

27. Cannata F, Kamenshchik A Yu, Regoli D "Scalar field cosmological models with finite scale factor singularities", arXiv:0801.2348
28. Barvinsky A O, Deffayet C, Kamenshchik A Yu "Anomaly driven cosmology: big boost scenario and AdS/CFT correspondence", arXiv:0801.2063
29. Shtanov Y, Sahni V *Class. Quantum Grav.* **19** L101 (2002); Tretyakov P, Toporensky A, Shtanov Y, Sahni V *Class. Quantum Grav.* **23** 3259 (2006)
30. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Наука, 1988) [Translated into English Landau L D, Lifshitz E M *The Classical Theory of Fields* (Oxford: Pergamon Press, 1975)]
31. Raychaudhuri A *Phys. Rev.* **98** 1123 (1955); *Phys. Rev.* **106** 172 (1957)
32. Komar A *Phys. Rev.* **104** 544 (1956)
33. Лифшиц Е М, Судakov В В, Халатников И М *ЖЭТФ* **40** 1847 (1961) [Lifshitz E M, Sudakov V V, Khalatnikov I M *Sov. Phys. JETP* **13** 1298 (1961)]; Khalatnikov I M, Lifshitz E M, Sudakov V V *Phys. Rev. Lett.* **6** 311 (1961)
34. Гришук Л П *ЖЭТФ* **51** 475 (1966) [Grishchuk L P *Sov. Phys. JETP* **24** 320 (1967)]
35. Arnold V I, Shandarin S F, Zeldovich Ya B *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics* **20** 111 (1982)
36. Bini D, Cherubini C, Jantzen R T *Class. Quantum Grav.* **24** 5627 (2007)
37. Петров А З *Пространства Эйнштейна* (М.: ГИФМЛ, 1961) [Translated into English Petrov A Z *Einstein Spaces* (Oxford: Pergamon Press, 1969)]
38. Белинский В А, Халатников И М *ЖЭТФ* **63** 1121 (1972) [Belinskii V A, Khalatnikov I M *Sov. Phys. JETP* **36** 591 (1973)]
39. Damour T "Cosmological singularities, billiards and Lorentzian Kac-Moody algebras", gr-qc/0412105
40. Damour T, Nicolai H "Symmetries, singularities and the de-emergence of space", arXiv:0705.2643
41. Kamenshchik A, Moschella U, Pasquier V *Phys. Lett. B* **511** 265 (2001)

PACS numbers: 11.15.-q, 11.30.Qc, 12.38.Aw
DOI: 10.3367/UFNr.0178.200806k.0647

Аксиальная аномалия в квантовой электро- и хромодинамике и структура вакуума в квантовой хромодинамике

Б.Л. Иоффе

1. Введение

В докладе обсуждается современное состояние проблемы аксиальной аномалии в квантовой электродинамике (КЭД) и квантовой хромодинамике (КХД) и связь аномалии со структурой вакуума в КХД. В КХД вакуумное среднее от аксиальной аномалии пропорционально новому квантовому числу — топологическому заряду, n . Существует бесконечное число вакуумных состояний $|n\rangle$. Амплитуды переходов между этими состояниями — это амплитуды туннельных переходов вдоль определенных траекторий в пространстве калибровочных полей. Показано, что из условия аксиальной аномалии следует наличие нулевых мод уравнения Дирака для безмассового кварка и спонтанное нарушение киральной симметрии в КХД — возникновение кваркового конденсата. Аксиальная аномалия может быть представлена в виде правила сумм для структурной функции в дисперсионном представлении AVV -вершины (AVV — от axial – vector – vector). На основе этого правила сумм вычислена ширина $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ -распада с точностью 1,5 %.

2. Определение аномалии

Допустим, у нас есть классический лагранжиан теории поля, обладающий определенной симметрией, т.е. инвариантный относительно соответствующих этой симметрии преобразований полей. Согласно теореме Нётер наличию симметрии отвечает закон сохранения. Аномалией называют такое явление, при котором данная симметрия и закон сохранения нарушаются при переходе к квантовой теории. Причина нарушения состоит в сингулярности квантовых операторов полей на малых расстояниях, так что для определения физических величин, помимо лагранжиана, необходимо фиксировать процедуру перенормировки. (См. обзоры по аномалиям в [1–4].)

Есть два типа аномалий: внутренние и внешние. В первом случае калибровочная инвариантность классического лагранжиана нарушается на квантовом уровне, теория становится неперенормируемой и не является самосогласованной. Решить эту проблему можно специальным подбором полей в лагранжиане, таком, чтобы все внутренние аномалии сократились. (Такой подход используется в Стандартной модели электрослабого взаимодействия — механизм Глэшоу – Иллиопулоса – Майани.) Внешние аномалии возникают при взаимодействии присутствующих в лагранжиане полей с внешними источниками. Именно эти аномалии возникают в квантовой электродинамике и квантовой хромодинамике и будут рассмотрены в докладе. Как будет показано, аномалии играют важную роль в КЭД и особенно в КХД. Поэтому термин "аномалия" не должен вводить в заблуждение: аномалия является нормальным и существенным ингредиентом большинства квантовых теорий поля.

3. Аксиальная аномалия в квантовой электродинамике

Уравнение Дирака для электрона во внешнем электромагнитном поле $A_\mu(x)$ имеет вид

$$i\gamma_\mu \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_\mu} = m\psi(x) - e\gamma_\mu A_\mu(x) \psi(x). \quad (1)$$

Аксиальный ток определяется равенством

$$j_{\mu 5}(x) = \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \gamma_5 \psi(x). \quad (2)$$

