

PACS numbers: 03.75.-b, 05.70.Fh, 64.60.Ht
DOI: 10.3367/UFNr.0178.200806h.0633

Кинетика формирования бозе-конденсата и дальнего порядка

Ю.М. Каган

Бурно развивающаяся область исследований, связанная с ультрахолодными газами, открыла уникальную возможность изучения кинетики формирования бозе-конденсата и дальнего порядка. Решающим здесь является изолированность газа в магнитных и электрических ловушках от стенок и возможность наблюдать собственную эволюцию системы в реальном масштабе времени. Хотя первые теоретические публикации в этой области появились в начале 1990-х годов, но только в 2007 г. были опубликованы первые экспериментальные исследования временной эволюции дальнего порядка [1–2]. Между этими датами шло интенсивное изучение явления, и доклад посвящен анализу результатов и сложившихся представлений в этой области.

Возможность быстрого охлаждения за счет обрезания максвелловских хвостов позволяет изучать эволюцию с того момента, когда все корреляционные свойства газа являются чисто классическими и нет малейших следов конденсата. При этом кинетика происходит в условиях сохранения полной энергии и числа частиц в системе. Как выясняется, эволюция распадается на четыре этапа.

На первом этапе, описываемом кинетическим уравнением Больцмана, формируется поток частиц в энергетическом пространстве в сторону малых энергий. Когда частицы, образующие в равновесии конденсат, попадают в энергетический интервал, где кинетическая энергия меньше межчастичной энергии взаимодействия, начинают формироваться коллективные корреляции и кинетическое уравнение перестает работать (число частиц, пришедших в этот энергетический интервал, который называют обычно когерентным, сравнимо с полным числом частиц). Однако еще до этого, эволюция проходит через стадию, при которой все числа заполнения отдельных мод становятся много большими единицы. В этом случае, как показано в [3, 4], система адекватно описывается классическим бозе-полем, подчиняющимся нелинейному уравнению Шрёдингера в форме уравнения Гросса–Питаевского. Решение уравнения приводит к важному результату: в когерентном интервале оказываются подавленными флуктуации плотности и одночастичная матрица плотности зависит только от флуктуаций фаз. На этом этапе возникает особое квазиконденсатное состояние, в котором локальные свойства эквивалентны истинному конденсату, но дальний порядок отсутствует. Мгновенная картина газа фактически демонстрирует разбиение системы на квазиконденсатные области конечного размера. Каждая область обладает определенной фазой при полном отсутствии корреляции фаз между отдельными областями.

Такая картина определила предсказание, что эволюция на 3-м этапе должна сопровождаться возникновением вихревой структуры. Прямое численное решение нелинейного уравнения Шрёдингера [5] подтвердило предсказание, продемонстрировав появление на этом этапе вихревого клубка и его эволюцию во времени.

Заключительный этап характеризуется затуханием неравновесных флуктуаций регулярной фазы и релаксацией вихревой структуры. Этому соответствует увеличение размера квазиконденсатных областей, что эффективно эквивалентно возрастанию расстояния, на котором спадает матрица плотности, определяя тем самым эволюцию масштаба дальнего порядка [3, 4] (см. также [6]). Время установления дальнего порядка τ_L возрастает при увеличении размера области L . В зависимости от соотношения параметров $\tau_L \sim L^n$, где $n = 1-2$.

В докладе приводится подробный анализ и сопоставление с теорией экспериментальных результатов, найденных в [1, 2], в особенности временной эволюции формирования дальнего порядка [1]. Анализ базируется на развитой теории аналога эффекта Hanbury–Brown–Twiss для частиц в конфигурации "два источника – один детектор" в условиях эволюции неравновесной системы с трансформацией классических корреляций в квантовые [7]. Проводится качественное и количественное сопоставление экспериментальных результатов и предсказаний теории.

Список литературы

1. Ritter S et al. *Phys. Rev. Lett.* **98** 090402 (2007)
2. Hugbart M et al. *Phys. Rev. A* **75** 011602(R) (2007)
3. Kagan Yu, Svistunov B V *Phys. Rev. Lett.* **79** 3331 (1997)
4. Каган Ю, Свистунов Б В *Письма ЖЭТФ* **67** 495 (1998) [Kagan Yu, Svistunov B V *JETP Lett.* **67** 521 (1998)]
5. Berloff N G, Svistunov B V *Phys. Rev. A* **66** 013603 (2002)
6. Каган Ю, Свистунов Б В *ЖЭТФ* **105** 353 (1994) [Kagan Yu, Svistunov B V *JETP* **78** 187 (1994)]
7. Каган Ю (2008) (в печати)

PACS numbers: 05.30.Fk, **71.10.-w**, 74.20.Fg
DOI: 10.3367/UFNr.0178.200806i.0633

Сверхтекучая ферми-жидкость в унитарном режиме

Л.П. Питаевский

1. Введение

Когда я выбирал тему доклада для этой сессии, посвященной 100-летию со дня рождения Ландау, мне захотелось рассказать о чем-нибудь, что удивило бы Ландау. Думаю, что недавно созданный физический объект — универсальная сверхтекучая ферми-жидкость — как нельзя лучше удовлетворяет этому требованию.

Как известно, Ландау не считал микроскопическую теорию жидкости проблемой, которой стоило заниматься. Приведу общеизвестную цитату из *Статистической физики* [1]: "В противоположность газам и твердым телам жидкости не допускают вычисления в общем виде термодинамических величин или хотя бы их температурной зависимости. Причиной является существование сильного взаимодействия между молекулами жидкости при отсутствии в то же время малости колебаний, придающей простой характер тепловому движению в твердых телах. Большая интенсивность молекулярного взаимодействия делает существенным для вычисления термодинамических величин знание конкретного закона взаимодействия, который различен для разных жидкостей".

