

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

К вопросу об эффективных параметрах метаматериалов

А.П. Виноградов, А.В. Дорофеев, С. Зухди

Дан анализ формул смешения для расчета эффективных параметров композитных материалов, содержащих включения с отрицательными проницаемостями. Указаны проблемы, возникающие при использовании различных формул, и приведены алгоритмы расчета, дающие физически осмысленные решения. Обсуждается вопрос о вычислении коэффициента преломления для сред с произвольными значениями диэлектрической и магнитной проницаемостей.

PACS numbers: 41.20.-q, 78.20.Ci, 81.05.Rm

DOI: 10.3367/UFNr.0178.200805e.0511

Содержание

1. Введение (511).
 2. Формулы смешения (теория гомогенизации) (511).
 3. Выбор знака коэффициента преломления для среды Веселаго (515).
 4. Заключение (517).
- Список литературы (517).

1. Введение

В последнее время в электродинамике и оптике большое внимание уделяется метаматериалам [1–10]. Термин метаматериалы возник при изучении искусственных сред, внутри которых взаимодействие электромагнитных волн с включениями носит существенно непотенциальный характер, что отличает эти среды от традиционных искусственных диэлектриков. Эффекты запаздывания на масштабе включения приводят ко многим интересным явлениям — киральности [11], искусственному магнетизму [12–18] и т.п. Наиболее ярко новые свойства проявляются при резонансном возбуждении включений.

Помимо упомянутых свойств, при резонансном возбуждении на определенных частотах наведенный электрический (магнитный) момент включения и внешнее поле колеблются в противофазе, что может привести к отрицательным эффективным значениям проницаемостей. Примером являются композиты, содержащие высокопроводящие иголки [19], или включения более сложной формы [16, 20–23]. В узком смысле под метаматериалами

подразумевают именно среды, обладающие отрицательными проницаемостями. В согласии с этим определением многие естественные вещества можно тоже отнести к метаматериалам, например ферриты и полупроводники на частотах, близких к ферромагнитному и экситонному резонансам соответственно, а также многие металлы в ИК и оптическом диапазоне.

Даже отрицательные значения лишь одной проницаемости приводят ко многим интересным явлениям, а именно к возбуждению поверхностных волн и объемных Ми-резонансных мод отдельных включений [24, 25]. Принятие же обеими проницаемостями отрицательных значений качественно меняет оптику таких сред, позволяя воспроизводить эффекты ближних полей (сверхразрешение, передачу энергии запредельными волнами и т.д.) на масштабах, соизмеримых и больших длины волны (см. [2]).

В данной заметке мы не будем подробно рассматривать физику всех этих явлений, а сфокусируем внимание на математических трудностях, возникающих при описании сред с отрицательными проницаемостями. Для описания свойств метаматериалов необходимо умение выделять однозначные ветви аналитических функций многих комплексных переменных. На сегодняшний день математика не дает однозначного алгоритма, как это делать. Поэтому статьи по физике пестрят различными подходами и утверждениями [26–28]. Цель данной заметки — сформулировать задачу для математиков и дать физикам некие рецепты, приводящие к физически осмысленным решениям.

2. Формулы смешения (теория гомогенизации)

Начнем со случая, когда означенные выше проблемы удастся свести к решению известных задач, а именно к квазистатическому случаю. Известно [29], что в квазистатическом приближении электрическую и магнитную задачи можно решать отдельно. Фактически это означает, что мы имеем дело не с би-отрицательными (double-negative, DNG) средами, в которых как диэлектрическая, так и магнитная проницаемости принимают

А.П. Виноградов, А.В. Дорофеев. Институт теоретической и прикладной электродинамики РАН,
ул. Ижорская 13, 125412 Москва, Российская Федерация
Тел. (495) 485-83-55. Факс (495) 484-26-33
E-mail: a-vinogr@yandex.ru
С. Зухди. Laboratoire de Génie Electrique de Paris
Supélec-Pierre & Marie Curie University, France

Статья поступила 7 декабря 2007 г.

отрицательное значение, а с просто-отрицательными (single negative, SNG) средами, где отрицательное значение принимает лишь одна из проницаемостей.

Теория эффективных значений композитных материалов имеет долгую историю (см. обзор [30]). Имеются как точные результаты (так называемая двухмасштабная теория гомогенизации [31, 32], формула Дыхне [33]), так и целый набор феноменологических теорий, дающих формулы смещения, т.е. формулы, по которым можно рассчитать эффективные проницаемости, зная состав композита [34–57]. Наиболее известные формулы смещения — это формулы Гарнетта [34] и фон Бруггемана [46], а также симметризованная формула Гарнетта [53–57]. Заметим, что строгое обоснование теории двухмасштабной гомогенизации существует лишь для задач с положительно определенным оператором [32]. Распространение результатов этой теории на случай метаматериалов носит "силовой", т.е. феноменологический характер. Применение же феноменологических теорий носит, как всегда, неконтролируемый с точки зрения строгой теории характер. Более того, в отличие от строгой теории, каждая из феноменологических теорий дает качественное описание лишь части свойств системы¹.