Его дивергенция, вычисленная в классической теории, т.е. с использованием (1), оказывается равной

$$\partial_\mu j_{\mu 5}(x) = 2im\bar{\psi}(x) \gamma_5 \psi(x) \quad (3)$$

и стремится к нулю при $m \rightarrow 0$. В квантовой теории аксиальный ток нуждается в доопределении, поскольку $j_{\mu 5}(x)$ является произведением двух локальных фермионных полей и такое произведение сингулярно, если оба поля действуют в одной и той же точке. (Аналогичное утверждение имеет место, конечно, и для векторного тока.) Для корректного рассмотрения раздвинем точки действия двух фермионных полей на расстояние ε :

$$j_{\mu 5}(x, \varepsilon) = \bar{\psi}\left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right) \gamma_\mu \gamma_5 \times \\ \times \exp\left[ie \int_{x-\varepsilon/2}^{x+\varepsilon/2} dy_\alpha A_\alpha(y)\right] \psi\left(x - \frac{\varepsilon}{2}\right), \quad (4)$$

и перейдем к пределу $\varepsilon \rightarrow 0$ в конечном результате. Экспоненциальный фактор в (4) введен для того, чтобы обеспечить локальную градиентную инвариантность $j_{\mu 5}(x, \varepsilon)$. Дивергенция аксиального тока (4) имеет вид (использовано уравнение (1) и удержаны только члены, линейные по ε):

$$\partial_\mu j_{\mu 5}(x, \varepsilon) = 2im\bar{\psi}\left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right)\gamma_5\psi\left(x - \frac{\varepsilon}{2}\right) - ie\varepsilon_x\bar{\psi}\left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right)\gamma_\mu\gamma_5\psi\left(x - \frac{\varepsilon}{2}\right)F_{x\mu}, \quad (5)$$

где $F_{x\mu}$ — напряженность электромагнитного поля. Примем для простоты, что $F_{\mu\nu} = \text{const}$, и используем калибровку фиксированной точки (калибровку Фока – Швингера): $x_\mu A_\mu(x) = 0$. Тогда $A_\mu(x) = (1/2)x_\nu F_{\nu\mu}$. Вычислим среднее по вакууму от (5). Для вычисления правой части (5) воспользуемся выражением для электронного пропагатора во внешнем электромагнитном поле ($\not{x} = x_\mu\gamma_\mu$):

$$S(x) = \frac{i}{2\pi^2} \left[\frac{\not{x}}{x^4} + i \frac{m}{2x^2} + \frac{1}{16x^2} eF_{\mu\nu}(\not{x}\sigma_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu}\not{x}) \right], \quad (6)$$

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} (\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu). \quad (7)$$

Усреднение по вакууму соответствует учету поправок первого порядка по e^2 . Подставляя (6) в уравнение (5) и пренебрегая массой электрона, находим

$$\langle 0 | \partial_\mu j_{\mu 5} | 0 \rangle = \frac{e^2}{4\pi^2} F_{x\mu} F_{\lambda\sigma} \varepsilon_{\beta\mu\lambda\sigma} \frac{\varepsilon_x \varepsilon_\beta}{\varepsilon^2}. \quad (8)$$

Поскольку в пространстве-времени нет выделенного направления, предел $\varepsilon \rightarrow 0$ проводится симметричным образом, и мы имеем

$$\partial_\mu j_{\mu 5} = \frac{e^2}{8\pi^2} F_{\alpha\beta} \tilde{F}_{\alpha\beta}, \quad (9)$$

где $\tilde{F}_{\alpha\beta}$ — дуальный тензор напряженности электромагнитного поля,

$$\tilde{F}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma}. \quad (10)$$

Символ вакуумного усреднения в (9) опущен, так как в порядке e^2 (9) может рассматриваться как операторное равенство. Уравнение (9) называют аномалией Адлера – Белла – Джакива [5–8].

Для лучшего понимания происхождения аномалии рассмотрим ту же проблему в импульсном пространстве. В КЭД матричный элемент перехода аксиального тока с импульсом q в два реальных или виртуальных фотона с импульсами p и p' описывается диаграммами, представленными на рис. 1. Матричный элемент равен

$$T_{\mu\alpha\beta}(p, p') = \Gamma_{\mu\alpha\beta}(p, p') + \Gamma_{\mu\beta\alpha}(p', p), \quad (11)$$

$$\Gamma_{\mu\alpha\beta}(p, p') = -e^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr}[\gamma_\mu \gamma_5 (\not{k} + \not{p} - m)^{-1} \times \gamma_\alpha (\not{k} - m)^{-1} \gamma_\beta (\not{k} - \not{p}' - m)^{-1}]. \quad (12)$$

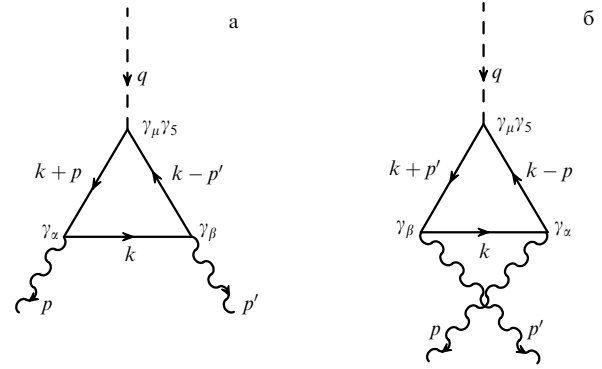


Рис. 1. Фейнмановские диаграммы, описывающие переход аксиального тока с импульсом q в два реальных или виртуальных фотона с импульсами p и p' , $q = p + p'$: (а) прямая диаграмма, (б) кросс-синговая диаграмма.

Интеграл (12) линейно расходится. В линейно расходящемся интеграле существенны поверхностные члены, возникающие от интегрирования по бесконечно удаленной поверхности в импульсном пространстве. (Это становится особенно очевидным, когда векторы q, p, p' пространственноподобны и можно повернуть контур интегрирования по k_0 на мнимую ось: $k_0 \rightarrow ik_4$, так что интегрирование по k происходит в евклидовом пространстве.) Результат вычисления зависит от выбора k : k можно сместить на произвольный постоянный вектор a_λ : $k_\lambda \rightarrow k_\lambda + a_\lambda$. Амплитуда (11) должна удовлетворять условиям сохранения векторного тока: $p_\alpha T_{\mu\alpha\beta}(p, p') = 0$, $p'_\beta T_{\mu\alpha\beta}(p, p') = 0$.