Это утверждение совершенно правильно для всех существующих в природе жидкостей. Развитие техники эксперимента позволило, однако, недавно создать жидкости, свойства которых вообще не зависят от каких бы то ни было величин, характеризующих взаимодействие. Такая ситуация возникает благодаря тому, что взаимодействие между атомами в таких телах является, в известном смысле слова, бесконечно сильным. Речь идет об ультрахолодных газах вблизи так называемых резонансов Фешбаха.

Поставим прежде всего вопрос: что мы понимаем под жидкостью? Мы примем естественное определение: *жидкость — это текучее тело с сильным взаимодействием между частицами*. Заметим, что текучесть подразумевает отсутствие строгой периодичности, кристаллического дальнего порядка.

Интересующие нас жидкости создаются на основе газов, атомы которых подчиняются статистике Ферми. Газ является разреженным в том смысле, что среднее расстояние между атомами $n^{-1/3}$, где n — плотность числа атомов, много больше характерного радиуса действия r_0 межатомных сил:

$$r_0 \ll n^{-1/3}. \quad (1)$$

Для рассматриваемых объектов условие (1) всегда выполняется. Однако выполнение этого условия еще не означает, что мы имеем дело с газом в смысле слабости взаимодействия. Пусть температура достаточно низка, так что газ является вырожденным¹, $T \leq E_F$. Тогда можно утверждать, что все свойства тела зависят от одного параметра f , амплитуды рассеяния атомов с орбитальным моментом $l = 0$ друг на друга. Взаимодействие является слабым, т.е. тело действительно является газом при условии, что амплитуда мала по сравнению с межатомными расстояниями:

$$|f| \ll n^{-1/3}. \quad (2)$$

Обычно r_0 и $|f|$ — величины одного порядка и условия (1) и (2) практически эквивалентны. Это, однако, не так в условиях, когда система двух атомов имеет близкий к нулю уровень энергии. Согласно общей теории рассеяния амплитуда рассеяния тогда выражается в виде (см., например, [2]) $f(k) = -(a^{-1} + ik)^{-1}$, где k — волновой вектор, $a = -f(0)$ — длина рассеяния — постоянная, полностью характеризующая процесс рассеяния. Если $a > 0$, то система двух атомов имеет связанное состояние с отрицательной энергией $\epsilon = -\hbar^2/ma^2$. Если $a < 0$, то говорят, что система имеет виртуальный уровень. Если $|a|$ достаточно велико, $|a| \geq k^{-1} \sim n^{-1/3}$, то условие слабости взаимодействия (2) заведомо нарушается и мы — по определению — имеем дело с жидкостью, хотя и разреженной в смысле условия (1). При этом ее свойства характеризуются одним-единственным параметром a . Если же $|a| \geq k^{-1}$, то амплитуда рассеяния достигает своего "унитарного предела" $f \approx i/k$. Тогда длина a тоже выпадает из теории и мы имеем универсальную жидкость, свойства которой вообще не зависят от взаимодействия. Разумеется, рассматриваемая картина подразумевает возможность менять амплитуду рассеяния. Такая возможность возникает при наличии резонан-

сов Фешбаха, вблизи которых положение уровня энергии системы двух атомов зависит от магнитного поля [3]. Зависимость длины рассеяния от магнитного поля может быть представлена в виде

$$a = a_{bg} \left(1 - \frac{\Delta B}{B - B_0} \right). \quad (3)$$

Вблизи резонанса $B \approx B_0$ длина рассеяния велика и система представляет собой универсальную жидкость.

Рассмотрим качественно свойства системы при $T = 0$ в различных областях значений длины рассеяния a . Когда эта длина положительна и относительно мала, $r_0 \ll a \ll n^{-1/3}$, система двух атомов имеет связанное состояние и атомы объединяются в молекулы с энергией связи ϵ . Система представляет собой бозе-газ, состоящий из слабосвязанных двухатомных молекул, или димеров. Существенно, что длина рассеяния a_{dd} этих димеров друг на друга положительна, т.е. эти молекулы отталкиваются. Вычисление a_{dd} представляет собой трудную задачу, которая была решена Петровым, Шляпниковым и Саломоном [4]. Оказалось, что $a_{dd} = 0,6a$. Таким образом, система в этом режиме представляет собой слабонеидеальный сверхтекучий бозе-газ, описываемый теорией Боголюбова [6], с очевидной заменой $m \rightarrow 2m$, $a \rightarrow 0,6a$.

Очень важным для всей рассматриваемой области физики является вопрос о времени жизни такой системы. Это время ограничивается процессами перехода с большим выделением энергии со слабосвязанного уровня на глубокие молекулярные уровни при столкновениях молекул. Потеря числа молекул при таких неупругих процессах описывается уравнением $\dot{n}_d = -\alpha_{dd} n_d^2$. Зависимость коэффициента рекомбинации α_{dd} от a была исследована в той же работе [4]. Оказалось, что $\alpha_{dd} \propto a^{-2,25}$. Таким образом, система делается более устойчивой по мере увеличения длины рассеяния, т.е. по мере приближения к резонансу. Этот парадоксальный результат связан с фермиевской природой атомов, точнее, с тем, что фермионы с параллельными спинами не могут находиться в одной точке. В газе бозонов, который тоже был исследован экспериментально, время жизни резко убывает при приближении к резонансу. Именно поэтому в унитарном режиме фактически может быть исследована только ферми-жидкость. Экспериментально измеренная зависимость α_{dd} от a представлена на рис. 1. Она находится в удовлетворительном согласии с теорией.

Рассмотрим теперь обратный предельный случай, в котором длина рассеяния отрицательна и мала по модулю, $a < 0$, $r_0 \ll |a| \ll n^{-1/3}$, как это имеет место на противоположной стороне резонанса. В этом случае система представляет собой слабонеидеальный ферми-газ с притяжением между атомами. Согласно теоретическим представлением Бардина – Купера – Шриффера и Боголюбова в этом случае наличие ферми-поверхности приводит к образованию куперовских пар. В результате появляется щель в энергетическом спектре фермионов и система оказывается сверхтекучей.

