сохраняющегося тензора энергии-импульса  $\vartheta_{\mu\nu}(x)$  со спином  $j=2$ . В результате получаем, что параметры  $\Delta$  и  $D$  совпадают [19]. В таком случае можно решить приведенное выше уравнение БФКЛ относительно  $\gamma$ :

$$\gamma = (j-2) \left( \frac{1}{2} - \frac{1/\Delta}{1 + \sqrt{1 + (j-2)/\Delta}} \right). \quad (41)$$

С использованием словарика, разработанного в рамках AdS/CFT-соответствия [24], можно переписать уравнение БФКЛ в виде гравитонной траектории Редже [19]

$$j = 2 + \frac{\alpha'}{2} t, \quad t = \frac{E^2}{R^2}, \quad \alpha' = \frac{R^2}{2} \Delta. \quad (42)$$

С другой стороны, Губсер, Клеббанов и Поляков предсказали следующую асимптотику аномальной размерности при больших  $\hat{a}$  и  $j$  [26]:

$$\gamma|_{\hat{a}, j \rightarrow \infty} = -\sqrt{j-2} \Delta|_{j \rightarrow \infty}^{-1/2} = \sqrt{2\pi j} \hat{a}^{1/4}. \quad (43)$$

В результате можно получить явное выражение для поперонного интереспта при больших константах взаимодействия [19, 27]:

$$j = 2 - \Delta, \quad \Delta = \frac{1}{2\pi} \hat{a}^{-1/2}. \quad (44)$$

## 7. Максимальная трансцендентальность

Согласно рассмотренной в разделе 6 гипотезе, аномальная размерность

$$\gamma(j) = \hat{a}\gamma_1(j) + \hat{a}^2\gamma_2(j) + \hat{a}^3\gamma_3(j) + \dots \quad (45)$$

должна содержать наиболее трансцендентные функции [17]. Действительно, имеем в одной петле [28]

$$\gamma_1(j+2) = -4S_1(j), \quad (46)$$

в двух петлях [17, 18]

$$\frac{\gamma_2(j+2)}{8} = 2S_1(S_2 + S_{-2}) - 2S_{-2,1} + S_3 + S_{-3}, \quad (47)$$

в трех петлях [19]

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_3(j+2)}{32} = & -12(S_{-3,1,1} + S_{-2,1,2} + S_{-2,2,1}) + \\ & + 6(S_{-4,1} + S_{-3,2} + S_{-2,3}) - 3S_{-5} - 2S_3 S_{-2} - S_5 - \\ & - 2S_1^2(3S_{-3} + S_3 - 2S_{-2,1}) - S_2(S_{-3} + S_3 - 2S_{-2,1}) + \\ & + 24S_{-2,1,1,1} - S_1(8S_{-4} + S_{-2}^2 + 4S_2 S_{-2} + 2S_2^2) - \\ & - S_1(3S_4 - 12S_{-3,1} - 10S_{-2,2} + 16S_{-2,1,1}), \end{aligned} \quad (48)$$

где гармонические суммы определены как

$$\begin{aligned} S_a(j) &= \sum_{m=1}^j \frac{1}{m^a}, \quad S_{a,b,c,\dots}(j) = \sum_{m=1}^j \frac{1}{m^a} S_{b,c,\dots}(m), \\ S_{-a}(j) &= \sum_{m=1}^j \frac{(-1)^m}{m^a}, \quad S_{-a,b,\dots}(j) = \sum_{m=1}^j \frac{(-1)^m}{m^a} S_{b,\dots}(m), \\ \bar{S}_{-a,b,c,\dots}(j) &= (-1)^j S_{-a,b,\dots}(j) + S_{-a,b,\dots}(\infty)(1 - (-1)^j). \end{aligned} \quad (49)$$

Заметим, что в работе [28] были представлены аргументы в пользу того, что для  $N=4$ -суперсимметричной модели эволюционные уравнения для аномальных размерностей квазиоператоров интегрируемы в ГЛП. Позднее такая интегрируемость была обобщена для других операторов [29] и для высших петель [30]. С дополнительным использованием гипотезы о максимальной трансцендентальности интегральное уравнение для так называемой касповой аномальной размерности было построено во всех порядках теории возмущений [31, 32].