Необходимо также упомянуть спектральную теорию Бергмана–Мильтона, в которой включения с отрицательным значением проницаемости играют особую роль. Так, в рамках теории Бергмана–Мильтона показывается [62], что расчет эффективной проницаемости ϵ_{eff} может быть сведен к нахождению спектральной функции, которая, в свою очередь, определяется распределением полюсов ϵ_{eff} как функции проницаемостей включений. Хотя теория Бергмана–Мильтона и не дает алгоритма расчета спектральной функции, но зато она показывает, что все полюсы эффективной проницаемости лежат на отрицательной действительной оси [62].

Ниже рассмотрено применение наиболее известных феноменологических теорий для описания метаматериалов.

Все феноменологические теории формул смещения сводят тем или иным образом многочастичную задачу к решению одночастичной задачи. Рассмотрим, для начала, "теорию возмущений", или "газовое приближение", т.е. случай, когда концентрация включений столь мала, что можно пренебречь влиянием частиц друг на друга.

Запишем, следуя [29], интеграл

$$\mathbf{I} = \frac{1}{V} \int (\mathbf{D} - \epsilon_m \mathbf{E}) dv = \langle \mathbf{D} \rangle - \epsilon_m \langle \mathbf{E} \rangle \quad (1)$$

(здесь и далее ϵ_m и ϵ_i — диэлектрические проницаемости матрицы и включения). Эффективная диэлектрическая проницаемость ϵ_{eff} определяется из уравнения $\langle \mathbf{D} \rangle = \epsilon_{\text{eff}} \langle \mathbf{E} \rangle$ и может быть выражена через интеграл \mathbf{I} :

$$\langle \mathbf{D} \rangle = \epsilon_{\text{eff}} \langle \mathbf{E} \rangle = \epsilon_m \langle \mathbf{E} \rangle + \mathbf{I}. \quad (2)$$

Принимая во внимание, что подынтегральное выражение отлично от нуля только внутри включения, где

$\mathbf{D} = \epsilon_i \mathbf{E}$, получим для интеграла \mathbf{I} :

$$\mathbf{I} = \frac{1}{V} \int (\mathbf{D} - \epsilon_m \mathbf{E}) dv = \frac{1}{V} \int (\epsilon_i - \epsilon_m) \mathbf{E} dv, \quad (3)$$

где в последнем интеграле интегрирование производится по объему включений.

Пренебрегая пространственным изменением так называемого локального поля \mathbf{E}_{loc} , в котором находится включение, получим известное выражение для поля внутри включения [29]:

$$\mathbf{E}_i = \frac{3\epsilon_m}{\epsilon_i + 2\epsilon_m} \mathbf{E}_{\text{loc}}, \quad (4)$$

что дает уравнение

$$\langle \mathbf{D} \rangle = \epsilon_m \langle \mathbf{E} \rangle + p \frac{3\epsilon_m(\epsilon_i - \epsilon_m)}{\epsilon_i + 2\epsilon_m} \mathbf{E}_{\text{loc}} \quad (5)$$

(здесь p — объемная концентрация включений).

До сих пор были сделаны предположения только о том, что частицы находятся в однородном внешнем поле и что расстояние между ними настолько больше их размера, что изменением полей от других частиц на масштабе любого выделенного включения можно пренебречь.

Предположив далее, что полями других частиц можно пренебречь ("газовое приближение"), иными словами, $\mathbf{E}_{\text{loc}} = \mathbf{E}_{\text{ext}}$, получим следующее выражение для расчета эффективной проницаемости:

$$\epsilon_{\text{eff}} = \epsilon_m + p \frac{3\epsilon_m(\epsilon_i - \epsilon_m)}{\epsilon_i + 2\epsilon_m}. \quad (6)$$

Если величину локального поля рассчитывать по формуле Лорентц–Лоренса (см. [36–39]):

$$\mathbf{E}_{\text{loc}} = \langle \mathbf{E} \rangle + \frac{4\pi}{3} \mathbf{P}, \quad (7)$$

где $\langle \mathbf{E} \rangle$ — среднее поле, \mathbf{E}_{loc} — локальное поле, \mathbf{P} — поляризация частицы, то придем к известной формуле Дж.К.М. Гарнетта

$$\epsilon_{\text{eff}} = \epsilon_m + 3p \frac{\epsilon_m(\epsilon_i - \epsilon_m)}{(\epsilon_i + 2\epsilon_m) - p(\epsilon_i - \epsilon_m)} \quad (8)$$

(ϵ_m и ϵ_i — диэлектрические проницаемости матрицы и включения, p — объемная концентрация включений). Эта формула замечательна тем, что в ней учитываются реально существующие граничные условия, что чрезвычайно важно при наличии объемных и поверхностных мод [63].

Применительно к включениям с отрицательными проницаемостями никаких математических проблем не возникает ни с (6), ни с (8). Концентрационные зависимости ϵ_{eff} представлены на рис. 1а, б.