В непосредственной близости к резонансу система представляет собой универсальную унитарную ферми-жидкость. Поскольку система является сверхтекучей в обоих рассмотренных предельных случаях, естественно считать, что она сверхтекуча во всем интервале значений a . (Другие аргументы будут представлены ниже.) Разу-

¹ Я полагаю $k_B = 1$ во всех формулах.

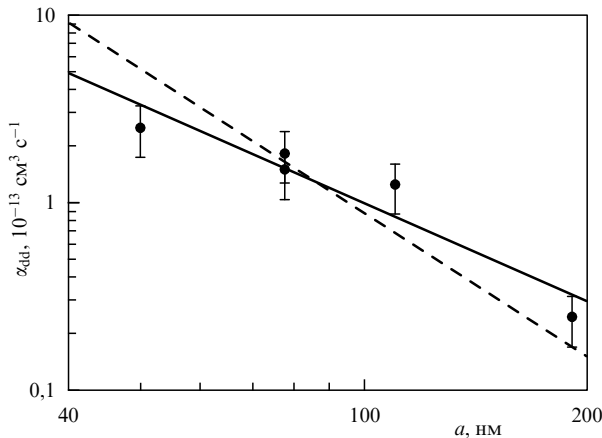


Рис. 1. Зависимость коэффициента рекомбинации димеров α_{dd} от длины рассеяния a (из работы [5]). Наклон штриховой линии соответствует теоретической зависимости $\alpha_{dd} \propto a^{-2.5}$.

меется, при этом предполагается, что система устойчива и в унитарном режиме. Это предположение подтверждается всей совокупностью экспериментальных данных и теоретических расчетов.

Прежде чем обсуждать эти результаты, я кратко опишу типичную постановку эксперимента — на примере установки в университете Duke [7] (рис. 2а).

Фактически в экспериментах используются два типа фермиевских атомов — изотопы ^6Li и ^{40}K . Выбор изотопов диктуется наличием резонанса Фешбаха в удобном диапазоне магнитного поля и наличием спектральных линий в удобном интервале длин волн. Атомы удерживаются в оптической ловушке, которая создается сфокусированным лазерным пучком. Частота света выбирается несколько ниже частоты линии поглощения, так что атомы "втягиваются" в максимум интенсивности. Поскольку интенсивность вблизи фокуса спадает быстро в радиальном направлении и медленно вдоль оси, образец имеет вытянутую сигарообразную форму. Соленоиды создают магнитное поле, необходимое для достижения резонанса. Поскольку основной целью экспериментов являлось исследование сверхтекучести, необходимо было иметь два типа фермионов. В теории сверхпроводимости обычно речь идет об электронах с противоположными значениями проекции спина. В нашем случае используют атомы в различных состояниях сверхтонкой структуры.

Эксперименты с фермионами трудны и число групп, работающих с ними, меньше, чем число групп, исследующих конденсацию Бозе–Эйнштейна. Работы ведутся в JILA (Joint Research Institute of National Institute of Standards and Technology and the University of Colorado) (Boulder), Massachusetts Institute of Technology (MIT) (Boston), Duke University (Durham) и Rice University (Houston) в США, в Ecole Normale Supérieure (Paris) во Франции и в University of Innsbruck в Австрии. Мне приятно упомянуть, что А. Турлапов — один из ведущих экспериментаторов в Duke — вернулся в Нижний Новгород и создает там установку.

Приведу характерные параметры недавних экспериментов. Число атомов в ловушке $N \sim 3 \times 10^6 - 10^7$, плотность атомов в ее центре $n \sim 2 \times 10^{12}$. Соответственно энергия Ферми $E_F \sim 200 - 500$ нК и величина фермиевского волнового вектора $k_F \sim 0,3$ мкм $^{-1}$. Параметры

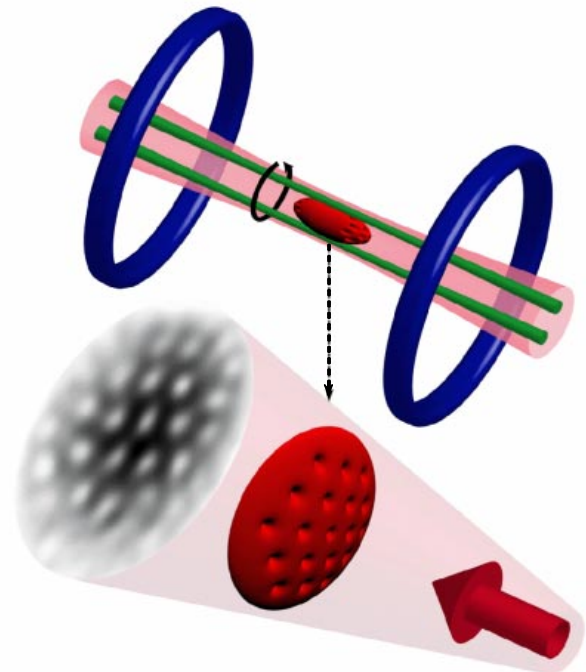
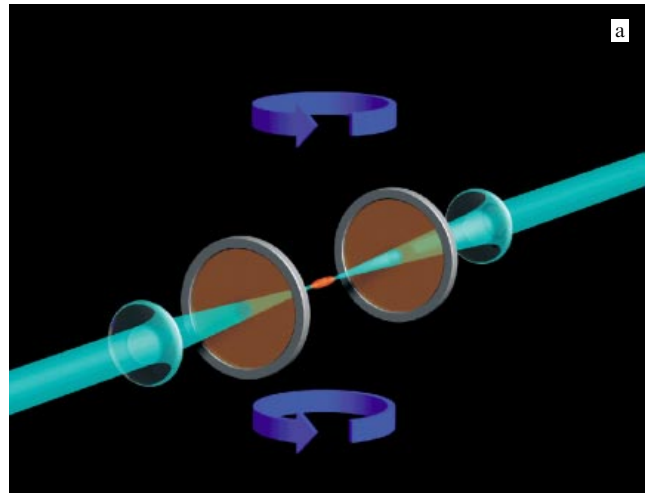


Рис. 2. (а) Схема установки, используемой в университете Duke для исследования свойств ферми-газа в оптической ловушке вблизи резонанса Фешбаха (из работы [7]). (б) Схема установки, используемой в MIT для исследования вращения сверхтекучего ферми-газа (из работы [8]). Два лазерных луча, параллельные оси, приводят газ во вращение. Вынесена схема наблюдения вихрей по теневому изображению расширяющегося облака фермионов.