Для того чтобы вычислить аномальную размерность операторов с твистом 2 в четырех петлях, можно применить связанный с интегрируемостью подход, основанный на асимптотическом бете-анзаце [30]. Соответствующие уравнения для бетевских корней  $u_k$  имеют

вид

$$\left(\frac{x_k^+}{x_k^-}\right)^2 = \prod_{r=1}^{j-2} \frac{x_k^- - x_r^+}{x_k^+ - x_r^-} \frac{1 - g^2/x_k^+ x_r^-}{1 - g^2/x_k^- x_r^+} \exp(2i\theta(u_k, u_r)). \quad (50)$$

Здесь использованы обозначения

$$x_k^\pm = \frac{u_k^\pm}{2} + \sqrt{\frac{(u_k^\pm)^2}{4} - g^2}, \quad u^\pm = u \pm \frac{i}{2} \quad (51)$$

и разложение так называемой фазы одевания [32]

$$\theta(u_k, u_j) = 4\zeta(3)g^6(q_2(u_k)q_3(u_j) - q_3(u_k)q_2(u_j)) + \dots \quad (52)$$

Решение относительно  $u_k^\pm$  позволяет найти аномальную размерность:

$$\gamma(g, M) = 2g^2 \sum_{k=1}^M \left( \frac{i}{x_k^+} - \frac{i}{x_k^-} \right). \quad (53)$$

В частности, в четырех петлях можно получить [33]

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_4}{256} = & 4S_{-7} + 6S_7 + \\ & + 2(S_{-3,1,3} + S_{-3,2,2} + S_{-3,3,1} + S_{-2,4,1}) + \dots - \\ & - 80S_{1,1,-4,1} - \zeta(3)S_1(S_3 - S_{-3} + 2S_{-2,1}), \end{aligned} \quad (54)$$

где гармонические суммы зависят от  $j-2$ , а точками обозначены опущенные слагаемые (число которых превышает 200). Все эти члены удовлетворяют свойству максимальной трансцендентальности. Последнее слагаемое появляется из фазы одевания.

Оказывается, что после аналитического продолжения этого выражения на плоскость комплексных  $j$  два первых члена порождают полюс  $1/\omega^7$  при  $\omega = j-1 \rightarrow 0$ , который противоречит сингулярности в этой точке, предсказанной в четырех петлях исходя из уравнения БФКЛ:

$$\lim_{j \rightarrow 1} \gamma_4(j) = -\frac{32}{\omega^4} \left( 32\zeta(3) + \frac{\pi^4}{9} \omega \right) + \dots \quad (55)$$

Это означает, что асимптотический бете-анзац следует модифицировать начиная с четырех петель. А именно, следует принять во внимание эффекты так называемых намоток [33].

Интересные результаты были получены также для амплитуд рассеяния в  $N=4$ -суперсимметричной модели для частиц на массовой оболочке [34]. Эти амплитуды использованы в работе [35] для построения старших петлевых поправок к ядру БФКЛ в данной модели. Однако в [35] показано, что анзац Берна, Даксона, Смирнова (БДС) [34] не удовлетворяет правильным свойствам факторизации в мультiredжевской кинематике.

## 8. Обсуждение результатов

Мы показали, что померон в КХД является связанным состоянием реджезованных глюонов. Динамика БФКЛ интегрируема в ГЛП. В следующем за главным приближении в  $N=4$ -суперсимметричной модели уравнение

для померонной волновой функции обладает замечательными свойствами, среди которых — аналитичность по конформному спину  $n$  и максимальная трансцендентальность. В этой модели БФКЛ-померон совпадает с реджезованным гравитоном. Аномальная размерность для операторов с твистом 2 имеет свойство максимальной трансцендентальности, которое позволяет вычислить его аналитически в двух и трех петлях. Интегрируемость, основанная на асимптотическом бете-анзаце, воспроизводит эти результаты, но противоречит предсказанию БФКЛ в четырех петлях из-за присутствия эффектов намотки. Анзац БДС для амплитуд рассеяния в  $N = 4$ -суперсимметричной модели не согласуется с подходом БФКЛ в мультiredжевской кинематике.

Работа выполнена при частичной поддержке грантами 06-02-72041-MNTI-a, 07-02-00902-a и RSGSS-5788.2006.2.

