Очень богатая область исследований открывается, если поместить жидкость в периодическую решетку, созданную встречными лазерными пучками (см. обзор автора [34]). Такие работы в унитарной области только начинаются.

Мы видим, что исследования ферми-газа в ловушке вблизи резонанса открыло совершенно новые теоретические и экспериментальные возможности физики конденсированного состояния. Это отражает современную тенденцию. Работа все больше перемещается на исследование специально созданных, не существующих в природе объектов с удивительными новыми свойствами. С учетом этого, полагаю, не следует ожидать истощения нашей области физики в обозримом будущем.

Я благодарен С. Стрингари за обсуждение, Дж. Томасу за предоставление оригинала рис. 2а и Р. Гримму за предоставление оригинала рис. 4.

Список литературы

1. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Статистическая физика* (М.: Гостехтеориздат, 1951) с. 223 [Translated into English: Landau L D, Lifshitz E M *Statistical Physics* (Oxford: Pergamon Press, 1969)]
2. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Квантовая механика: Нерелятивистская теория* (М.: Физматлит, 2001) [Translated into English: Landau L D, Lifshitz E M *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory* (Oxford: Pergamon Press, 1977)]
3. Feshbach H *Ann. Phys.* (New York) **5** 357 (1958); **19** 287 (1962)
4. Petrov D S, Salomon C, Shlyapnikov G V *Phys. Rev. Lett.* **93** 090404 (2004)
5. Petrov D S, Salomon C, Shlyapnikov G V *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **38** S645 (2005)
6. Боголюбов Н Н *Изв. АН СССР, Сер. физ.* **11** 77 (1947)
7. Thomas J E, Gehm M E *Am. Scientist* **92** 238 (2004)
8. Zwierlein M W et al. *Nature* **435** 1047 (2005)
9. Nozières P, Schmitt-Rink S *J. Low Temp. Phys.* **59** 195 (1985)
10. Carlson J, Reddy S *Phys. Rev. Lett.* **95** 060401 (2005)
11. Nishida Y, Son D T *Phys. Rev. Lett.* **97** 050403 (2006)
12. Patridge G B et al. *Science* **311** 503 (2006)
13. Stewart J T et al. *Phys. Rev. Lett.* **97** 220406 (2006)
14. Ландау Л Д *ЖЭТФ* **11** 592 (1941)
15. Cozzini M, Stringari S *Phys. Rev. Lett.* **91** 070401 (2003)
16. Lee T D, Huang K, Yang C N *Phys. Rev.* **106** 1135 (1957)
17. Pitaevskii L, Stringari S *Phys. Rev. Lett.* **81** 4541 (1998)
18. Altmeyer A et al. *Phys. Rev. Lett.* **98** 040401 (2007)
19. Astrakharchik G E et al. *Phys. Rev. Lett.* **95** 030404 (2005)
20. Burovski E et al. *New J. Phys.* **8** 153 (2006)
21. Thomas J E, Kinast J, Turlapov A *Phys. Rev. Lett.* **95** 120402 (2005)
22. Luo L et al. *Phys. Rev. Lett.* **98** 080402 (2007)
23. Castin Y *C.R. Physique* **5** 407 (2004)
24. Pitaevskii L P *Phys. Lett. A* **221** 14 (1996)
25. Kagan Yu, Surkov E L, Shlyapnikov G V *Phys. Rev. A* **54** R1753 (1996)
26. Халатников И М *Теория сверхтекучести* (М.: Наука, 1971)
27. Son D T *Phys. Rev. Lett.* **98** 020604 (2007)
28. Ларкин А И, Овчинников Ю Н *ЖЭТФ* **47** 1136 (1964) [Larkin A I, Ovchinnikov Yu N *Sov. Phys. JETP* **20** 762 (1965)]
29. Fulde P, Ferrell R A *Phys. Rev.* **135** A550 (1964)
30. Lobo C et al. *Phys. Rev. Lett.* **97** 200403 (2006)
31. Shin Y et al., arXiv:0709.3027
32. Petrov D S *Phys. Rev. A* **67** 010703 (2003)
33. Bausmerth I, Recati A, Stringari S *Phys. Rev. Lett.* **100** 070401 (2008); arXiv: 0711.0653
34. Питаевский Л П *УФН* **176** 345 (2006) [Pitaevskii L P *Phys. Usp.* **49** 333 (2006)]

PACS numbers: 02.20.Sv, **04.20.–q**, **98.80.–k**
DOI: 10.3367/UFNr.0178.200806j.0639

Лев Ландау и проблема сингулярностей в космологии

И.М. Халатников, А.Ю. Каменщик

1. Введение

В докладе рассматриваются различные аспекты задачи о космологической сингулярности, такие как осцилляторное приближение Белинского, Халатникова, Лифшица (БХЛ) к сингулярности, новые свойства космологической динамики в окрестности сингулярности в многомерных и суперструнных космологических моделях и их связи с такими современными областями математики, как бесконечномерные алгебры Ли. Кроме того, рассмотрены некоторые новые типы космологических сингулярностей, которые широко обсуждались в течение последнего десятилетия после открытия явления космического ускорения.

Много лет назад в беседах со своими студентами Лев Давидович Ландау часто говорил, что есть три задачи наиболее важные для теоретической физики: проблема космологической сингулярности, проблема фазовых переходов и проблема сверхпроводимости [1]. Сейчас мы знаем, что огромный прорыв был достигнут в объяснении явлений сверхпроводимости [2] и фазовых переходов [3]. Задача о космологической сингулярности широко исследовалась в течение последних 50 лет, и для нее были получены многие важные результаты, но она все еще сохраняет некоторую интригу. Более того, в этой задаче был открыт ряд весьма неожиданных фактов.

В нашем обзоре, опубликованном 10 лет назад [4] в выпуске *УФН*, посвященном 90-летию со дня рождения Л.Д. Ландау, мы обсуждали некоторые вопросы, связанные с задачей о сингулярности в космологии. В этом докладе мы остановимся на соотношениях между хорошо известными старыми результатами таких исследований и новыми достижениями в этой области.

Для начала напомним, что Пенроуз и Хокинг [5] доказали невозможность неограниченного продолжения геодезических при определенных условиях. Это интерпретировалось как указание на существование сингулярности в общем решении уравнений Эйнштейна. Эти теоремы, однако, не позволили найти конретную аналитическую структуру сингулярности. Аналитическое поведение общих решений уравнений Эйнштейна в окрестности сингулярности исследовалось в работах [6–11]. Эти работы обнаружили загадочное явление осцилляторного приближения к сингулярности, которое стало известно как *Миксмастер-Вселенная* [12]. Модель замкнутой однородной, но анизотропной вселенной с тремя степенями свободы (космологическая модель Бьянки IX) использовалась с целью продемонстрировать, что вселенная приближается к сингулярности таким образом, что ее сжатие вдоль двух осей сопровождается расширением вдоль третьей оси, причем оси меняются ролями в соответствии с довольно сложным законом, который выявляет хаотическое поведение [10, 11, 13, 14].