До тех пор, пока $\epsilon_i > -2\epsilon_m$, наблюдается монотонное изменение ϵ_{eff} от ϵ_m к ϵ_i при увеличении концентрации включений от нуля до единицы (рис. 1а)². Для включений с отрицательной проницаемостью в полном соответ-

¹ Здесь не рассматривается вопрос о правомерности введения эффективных проницаемостей для композитов при резонансном взаимодействии электромагнитных волн с неоднородностями. Мы отсылаем читателя к работам, где дискутируется этот вопрос [23, 58–61].

² Еще раз обратим внимание на то, что эти формулы выведены в приближении малых концентраций, когда расстояние между частицами много больше размера частицы. Часто об этом забывают и применяют эти формулы для больших концентраций, что может привести к нефизическим результатам.

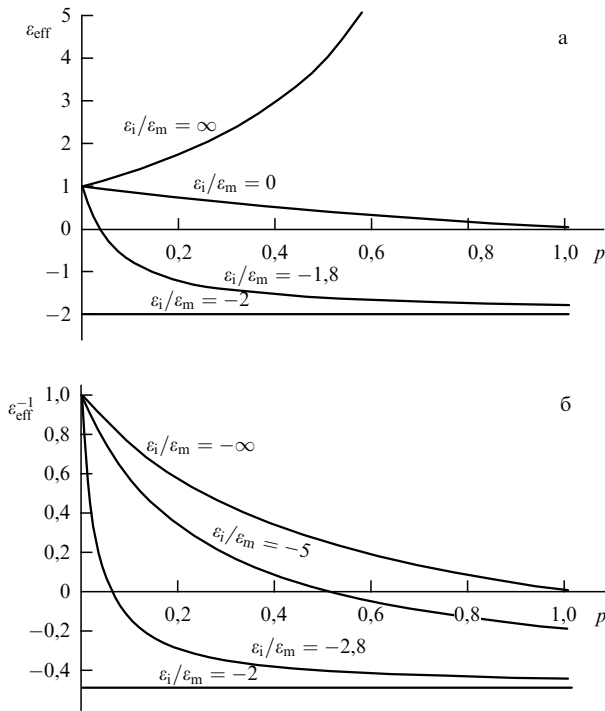


Рис. 1. Зависимость от концентрации p величин ϵ_{eff} (а) и $\epsilon_{\text{eff}}^{-1}$ (б) при разных значениях ϵ_i/ϵ_m . Кривые получены по формуле Гарнетта (8).

вии со спектральной теорией Бергмана–Мильтона существует концентрация, при которой эффективная проницаемость обращается в нуль. При $\epsilon_i < -2\epsilon_m$ удобнее анализировать функцию $\epsilon_{\text{eff}}^{-1}$, так как вместо нуля проницаемости возникает ее полюс, т.е. эффективная проницаемость обращается в бесконечность, что связано с явлением "электромагнитной ловушки" при $\epsilon_i = -2\epsilon_m$. При выполнении этого условия дипольный момент включения, а вместе с ним и локальное поле обращаются в бесконечность, что и дало название этому явлению. Учет эффектов запаздывания ограничивает значения поля и дипольного момента, что вытекает из точной теории Ми [23, 24].

При точном выполнении условия $\epsilon_i = -2\epsilon_m$ эффективная проницаемость перестает зависеть от концентрации (полюс находится при $p = 0$): $\epsilon_{\text{eff}} = -2\epsilon_m$. При стремлении ϵ_i к минус бесконечности полюс движется к единице (см. рис. 4, штриховая линия). При заданных проницаемостях величина $\epsilon_{\text{eff}}^{-1}$ монотонно изменяется от ϵ_m^{-1} до ϵ_i^{-1} (рис. 1б).

В теории фон Бруггемана, часто называемой теорией эффективной среды (ТЭС), матрица и включения рассматриваются "равноправно". Часто эту формулу называют симметричной формулой смешения. ТЭС предполагает, что "в среднем" частицы не возмущают внешнее поле, т.е. в среднем поле внутри частиц равно приложенному полю. При этом считается, что частицы, состоящие из материала включений, и частицы, состоящие из материала матрицы, погружены в некую однородную среду с искомой проницаемостью ϵ_{eff} . Уравнение для нахождения ϵ_{eff} принимает вид

$$\sum_i p_i \mathbf{E}_{\text{int}}^{(i)} = \mathbf{E}_0,$$

где суммирование ведется по всем видам материалов.

С использованием (4) для двухкомпонентной смеси это уравнение приобретает вид

$$p \frac{\epsilon_{\text{eff}} - \epsilon_i}{2\epsilon_{\text{eff}} + \epsilon_i} + (1 - p) \frac{\epsilon_{\text{eff}} - \epsilon_m}{2\epsilon_{\text{eff}} + \epsilon_m} = 0. \tag{9}$$

Существует множество модификаций ТЭС, в которых делаются попытки учесть те или иные явления или свойства композитов, не описываемых формулой фон Бруггемана. Так, в [22, 64] получено выражение, учитывающее скин-эффект на металлических включениях. В [47] предложена формула, куда порог протекания входит как свободный параметр. Существует также масса работ, где делаются попытки учесть корреляции в распределении частиц [23, 65, 66]. Все эти подходы базируются на уравнении (9).