ловушки удобно характеризовать частотами колебаний атомов в ней. Радиальная частота ν_{\perp} лежит обычно в пределах 60–300 Гц, продольная $\nu_z \sim 20$ Гц. Самая низкая температура, которой удается достичь, оказывается ниже $0,06E_F$, т.е. составляет порядка 10 нК. Мы увидим ниже, что удастся не только вести эксперименты при таких чудовищно низких температурах, но и установить термодинамическую шкалу температур в этой области. Я не имею возможности остановиться на методах охлаждения газа. Упомяну только, что на конечной стадии газ охлаждается в результате испарения из ловушки более быстрых атомов, подобно тому как охлаждается чай в оставленной на столе чашке.

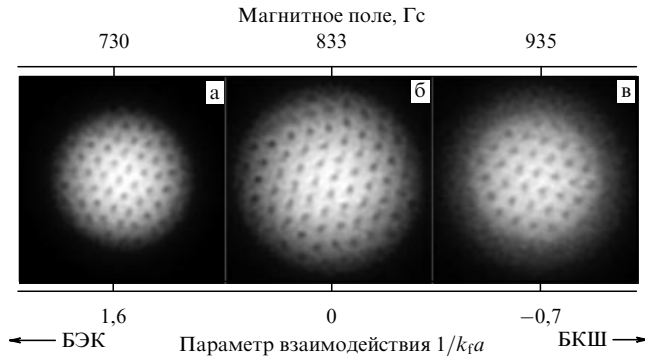


Рис. 3. Квантованные вихри во вращающемся сверхтекучем ферми-газе (из работы [8]): (а) соответствует разреженному газу димеров, (б) — ферми-жидкости вблизи точки унитарности, (в) — разреженному ферми-газу со слабым притяжением между атомами.

Одной из важных задач эксперимента было убедиться в том, что система является сверхтекучей. Наиболее характерным свойством сверхтекучести является существование квантованных вихрей. Циркуляция скорости вокруг вихря в ферми-жидкости равна $\Gamma = \pi\hbar/m$ — в два раза меньше, чем в бозе-жидкости. Соответственно, при вращении с достаточно большой угловой скоростью Ω , число вихрей на единицу площади будет равно $2\Omega m/(\pi\hbar)$. Как привести жидкость во вращение? Экспериментаторы в MIT поместили пару тонких лазерных лучей вдоль оси ловушки, но со смещением относительно оси (рис. 2б) [8]. Эта "мешалка" вращалась вокруг оси и увлекала жидкость. В некоторый момент ловушка выключалась, жидкость расширялась и наблюдалось распределение плотности. Результат показан на рис. 3. Сердцевинки вихрей видны как темные области пониженной плотности. Простой подсчет числа вихрей подтверждает теоретическое значение циркуляции, приведенное выше.

Рассмотрим теперь жидкость в самой точке резонанса, когда $a \rightarrow \pm\infty$. (Замечу, что эта точка не является точкой фазового перехода.) Начнем со свойств однородной жидкости при $T = 0$. Теперь в нашем распоряжении нет никаких параметров, кроме плотности, от которых могут зависеть термодинамические функции. Соображения размерности показывают, что, например, химический потенциал жидкости должен иметь вид

$$\mu(n) = \xi \mu^{\text{id}}(n), \quad (4)$$

где $\mu^{\text{id}}(n) = (3\pi^2 n)^{2/3} (\hbar^2/m)$ — химический потенциал идеального ферми-газа с плотностью n при $T = 0$, ξ — безразмерный коэффициент, не зависящий от рода жидкости. Задача теории состоит в вычислении ξ , а эксперимента — в его измерении. Первые оценки ξ были получены на основе теории Бардина–Купера–Шриффера–Боголюбова (БКШБ). Эта теория является теорией среднего поля и, разумеется, неприменима вблизи точки унитарности. Однако ее остроумное обобщение для случая сильной связи позволило получить формулы, разумные в обоих предельных случаях (см., например, [9]). В самой точке унитарности такая теория дает $\xi = 0,59$. Самый надежный результат дает вычисление квантовым методом Монте-Карло (КМК): $\xi = 0,42$ [10]. Замечу, что отсутствие в теории малого параметра является, по существу, благоприятным для численных

расчетов. Наличие такого параметра нередко ухудшает сходимость. Была сделана попытка применить метод ε -разложения, основанный на том, что в четырехмерном пространстве $\xi = 0$ [11]. Теория строится в пространстве $D = 4 - \varepsilon$ -измерений в предположении малости ε , после чего результаты экстраполируются к $\varepsilon = 1$. Этот метод, очень полезный в теории фазовых переходов, здесь, по видимому, дает плохую точность. Существенно, что параметр $\xi < 1$. Это означает, что взаимодействие в точке унитарности уменьшает давление жидкости, т.е. является эффективным притяжением. Поэтому естественно, что оно приводит к спариванию фермионов и сверхтекучести. Количественной характеристикой спаривания является щель Δ в фермиевской ветви спектра. Соображения размерности снова приводят к тому, что

$$\Delta(n) = \theta \mu^{\text{id}}(n). \quad (5)$$

КМК-расчеты дают $\theta = 0,5$ [10].