Исследование динамики вселенной вблизи космологической сингулярности стало взрывообразно развивающимся направлением современной теоретической и мате-

матической физики. Упомянем прежде всего обобщение исследований по осцилляторному приближению к космологической сингулярности в многомерных космологических моделях. Было замечено [15], что приближение к космологической сингулярности в многомерных космологических моделях (типа моделей Калуцы – Клейна) имеет хаотический характер в пространстве-времени с размерностью, не превосходящей десяти, тогда как в пространстве-времени высших размерностей вселенная после прохождения конечного числа колебаний входит в режим монотонного сжатия казнеровского типа.

Развитие космологических исследований на основе суперструнных моделей выявило некоторые новые аспекты динамики вблизи сингулярности [17]. Во-первых, было показано, что в этих моделях существуют механизмы смены казнеровских эпох не из-за гравитационных взаимодействий, а за счет других полей, присутствующих в этих теориях. Во-вторых, было доказано, что космологические модели, основанные на шести основных суперструнных моделях плюс модель $D = 11$ супергравитации, демонстрируют хаотическое осцилляторное приближение к сингулярности. В-третьих, была открыта связь между космологическими моделями, демонстрирующими осцилляторное приближение к сингулярности, и специальным подклассом бесконечномерных алгебр Ли [18] — так называемыми гиперболическими алгебрами Каца – Муди.

Другое подтверждение важности задачи о сингулярности в общей теории относительности пришло из наблюдательной космологии. В конце 1990-х годов исследование соотношения между светимостью и красным смещением сверхновых типа I a выявило, что современная вселенная расширяется с ускорением [19]. Для обеспечения такого ускорения необходимо иметь определенную субстанцию, которая была названа "темной энергией" [20]. Основное свойство этого вида материи состоит в том, что она должна иметь отрицательное давление p, такое, чтобы выполнялось условие $\rho + 3p < 0$, где ρ — плотность энергии. Простейшим видом такой материи является космологическая постоянная, для которой $p = -\rho$. Так называемая стандартная, или ΛCDM (Lambda Cold Dark Matter), космологическая модель основана на космологической постоянной, плотность энергии которой ответственна примерно за 70 % общей плотности энергии вселенной, тогда как остальное занимает пылевидная материя, как барионная (приблизительно 4 %), так и темная. Эта модель находится в хорошем согласии с наблюдениями, однако интенсивно изучаются и другие кандидаты на роль темной энергии, и новые наблюдения могут привести к сюрпризам уже в ближайшие годы. Прежде всего заметим, что некоторые наблюдения [21] указали на возможность существования так называемого суперускорения, которое связано с присутствием фантомной темной энергии [22], характеризуемой неравенством $p < -\rho$. Вселенная, заполненная такой формой темной энергии, при определенных условиях может попасть в очень специальную космологическую сингулярность — Большой разрыв [23]. Когда расширяющаяся вселенная попадает в эту сингулярность, она имеет бесконечный космологический радиус и бесконечное значение переменной Хаббла. Ранее возможность сингулярности такого типа обсуждалась в работе [24].

Исследование различных возможных кандидатов на роль темной энергии стимулировало разработку общей теории возможных космологических сингулярностей [25 – 29]. Замечательно, что в то время как "традиционные" сингулярности Большого взрыва или Большого хлопка связаны с обращением в нуль размера вселенной, т.е. со сжатием вселенной в точку, эти новые сингулярности возникают при конечном или бесконечном значении космологического радиуса. Физические процессы, происходящие вблизи таких сингулярностей, могут иметь достаточно экзотические свойства, и их исследование представляет значительный интерес. Таким образом, мы видим, что развитие и теоретического, и наблюдательного направлений в космологии подтверждает важность задачи о сингулярности в общей теории относительности, отмеченной Ландау много лет назад.

В разделе 2 мы кратко обсуждаем теорему Ландау о сингулярности, которая не была опубликована в отдельной статье и приведена в книге [30] и обзоре [6]. В разделе 3 мы напомним основные свойства осцилляторного приближения к сингулярности в релятивистской космологии. Раздел 4 посвящен современному развитию идей и методов БХЛ, включая динамику в присутствии безмассового скалярного поля, многомерные космологии, суперструнные космологии и соответствие между хаотической космологической динамикой и гиперболическими алгебрами Каца – Муди. В разделе 5 описаны некоторые новые типы космологических сингулярностей. В разделе 6 приведены заключительные замечания.

2. Теорема Ландау о сингулярности

Рассмотрим синхронную систему отсчета с метрикой

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - \gamma_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^\alpha\,\mathrm{d}x^\beta\,, \tag{1}$$

где $\gamma_{\alpha\beta}$ — пространственная метрика. Ландау указал, что определитель g метрического тензора в синхронной системе отсчета должен стремиться к нулю за некоторое конечное время, если выполнены некоторые простые условия для уравнения состояния. Чтобы доказать это утверждение, удобно записать 0-0-компоненту тензора Риччи в виде

$$R_0^0 = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial K_\alpha^\alpha}{\partial t} - \frac{1}{4}\,K_\alpha^\beta K_\beta^\alpha\,, \tag{2}$$

где $K_{\alpha\beta}$ — тензор внешней кривизны, определяемый как

$$K_{\alpha\beta} = \frac{\partial\gamma_{\alpha\beta}}{\partial t}\,, \tag{3}$$

а пространственные индексы поднимаются и опускаются пространственной метрикой $\gamma_{\alpha\beta}$. Уравнение Эйнштейна для R_0^0 имеет вид

$$R_0^0 = T_0^0 - \frac{1}{2}\,T\,, \tag{4}$$

где тензор энергии-импульса

$$T_i^j = (\rho + p)\,u_i u^j - \delta_i^j p\,, \tag{5}$$

ρ, p, u_i — плотность энергии, давление и 4-скорость соответственно. Правая часть уравнения (4) равна

$$T_0^0 - \frac{1}{2}\,T = \frac{1}{2}\,(\rho + 3p) + (\rho + p)\,u_\alpha u^\alpha \tag{6}$$

и положительна, если

$$\rho + 3p > 0\,. \tag{7}$$

Таким образом, из уравнения (4) следует, что

$$\frac{1}{2}\,\frac{\partial K^\alpha_\alpha}{\partial t} + \frac{1}{4}\,K^\beta_\alpha K^\alpha_\beta \leqslant 0\,. \tag{8}$$

Ввиду алгебраического неравенства

$$K^\beta_\alpha K^\alpha_\beta \geqslant \frac{1}{3}\,(K^\alpha_\alpha)^2 \tag{9}$$

имеем

$$\frac{\partial K^\alpha_\alpha}{\partial t} + \frac{1}{6}\,(K^\alpha_\alpha)^2 \leqslant 0\,, \tag{10}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{1}{K^\alpha_\alpha} \geqslant \frac{1}{6}\,. \tag{11}$$

Если в некоторый момент времени $K^\alpha_\alpha > 0$ и t убывает, то величина $1/K^\alpha_\alpha$ убывает до нуля за конечное время. Поэтому K^α_α стремится к $+\infty$, а в силу тождества

$$K^\alpha_\alpha = \gamma^{\alpha\beta}\,\frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\ln\gamma \tag{12}$$

это означает, что определитель γ стремится к нулю (не быстрее, чем t^6, согласно неравенству (11)). Если в начальный момент $K^\alpha_\alpha < 0$, то тот же результат получается для возрастающего времени. Подобный же результат был получен в работе [31] для случая пылевидной материи, а также в работе [32].