Попытаемся выбрать вектор a_λ так, чтобы одновременно удовлетворить условиям сохранения векторного и аксиального токов. Параметризуем a_λ как $a_\lambda = (a + b)p_\lambda + bp'_\lambda$. Результат вычислений показывает, что одновременно удовлетворить этим условиям невозможно: сохранение векторного тока может быть достигнуто при $a = -2$, а для сохранения аксиального тока требуется $a = 0$ [8, 9]. Сохранение векторного тока является необходимым условием существования КЭД. Поэтому выбираем $a = -2$. Дивергенция аксиального тока равна

$$q_\mu T_{\mu\alpha\beta}(p, p') = \left[2mG(p, p') - \frac{e^2}{2\pi^2} \right] \varepsilon_{\alpha\beta\lambda\sigma} p_\lambda p'_\sigma. \quad (13)$$

В соотношении (13) восстановлен член, пропорциональный массе электрона, и $G(p, p')$ определено как

$$\langle p, \varepsilon_\alpha; p', \varepsilon'_\beta | \bar{\psi} \gamma_5 \psi | 0 \rangle = G(p, p') \varepsilon_{\alpha\beta\lambda\sigma} p_\lambda p'_\sigma, \quad (14)$$

где $\varepsilon_\alpha, \varepsilon'_\beta$ — поляризации фотонов. Нарушение сохранения аксиального тока, даваемое уравнением (13), полностью эквивалентно (9). Представленное выше рассмотрение аксиальной аномалии в КЭД было проведено при ограничении порядком e^2 . Адлером и Бардиным было доказано [5, 6, 10], что радиационные поправки, возникающие за счет фотонных линий, соединяющих различные точки внутри треугольных диаграмм, приведенных на рис. 1, не меняют соотношения аномалии. Однако диаграмма, показанная на рис. 2, дает исчезающую, хотя и практически малую, поправку порядка e^6 к этому условию [11].

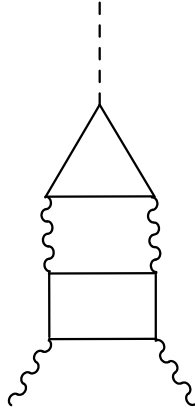


Рис. 2. Поправка порядка e^6 к аномалии Адлера – Белла – Джакива в КХД.

4. Аксиальная аномалия и ее связь со структурой вакуума в квантовой хромодинамике

В КХД с безмассовыми кварками аксиальная аномалия описывается формулой, аналогичной (9):

$$\partial_\mu j_{\mu 5}^a = \frac{e^2}{8\pi^2} e_q^2 N_c F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}. \quad (15)$$

Здесь N_c — число цветов, $N_c = 3$, e_q — заряд кварка. (Формула (15) записана для одного безмассового кварка.) В КХД существует также и другая аномалия, когда внешними полями являются не электромагнитные, а глюонные поля:

$$\partial_\mu j_{\mu 5} = \frac{\alpha_s N_c}{4\pi} G_{\mu\nu}^n \tilde{G}_{\mu\nu}^n, \quad (16)$$

где $G_{\mu\nu}^n$ — напряженность глюонного поля, а $\tilde{G}_{\mu\nu}^n$ — дуальная ей величина. Уравнение (16) может рассматриваться как операторное уравнение, а поля $G_{\mu\nu}^n$, $\tilde{G}_{\mu\nu}^n$ могут представлять собой поля виртуальных глюонов. Так же, как и в КЭД, пертурбативные поправки к (16) начинаются с α_s^3 и описываются диаграммой, подобной той, которая приведена на рис. 2. В КХД, однако, в силу того, что константа связи велика, вклад этой диаграммы не мал и не мал также вклад диаграмм, получающихся из нее присоединением дополнительных кварковых и глюонных петель. Очевидно, что октетный аксиальный ток

$$j_{\mu 5}^i = \sum_q \bar{\psi}_q \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\lambda^i}{2} \psi_q, \quad i = 1, \dots, 8, \quad (17)$$

в отсутствие электромагнитного поля сохраняется в КХД. (Здесь λ^i — матрицы Гелл-Мана и суммирование идет по ароматам легких кварков, $q = u, d, s$.) Синглетный аксиальный ток

$$j_{\mu 5}^{(0)} = \sum_q \bar{\psi}_q \gamma_\mu \gamma_5 \psi_q \quad (18)$$

содержит аномалию

$$\partial_\mu j_{\mu 5}^{(0)} = 3 \frac{\alpha_s N_c}{4\pi} G_{\mu\nu}^n \tilde{G}_{\mu\nu}^n. \quad (19)$$

В силу спонтанного нарушения киральной симметрии псевдоскалярные мезоны, принадлежащие октету (π, K, η), являются безмассовыми (в приближении $m_q \rightarrow 0$), тогда как SU(3)-синглет η' обладает массой. Тем самым наличие аномалии решает так называемую U(1)-проблему [12].

Я перейду теперь к важному утверждению, которое имеет место в КХД и устанавливает связь аномалии со структурой вакуума в этой теории. Поскольку речь пойдет о существовании вырожденных вакуумов и туннельных (подбарьерных) переходов между ними, удобно так же, как это делается в квантовой механике, перейти к мнимому времени, положив $t = x_0 = -ix_4$, т.е. работать в евклидовом пространстве, где $x^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$. В евклидовом пространстве действие выражается в виде

$$S = \frac{1}{4} \int d^4x G_{\mu\nu}^2 \quad (20)$$

и является положительным. (Вклад кварков временно опущен.) Амплитуды переходов определяются матричными элементами от $\exp(-S)$. Имеется теорема, впервые доказанная Белаиным, Поляковым, Шварцем и Тьюкиным [13]:

$$\frac{\alpha_s}{8\pi} \int d^4x G_{\mu\nu}^n \tilde{G}_{\mu\nu}^n = n, \quad (21)$$

где n — целое число — топологический заряд (winding number). Я не буду проводить детального доказательства этой теоремы, а обозначу лишь его основные моменты. Подынтегральное выражение в (21) может быть представлено в виде полной произвольной:

$$G_{\mu\nu}^n \tilde{G}_{\mu\nu}^n = \partial_\mu K_\mu, \quad (22)$$

$$K_\mu = \varepsilon_{\mu\nu\gamma\delta} \left(A_\nu^n G_{\gamma\delta}^n - \frac{1}{3} f^{mnp} A_\nu^n A_\gamma^m A_\delta^p \right). \quad (23)$$