Обратимся к экспериментальной проверке теории. Наиболее прямой метод определения ξ состоит в точном измерении распределения плотности жидкости в ловушке. В квазиклассическом приближении с учетом (4) это распределение дается уравнением $\xi \mu^{\text{id}}[n(\mathbf{x})] + V(\mathbf{x}) = \text{const}$. Подгонка под наблюдаемое распределение позволяет определить ξ . Таким способом в Rice University для ${}^6\text{Li}$ было найдено значение $\xi = 0,46$ [12]. Другой метод был применен экспериментаторами в JILA, которые работают с ${}^{40}\text{K}$. Они измеряли распределение плотности и вычисляли потенциальную энергию жидкости $U_{\text{pot}} = \int n(\mathbf{x}) V(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$, которая пропорциональна $\sqrt{\xi}$ [13]. Таким образом было получено значение $\xi = 0,46$. Близость значений для ${}^6\text{Li}$ и ${}^{40}\text{K}$ к теоретическому подтверждает универсальность ξ . Надежных измерений щели Δ , по моему мнению, пока произведено не было.

Важную информацию о свойствах жидкости можно получить, исследуя ее колебания в ловушке. Эти колебания описываются сверхтекучей гидродинамикой Ландау [14]. (Замечу, что Ландау с самого начала считал, что его уравнения справедливы для сверхтекучих как бозе-, так и ферми-жидкостей.) Особенно простой результат для частот колебаний в гармонической ловушке получается для жидкости с политропным уравнением состояния $\mu(n) \propto n^\gamma$. Мы рассмотрим важный тип колебаний — осесимметричные радиальные колебания, частота которых оказывается равной $\omega = \sqrt{2(\gamma+1)} \omega_\perp$ [15]. Согласно этой формуле в молекулярном пределе ($a > 0$, $na^3 \ll 1$), когда $\mu \propto a_{\text{dd}} n$, т.е. $\gamma = 1$, частота $\omega = 2\omega_\perp$. В унитарном пределе и БКШБ-пределе $\gamma = 2/3$, как в идеальном ферми-газе, и $\omega = \sqrt{10/3} \omega_\perp = 1,83 \omega_\perp$. При промежуточных значениях a частоту нельзя вычислить аналитически, но кажется естественным, что частота при $a > 0$ должна монотонно уменьшаться с увеличением a . Именно таковы были результаты первых экспериментов. Были предложены и теории, обладающие таким свойством, основанные на приближении среднего поля.

Ситуация, однако, не так проста. Дело в том, что при $na^3 \ll 1$ теория позволяет строго вычислить не только первый член в μ , но и поправку, которая впервые была найдена Ли, Хуангом и Янгом [16]. Это дает поправку к частоте, равную [17]

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = +0,72 \sqrt{n(\mathbf{x}=0) a_{\text{dd}}^3}. \quad (6)$$

Положительный знак поправки означает, что частота должна сначала увеличиваться с возрастанием a и лишь потом уменьшаться, достигая предельного значения $1,83\omega_{\perp}$. Эта аргументация оспаривалась на том основании, что молекулярные димеры все-таки не вполне бозоны. Однако поправка (6) имеет ясный физический смысл. Она происходит от вклада в энергию нулевых колебаний фононов, существование которых в сверхтекучей жидкости не вызывает сомнений. Именно поэтому она аномально велика — порядка квадратного корня из газового параметра na^3 , в то время как "нормальное" разложение происходит по этому параметру. Все это приводит к утверждению, которое автор усиленно пропагандировал, о том, что монотонное поведение частоты означало бы катастрофу для теории. К счастью, ситуация недавно прояснилась. Новые эксперименты действительно дают значения частоты бóльшие $2\omega_{\perp}$ на молекулярной стороне резонанса. Они находятся в хорошем согласии с вычислениями во всем интервале значений a , проведенными методом КМК [19] (рис. 4). Замечу, что расхождение с результатами предыдущих экспериментов объясняется тем, что в них температура была недостаточно низкой. Между тем поправка (6) чувствительна к температуре, поскольку она связана с возбуждениями относительно малых энергий $\hbar\omega \sim \mu$.

Обсудим теперь свойства жидкости в точке унитарности при конечных температурах. При этом предполагается, что температура не слишком высока, так что длина волны атомов при их тепловом движении велика по сравнению с размером атома: $r_0 \ll \hbar/\sqrt{mT}$. Фактически речь идет о температурах порядка E_F .

Самым важным здесь является вопрос о значении температуры перехода в сверхтекучее состояние. Наиболее надежные результаты получены Буровским и др. методом Монте-Карло: $T_c = 0,16\mu^{\text{id}}$ [20]. Этот результат находится в хорошем согласии с экспериментом. Заметим, что температура перехода относительно низка,

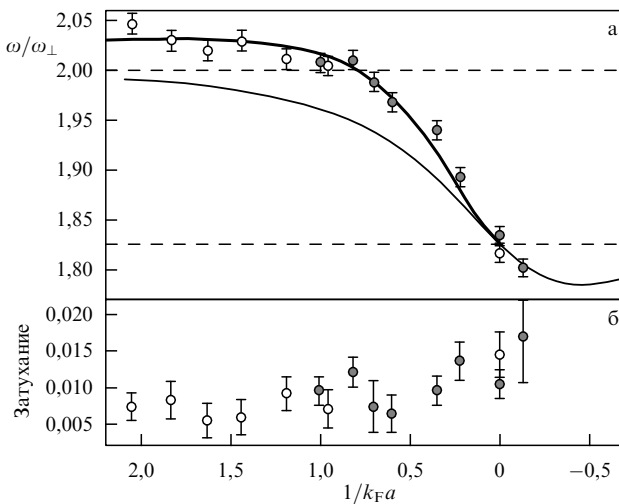


Рис. 4. (а) Зависимость частоты радиальных колебаний от длины рассеяния. Верхняя сплошная кривая — результаты вычислений квантовым методом Монте-Карло, нижняя — результат расчета по теории среднего поля. Точки — экспериментальные значения. Верхняя и нижняя штриховые прямые показывают предельные значения частоты соответственно в разреженном газе димеров и точке унитарности. (б) Измеренные значения затухания колебаний. (Из работы [18].)