Этот результат не доказывает неизбежности существования истинной физической сингулярности, которая относилась бы к самому пространству-времени, а не была бы связана с характером выбранной системы отсчета. Однако он сыграл важную роль в стимулировании обсуждений относительно существования и общности сингулярностей в космологии. Заметим, что условие энергодоминантности (7), использованное в доказательстве теоремы Ландау, появляется также в доказательстве теоремы Пенроуза и Хокинга о сингулярностях [5]. Более того, нарушение этого условия необходимо для объяснения явления космического ускорения.

Теорема Ландау тесно связана с появлением каустик, изучавшихся в работе [33] и обсуждавшихся ее авторами с Л.Д. Ландау в 1961 г. При попытках геометрически построить синхронную систему отсчета начинают с трехмерной поверхности Коши и строят семейство геодезических, ортогональных этой поверхности. Длина вдоль этих геодезических служит мерой времени. Известно, что эти геодезические пересекаются на некоторой двумерной поверхности каустики. Эта геометрия, построенная для пустого пространства, верна также и в присутствии пылевидной материи ($p = 0$). Такая материя, движущаяся вдоль геодезических, концентрируется на каустиках, но возрастание плотности не может быть неограниченным, потому что возникающее давление разрушает каустики[1]. Этот вопрос изучался в работе [34]. Позднее в работе [35] использовались каустики для объяснения исходной кластеризации пыли, которая, хотя и не порождает физических сингулярностей, тем не менее является ответственной за рождение так называемых блинов. Эти блины представляют собой начальную стадию развития крупномасштабной структуры вселенной.

3. Осцилляторное приближение к сингулярности в релятивистской космологии

Одним из первых точных решений, найденных в общей теории относительности, было решение Казнера [16] для космологической модели Бьянки I, описывающее гравитационное поле в пустом пространстве с евклидовой метрикой, зависящей от времени:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - t^{2p_1}\,\mathrm{d}x^2 - t^{2p_2}\,\mathrm{d}y^2 - t^{2p_3}\,\mathrm{d}z^2\,, \tag{13}$$

где показатели p_1, p_2 и p_3 удовлетворяют соотношениям

$$p_1 + p_2 + p_3 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1\,. \tag{14}$$

Упорядочивая показатели как

$$p_1 < p_2 < p_3\,, \tag{15}$$

можно параметризовать их в виде [6]

$$p_1 = \frac{-u}{1+u+u^2}\,,\ p_2 = \frac{1+u}{1+u+u^2}\,,\ p_3 = \frac{u(1+u)}{1+u+u^2}\,. \tag{16}$$

При изменениях параметра u в интервале $u \geqslant 1$ величины p_1, p_2 и p_3 принимают все свои разрешенные значения:

$$-\frac{1}{3} \leqslant p_1 \leqslant 0\,,\quad 0 \leqslant p_2 \leqslant \frac{2}{3}\,,\quad \frac{2}{3} \leqslant p_3 \leqslant 1\,. \tag{17}$$

Значения $u < 1$ приводят к тому же интервалу значений p_1, p_2 и p_3, поскольку

$$p_1\left(\frac{1}{u}\right) = p_1(u)\,,\ p_2\left(\frac{1}{u}\right) = p_3(u)\,,\ p_3\left(\frac{1}{u}\right) = p_2(u)\,. \tag{18}$$

Параметр u, введенный в начале 1960-х годов, оказался очень полезным, и его свойства привлекали внимание исследователей в различных контекстах. Например, в недавней работе [36] была установлена связь между параметром Лифшица – Халатникова u и инвариантами, возникающими в контексте классификации Петрова пространств Эйнштейна [37].

В случае космологических моделей Бьянки VIII или Бьянки IX режим Казнера (13), (14) перестает быть точным решением уравнений Эйнштейна, однако можно построить обобщенные казнеровские решения [7–11]. Можно построить некий вариант теории возмущений, в котором точное решение Казнера (13), (14) играет роль приближения нулевого порядка, а роль возмущений играют те члены в уравнениях Эйнштейна, которые зависят от тензоров пространственной кривизны (очевидно, такие члены отсутствуют в космологии Бьянки I). Эта теория возмущений эффективна вблизи сингулярности или, другими словами, при $t \to 0$. Замечательное свойство этих возмущений состоит том, что они обусловливают переход из режима Казнера с одним набором

[1] В пустом пространстве каустика является математической, а не физической сингулярностью. Это следует просто из того факта, что всегда можно изменить ее положение за счет изменения исходной поверхности Коши.

параметров в режим Казнера с другим набором параметров.

Метрику обобщенного казнеровского решения в синхронной системе отсчета можно записать в виде

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - (a^2 l_\alpha l_\beta + b^2 m_\alpha m_\beta + c^2 n_\alpha n_\beta)\,\mathrm{d}x^\alpha\,\mathrm{d}x^\beta\,, \quad (19)$$

где

$$a = t^{p_l},\ b = t^{p_m},\ c = t^{p_n}\,. \quad (20)$$

Трехмерные векторы $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$ определяют направления, вдоль которых пространственные расстояния изменяются с течением времени в соответствии со степенны́ми законами (20). Пусть $p_l = p_1$, $p_m = p_2$, $p_n = p_3$, так что

$$a \sim t^{p_1}\,,\ b \sim t^{p_2}\,,\ c \sim t^{p_3}\,, \quad (21)$$

т.е. вселенная сжимается в направлениях, задаваемых векторами $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$, и расширяется вдоль $\mathbf{l}$. В работе [10] было показано, что возмущения, вызванные членами пространственной кривизны, заставляют переменные a, b и c переходить в другой режим Казнера, характеризуемый соотношениями

$$a \sim t^{p'_l}\,,\ b \sim t^{p'_m}\,,\ c \sim t^{p'_n}\,, \quad (22)$$

где

$$p'_l = \frac{|p_1|}{1-2|p_1|}\,,\ p'_m = -\frac{2|p_1|-p_2}{1-2|p_1|}\,,\ p'_n = -\frac{p_3-2|p_1|}{1-2|p_1|}\,. \quad (23)$$

Таким образом, эффект возмущения состоит в замене одной "казнеровской эпохи" другой, так что отрицательная степень t переходит из l-направления в m-направление. В течение перехода функция $a(t)$ достигает максимума, а $b(t)$ — минимума. Поэтому ранее убывавшая величина b теперь возрастает, величина a убывает, а $c(t)$ остается убывающей функцией. Ранее возраставшее возмущение вызывает переход из режима (21) в (22) и поэтому подавляется и в конце концов обращается в нуль. Далее начинает возрастать другое возмущение, которое приводит к новой смене одной казнеровской эпохи на другую и т.д.