При больших x^2 величина $G_{\mu\nu}(x)$ убывает быстрее, чем $1/x^2$ (т.е. физическое поле отсутствует), а A_μ^n является чисто калибровочным полем. Тогда в (23) можно отбросить первый член в правой части, а в общем выражении калибровочного преобразования для A_μ^n

$$A'_\mu = U^{-1} A_\mu U + i U^{-1} \partial_\mu U \quad (24)$$

оставить только второй член. (В (24) U — унитарная унимодулярная матрица, $U^+ = U$, $|U| = 1$.) Пусть поле A_μ^n ($n = 1, 2, 3$) принадлежит к подгруппе SU(2) цветовой группы SU(3). Подгруппа SU(2) играет особую роль в группе SU(3), поскольку она изоморфна группе пространственных вращений O(3). Удобно ввести матричное обозначение для полей A_μ :

$$A_i = \frac{1}{2} g \tau^k A_i^k, \quad k = 1, 2, 3; \quad i = 1, 2, 3. \quad (25)$$

Тогда согласно (22), (23)

$$\int d^4x G_{\mu\nu}(x) \tilde{G}_{\mu\nu}(x) = -i \frac{4}{3} \frac{1}{g^2} \int dV \varepsilon_{ikl} \text{Tr} (A_i A_k A_l). \quad (26)$$

Подставляя в (26) второй член правой части (24), можно убедиться в том, что подынтегральное выражение в (26) есть полная производная по пространственным координатам.

натам, т.е. сводится к интегралу по бесконечно удаленной поверхности. В силу условия $|U|=1$ на этой поверхности матрица U имеет вид

$$U = \exp \left(2\pi n \hat{r}_a \frac{\tau^a}{2i} \right), \quad (27)$$

где n — целое число, $\hat{r}_a$ — единичный радиус-вектор, $\hat{r}_a = r_a/|\mathbf{r}|$. Инвариантность U относительно пространственных вращений следует из того, что каждое такое вращение может сопровождаться калибровочным преобразованием — поворотом в группе $SU(2)$. Из (27) при подстановке в (26) второго члена правой части (24) вытекает равенство (21). Теорема (21) следует также из общих математических соображений, поскольку группа $SU(2)$ отображается на $O(3)$, такое отображение является многозначным и определяется числом покрытий группы $O(3)$. Заметим, что поля, соответствующие различным n , не могут быть переведены друг в друга непрерывным преобразованием. В теории возмущений мы всегда работаем с полями, отвечающими $n=0$. Действие (20) может быть записано как

$$S = \frac{1}{4} \int d^4x G_{\mu\nu}^n G_{\mu\nu}^n = \frac{1}{4} \int d^4x \left[G_{\mu\nu}^n \tilde{G}_{\mu\nu}^n + \frac{1}{2} (G_{\mu\nu}^n - \tilde{G}_{\mu\nu}^n)^2 \right]. \quad (28)$$

Поскольку последний член в (28) положителен, то минимум действия осуществляется за счет полей, удовлетворяющих условию самодуальности

$$G_{\mu\nu}^n = \tilde{G}_{\mu\nu}^n, \quad (29)$$

$$S_{\min} = \frac{1}{4} \int d^4x G_{\mu\nu}^n \tilde{G}_{\mu\nu}^n = \frac{8\pi^2}{g^2} |n| = \frac{2\pi}{\alpha_s} |n|. \quad (30)$$

(Отрицательным n отвечают антисамодуальные поля $G_{\mu\nu}^n = -\tilde{G}_{\mu\nu}^n$.) Решения уравнения самодуальности (для $n=1$), которые получили название инстантонов, были найдены в [13]. Как следует из (30), в КХД в евклидовом пространстве существует бесконечное число минимумов действия. В пространстве Минковского инстантоны представляют собой траектории туннельных переходов (в пространстве полей) между вакуумами, характеризуемыми различными топологическими зарядами, но обладающими одинаковыми энергиями [14–16]. Рассматривая величину $n(t)$, переходящую в топологический заряд при $t \rightarrow \pm\infty$, можно показать, что инстантонное решение соответствует $n(t \rightarrow -\infty) = 0$ и $n(t \rightarrow \infty) = 1$, а амплитуда перехода между вакуумными состояниями равна [17]

$$\left\langle \frac{\Omega_{n=1}(t \rightarrow \infty)}{\Omega_{n=0}(t \rightarrow -\infty)} \right\rangle = \exp \left(-\frac{2\pi}{\alpha_s} \right). \quad (31)$$

5. Структура вакуума в квантовой хромодинамике

Как было показано, в КХД существует бесконечное число вакуумов с одинаковыми энергиями, характеризующимися топологическими зарядами n . Обозначим волновую функцию такого вакуума как $\Omega(n)$. Предположим, что волновые функции являются нормированными, $\Omega^+(n)\Omega(n) = 1$, и образуют полную систему. Неопределенность в волновой функции сводится к фазовому фактору: $\Omega(n) = \exp(i\theta_n)\Omega'(n)$. Разделим все евклидово

пространство на две большие части и допустим, что напряженность поля в пространстве между ними равна нулю, а потенциалы — чисто калибровочные. Тогда, очевидно, мы имеем

$$\exp(i\theta_{n_1+n_2})\Omega(n_1+n_2) = \exp(i\theta_{n_1})\Omega(n_1)\exp(i\theta_{n_2})\Omega(n_2). \quad (32)$$