Популярность формулы (9) связана с тем, что она дает описание перколяционного перехода при $p_c = 1/3$ (в теории Гарнетта порог протекания равен единице). То есть при $\epsilon_m = 0$ эффективная проницаемость ϵ_{eff} тождественно равна нулю при концентрациях ниже порога протекания и изменяется от нуля до ϵ_i при увеличении концентрации включений от порога протекания до единицы. Однако получение уже этого результата требует осторожного обращения с функциями комплексного переменного.

Действительно, при стремлении ϵ_m к нулю второе слагаемое в (9) имеет вид неопределенности $0/0$, и для получения правильного ответа следует использовать общее решение (9) в форме

$$\epsilon_{\text{eff}} = 0,25 \left[\epsilon_i(3p - 1) + \epsilon_m(2 - 3p) + \sqrt{[\epsilon_i(3p - 1) + \epsilon_m(2 - 3p)]^2 + 8\epsilon_i\epsilon_m} \right]. \tag{10}$$

Здесь мы впервые сталкиваемся с проблемой выбора однозначной аналитической ветви корня. Физически правильный ответ (пассивные включения дают пассивную эффективную среду, а активные — активную) дает разрез по отрицательной действительной оси и определение квадратного корня как

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|} \exp\left(i \frac{1}{2} \varphi_z\right) \text{ при } -\pi < \varphi_z < \pi. \tag{11}$$

Тогда в пределе $\epsilon_m \rightarrow 0$ и $\epsilon_i > 0$ ТЭС дает перколяционное поведение (рис. 2а)

$$\begin{aligned} \epsilon_{\text{eff}} &= 0,25 \left[\epsilon_i(3p - 1) + \sqrt{[\epsilon_i(3p - 1)]^2} \right] = \\ &= 0,25 \left[\epsilon_i(3p - 1) + |\epsilon_i(3p - 1)| \right] = \begin{cases} 0, & p < p_c, \\ \frac{\epsilon_i(3p - 1)}{2}, & p > p_c. \end{cases} \end{aligned} \tag{12}$$

Однако чтобы получить аналогичное поведение при $\epsilon_i < 0$, нужно выбрать другую ветвь квадратного корня, иначе получается странный результат (рис. 2б)

$$\epsilon_{\text{eff}} = \begin{cases} \frac{\epsilon_i(3p - 1)}{2}, & p < p_c, \\ 0, & p > p_c, \end{cases} \tag{13}$$

что лишает подход универсальности. Причина этого кроется в том, что мы имеем дело с функцией многих

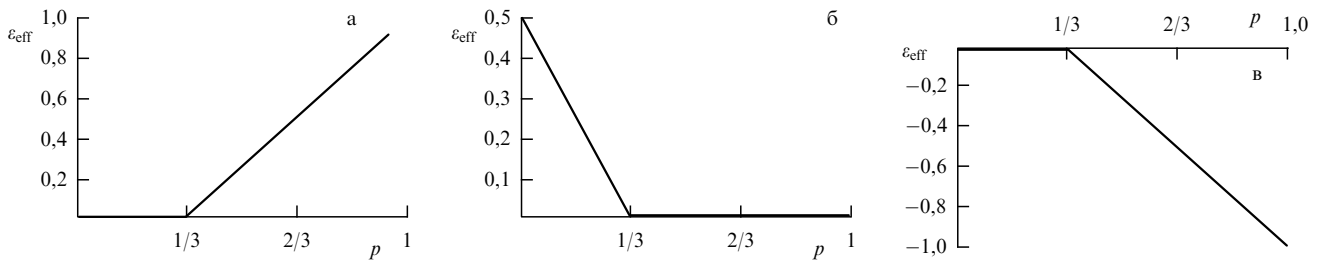


Рис. 2. Зависимости от концентрации p эффективной диэлектрической проницаемости, иллюстрирующие перколяционный переход при $\epsilon_m/\epsilon_i \rightarrow 0$, в соответствии с ТЭС: (а) $\epsilon_i = 1$, (б) некорректный результат (13) при $\epsilon_i = -1$, (в) корректный результат, получаемый из формулы (14) при $\epsilon_i = -1$.