Подчеркнем, что столь успешно использовать теорию возмущений позволяет именно тот факт, что возмущение приводит к изменению динамики, подавляющему это возмущение. Заметим, что эффект смены режима Казнера существует уже в более простых космологических моделях, чем модели Бьянки IX и Бьянки VIII. В действительности, во вселенной Бьянки II существует только один тип возмущений, связанных с пространственной кривизной, и это производит одну смену режима Казнера (один отскок). Этот факт был известен Е.М. Лифшицу и И.М. Халатникову в начале 1960-х годов, и они обсуждали (прямо перед аварией) этот вопрос с Л.Д. Ландау, который дал ему высокую оценку. Результаты, описывающие динамику модели Бьянки IX, были доложены И.М. Халатниковым в январе 1968 г. на семинаре Анри Пуанкаре в Париже. Присутствовавший там Джон А. Уилер указал, что динамика вселенной Бьянки IX представляет собой нетривиальный пример хаотической динамической системы. Позднее Кип Торн распространил препринт с текстом этого доклада.

Возвращаясь к правилам, по которым происходит перескок отрицательной степени времени из одного направления в другое, можно показать, что их удобно выразить с помощью параметризации (16):

$$p_l = p_1(u)\,,\ p_m = p_2(u)\,,\ p_n = p_3(u)\,. \quad (24)$$

Тогда

$$p'_l = p_2(u-1)\,,\ p'_m = p_1(u-1)\,,\ p'_n = p_3(u-1)\,. \quad (25)$$

Бóльшая из двух положительных степеней остается положительной.

Последовательные смены (25), сопровождаемые перескоком отрицательных степеней между направлениями $\mathbf{l}$ и $\mathbf{m}$, продолжаются до тех пор, пока целая часть u не исчерпается, т.е. пока u не станет меньше единицы. Тогда, согласно уравнению (18), значение $u < 1$ преобразуется в $u > 1$, в этот момент или показатель p_l, или p_m отрицателен, а p_n становится меньшим из двух положительных чисел ($p_n = p_2$). Следующая серия скачков перебрасывает отрицательную степень между направлениями $\mathbf{n}$ и $\mathbf{l}$ или $\mathbf{n}$ и $\mathbf{m}$. Подчеркнем, что полезность параметра Ландау–Халатникова u связана с тем обстоятельством, что он позволяет закодировать достаточно сложные законы переходов между различными режимами Казнера (23) в виде таких простых правил, как $u \to u-1$ и $u \to 1/u$.

Тем самым эволюция в нашей модели по направлению к сингулярной точке состоит из последовательных периодов (называемых эрами), в течение которых расстояния вдоль двух осей осциллируют, а вдоль третьей оси уменьшаются монотонно, причем объем убывает по закону, близкому к $\sim t$. При этом переходе от одной эры к другой эре óси, вдоль которых расстояния убывают монотонно, меняются между собой. Порядок, в котором пары осей меняются между собой, и порядок, в котором эры различных длин сменяют друг друга, приобретает стохастический характер.

Каждой (s-й) эре соответствует убывающая последовательность значений параметра u. Эта последовательность имеет вид $u^{(s)}_{\max}, u^{(s)}_{\max}-1, \ldots, u^{(s)}_{\min}$, где $u^{(s)}_{\min} < 1$. Введем обозначения

$$u^{(s)}_{\min} = x^{(s)}\,,\quad u^{(s)}_{\max} = k^{(s)} + x^{(s)}\,, \quad (26)$$

т.е. $k^{(s)} \equiv [u^{(s)}_{\max}]$ (квадратные скобки обозначают наибольшее целое $\leqslant u^{(s)}_{\max}$). Число $k^{(s)}$ определяет длину эры. Для следующей эры получаем

$$u^{(s+1)}_{\max} = \frac{1}{x^{(s)}}\,,\quad k^{(s+1)} = \left[\frac{1}{x^{(s)}}\right]. \quad (27)$$

Упорядочение по длинам $k^{(s)}$ последовательных эр (измеряемых числом содержащихся в них казнеровских эпох) приобретает асимптотически стохастический характер. Случайная природа этого процесса обусловлена правилами (26), (27), определяющими переходы от одной эры к другой в бесконечной последовательности значений u. Если вся эта бесконечная последовательность начинается с некоторого начального значения $u^{(0)}_{\max} = k^{(0)} + x^{(0)}$, то длины серий $k^{(0)}, k^{(1)}, \ldots$ — это числа из

разложения в непрерывную дробь:

$$k^{(0)} + x^{(0)} = k^{(0)} + \cfrac{1}{k^{(1)} + \cfrac{1}{k^{(2)} + \cdots}} \,. \tag{28}$$

Такую последовательность эр можно описать статистически, если рассмотреть вместо заданного начального значения $u_{\max}^{(0)} = k^{(0)} + x^{(0)}$ распределение $x^{(0)}$ на интервале $(0,1)$, управляемое некоторым вероятностным законом. Тогда получаем также некоторые распределения значений $x^{(s)}$, которыми заканчивается каждая s-я серия чисел. Можно показать, что при возрастании s эти распределения стремятся к стационарному (не зависящему от s) вероятностному распределению $w(x)$, в котором начальное значение $x^{(s)}$ полностью "забыто":

$$w(x) = \frac{1}{(1+x)\ln 2} \,. \tag{29}$$

Из уравнения (29) следует, что вероятностное распределение длин ряда k имеет вид

$$W(k) = \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{(k+1)^2}{k(k+2)} \,. \tag{30}$$

Более того, можно точно вычислить вероятностные распределения для других параметров, описывающих последовательные эры, таких как параметр δ, задающий соотношение между амплитудами логарифмов функций a, b, c и логарифмическим временем [14].

Таким образом, из результатов статистического анализа эволюции в окрестности сингулярности [13] мы видим, что стохастичность и вероятностные распределения параметров возникают уже в классической общей теории относительности.

В завершение данного раздела, приведем историческое замечание. В 1968 г. непрерывную дробь (28) показали И.М. Лифшицу (Л.Д. Ландау уже не стало), и он немедленно заметил, что можно вывести формулу для стационарного распределения значений x (29). Позднее стало известно, что эту формулу вывел в XIX в. Карл Ф. Гаусс, который ее не опубликовал, но описал в письме к одному из своих коллег.

4. Осцилляторное приближение к сингулярности: современное развитие

Осцилляторное приближение к космологической сингулярности, описанное в разделе 3, было развито для случая пустого пространства-времени. Если рассмотреть вселенную, заполненную идеальной жидкостью с уравнением состояния $p = w\rho$, где p — давление, ρ — плотность энергии и $w < 1$, то несложно понять, что наличие этой материи не может изменить динамику вблизи сингулярности. Действительно, используя уравнение сохранения энергии, можно показать, что

$$\rho = \frac{\rho_0}{(abc)^{w+1}} = \frac{\rho_0}{t^{w+1}} \,, \tag{31}$$

где ρ_0 — положительная константа. Таким образом, член, представляющий материю в уравнениях Эйнштейна, ведет себя как $\sim 1/t^{1+w}$ и при $t \to 0$ становится слабее, чем члены геометрической природы, происходящие из производных метрики по времени, которые ведут себя как $1/t^2$, не говоря уже о возмущениях из-за наличия пространственной кривизны, ответственных за смены режимов Казнера, которые ведут себя как $1/t^{2+4|p_1|}$. Однако картина радикально изменяется, если параметр w равен единице, т.е. давление равняется плотности энергии. Материя такого вида, которая называется "жесткой материей", может быть представлена безмассовым скалярным полем. В этом случае $\rho \sim 1/t^2$ и вклад материи имеет тот же порядок, что и главные члены геометрической природы. Поэтому требуется найти решение казнеровского типа, учитывающее члены, связанные с наличием жесткой материи (безмассового скалярного поля). Такое исследование выполнено в работе [38]. Показано, что масштабные множители a, b и c снова можно представить как t^{2p_1}, t^{2p_2} и t^{2p_3} соответственно, где казнеровские индексы удовлетворяют соотношениям