так что при температурах, несколько превышающих T_c , мы имеем интересный объект исследования — вырожденную нормальную ферми-жидкость в унитарном режиме.

При конечных температурах уравнение состояния нельзя написать исходя только из соображений размерности. Эти соображения, однако, приводят к важным соотношениям подобия. Например, химический потенциал имеет вид $\mu(n, T) = \mu^{\text{id}}(n)f_{\mu}[T/\mu^{\text{id}}(n)]$; энтропию, отнесенную к одному атому, можно записать как $s(n, T) = f_s[T/\mu^{\text{id}}(n)]$. Последнее соотношение означает, что при адиабатическом изменении плотности температура изменяется $\propto n^{2/3}$ — как в идеальном одноатомном газе.

В применении к жидкости в ловушке эти формулы приводят к важному интегральному соотношению. Следуя обычному выводу теоремы вириала, можно показать, что

$$2U_{\text{pot}} = E, \quad (7)$$

где U_{pot} — потенциальная энергия, E — полная энергия, т.е. сумма потенциальной, внутренней и гидродинамической кинетической энергий (Thomas, Kinast, Turlapov [21]). Как уже говорилось, U_{pot} можно вычислить непосредственно из измеренного распределения плотности. Полную же энергию можно изменять контролируемым образом. Для этого потенциал ловушки быстро выключался на некоторое "время нагрева" t_{heat} . В течение этого времени жидкость свободно расширялась. При этом сохранялась сумма кинетической и внутренней энергий. После того, как ловушка включалась опять и система приходила в равновесие, потенциальная энергия, которая снова измерялась, оказывалась большей. Этот остроумный метод позволил авторам [21] проверить соотношение (7) с большой точностью и тем самым подтвердить сформулированные выше законы подобия.

В аналогичном эксперименте была измерена полная энтропия системы $S = \int n(\mathbf{x})s(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ как функция ее энергии E [22]. В опыте энергия изменялась и измерялась, как описано выше, а для измерения энтропии магнитное поле адиабатически увеличивалось, так что система оказывалась вдали от резонанса, где взаимодействие было несущественно. Измерение размера облака позволяло вычислить энтропию по формулам идеального ферми-газа, которая ввиду адиабатичности процесса была равна энтропии жидкости до увеличения магнитного поля. Заметим, что производная $T = dE/dS$ прямо дает абсолютную температуру системы. Мне кажется, что возможность измерения абсолютной температуры в нанокельвиновской области сама по себе является удивительным достижением. Другой способ измерения абсолютной температуры будет описан ниже.

Сказанное не оставляет сомнения в том, что теоретические представления о свойствах "унитарной" сверхтекучей жидкости хорошо подтверждаются в эксперименте. Я думаю, однако, что важность вопроса требует проверки с прецизионной точностью. Такая возможность существует. Для этого нужно поместить жидкость в ловушку, которая является гармонической и изотропной с высокой точностью. Тогда можно утверждать, что сферически-симметричные пульсации облака имеют частоту точно равную $2\omega_h$, где ω_h — собственная частота ловушки, и не затухают [23]. Эта теорема справедлива как ниже, так и выше точки сверхтекучего

перехода и для колебаний произвольной амплитуды. Она является следствием скрытой симметрии системы в точке унитарности. (Аналогичная ситуация имеет место для колебаний разреженного бозе-газа в цилиндрической ловушке [24, 25].) Отсутствие затухания означает, что выше точки перехода равна нулю вторая вязкость жидкости ζ . В сверхтекучей фазе из введенных Халатниковым [26] трех коэффициентов второй вязкости оказываются равными нулю ζ_1 и ζ_2 [27].

До сих пор речь шла об экспериментах, в которых число атомов в двух спиновых состояниях было одним и тем же. Недавно начали активно изучать поляризованные системы, в которых число атомов в одном спиновом состоянии (будем условно говорить о "спинах вверх") больше, чем в другом. Такой вопрос уже обсуждался для сверхпроводников. Ларкин и Овчинников и Феррел и Фульде предсказали существование пространственно-неоднородных фаз (ЛОФФ-фазы), в которых сверхпроводящая щель является периодической функцией координат [28, 29]. В сверхпроводниках разность населенностей спиновых состояний может существовать в ферромагнитных телах или может создаваться внешним магнитным полем. В обоих случаях магнитное поле влияет на орбитальное движение и разрушает сверхпроводимость.

В наших нейтральных разреженных системах время спиновой релаксации очень велико и числа атомов в разных состояниях практически являются произвольными параметрами, которые задаются начальными условиями. Теоретические расчеты [30] и эксперимент [31] показывают, что вблизи области унитарности жидкость в ловушке при $T = 0$ распадается на три фазы. В центре находится сверхтекучая фаза с равными числами атомов со спинами "вверх" и "вниз". Она окружена частично поляризованной нормальной фазой, с неравными плотностями атомов разных поляризаций. На периферии находится полностью поляризованная фаза, состоящая только из атомов избыточной поляризации. При этом не исключается существование фаз ЛОФФ-типа в некоторых интервалах значений параметров.