комплексных переменных. Вопрос о выделении однозначной аналитической ветви функции многих комплексных переменных на сегодняшний день не имеет окончательного решения [67, 68]. Представляется разумным свести задачу к вычислению функций одной переменной, факторизуя аргумент $\sqrt{z_1} \times \dots \times \sqrt{z_n} = \sqrt{z_1} \times \dots \times \sqrt{z_n}$ [67, 68]. Вместо (12) получаем выражение

$$\epsilon_{\text{eff}} = 0,25 \left[\epsilon_i(3p - 1) + \sqrt{\epsilon_i} \sqrt{\epsilon_i} \sqrt{(3p - 1)^2} \right], \quad (14)$$

дающее правильное перколяционное поведение (рис. 2в). Заметим, что при извлечении корня из квадрата проницаемости используется выражение

$$\sqrt{\epsilon_i^2} = \sqrt{\epsilon_i} \sqrt{\epsilon_i} = \epsilon_i,$$

а при извлечении корня из оставшегося выражения используется традиционная формула теории функций действительного переменного:

$$\sqrt{(3p - 1)^2} = |3p - 1|.$$

Для нахождения решения в общем случае $\epsilon_m \neq 0$ предлагается использовать выражение вида

$$\begin{aligned} \epsilon_{\text{eff}} = & 0,25 \left[\epsilon_i(3p - 1) + \epsilon_m(2 - 3p) + \right. \\ & + \sqrt{\epsilon_i - \epsilon_m} \frac{9p^2 - 9p - 2 + 6\sqrt{2p(1-p)}}{(1-3p)^2} \times \\ & \left. \times \sqrt{\epsilon_i - \epsilon_m} \frac{9p^2 - 9p - 2 - 6\sqrt{2p(1-p)}}{(1-3p)^2} \sqrt{(3p - 1)^2} \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Результаты расчетов по этой формуле представлены на рис. 3. Характерной особенностью является отсутствие полюсов, что связано с нарушением условия плазмонного резонанса (вместо истинных граничных условий рассматриваются эффективные), а также наличие области концентраций, где эффективная проницаемость имеет мнимую часть (рис. 4). Возникновение "диссипации" связано с "накачкой" энергии в образующиеся резонансные конфигурации [33].

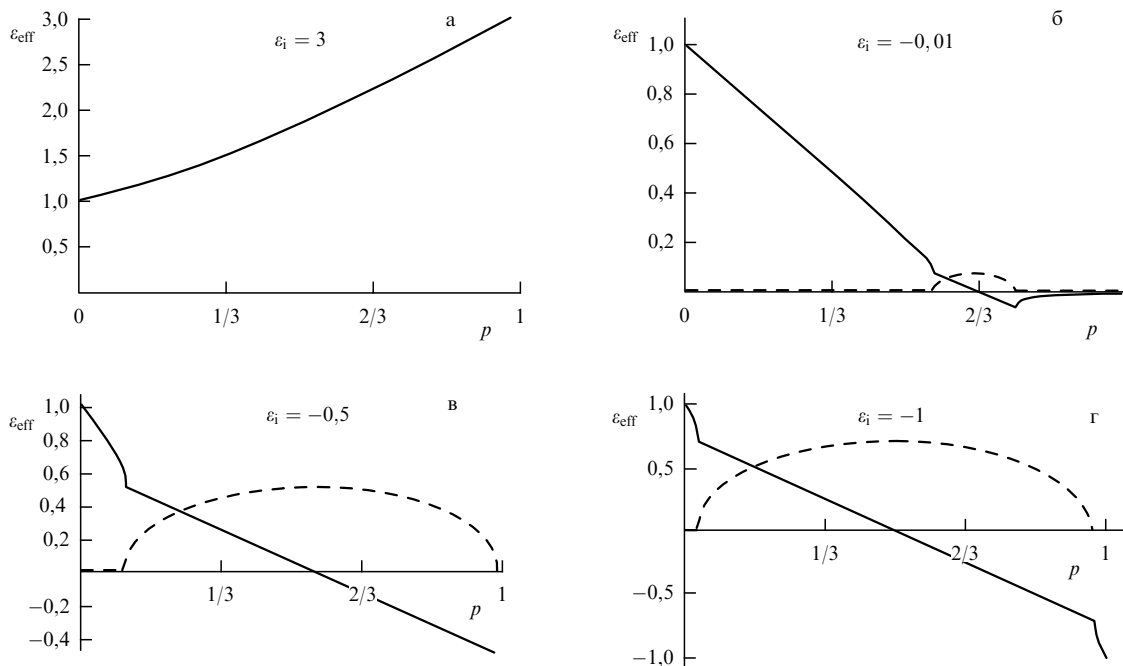


Рис. 3. Зависимость $\text{Re } \epsilon_{\text{eff}}$ (сплошная линия) и $\text{Im } \epsilon_{\text{eff}}$ (штриховая линия) от объемной доли включений p , в соответствии с ТЭС, при $\epsilon_m = 1$ и разных значениях параметра ϵ_i .