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1, \quad p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1 - q^2 \,, \tag{32}$$

причем число q^2 отражает присутствие жесткой материи и ограничено величиной

$$q^2 \leqslant \frac{2}{3} \,. \tag{33}$$

Можно видеть, что если $q^2 > 0$, то существуют комбинации положительных казнеровских индексов, удовлетворяющие соотношениям (32). Более того, если $q^2 \geqslant (1/2)$, то только наборы трех положительных казнеровских индексов могут удовлетворять соотношениям (32). Если вселенная находится в режиме Казнера с тремя положительными индексами, то пертурбативные члены, существующие из-за пространственной кривизны, слишком слабы для того, чтобы сменить этот режим Казнера, который, таким образом, становится устойчивым. Это означает, что в присутствии жесткой материи после конечного числа смен режимов Казнера вселенная окажется в устойчивом режиме и колебания прекратятся. Таким образом, безмассовое скалярное поле играет "антихаотизирующую" роль в процессе космологической эволюции [38]. В этом случае также можно использовать параметр Лифшица – Халатникова. Казнеровские индексы, удовлетворяющие соотношениям (32), удобно представить как [38]

$$\begin{aligned}
p_1 &= \frac{-u}{1+u+u^2} \,, \\
p_2 &= \frac{1+u}{1+u+u^2}\left[u - \frac{u-1}{2}\left(1 - (1-\beta^2)^{1/2}\right)\right], \\
p_3 &= \frac{1+u}{1+u+u^2}\left[1 + \frac{u-1}{2}\left(1 - (1-\beta^2)^{1/2}\right)\right], \\
\beta^2 &= \frac{2(1+u+u^2)^2}{(u^2-1)^2} \,.
\end{aligned} \tag{34}$$

Область изменений параметра u теперь $-1 \leqslant u \leqslant 1$, тогда как допустимые значения параметра q при некотором заданном u определяются неравенством

$$q^2 \leqslant \frac{(u^2-1)^2}{2(1+u+u^2)^2} \,. \tag{35}$$

Легко показать, что после одного отскока значение параметра q^2 изменяется согласно закону

$$q^2 \to q'^2 = q^2 \, \frac{1}{(1+2p_1)^2} > q^2 \,. \tag{36}$$

Таким образом, параметр q^2 возрастает и поэтому увеличивается вероятность того, что все три казнеровских индекса будут положительными. Это снова свидетельствует в пользу утверждения о том, что в присутствии безмассового скалярного поля вселенная после конечного числа отскоков окажется в режиме Казнера с тремя положительными индексами и колебания прекратятся.

Во второй половине 1980-х годов была опубликована серия статей [15], в которых изучались решения уравнений Эйнштейна вблизи сингулярности для $d+1$-мерного пространства-времени. Был рассмотрен многомерный аналог вселенной Бьянки I, в котором метрика является обобщенной метрикой Казнера:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - \sum_{i=1}^{d} t^{2p_i} \, \mathrm{d}x^{i2} \,, \tag{37}$$

а казнеровские индексы p_i удовлетворяют условиям

$$\sum_{i=1}^{d} p_i = \sum_{i=1}^{d} p_i^2 = 1 \,. \tag{38}$$

В присутствии членов с пространственной кривизной происходит переход от одной казнеровской эпохи к другой, причем этот переход описывается следующим законом: новые казнеровские показатели равны

$$p_1', p_2', \ldots, p_d' = (q_1, q_2, \ldots, q_d) \,, \tag{39}$$

при

$$q_1 = \frac{-p_1 - P}{1+2p_1+P} \,, \quad q_2 = \frac{p_2}{1+2p_1+P} \,, \ldots ,$$

$$q_{d-2} = \frac{p_{d-2}}{1+2p_1+P} \,, \quad q_{d-1} = \frac{2p_1+P+p_{d-1}}{1+2p_1+P} \,,$$

$$q_d = \frac{2p_1+P+p_d}{1+2p_1+P} \,, \tag{40}$$

где

$$P = \sum_{i=2}^{d-2} p_i \,. \tag{41}$$

Однако такой переход от одной казнеровской эпохи к другой происходит, если по крайней мере одно из чисел α_{ijk} отрицательно. Эти числа определяются как

$$\alpha_{ijk} \equiv 2p_i + \sum_{l \neq j,k,i} p_l \,, \quad (i \neq j \,,\ i \neq k \,,\ j \neq k) \,. \tag{42}$$

Для пространства-времени с $d < 10$ один из множителей α всегда отрицателен и поэтому за одной сменой режима Казнера следует другая, обеспечивая таким образом осцилляторное поведение вселенной в окрестности космологической сингулярности. Однако для пространства-времени с $d \geqslant 10$ существует такая комбинация индексов Казнера, удовлетворяющих уравнению (38), для которой все числа α_{ijk} положительны. Если вселенная входит в казнеровский режим с такими индексами (так называемая "область казнеровской устойчивости"), то ее хаотическое поведение исчезает и этот режим Казнера сохраняется. Таким образом, была предложена гипотеза, что в пространстве-времени с $d \geqslant 10$ после конечного числа колебаний рассматриваемая вселенная окажется в области казнеровской устойчивости и осциллирующий режим сменится монотонным казнеровским поведением.

Открытие того факта, что хаотический характер приближения к космологической сингулярности исчезает в пространстве-времени с $d \geqslant 10$, было неожиданным и воспринималось как случайный результат игры между вещественными числами, удовлетворяющими обобщенным соотношениям Казнера (38). Позднее стало ясно, что за этим фактом лежит глубокая математическая структура — гиперболические алгебры Каца – Муди. Действительно, в ряде работ Дамура, Энно и Николаи, а также в работах некоторых других авторов (см., например, [17]) по космологической динамике в моделях, основанных на суперструнных теориях в 10-мерном пространстве-времени и модели $d+1 = 11$-супергравитации, было показано, что вблизи сингулярности эти модели демонстрируют осциллирующее поведение БХЛ-типа. Важным новым свойством динамики в этих моделях является роль, которую играют негравитационные бозонные поля (p-формы), которые также ответственны за переходы от одного режима Казнера к другому. При описании этих переходов очень удобным становится гамильтонов формализм [12]. В рамках такого формализма конфигурационное пространство параметров Казнера, описывающих динамику вселенной, можно рассматривать как бильярд, а члены с кривизной в теории Эйнштейна и потенциалы p-форм в суперструнных теориях играют роль стенок в этом бильярде. Переход от одной казнеровской эпохи к другой состоит в отражении от одной из стенок. Таким образом, имеется соответствие между довольно сложной динамикой вселенной вблизи космологической сингулярности и движением воображаемого шара на бильярдном столе.