Результаты измерений представлены на рис. 5. Исследовалась система с $N_{\uparrow} = 5,9 \times 10^6$, $T/E_F = 0,03$ и отношением населенностей спиновых состояний $N_{\uparrow}/N_{\downarrow} = 0,39$. На рисунке 5а представлено теневое изображение двумерного распределения поляризации ("column density") $\delta n_a(x, z) \equiv \int dy [n_{\uparrow}(\mathbf{r}) - n_{\downarrow}(\mathbf{r})]$, а на рис. 5б — "взвешенное" распределение $\delta n_b(x, z) \equiv \int dy [0,76n_{\uparrow}(\mathbf{r}) - 1,43n_{\downarrow}(\mathbf{r})]$, которое дает более контрастную картину. На рисунке 5в приведены графики $\delta n_a(0, z)$ и $\delta n_b(0, z)$, а на рис. 5г, д — соответственно графики интегрированных линейных плотностей $\delta n_a(z) \equiv \int dx n_a(x, z)$ и $\delta n_a(x) \equiv \int dz n_a(x, z)$. Подчеркну, что измерения были произведены в самой ловушке, без предварительного расширения жидкости. Обработка измеренных двумерных распределений с помощью преобразования Абея позволила восстановить трехмерное распределение поляризации и подтвердить трехфазную структуру жидкости. Были произведены также измерения при различных температурах. В связи с этим следует отметить особую роль полностью поляризованной фазы. Поскольку медленные фермионы с параллельными спинами практически не взаимодействуют, эта фаза представляет собой идеальный ферми-газ. Поэтому, измеряя распределение плотности этой фазы и подгоняя его под формулы для идеального газа, можно

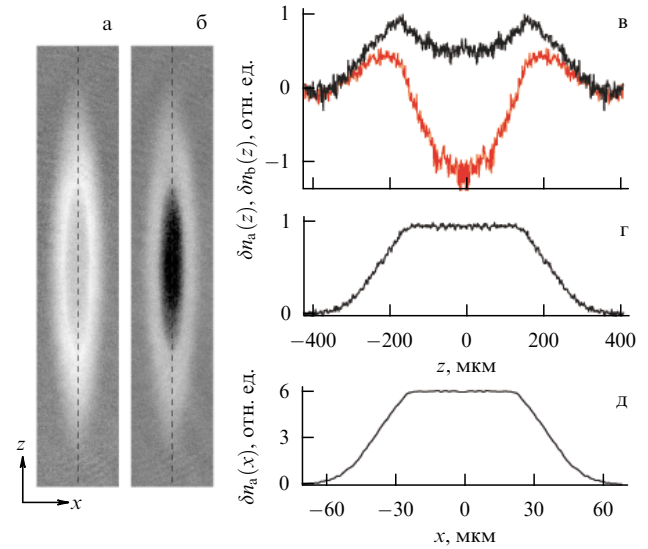


Рис. 5. Распределение поляризации в системе с неравной населенностью спиновых состояний (из работы [31]). (а) Теневое изображение двумерного распределения поляризации $\delta n_a(x, z)$. (б) Изображение взвешенного распределения поляризации $\delta n_b(x, z)$. (в) Графики функций $\delta n_a(0, z)$ (верхняя кривая) и $\delta n_b(0, z)$ (нижняя кривая). (г) Линейная плотность поляризации $\delta n_a(z)$ вдоль оси z . (д) Линейная плотность поляризации $\delta n_a(x)$ вдоль оси x .

определить термодинамическую температуру системы. Поляризованная фаза играет роль идеально-газового термометра, находящегося в контакте с другими фазами. При этом важно, что фермионы поляризованной фазы взаимодействуют с фермионами других фаз, что обеспечивает термодинамическое равновесие. Эти измерения температуры позволили проверить вычисленное в [20] значение температуры перехода. Обсуждаемые результаты находятся в некотором противоречии с результатами работы [12], в которой рассматривалось меньшее число атомов. Возможно, что в таких условиях играет роль поверхностное натяжение на границах фаз.

Упомяну некоторые интересные возможности будущих исследований. Одна из них связана с использованием двух типов фермионов с разными массами, для которых существует резонанс Фешбаха [32]. Теория предсказывает нетривиальные свойства сверхтекучей жидкости, образованной в результате куперовского спаривания фермионов с разной массой.

Другая возможность связана с безвихревым вращением ферми-жидкости [33]. Дело в том, что вихревая решетка, показанная на рис. 4, образуется в результате сильного возмущения жидкости вращающимися мешалками. Если же просто привести во вращение несимметричную относительно оси ловушку, то есть основания полагать, что вихри будут образовываться только при высокой скорости вращения, когда форма жидкости станет неустойчивой. При более низких скоростях вращения жидкость разобьется на две фазы. В центре слабдеформированной ловушки будет покоиться сверхтекучая жидкость, а на периферии будет обычным образом вращаться нормальная фаза жидкости. Существование при абсолютном нуле температур нормальной фазы, удерживаемой вращением от перехода в сверхтекучее состояние, поднимает трудные теоретические вопросы.

Очень богатая область исследований открывается, если поместить жидкость в периодическую решетку, созданную встречными лазерными пучками (см. обзор автора [34]). Такие работы в унитарной области только начинаются.

Мы видим, что исследования ферми-газа в ловушке вблизи резонанса открыло совершенно новые теоретические и экспериментальные возможности физики конденсированного состояния. Это отражает современную тенденцию. Работа все больше перемещается на исследование специально созданных, не существующих в природе объектов с удивительными новыми свойствами. С учетом этого, полагаю, не следует ожидать истощения нашей области физики в обозримом будущем.

Я благодарен С. Стрингари за обсуждение, Дж. Томасу за предоставление оригинала рис. 2а и Р. Гримму за предоставление оригинала рис. 4.