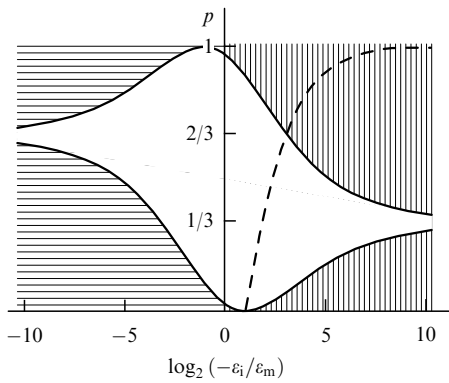


Рис. 4. Характерные точки кривой $\epsilon_{\text{eff}}(p)$ в зависимости от соотношения ϵ_i/ϵ_m . Незакрашенная область соответствует комплексным значениям ϵ_{eff} , полученным из ТЭС, горизонтальная штриховка — области, где функция $\epsilon_{\text{eff}}(p)$ имеет выпуклость вверх ($d^2\epsilon_{\text{eff}}/dp^2 < 0$), вертикальная штриховка — области с выпуклостью вниз. В незакрашенной области $\text{Re}(d^2\epsilon_{\text{eff}}/dp^2) = 0$. Штриховая линия показывает положение полюса в соответствии с формулой Гарнетта.

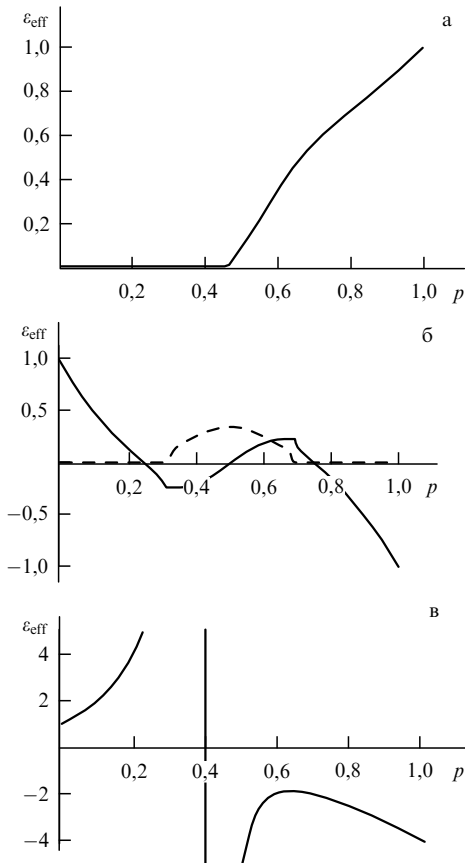


Рис. 5. Зависимость $\text{Re } \epsilon_{\text{eff}}$ (сплошная линия) и $\text{Im } \epsilon_{\text{eff}}$ (штриховая линия) от объемной доли включений p в соответствии с симметризованной формулой Гарнетта при следующих значениях параметров: (а) $\epsilon_m \rightarrow 0, \epsilon_i = 1$; (б) $\epsilon_m = 1, \epsilon_i = -1$; (в) $\epsilon_m = 1, \epsilon_i = -4$.

Симметризованная формула Гарнетта [53–57] дает как перколяционный переход, так и резонансное поведение. В данном подходе рассматривается вероятность P_I конфигураций, когда включение окружено материалом матрицы, и вероятность P_{II} конфигураций, когда частица матрицы окружена материалом включений. Как пока-

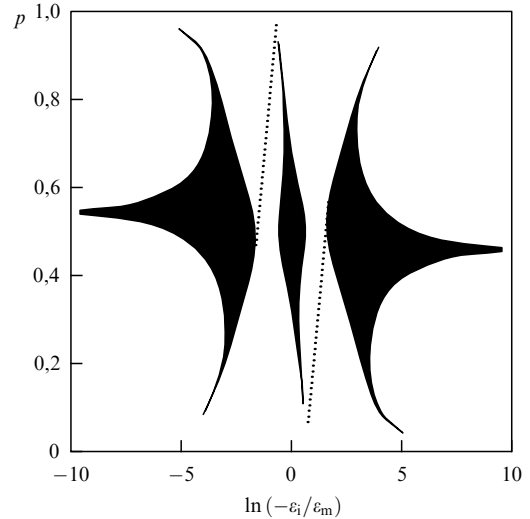


Рис. 6. Поведение функции ϵ_{eff} , вычисленной в соответствии с симметризованной формулой Гарнетта. Закрашенные области соответствуют комплексным значениям ϵ_{eff} . Пунктирные линии показывают положение полюса.

зано в работе [53],

$$P_I = \frac{u_I}{u_I + u_{II}}, \quad P_{II} = \frac{u_{II}}{u_I + u_{II}},$$

где

$$u_I = (1 - p^{1/3})^3, \quad u_{II} = [1 - (1 - p)^{1/3}]^3.$$

Для каждой из конфигураций I, II рассчитывается эффективная проницаемость в соответствии с теорией Гарнетта

$$\epsilon_I = \epsilon_m + 3p \frac{\epsilon_m(\epsilon_i - \epsilon_m)}{(\epsilon_i + 2\epsilon_m) - p(\epsilon_i - \epsilon_m)},$$

$$\epsilon_{II} = \epsilon_i + 3(1 - p) \frac{\epsilon_i(\epsilon_m - \epsilon_i)}{(\epsilon_m + 2\epsilon_i) - (1 - p)(\epsilon_m - \epsilon_i)},$$

что дает правильное описание возможных резонансов. На втором шаге происходит усреднение по конфигурациям в рамках ТЭС. Предполагается, что других конфигураций нет, поэтому уравнение, определяющее эффективную проницаемость, имеет вид

$$P_I \frac{\epsilon_{\text{eff}} - \epsilon_I}{2\epsilon_{\text{eff}} + \epsilon_I} + P_{II} \frac{\epsilon_{\text{eff}} - \epsilon_{II}}{2\epsilon_{\text{eff}} + \epsilon_{II}} = 0.$$

Теория дает конечный порог протекания $p_c \approx 0,455$ (рис. 5а). В целом поведение эффективной проницаемости носит довольно сложный характер: существуют области значений, когда наблюдаются полюсы и когда наблюдается эффективная диссипация (рис. 5б, в и рис. 6).