Однако существует более впечатляющее и неожиданное соответствие между хаотическим поведением вселенной вблизи сингулярности и таким абстрактным математическим объектом, как гиперболические алгебры Каца – Муди (КМ) [17]. Объясним кратко, что имеется в виду. Каждая алгебра Ли определяется своими генераторами h_i, e_i, f_i, $i = 1, \ldots, r$, где r — ранг алгебры Ли, т.е. максимальное число ее генераторов h_i, которые коммутируют между собой (эти генераторы образуют подалгебру Картана). Коммутационные соотношения между генераторами имеют вид

$$[e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i \,,$$

$$[h_i, e_j] = A_{ij} e_j \,,$$

$$[h_i, f_j] = -A_{ij} f_j \,,$$

$$[h_i, h_j] = 0 \,. \tag{43}$$

Коэффициенты A_{ij} составляют обобщенную $r \times r$-матрицу Картана, такую, что $A_{ii} = 2$, ее внедиагональные элементы являются неположительными целыми, и из равенства $A_{ij} = 0$ при $i \neq j$ следует $A_{ji} = 0$. Можно сказать, что e_i — повышающие операторы, подобные хорошо известным операторам $L_+ = L_x + iL_y$ в теории

момента количества движения, а f_i — понижающие операторы, подобные $L_- = L_x - iL_y$. Генераторы h_i подалгебры Картана можно сравнить с оператором L_z. Генераторы должны также удовлетворять соотношениям Серра

$$(\mathrm{ad}\ e_i)^{1-A_{ij}} e_j = 0\,,$$
$$(\mathrm{ad}\ f_i)^{1-A_{ij}} f_j = 0\,, \tag{44}$$

где $(\mathrm{ad}\ A)B \equiv [A, B]$.

Алгебры Ли $\mathcal{G}(A)$, построенные по симметризуемой матрице Картана A, были классифицированы согласно свойствам их собственных значений:

— если A — положительно определенная матрица, то $\mathcal{G}(A)$ — конечномерная алгебра Ли;

— если A допускает одно нулевое собственное значение, а все другие строго положительны, то $\mathcal{G}(A)$ — аффинная алгебра Каца – Муди;

— если A допускает одно отрицательное собственное значение, а все остальные являются строго положительными, то $\mathcal{G}(A)$ — лоренцева алгебра КМ.

Имеется соответствие между структурой алгебры Ли и некоторой системой векторов в r-мерном евклидовом пространстве, которое существенно упрощает задачу классификации алгебр Ли. Эти векторы называются корнями, представляющими повышающие и понижающие операторы алгебры Ли. Векторы, соответствующие генераторам e_i и f_i, называются простыми корнями. Систему простых положительных корней (т.е. корней, соответствующих повышающим генераторам e_i) можно представить вершинами их диаграммы Дынкина, а ребра, соединяющие (или не соединяющие) вершины, дают информацию об углах между простыми положительными корневыми векторами.

Важный подкласс лоренцевых алгебр КМ можно определить следующим образом: гиперболической алгеброй КМ называется такая алгебра КМ, в которой удаление одной вершины из ее диаграммы Дынкина дает сумму конечных или аффинных алгебр. Все гиперболические алгебры КМ известны. В частности, не существует гиперболических алгебр ранга выше 10.

Напомним еще некоторые определения из теории алгебр Ли. Отражения в гиперплоскостях, ортогональных простым корням, оставляют систему корней инвариантной. Соответствующая конечномерная группа называется группой Вейля. Наконец, упомянутые гиперплоскости разбивают r-мерное евклидово пространство на области, называемые камерами Вейля. Группа Вейля преобразует одну камеру Вейля в другую.

Теперь можно кратко сформулировать результаты подхода [17], следуя статье [39]: связи между бильярдами, описывающими эволюцию вселенной в окрестности сингулярности, и соответствующей алгеброй Каца – Муди можно описать следующим образом:

— казнеровские индексы, описывающие "свободное" движение вселенной между отражениями от стенок, соответствуют элементам подалгебры Картана алгебры КМ;

— доминирующие стенки, т.е. члены в уравнениях движения, ответственные за переход от одной казнеровской эпохи к другой, соответствуют простым корням алгебры КМ;

— группа отражений в космологическом бильярде есть группа Вейля алгебры КМ;

— бильярдный стол можно отождествить с камерой Вейля алгебры КМ.

Можно представлять себе два типа бильярдных столов: бесконечные, в которых возможно линейное движение без соударений со стенками (нехаотический режим), и такие, в которых отражения от стенок неизбежны и режим может быть только хаотическим. Замечательным образом камеры Вейля гиперболических алгебр КМ устроены так, что происходят бесконечные повторяющиеся столкновения со стенками. Было показано, что все теории с осциллирующим приближением к сингулярности, такие как теория Эйнштейна в размерности $d < 10$ и суперструнные космологические модели, соответствуют гиперболическим алгебрам КМ.

Существование связей между БХЛ-приближением к сингулярностям и структурой некоторых бесконечномерных алгебр Ли вдохновило ряд авторов на объявление новой программы развития квантовой гравитации и космологии [40]. Они предлагают "серьезно воспринять мысль, что вблизи сингулярности (т.е. когда кривизна становится больше, чем масштаб Планка) описание пространственного континуума и основанной на пространстве-времени (квантовой) теории поля нарушается и должно быть заменено гораздо более абстрактным описанием в терминах алгебр Ли".

5. Новые типы космологических сингулярностей

Как уже упоминалось во введении, развитие теоретической и наблюдательной космологии и, в частности, открытие космического ускорения стимулировали разработку космологических моделей, в которых были описаны новые типы сингулярностей. В отличие от "традиционных" сингулярностей Большого взрыва и Большого хлопка, эти сингулярности возникают не при нулевом, а при конечном или даже бесконечном значении космологического радиуса. Наиболее знаменитой из этих сингулярностей является, пожалуй, сингулярность Большого разрыва [23, 24], возникающая, если абсолютное значение отрицательного давления p темной энергии больше, чем плотность энергии ρ. Действительно, рассмотрим плоскую фридмановскую вселенную с метрикой

$$\mathrm{d}s^2 - a^2(t)\,\mathrm{d}l^2\,, \tag{45}$$

заполненную идеальной жидкостью с уравнением состояния

$$p = w\rho\,, \quad w = \mathrm{const} < -1\,. \tag{46}$$

Зависимость плотности энергии ρ от космологического радиуса a, как обычно, имеет вид

$$\rho = \frac{C}{a^{3(1+w)}} \tag{47}$$

и уравнение Фридмана в этом случае принимает вид

$$\frac{\dot{a}^2}{a} = \frac{C}{a^{3(1+w)}}\,, \tag{48}$$

где C — положительная константа. Интегрируя уравнение (48), получаем

$$a(t) = \left(a_0^{3(1+w)/2} + \frac{2\sqrt{C}\,(t - t_0)}{3(1+w)}\right)^{2/3(1+w)}\,. \tag{49}$$

Легко видеть, что в конечный момент $t_R > t_0$, равный

$$t_R = t_0 - \frac{3(1+w)}{2\sqrt{C}}\, a_0^{3(1+w)/2}\,, \tag{50}$$

космологический радиус становится бесконечным и то же происходит с переменной Хаббла $\dot{a}/a$, а потому и со скалярной кривизной. Таким образом, мы встречаем новый тип космологической сингулярности, характеризуемый бесконечными значениями космологического радиуса, его производной по времени, переменной Хаббла и скалярной кривизны. Обычно эта сингулярность называется Большим разрывом. Ее свойства привлекли значительное внимание исследователей из-за того, что некоторые наблюдательные данные указывают на актуальное значение параметра w в уравнении состояния, действительно меньшее, чем -1.