(Штрих в обозначении $\Omega'(n)$ здесь опущен.) Поскольку

$$\Omega(n_1+n_2) = \Omega(n_1)\Omega(n_2), \quad (33)$$

то имеет место уравнение

$$\theta_{n_1+n_2} = \theta_{n_1} + \theta_{n_2}, \quad (34)$$

решением которого является

$$\theta_n = n\theta. \quad (35)$$

Таким образом, волновая функция вакуума в КХД представляет собой суперпозицию волновых функций с различными топологическими зарядами:

$$\Omega(\theta) = \sum_n \exp(in\theta)\Omega(n). \quad (36)$$

Состояние $\Omega(\theta)$ называют θ -вакуумом. Вакуумное состояние $\Omega(\theta)$ сходно с блоховским состоянием электрона в кристалле, θ играет роль импульса. Но, в отличие от блоховского состояния, для θ -вакуума переходы между состояниями с различными θ запрещены. Вакуумное состояние $\Omega(\theta)$ можно воспроизвести, если к лагранжиану КХД (в пространстве Минковского) добавить член

$$L_\theta = \frac{g^2\theta}{32\pi^2} G_{\mu\nu}\tilde{G}_{\mu\nu}. \quad (37)$$

Наличие члена (37) в лагранжиане демонстрирует, что θ является наблюдаемой величиной. Член (37) нарушает P- и CP-инвариантности. До сих пор, однако, попытки обнаружить нарушение CP-инвариантности в сильных взаимодействиях не привели к успеху. Наиболее сильное ограничение на величину θ было получено из поисков дипольного момента нейтрона, $\theta < 10^{-9}$ [18].

6. Нулевые собственные значения уравнения Дирака для безмассовых кварков как следствие аномалии.

Спонтанное нарушение киральной симметрии в квантовой хромодинамике

Рассмотрим уравнение Дирака для безмассовых кварков в КХД в евклидовом пространстве:

$$-i\gamma_\mu \nabla_\mu \psi_k = \lambda_k \psi_k, \quad \nabla_\mu = \partial_\mu + ig \frac{\lambda_n}{2} A_\mu^n. \quad (38)$$

Из условия аномалии (16) при $n=1$ имеем

$$\begin{aligned} \int d^4x \operatorname{Tr} \langle 0 | \partial_\mu j_{\mu 5}(x) | 0 \rangle &= \\ &= \frac{g^2}{16\pi^2} \int d^4x \langle 0 | G_{\mu\nu}^a \tilde{G}_{\mu\nu}^a | 0 \rangle = 2N_c. \end{aligned} \quad (39)$$

Левая часть (39) записывается как оператор

$$\begin{aligned} \int d^4x \operatorname{Tr} \langle 0 | \partial_\mu j_{\mu 5}(x) | 0 \rangle &= \\ &= - \int d^4x \partial_\mu \operatorname{Tr} \langle 0 | i \not{V}^{-1}(x, x) \gamma_\mu \gamma_5 | 0 \rangle = \\ &= - \int d^4x \nabla_\mu \operatorname{Tr} \left[\sum_k \frac{\psi_k(x) \psi_k^\dagger(x)}{\lambda_k} \gamma_\mu \gamma_5 \right] = \\ &= - \int d^4x \operatorname{Tr} \left[\sum_k \frac{\psi_k(x) \psi_k^\dagger(x)}{\lambda_k} 2\lambda_k \gamma_5 \right]. \end{aligned} \quad (40)$$

Состояния с λ_k не равными нулю не дают вклада в (40), поскольку каждому такому состоянию $\psi_k(x)$ соответствует состояние $\gamma_5 \psi_k(x)$ с собственным значением $-\lambda_k$ и эти два состояния ортогональны. Так что в (40) остается только вклад нулевых мод, и мы имеем

$$2 \int d^4x \operatorname{Tr} [\gamma_5 \psi_0(x) \psi_0^\dagger(x)] = -2N_c. \quad (41)$$

Из (41) следует, что в случае $n = 1$, т.е. в поле инстантона, нулевая мода — правая: спин кварка направлен по его импульсу, $\gamma_5 \psi_0 = -\psi_0$. (В действительности в кварке в поле инстантона существует одна правая нулевая мода, поскольку спин коррелирован с цветом и множитель N_c в правой части (41) пропадает.) При $n = -1$ возникающее соотношение отличается от (41) знаком, т.е. в поле антиинстантона существует левая нулевая мода. В общем случае имеет место теорема Атии — Зингера [19]:

$$n = n_L - n_R, \quad (42)$$

где n_L и n_R — число левых и число правых нулевых мод соответственно. Из (41) вытекает утверждение о том, что в поле инстантона нулевая мода нарушает киральную симметрию лагранжиана — инвариантность относительно преобразований $\psi \rightarrow \gamma_5 \psi$. (Следует иметь в виду, что при переходе от евклидовой метрики к пространству Минковского $\psi^\dagger$ заменяется функцией $\bar{\psi}$.) Тем самым наличие инстантонов служит указанием на существование в вакууме КХД кваркового конденсата

$$\langle 0 | \bar{\psi} \psi | 0 \rangle \neq 0, \quad (43)$$

нарушающего киральную симметрию, которой обладает лагранжиан. (К сожалению, провести вычисление кваркового конденсата на основе инстантонного подхода не удастся, так как такой подход корректен при рассмотрении малых расстояний, а конденсат формируется на больших расстояниях.)

Топологическому заряду n соответствует оператор топологического тока

$$Q_5(x) = \frac{\alpha_s}{8\pi} G_{\mu\nu}^n(x) \tilde{G}_{\mu\nu}^n(x). \quad (44)$$

Как было показано Крюзером [20], вакуумный коррелятор топологических токов

$$\zeta(q^2) = i \int d^4x \exp(iqx) \langle 0 | T \{ Q_5(x), Q_5(0) \} | 0 \rangle \quad (45)$$

обращается в нуль при $q^2 = 0$, если в теории есть хотя бы один безмассовый кварк. Ди Веккиа и Венециано [21]

доказали, что в пределе $N_c \rightarrow \infty$ имеет место соотношение

$$\zeta(0) = \langle 0 | \bar{q} q | 0 \rangle \left(\sum_i \frac{1}{m_i} \right)^{-1}. \quad (46)$$

Для случая двух и трех безмассовых кварков (46) было доказано в [22] без использования предела $N_c \rightarrow \infty$. Понятие топологического тока оказалось весьма эффективным в КХД: на его основе удалось выяснить спиновое содержание протона [23], установить связь между спиновыми структурными функциями при больших и малых Q^2 [24, 25], определить аксиальные константы связи нуклона [26].