3. Выбор знака коэффициента преломления для среды Веселаго

К сожалению, развитый подход не всегда удается перенести на другие задачи, например на расчет коэффициента преломления, а именно не удается факторизовать аргумент так, чтобы можно было ограничиться лишь одной аналитической ветвью. Это связано с тем, что необходимо определить не только коэффициент преломления, но и импеданс. В случае, когда обе

восприимчивости пассивны ($\varepsilon'' > 0$, $\mu'' > 0$) или активны ($\varepsilon'' < 0$, $\mu'' < 0$), можно использовать алгоритм факторизации $\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2} = \sqrt{\varepsilon_1} \sqrt{\varepsilon_2}$, описанный выше, определяя коэффициент преломления по формуле $n = \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\mu}$ [58]. Легко видеть, что в пренебрежении потерями для среды Веселаго ($\varepsilon' < 0$, $\mu' < 0$) получается отрицательный коэффициент преломления. Однако в смешанном случае, например, когда среда электрически активна и магнитно пассивна, приходится брать другую ветвь корня, что заставляет искать более надежный и однозначный алгоритм нахождения коэффициента преломления.

На фоне вышеописанных трудностей в настоящее время в литературе ведется дискуссия (см. [26]) о способе и правомерности введения отрицательного коэффициента преломления. Складывается мнение [26, 28], что коэффициент преломления и импеданс описывают не свойства среды, а свойства распространяющейся по среде волны и что вообще не нужно вводить эти переменные, а надо работать с проницаемостями. Хотя данный подход не лишен некоторого смысла, для практических целей (решение интегральных уравнений в задачах дифракции, расчет волноводных систем и т.п.) мы с неизбежностью приходим к проблеме вычисления квадратных корней.

Заметим, что уравнения Максвелла можно переписать не в привычном виде с использованием магнитной и диэлектрической проницаемости

$$[\mathbf{k} \times \mathbf{E}] = k_0 \mu \mathbf{H}, \quad (16)$$

$$[\mathbf{k} \times \mathbf{H}] = -k_0 \varepsilon \mathbf{E}$$

($k_0 = \omega/c$), а используя коэффициент преломления $n = \sqrt{\varepsilon \mu}$ и импеданс $\zeta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$:

$$[\mathbf{k} \times \mathbf{E}] = (k_0 n)(\zeta \mathbf{H}), \quad (17)$$

$$[\mathbf{k} \times (\zeta \mathbf{H})] = -(k_0 n) \mathbf{E}.$$

Хотя данный подход обладает многими недостатками, особенно при переходе к статике, он оказывается полезным в нашем случае. Из соотношения

$$\mu = n \zeta, \quad \varepsilon = \frac{n}{\zeta} \quad (18)$$

видно, что для среды Веселаго знаки n и ζ должны быть различны, откуда следует, что распространяющаяся волна будет обратной. Действительно, в отсутствие потерь вектор Пойнтинга выражается через волновой вектор, коэффициент преломления и импеданс следующим образом:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*] = \frac{c}{8\pi} \frac{\mathbf{k}}{k_0} (\mathbf{E} \mathbf{E}^*) \frac{1}{\zeta n}. \quad (19)$$

Для сред с отрицательными диэлектрической и магнитной проницаемостями $\zeta n = \mu < 0$. Как следствие, вектор Пойнтинга и волновой вектор направлены в противоположные стороны.

Отметим, что знак коэффициента преломления все еще не определен, и у нас, в полном согласии с выводами работы [26], остаются два варианта:

$$\zeta > 0, \quad n < 0, \quad (20a)$$

$$\zeta < 0, \quad n > 0. \quad (20b)$$

Более того, в [26] было сделано утверждение о том, что, оставаясь в рамках уравнений Максвелла, окончательно решить эту дилемму, по-видимому, нельзя. Формальное использование дисперсионного уравнения

$$k^2 = (k_0 n)^2 \Rightarrow k = \pm k_0 \sqrt{\varepsilon \mu} \quad (21)$$

требует дополнительной информации к выбору нужной в данный момент аналитической ветви.