Имеются также другие типы космологических сингулярностей, которые можно встретить при конечных значениях космологического радиуса (см., например, [25–29]). Рассмотрим в качестве иллюстрации один тип сингулярностей — Большое торможение [25]. Этой сингулярности можно достичь за конечный период космического времени; она характеризуется конечным значением космологического радиуса, нулевой первой производной радиуса по времени, а также второй производной космологического радиуса по времени, стремящейся к минус бесконечности (бесконечное замедление). Рассмотрим идеальную жидкость с уравнением состояния

$$p = \frac{A}{\rho}\,, \tag{51}$$

где A — положительная константа. Эту жидкость можно назвать "античаплыгинским" газом, поскольку широко используемая космологическая модель чаплыгинского газа [41] основана на уравнении состояния $p = -A/\rho$. Зависимость плотности энергии от космологического радиуса для уравнения состояния (51) имеет вид

$$\rho = \sqrt{\frac{B}{a^6} - A}\,, \tag{52}$$

где B — положительная константа. Когда a мало, $\rho \sim 1/a^3$ и ведет себя как пыль. При $a \to a_B$,

$$a_B = \left(\frac{B}{A}\right)^{1/6}, \tag{53}$$

плотность энергии стремится к нулю. Решение уравнения Фридмана в этом пределе дает

$$a(t) = a_B - C_0(t_B - t)^{4/3}, \quad C_0 = 2^{-7/3}3^{5/3}(AB)^{1/6}\,. \tag{54}$$

Теперь легко проверить, что при $t \to t_B$ имеем $\dot{a} \to 0$ и $\ddot{a} \to -\infty$. Таким образом, действительно получилась космологическая сингулярность Большого торможения.

6. Заключение

Мы показали в этом кратком сообщении, что мнение, выраженное Л.Д. Ландау много лет назад относительно важности задачи о сингулярности в космологии, оказалось провидческим. Исследование космологической сингулярности выявило существование осцилляторного поведения вселенной, когда кривизна пространства-времени возрастает, что, в свою очередь, имеет глубокую связь с достаточно новыми областями современной математики. С другой стороны, последние успехи в наблюдательной космологии стимулировали развитие различных космологических моделей, проявляющих новые типы космологических сингулярностей, исследование которых как с физической, так и с математической точек зрения представляется весьма многообещающим.

Данная работа частично поддержана грантом РФФИ 08-02-00923 и грантом ВНШ-4899.2008.2.

Список литературы

1. Ландау Л Д, частное сообщение
2. Bardeen J, Cooper L N, Schrieffer J R *Phys. Rev.* **108** 1175 (1957)
3. Wilson K G, Kogut J *Phys. Rep.* **12** 75 (1974) [Вильсон К, Когут Дж *Ренормализационная группа и ε-разложение* (Новости фундаментальной физики, Вып. 5) (М.: Мир, 1975)]
4. Халатников И М, Каменщик А Ю *УФН* **168** 593 (1998) [Khalatnikov I M, Kamenshchik A Yu *Phys. Usp.* **41** 525 (1998)]
5. Penrose R *Structure of Space-Time* (New York: W.A. Benjamin, 1968) [Пенроуз Р *Структура пространства-времени* (М.: Мир, 1972)]; Hawking S W, Ellis G F R *The Large Scale Structure of Space-Time* (Cambridge: Univ. Press, 1973) [Хокинг С, Эллис Дж *Крупномасштабная структура пространства-времени* (М.: Мир, (1977)]; Hawking S W, Penrose R *Proc. R. Soc. London Ser. A* **314** 529 (1970)
6. Лифшиц Е М, Халатников И М *УФН* **80** 391 (1963) [Lifshitz E M, Khalatnikov I M *Sov. Phys. Usp.* **6** 495 (1964)]; *Adv. Phys.* **12** 185 (1963)
7. Khalatnikov I M, Lifshitz E M *Phys. Rev. Lett.* **24** 76 (1970)
8. Лифшиц Е М, Халатников И М *Письма в ЖЭТФ* **11** 200 (1970) [Lifshitz E M, Khalatnikov I M *JETP Lett.* **11** 123 (1970)]
9. Белинский В А, Халатников И М *ЖЭТФ* **56** 1700 (1969) [Belinskii V A, Khalatnikov I M *Sov. Phys. JETP* **29** 911 (1969)]
10. Белинский В А, Лифшиц Е М, Халатников И М *УФН* **102** 463 (1970) [Belinskii V A, Lifshitz E M, Khalatnikov I M *Sov. Phys. Usp.* **13** 745 (1971)]
11. Belinsky V A, Lifshitz E M, Khalatnikov I M *Adv. Phys.* **31** 639 (1982)
12. Misner C W *Phys. Rev. Lett.* **22** 1071 (1969)
13. Лифшиц Е М, Лифшиц И М, Халатников И М *ЖЭТФ* **59** 322 (1970) [Lifshitz E M, Lifshits I M, Khalatnikov I M *Sov. Phys. JETP* **32** 173 (1971)]
14. Khalatnikov I M et al. *J. Stat. Phys.* **38** 97 (1985)
15. Demaret J, Henneaux M, Spindel P *Phys. Lett. B* **164** 27 (1985); Demaret J, Hanquin J-L, Henneaux M, Spindel P, Taormina A *Phys. Lett. B* **175** 129 (1986); Demaret J, de Rop Y, Henneaux M *Int. J. Theor. Phys.* **28** 1067 (1989)
16. Kasner E *Am. J. Math.* **43** 217 (1921)
17. Damour T, Henneaux M *Phys. Rev. Lett.* **85** 920 (2000); Damour T et al. *Phys. Lett. B* **509** 323 (2001); Damour T, Henneaux M, Nicolai H *Class. Quantum Grav.* **20** R145 (2003)
18. Kac V G *Infinite Dimensional Lie Algebras* 3rd ed. (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990)
19. Riess A et al. *Astron. J.* **116** 1009 (1998); Perlmutter S et al. *Astrophys. J.* **517** 565 (1999)
20. Sahni V, Starobinsky A *Int. J. Mod. Phys. D* **9** 373 (2000); **15** 2105 (2006)
21. Alam U, Sahni V, Starobinsky A A *JCAP* (02) 011 (2007); Nesseris S, Perivolaropoulos L *JCAP* (02) 025 (2007)
22. Caldwell R R *Phys. Lett. B* **545** 23 (2002)
23. Caldwell R R, Kamionkowski M, Weinberg N N *Phys. Rev. Lett.* **91** 071301 (2003)
24. Starobinsky A A *Grav. Cosmol.* **6** 157 (2000)
25. Gorini V et al. *Phys. Rev. D* **69** 123512 (2004); Kamenshchik A Y, Kiefer C, Sandhöfer B *Phys. Rev. D* **76** 064032 (2007)
26. Barrow J D *Class. Quantum Grav.* **21** L79 (2004); Cattoën C, Visser M *Class. Quantum Grav.* **22** 4913 (2005)