7. Правила сумм для аксиальной аномалии в квантовой хромодинамике

Рассмотрим общее представление амплитуды перехода аксиального тока в два фотона с импульсами p и p' через структурные функции (формфакторы), не имеющие кинематических особенностей $T_{\mu\alpha\beta}(p, p')$ [27]. Ограничимся случаем $p^2 = p'^2$. Тогда [28, 29]

$$\begin{aligned} T_{\mu\alpha\beta}(p, p') &= F_1(q^2, p^2) q_\mu \varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} p_\rho p'_\sigma - \frac{1}{2} F_2(q^2, p^2) \times \\ &\times \left[\varepsilon_{\mu\alpha\beta\sigma} (p - p')_\sigma - \frac{p_\alpha}{p^2} \varepsilon_{\mu\beta\rho\sigma} p_\rho p'_\sigma + \frac{p'_\beta}{p^2} \varepsilon_{\mu\alpha\rho\sigma} p_\rho p'_\sigma \right]. \end{aligned} \quad (47)$$

Условие аномалии в КХД сводится к

$$\begin{aligned} F_2(q^2, p^2) + q^2 F_1(q^2, p^2) &= \\ &= 2 \sum_q m_q G(q^2, p^2) - \frac{e^2}{2\pi^2} \sum_q e_q^2 N_c. \end{aligned} \quad (48)$$

Поскольку $T_{\mu\alpha\beta}(p, p')$ не имеет особенностей при $p^2 = 0$, $F_2(q^2, 0) = 0$. Функции $F_1(q^2, p^2)$, $F_2(q^2, p^2)$, $G(q^2, p^2)$ могут быть описаны безвычитательными дисперсионными соотношениями по q^2 . Используя эти соотношения, можно доказать правило сумм

$$\int_{4m^2}^{\infty} \operatorname{Im} F_1(t, p^2) dt = \frac{e^2}{2\pi^2} \sum_q e_q^2 N_c, \quad (49)$$

где m^2 — наименьшая из масс кварков. Правило сумм (49) было доказано в [30] для $p^2 < 0$, $m = 0$, в [28] для $p^2 = p'^2$ и в [31] для общего случая $p^2 \neq p'^2$. Следует подчеркнуть, что (49) верно и при отличных от нуля массах кварков. Рассмотрим наиболее интересный случай, когда аксиальный ток является третьей компонентой изовекторного тока:

$$j_{\mu 5}^{(3)} = \bar{u} \gamma_\mu \gamma_5 u - \bar{d} \gamma_\mu \gamma_5 d. \quad (50)$$

Пренебрежем массами u - и d -кварков и положим $p^2 = p'^2 = 0$. Из (47), (48) тогда следует:

$$T_{\mu\alpha\beta}(p, p') = -\frac{2\alpha}{\pi} N_c \frac{q_\mu}{q^2} (e_u^2 - e_d^2) \varepsilon_{\alpha\beta\lambda\sigma} p_\lambda p'_\sigma. \quad (51)$$

Как видно из (51), переход изовекторного аксиального тока в два фотона происходит через промежуточное безмассовое состояние. Таким состоянием (в пределе

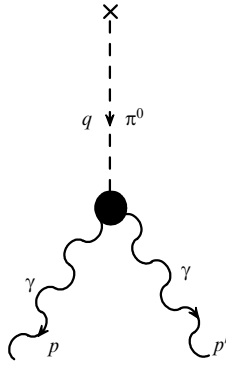


Рис. 3. Диаграмма, описывающая переход изовекторного аксиального тока (отмечен крестиком) в два фотона.

$m_u, m_d \rightarrow 0$) является π^0 -мезон (рис. 3). С помощью равенства $\langle 0 | j_{\mu 5}^{(3)} | \pi^0 \rangle = \sqrt{2} i f_\pi q_\mu$ из условия аномалии можно определить матричный элемент $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ -распада

$$M(\pi^0 \rightarrow 2\gamma) = A \varepsilon_{\alpha\beta\lambda\sigma} \varepsilon_{1\alpha} \varepsilon_{2\beta} p_\lambda p'_\sigma, \quad (52)$$

найти константу A и вычислить ширину $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$:

$$\Gamma(\pi^0 \rightarrow 2\gamma) = \frac{\alpha^2}{32\pi^3} \frac{m_\pi^3}{f_\pi^2}. \quad (53)$$

Этот результат впервые был получен Долговым и Захаровым [32]. В предположении, что $f_{\pi^0} = f_{\pi^+} = 130,7$ МэВ, из (53) следует: $\Gamma(\pi^0 \rightarrow 2\gamma)_{\text{theory}} = 7,73$ эВ. Точность предсказания оценить трудно, по-видимому, она составляет $\sim 5-10\%$. Экспериментальное значение этой величины, усредненное по всем существующим измерениям (данные на 2006 г.), составляет $\Gamma(\pi^0 \rightarrow 2\gamma) = 7,8 \pm 0,6$ эВ [33]. Для достижения лучшей точности теоретического предсказания необходимо: 1) подставить f_{π^0} вместо f_{π^+} в (53); 2) учесть вклад возбужденных состояний, помимо π^0 , в правило сумм (49) для изовекторного тока при $p^2 = 0$. Эта программа реализована в [34]. Было показано, что разность $\Delta f_\pi = f_{\pi^0} - f_{\pi^+}$ мала: $\Delta f_\pi / f_\pi \approx -1,0 \times 10^{-3}$. Среди возбужденных состояний заметный вклад дает только η -мезон. Его вклад определяется величиной угла смешивания $\pi^0 - \eta$ [35, 36] и шириной $\Gamma(\eta \rightarrow 2\gamma) = 510$ эВ [33]. В [34] получено: $\Gamma(\pi^0 \rightarrow 2\gamma)_{\text{theory}} = 7,93 \pm 1,5\%$. Последние измерения дали $\Gamma(\pi^0 \rightarrow 2\gamma)_{\text{exp}} = 7,93 \pm 2\%, \pm 2,1\%$ [37], т.е. экспериментальные данные находятся в прекрасном согласии с теоретическим предсказанием.