Список литературы

1. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Статистическая физика* (М.: Гостехтеориздат, 1951) с. 223 [Translated into English: Landau L D, Lifshitz E M *Statistical Physics* (Oxford: Pergamon Press, 1969)]
2. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Квантовая механика: Нерелятивистская теория* (М.: Физматлит, 2001) [Translated into English: Landau L D, Lifshitz E M *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory* (Oxford: Pergamon Press, 1977)]
3. Feshbach H *Ann. Phys.* (New York) **5** 357 (1958); **19** 287 (1962)
4. Petrov D S, Salomon C, Shlyapnikov G V *Phys. Rev. Lett.* **93** 090404 (2004)
5. Petrov D S, Salomon C, Shlyapnikov G V *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **38** S645 (2005)
6. Боголюбов Н Н *Изв. АН СССР, Сер. физ.* **11** 77 (1947)
7. Thomas J E, Gehm M E *Am. Scientist* **92** 238 (2004)
8. Zwierlein M W et al. *Nature* **435** 1047 (2005)
9. Nozières P, Schmitt-Rink S *J. Low Temp. Phys.* **59** 195 (1985)
10. Carlson J, Reddy S *Phys. Rev. Lett.* **95** 060401 (2005)
11. Nishida Y, Son D T *Phys. Rev. Lett.* **97** 050403 (2006)
12. Patridge G B et al. *Science* **311** 503 (2006)
13. Stewart J T et al. *Phys. Rev. Lett.* **97** 220406 (2006)
14. Ландау Л Д *ЖЭТФ* **11** 592 (1941)
15. Cozzini M, Stringari S *Phys. Rev. Lett.* **91** 070401 (2003)
16. Lee T D, Huang K, Yang C N *Phys. Rev.* **106** 1135 (1957)
17. Pitaevskii L, Stringari S *Phys. Rev. Lett.* **81** 4541 (1998)
18. Altmeyer A et al. *Phys. Rev. Lett.* **98** 040401 (2007)
19. Astrakharchik G E et al. *Phys. Rev. Lett.* **95** 030404 (2005)
20. Burovski E et al. *New J. Phys.* **8** 153 (2006)
21. Thomas J E, Kinast J, Turlapov A *Phys. Rev. Lett.* **95** 120402 (2005)
22. Luo L et al. *Phys. Rev. Lett.* **98** 080402 (2007)
23. Castin Y *C.R. Physique* **5** 407 (2004)
24. Pitaevskii L P *Phys. Lett. A* **221** 14 (1996)
25. Kagan Yu, Surkov E L, Shlyapnikov G V *Phys. Rev. A* **54** R1753 (1996)
26. Халатников И М *Теория сверхтекучести* (М.: Наука, 1971)
27. Son D T *Phys. Rev. Lett.* **98** 020604 (2007)
28. Ларкин А И, Овчинников Ю Н *ЖЭТФ* **47** 1136 (1964) [Larkin A I, Ovchinnikov Yu N *Sov. Phys. JETP* **20** 762 (1965)]
29. Fulde P, Ferrell R A *Phys. Rev.* **135** A550 (1964)
30. Lobo C et al. *Phys. Rev. Lett.* **97** 200403 (2006)
31. Shin Y et al., arXiv:0709.3027
32. Petrov D S *Phys. Rev. A* **67** 010703 (2003)
33. Bausmerth I, Recati A, Stringari S *Phys. Rev. Lett.* **100** 070401 (2008); arXiv: 0711.0653
34. Питаевский Л П *УФН* **176** 345 (2006) [Pitaevskii L P *Phys. Usp.* **49** 333 (2006)]

PACS numbers: 02.20.Sv, **04.20.** – q, **98.80.** – k
DOI: 10.3367/UFNr.0178.200806j.0639

Лев Ландау и проблема сингулярностей в космологии

И.М. Халатников, А.Ю. Каменщик

1. Введение

В докладе рассматриваются различные аспекты задачи о космологической сингулярности, такие как осцилляторное приближение Белинского, Халатникова, Лифшица (БХЛ) к сингулярности, новые свойства космологической динамики в окрестности сингулярности в многомерных и суперструнных космологических моделях и их связи с такими современными областями математики, как бесконечномерные алгебры Ли. Кроме того, рассмотрены некоторые новые типы космологических сингулярностей, которые широко обсуждались в течение последнего десятилетия после открытия явления космического ускорения.

Много лет назад в беседах со своими студентами Лев Давидович Ландау часто говорил, что есть три задачи наиболее важные для теоретической физики: проблема космологической сингулярности, проблема фазовых переходов и проблема сверхпроводимости [1]. Сейчас мы знаем, что огромный прорыв был достигнут в объяснении явлений сверхпроводимости [2] и фазовых переходов [3]. Задача о космологической сингулярности широко исследовалась в течение последних 50 лет, и для нее были получены многие важные результаты, но она все еще сохраняет некоторую интригу. Более того, в этой задаче был открыт ряд весьма неожиданных фактов.

В нашем обзоре, опубликованном 10 лет назад [4] в выпуске *УФН*, посвященном 90-летию со дня рождения Л.Д. Ландау, мы обсуждали некоторые вопросы, связанные с задачей о сингулярности в космологии. В этом докладе мы остановимся на соотношениях между хорошо известными старыми результатами таких исследований и новыми достижениями в этой области.

Для начала напомним, что Пенроуз и Хокинг [5] доказали невозможность неограниченного продолжения геодезических при определенных условиях. Это интерпретировалось как указание на существование сингулярности в общем решении уравнений Эйнштейна. Эти теоремы, однако, не позволили найти конкретную аналитическую структуру сингулярности. Аналитическое поведение общих решений уравнений Эйнштейна в окрестности сингулярности исследовалось в работах [6–11]. Эти работы обнаружили загадочное явление осцилляторного приближения к сингулярности, которое стало известно как *Миксмастер-Вселенная* [12]. Модель замкнутой однородной, но анизотропной вселенной с тремя степенями свободы (космологическая модель Бьянки IX) использовалась с целью продемонстрировать, что вселенная приближается к сингулярности таким образом, что ее сжатие вдоль двух осей сопровождается расширением вдоль третьей оси, причем оси меняются ролями в соответствии с довольно сложным законом, который выявляет хаотическое поведение [10, 11, 13, 14].

Исследование динамики вселенной вблизи космологической сингулярности стало взрывообразно развивающимся направлением современной теоретической и мате-