27. Cannata F, Kamenshchik A Yu, Regoli D "Scalar field cosmological models with finite scale factor singularities", arXiv:0801.2348
28. Barvinsky A O, Deffayet C, Kamenshchik A Yu "Anomaly driven cosmology: big boost scenario and AdS/CFT correspondence", arXiv:0801.2063
29. Shtanov Y, Sahni V *Class. Quantum Grav.* **19** L101 (2002); Tretyakov P, Toporensky A, Shtanov Y, Sahni V *Class. Quantum Grav.* **23** 3259 (2006)
30. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Наука, 1988) [Translated into English Landau L D, Lifshitz E M *The Classical Theory of Fields* (Oxford: Pergamon Press, 1975)]
31. Raychaudhuri A *Phys. Rev.* **98** 1123 (1955); *Phys. Rev.* **106** 172 (1957)
32. Komar A *Phys. Rev.* **104** 544 (1956)
33. Лифшиц Е М, Судаков В В, Халатников И М *ЖЭТФ* **40** 1847 (1961) [Lifshitz E M, Sudakov V V, Khalatnikov I M *Sov. Phys. JETP* **13** 1298 (1961)]; Khalatnikov I M, Lifshitz E M, Sudakov V V *Phys. Rev. Lett.* **6** 311 (1961)
34. Грищук Л П *ЖЭТФ* **51** 475 (1966) [Grishchuk L P *Sov. Phys. JETP* **24** 320 (1967)]
35. Arnold V I, Shandarin S F, Zeldovich Ya B *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics* **20** 111 (1982)
36. Bini D, Cherubini C, Jantzen R T *Class. Quantum Grav.* **24** 5627 (2007)
37. Петров А З *Пространства Эйнштейна* (М.: ГИФМЛ, 1961) [Translated into English Petrov A Z *Einstein Spaces* (Oxford: Pergamon Press, 1969)]
38. Белинский В А, Халатников И М *ЖЭТФ* **63** 1121 (1972) [Belinskii V A, Khalatnikov I M *Sov. Phys. JETP* **36** 591 (1973)]
39. Damour T "Cosmological singularities, billiards and Lorentzian Kac-Moody algebras", gr-qc/0412105
40. Damour T, Nicolai H "Symmetries, singularities and the de-emergence of space", arXiv:0705.2643
41. Kamenshchik A, Moschella U, Pasquier V *Phys. Lett. B* **511** 265 (2001)

PACS numbers: **11.15.–q**, 11.30.Qc, 12.38.Aw
DOI: 10.3367/UFNr.0178.200806k.0647

Аксиальная аномалия в квантовой электро- и хромодинамике и структура вакуума в квантовой хромодинамике

Б.Л. Иоффе

1. Введение

В докладе обсуждается современное состояние проблемы аксиальной аномалии в квантовой электродинамике (КЭД) и квантовой хромодинамике (КХД) и связь аномалии со структурой вакуума в КХД. В КХД вакуумное среднее от аксиальной аномалии пропорционально новому квантовому числу — топологическому заряду, n. Существует бесконечное число вакуумных состояний $|n\rangle$. Амплитуды переходов между этими состояниями — это амплитуды туннельных переходов вдоль определенных траекторий в пространстве калибровочных полей. Показано, что из условия аксиальной аномалии следует наличие нулевых мод уравнения Дирака для безмассового кварка и спонтанное нарушение киральной симметрии в КХД — возникновение кваркового конденсата. Аксиальная аномалия может быть представлена в виде правила сумм для структурной функции в дисперсионном представлении AVV-вершины (AVV — от axial–vector–vector). На основе этого правила сумм вычислена ширина $\pi^0 \to 2\gamma$-распада с точностью 1,5 %.

2. Определение аномалии

Допустим, у нас есть классический лагранжиан теории поля, обладающий определенной симметрией, т.е. инвариантный относительно соответствующих этой симметрии преобразований полей. Согласно теореме Нётер наличию симметрии отвечает закон сохранения. Аномалией называют такое явление, при котором данная симметрия и закон сохранения нарушаются при переходе к квантовой теории. Причина нарушения состоит в сингулярности квантовых операторов полей на малых расстояниях, так что для определения физических величин, помимо лагранжиана, необходимо фиксировать процедуру перенормировки. (См. обзоры по аномалиям в [1–4].)

Есть два типа аномалий: внутренние и внешние. В первом случае калибровочная инвариантность классического лагранжиана нарушается на квантовом уровне, теория становится неперенормируемой и не является самосогласованной. Решить эту проблему можно специальным подбором полей в лагранжиане, таком, чтобы все внутренние аномалии сократились. (Такой подход используется в Стандартной модели электрослабого взаимодействия — механизм Глэшоу–Иллиопулоса–Майани.) Внешние аномалии возникают при взаимодействии присутствующих в лагранжиане полей с внешними источниками. Именно эти аномалии возникают в квантовой электродинамике и квантовой хромодинамике и будут рассмотрены в докладе. Как будет показано, аномалии играют важную роль в КЭД и особенно в КХД. Поэтому термин "аномалия" не должен вводить в заблуждение: аномалия является нормальным и существенным ингредиентом большинства квантовых теорий поля.

3. Аксиальная аномалия в квантовой электродинамике

Уравнение Дирака для электрона во внешнем электромагнитном поле $A_\mu(x)$ имеет вид

$$\mathrm{i}\gamma_\mu \frac{\partial\psi(x)}{\partial x_\mu} = m\psi(x) - e\gamma_\mu A_\mu(x)\,\psi(x)\,. \tag{1}$$

Аксиальный ток определяется равенством

$$j_{\mu 5}(x) = \bar{\psi}(x)\,\gamma_\mu\gamma_5\psi(x)\,. \tag{2}$$

Его дивергенция, вычисленная в классической теории, т.е. с использованием (1), оказывается равной

$$\partial_\mu j_{\mu 5}(x) = 2\mathrm{i}m\bar{\psi}(x)\,\gamma_5\psi(x) \tag{3}$$

и стремится к нулю при $m \to 0$. В квантовой теории аксиальный ток нуждается в доопределении, поскольку $j_{\mu 5}(x)$ является произведением двух локальных фермионных полей и такое произведение сингулярно, если оба поля действуют в одной и той же точке. (Аналогичное утверждение имеет место, конечно, и для векторного тока.) Для корректного рассмотрения раздвинем точки действия двух фермионных полей на расстояние ε:

$$j_{\mu 5}(x,\varepsilon) = \bar{\psi}\left(x+\frac{\varepsilon}{2}\right)\gamma_\mu\gamma_5 \times \\ \times \exp\left[\mathrm{i}e\int_{x-\varepsilon/2}^{x+\varepsilon/2} \mathrm{d}y_\alpha A_\alpha(y)\right]\psi\left(x-\frac{\varepsilon}{2}\right), \tag{4}$$