Из соотношения (51), казалось бы, можно сделать вывод, что существование безмассового (в пределе безмассовых u - и d -кварков) голдстоуновского π^0 -мезона есть следствие аксиальной аномалии, описываемой треугольными диаграммами рис. 1. Это, однако, не так. Непосредственное вычисление $\text{Im } F_1(q^2, p^2)$ (именно в эту функцию дает вклад промежуточный π^0 -мезон) при $p \neq 0$ показывает [9, 28], что в этом случае $\text{Im } F_1(q^2, p^2)$ является регулярной функцией q , стремящейся к константе при $q^2 \rightarrow 0$, и не имеет особенности типа $\delta(q^2)$, в отличие от случая $p^2 = 0$, рассмотренного выше. Таким образом, амплитуда $T_{\mu\alpha\beta}(p, p')$, соответствующая переходу аксиального тока в два виртуальных фотона и вычисленная согласно диаграммам рис. 1, не имеет полюса по q^2 при $q^2 = 0$. С другой стороны, опираясь

на киральную эффективную теорию (см., например, [38]), мы можем утверждать, что амплитуда перехода аксиального тока в два виртуальных фотона должна содержать вклад промежуточного безмассового π^0 -мезона (см. рис. 3). Как показано в [6], вставки глюонных линий в диаграммы рис. 1 не меняют выражения для аномалии. (На самом деле в [6] это было показано для КЭД, но здесь нет разницы между КХД и КЭД.) Таким образом, рассматривая случай $p^2 \neq 0$, мы приходим к выводу, что появление безмассового π^0 -мезона в дисперсионном представлении AVV-формфактора не обусловлено аномалией. Наличие безмассовых голдстоуновских мезонов (π, K, η) следует из спонтанного нарушения киральной симметрии в вакууме КХД. Возникновение сингулярности при $q^2 = 0$ у амплитуды $T_{\mu\alpha\beta}(p, p')$ при $p^2 = 0$ иногда интерпретируется как двоякая природа аномалии — ультрафиолетовая и инфракрасная (см., например, [3]). Мне представляется, что ввиду отсутствия такой сингулярности при $p^2 \neq 0$ подобная интерпретация неправомерна: природа аномалии в КЭД и КХД связана с ультрафиолетовыми расходимостями — сингулярностями амплитуд на малых расстояниях. (КЭД и КХД здесь кардинально отличаются от двумерной модели Швингера, в которой действительно имеет место двоякая природа аномалии (см. [3]).)

В случае восьмой компоненты октетного тока амплитуда перехода аксиального тока в два реальных фотона $F_1(q^2, 0)$ имеет полюс при $q^2 = 0$, если $m_u = m_d = m_s = 0$. Этот полюс естественно отнести к η -мезону. Однако полученное соотношение для $\Gamma(\eta \rightarrow 2\gamma)$, аналогичное (53), резко расходится с экспериментом. Возможное объяснение этого расхождения — сильное непертурбативное взаимодействие типа инстантонов в псевдоскалярном канале, смешивающее η - и η' -мезоны [39]. В случае синглетного аксиального тока в амплитуде $j_{\mu 5}^{(0)} \rightarrow 2\gamma$ присутствуют диаграммы типа приведенных на рис. 2 (с виртуальными глюонами вместо фотонов), их расширения и непертурбативные вклады. Поэтому нельзя ожидать получения надежных предсказаний ширины $\eta' \rightarrow 2\gamma$ на основе аномалий.

’т Хофт выдвинул гипотезу [40] о том, что сингулярности амплитуд, вычисленные в КХД в кварк-глюонном базисе, должны воспроизводиться при вычислениях в адронном базисе. Эта гипотеза, безусловно, выполняется, если учитываются как пертурбативные, так и непертурбативные взаимодействия. Однако непертурбативные взаимодействия нам, как правило, неизвестны. В обсуждавшихся выше случаях (кроме распада π^0 на два реальных фотона) гипотеза ’т Хофта не подтверждается [9].

8. Заключение

1. Аномалия является важным и необходимым элементом квантовой теории поля.
2. Аномалии возникают за счет ультрафиолетовых сингулярностей амплитуд квантовой теории поля, в силу которых оказывается необходимым дополнить лагранжиан условиями перенормировки.
3. Аномалия в КХД связана с появлением нового квантового числа — топологического заряда.
4. Вакуум в КХД представляет собой суперпозицию бесконечного числа вакуумов, различающихся топологическими зарядами.

5. Переходы между вакуумами с разными топологическими зарядами являются туннельными переходами, происходящими вдоль классических траекторий в пространстве полей, — самодуальными решениями уравнений КХД — инстантонами.
6. Аксиальная аномалия в КХД приводит к появлению нулевых мод в уравнении Дирака для легких кварков и указывает на возникновение спонтанного нарушения киральной симметрии в вакууме КХД — существование кваркового конденсата.
7. Аксиальная аномалия с высокой точностью ($\sim 2\%$) предсказывает величину ширины $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ -распада, подтверждаемую экспериментом.