## Список литературы

1. Bjorken J D, in *Selected Topics in Particle Physics: Proc. of Intern. School of Physics "Enrico Fermi", Course 41* (Ed. J Steinberger) (New York: Academic Press, 1968); Bjorken J D, Paschos E A *Phys. Rev.* **185** 1975 (1969)
2. Feynman R P *Phys. Rev. Lett.* **23** 1415 (1969)
3. Липатов Л Н *ЯФ* **20** 181 (1975) [Lipatov L N *Sov. J. Nucl. Phys.* **20** 94 (1975)]
4. Gross D J, Wilczek F *Phys. Rev. Lett.* **30** 1343 (1973); Politzer H D *Phys. Rev. Lett.* **30** 1346 (1973)
5. Грибов В Н, Липатов Л Н *ЯФ* **15** 781 (1972) [Gribov V N, Lipatov L N *Sov. J. Nucl. Phys.* **15** 438 (1972)]; Altarelli G, Parisi G *Nucl. Phys. B* **126** 298 (1977); Докшицер Ю Л *ЖЭТФ* **73** 1216 (1977) [Dokshitzer Yu L *Sov. Phys. JETP* **46** 641 (1977)]
6. Липатов Л Н *ЯФ* **23** 642 (1976) [Lipatov L N *Sov. J. Nucl. Phys.* **23** 338 (1976)]; Fadin V S, Kuraev E A, Lipatov L N *Phys. Lett. B* **60** 50 (1975); Кураев Е А, Липатов Л Н *ЖЭТФ* **71** 840 (1976); **72** 377 (1977) [Kuraev E A, Lipatov L N, Fadin V S *Sov. Phys. JETP* **44** 443 (1976); **45** 199 (1977)]; Балицкий И И, Липатов Л Н *ЯФ* **28** 1597 (1978) [Balitsky I I, Lipatov L N *Sov. J. Nucl. Phys.* **28** 822 (1978)]
7. Fadin V S, Fiore R, Kotsky M I *Phys. Lett. B* **387** 593 (1996)
8. Kotikov A V, Lipatov L N *Nucl. Phys. B* **582** 19 (2000)
9. Lipatov L N *Phys. Lett. B* **309** 394 (1993)
10. Липатов Л Н *ЖЭТФ* **90** 1536 (1986) [Lipatov L N *Sov. Phys. JETP* **63** 904 (1986)]
11. Bartels J *Nucl. Phys. B* **175** 365 (1980); Kwieciński J, Praszalowicz M *Phys. Lett. B* **94** 413 (1980)
12. Lipatov L N *Phys. Lett. B* **251** 284 (1990)
13. Lipatov L N *Nucl. Phys. B* **548** 328 (1999)
14. Lipatov L N "High energy asymptotics of multi-colour QCD and exactly solvable lattice models", Preprint DFPD/93/TH/70 (Padua: Inst. Naz. Fis. Nucleare, 1993); hep-th/9311037
15. Lipatov L N *JETP Lett.* **59** 596 (1994); Faddeev L D, Korchemsky G P *Phys. Lett. B* **342** 311 (1995)
16. Fadin V S, Lipatov L N *Phys. Lett. B* **429** 127 (1998); Ciafaloni M, Camici G *Phys. Lett. B* **430** 349 (1998)
17. Kotikov A V, Lipatov L N *Nucl. Phys. B* **661** 19 (2003)
18. Kotikov A V, Lipatov L N, Velizhanin V N *Phys. Lett. B* **557** 114 (2003)
19. Kotikov A V et al. *Phys. Lett. B* **595** 521 (2004); "Erratum" **632** 754 (2006)
20. Moch S, Vermaseren J A M, Vogt A *Nucl. Phys. B* **688** 101 (2004)
21. Lipatov L N *Nucl. Phys. B* **452** 369 (1995); *Phys. Rep.* **286** 131 (1997)
22. Antonov E N et al. *Nucl. Phys. B* **721** 111 (2005)
23. Maldacena J M *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** 231 (1998)
24. Gubser S S, Klebanov I R, Polyakov A M *Phys. Lett. B* **428** 105 (1998)
25. Witten E *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** 253 (1998)
26. Gubser S S, Klebanov I R, Polyakov A M *Nucl. Phys. B* **636** 99 (2002)
27. Brower R C et al. *JHEP* (12) 005 (2007)
28. Lipatov L N, in *Perspectives in Hadronic Physics: Proc. of Conf. ICTP, Trieste, Italy, May 1997* (Eds S Boffi et al.) (Singapore: World Scientific, 1998)
29. Minahan J A, Zarembo K *JHEP* (03) 013 (2003)
30. Beisert N, Staudacher M *Nucl. Phys. B* **670** 439 (2003)
31. Eden B, Staudacher M *J. Stat. Mech.* P11014 (2006)
32. Beisert N, Eden B, Staudacher M *J. Stat. Mech.* P01021 (2007)
33. Kotikov A V et al. *J. Stat. Mech.* P10003 (2007)
34. Bern Z, Dixon L J, Smirnov V A *Phys. Rev. D* **72** 085001 (2005)
35. Bartels J, Lipatov L N, Sabio Vera A, arXiv:0802.2065