Список литературы

1. Treiman S B et al. *Current Algebra and Anomalies* (Princeton Series in Physics) (Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1985)
2. Collins J C *Renormalization* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1984)
3. Shifman M A *Phys. Rep.* **209** 341 (1991)
4. Peskin M E, Schroeder D V *An Introduction to Quantum Field Theories* (Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1995)
5. Adler S L *Phys. Rev.* **177** 2426 (1969)
6. Adler S L, Bardeen W A *Phys. Rev.* **182** 1517 (1969)
7. Bell J, Jackiw R *Nuovo Cimento* **51** 47 (1969)
8. Jackiw R "Field theoretical investigations in current algebra", in Treiman S B et al. *Current Algebra and Anomalies* (Princeton Series in Physics) (Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1985) pp. 81 – 210
9. Ioffe B L *Int. J. Mod. Phys. A* **21** 6249 (2006)
10. Adler S L "Anomalies to all orders", in *50 Years of Yang-Mills Theory* (Ed. G 't Hooft) (Singapore: World Scientific, 2005) pp. 187 – 228; hep-th/0405040
11. Ансельм А А, Иогансен А А *Письма в ЖЭТФ* **49** 185 (1989) [Anselm A A, Iogansen A *JETP Lett.* **49** 214 (1989)]
12. Weinberg S *Phys. Rev. D* **11** 3583 (1975)
13. Belavin A A et al. *Phys. Lett. B* **59** 85 (1975)
14. Gribov V N, unpublished
15. Jackiw R, Rebbi C *Phys. Rev. Lett.* **37** 172 (1976)
16. Callan C G (Jr), Dashen R F, Gross D J *Phys. Lett. B* **63** 334 (1976)
17. Bitar K M, Chang S-J *Phys. Rev. D* **17** 486 (1978)
18. Altarev I S et al. *Phys. Lett. B* **276** 242 (1992)
19. Atiyah M F, Singer I M *Ann. Math.* **87** 484 (1968); **93** 119 (1971)
20. Crewther R J *Phys. Lett. B* **70** 349 (1977)
21. Di Vecchia P, Veneziano G *Nucl. Phys. B* **171** 253 (1980)
22. Ioffe B L *ЯФ* **62** 2226 (1999) [*Phys. At. Nucl.* **62** 2052 (1999)]
23. Ioffe B L, Oganesian A G *Phys. Rev. D* **57** R6590 (1998)
24. Burkert V D, Ioffe B L *Phys. Lett. B* **296** 223 (1992)
25. Burkert V D, Ioffe B L *ЖЭТФ* **105** 1153 (1994) [*JETP* **78** 619 (1994)]
26. Ioffe B L *Survey High Energy Phys.* **14** 89 (1999); hep-ph/9804238
27. Eletsky V L, Ioffe B L, Kogan Ya I *Phys. Lett. B* **122** 423 (1983)
28. Hořejši J *Phys. Rev. D* **32** 1029 (1985)
29. Bass S D et al. *Журн. русск. физ. общ-ва* (1) 317 (1991)
30. Frishman Y et al. *Nucl. Phys. B* **177** 157 (1981)
31. Веретин О Л, Теряев О В *ЯФ* **58** 2266 (1995) [Veretin O L, Teryaev O V *Phys. At. Nucl.* **58** 2150 (1995)]
32. Dolgov A D, Zakharov V I *Nucl. Phys. B* **27** 525 (1971)
33. Yao W-M et al. (Particle Data Group) "Review of Particle Physics" *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **33** 1 (2006)
34. Ioffe B L, Oganesian A G *Phys. Lett. B* **647** 389 (2007)
35. Иоффе Б Л *ЯФ* **29** 1611 (1979) [Ioffe B L *Sov. J. Nucl. Phys.* **20** 827 (1979)]
36. Gross D J, Treiman S B, Wilczek F *Phys. Rev. D* **19** 2188 (1979)
37. de Jager K *Prog. Part. Nucl. Phys.* (Available online 28 December 2007); arXiv:0801.4520
38. Иоффе Б Л *УФН* **171** 1273 (2001) [Ioffe B L *Phys. Usp.* **44** 1211 (2001)]
39. Geshkenbein B V, Ioffe B L *Nucl. Phys. B* **166** 340 (1980)
40. 't Hooft G, in *Recent Developments in Gauge Theories* (NATO Advanced Study Inst. Series, Ser. B, Vol. 59, Eds G 't Hooft et al.) (New York: Plenum Press, 1980) p. 241

PACS numbers: **03.30.+p**
DOI: 10.3367/UFNr.0178.200806l.0663

Теория относительности и теорема Пифагора

Л.Б. Окунь

1. Введение

Доклад "Энергия и масса в трудах Эйнштейна, Ландау и Фейнмана", который я готовил для Сессии Отделения физических наук РАН, посвященной столетию со дня рождения Льва Давидовича Ландау, должен был состоять из двух частей: исторической и физической. Историческая часть вошла в статью «Формула Эйнштейна: $E_0 = mc^2$. "Не смеётся ли Господь Бог"?», опубликованную в майском номере *УФН* [1]. Физическая же часть публикуется сейчас. Она посвящена различным, так сказать, техническим вопросам теории, таким как анализ размерностей и фундаментальные константы c и $\hbar$; кинематика одной частицы во всем диапазоне скоростей от 0 до c ; системы двух и многих свободных частиц; взаимодействия между частицами: электромагнитное, гравитационное и другие. В тексте использованы слайды доклада на сессии отделения ядерной физики ОФН РАН, состоявшейся в ноябре 2007 г. в Институте теоретической и экспериментальной физики (ИТЭФ). Я старался рассказать об основных формулах теории относительности максимально просто, пользуясь в основном теоремой Пифагора.

2. Относительность

Высшая точка зрения. Понятие массы в физике имеет многовековую историю. История эта очень интересна, но здесь мы не будем ее касаться. Вместо этого постараемся взглянуть на массу с высшей точки зрения. Я использую здесь знаменитое название книги Феликса Клейна *Элементарная математика с высшей точки зрения*. (Оно традиционно неправильно переводится на русский язык как *Элементарная математика с точки зрения высшей*. См. предисловие В.Г. Болтянского к 4-му русскому изданию [2].) Такая высшая, современная точка зрения, в основе которой лежат принципы симметрии вообще и теория относительности в частности, позволяет избежать терминологической путаницы и связанных с ней парадоксов.

Принцип относительности. Со времен Галилея и Ньютона термин "принцип относительности" выражает невозможность, оставаясь внутри замкнутого пространства (например, внутри корабля), посредством каких бы то ни было экспериментов обнаружить поступательное (равномерное и прямолинейное) движение этого пространства. Эйнштейн в 1905 г. обобщил этот принцип на случай существования предельной скорости распространения сигналов. (Конечная скорость распространения света была открыта Рёмером еще в 1676 г.) Планк назвал построенную таким образом теорию теорией относительности Эйнштейна.

Механика и оптика. Ньютон пытался построить единую теорию, объединяющую как теорию движения массив-