В работе [26] было предложено считать положительными числами как n , так и k (модуль волнового вектора), но при этом неопределенность в знаке переносится на выбор направления единичного орта: $\mathbf{k} = k \boldsymbol{\tau}$. Выбрав положительный знак у коэффициента преломления, мы должны в случае среды Веселаго не только направить $\boldsymbol{\tau}$ антипараллельно вектору Пойнтинга, но и изменить знак в формулах, описывающих явления, зависящие только от коэффициента преломления. Так, закон Снелиуса принимает вид

$$\frac{\sin \vartheta}{\sin \vartheta'} = -n, \quad (22)$$

где ϑ — угол падения в вакууме, а ϑ' — угол преломления. Это несколько неудобно: чтобы записать ту или иную формулу, надо априори знать, с какой средой мы работаем. Более того, это не спасает положение, так как остается вопрос о выборе направления $\boldsymbol{\tau}$.

Оказывается, что более удобно и, по всей видимости, правильно фиксировать не знак коэффициента преломления, как это сделано в [26], а знак действительной части импеданса. Общепринято выбирать действительную часть импеданса положительной [29], что приводит в случае среды Веселаго к варианту (20a), а в случае обыкновенных сред — к обычному выражению для коэффициента преломления. Как и в случае [26], это однозначно определяет знак коэффициента преломления с той лишь разницей, что все формулы (закон Снелиуса, эффект Доплера и т.д.) имеют один и тот же вид для всех случаев. При этом абсолютно все равно, какую ветвь квадратного корня использовать. Главное, чтобы при расчетах n и ζ бралась одна и та же ветвь. Если знак $\operatorname{Re} \zeta$ оказался отрицательным, то это значит, что мы имеем дело с волной, распространяющейся в обратном направлении.

Для подтверждения правильности такого подхода можно обратиться к работе Д.В. Сивухина [69], где дан оригинальный вывод выражения для плотности электромагнитной энергии в диспергирующей среде:

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{16\pi} \left\{ \frac{d(\omega \varepsilon)}{d\omega} \mathbf{E} \mathbf{E}^* + \frac{d(\omega \mu)}{d\omega} \mathbf{H} \mathbf{H}^* \right\} = \\ &= \frac{1}{16\pi} \left\{ \frac{d(\omega \varepsilon)}{d\omega} + \frac{\mu}{\varepsilon} \frac{d(\omega \mu)}{d\omega} \right\} \mathbf{E} \mathbf{E}^* = \\ &= \frac{c}{8\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{dk}{d\omega} \mathbf{E} \mathbf{E}^* = \frac{c}{8\pi} \frac{1}{\zeta v_{\text{gr}}} \mathbf{E} \mathbf{E}^*. \end{aligned} \quad (23)$$

Естественно предположить, что плотность энергии является положительной величиной. Следуя [69] (см. также [29]), запишем (23) в виде

$$\begin{aligned} w &= \frac{\mu}{8\pi} \frac{c}{\mu} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{dk}{d\omega} \mathbf{E} \mathbf{E}^* = \frac{c}{8\pi} \mathbf{E} \mathbf{E}^* \left(\mu \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \frac{d\omega}{dk} \right)^{-1} = \\ &= \frac{1}{8\pi} \mathbf{E} \mathbf{E}^* \left(\mu \frac{\omega}{k} \frac{d\omega}{dk} \right)^{-1} > 0. \end{aligned} \quad (24)$$

"Это неравенство должно соблюдаться для любых сред, у которых знаки ε и μ совпадают, поскольку оно выведено в предположении, что в среде может распространяться однородная монохроматическая волна, для которой

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu > 0.$$

В том же предположении имеет смысл говорить о групповой и фазовой скорости..., откуда легко получить неравенство

$$\mu \frac{\omega}{k} \frac{d\omega}{dk} = \mu v_{ph} v_{gr} > 0." [69] \quad (25)$$

Таким образом, при отрицательных значениях ε и μ знаки групповой и фазовой скоростей различны. Напомним, что групповая скорость связана с переносом энергии и информации [70, 71]. Поэтому именно ее следует рассматривать как положительную величину [28]. Возвращаясь к (23), приходим к требованию положительности импеданса. Действительно, (23) и (24) дают $\zeta v_{gr} > 0$.

Окончательный алгоритм определения коэффициента преломления состоит в выборе однозначной ветви корня квадратного, дающей положительную действительную часть характеристического импеданса. При этом все равно, где делать разрез, определяющий две однозначные аналитические ветви корня квадратного. Ветвь с отрицательной действительной частью импеданса соответствует волне, движущейся в отрицательном направлении, т.е. в (21) надо брать знак минус. Окончательно дисперсионное уравнение приобретает вид

$$k = \text{sgn}(\text{Re } \zeta) k_0 n. \quad (26)$$

Итак, чтобы определить знак коэффициента преломления и правильный знак в дисперсионном уравнении, следует прибегнуть к рассмотрению волны, с которой эти понятия связаны (см. также [28]). Используя (26) и одну из пар (20), мы получим правильное описание распространения волн.

Несмотря на то что рассуждения проводились для бездиссипативных сред, алгоритм (26) дает правильный знак коэффициента преломления в общем случае, в частности, когда по одной проницаемости среда пассивна, а по другой активна.

4. Заключение

При расчетах материальных параметров метаматериалов приходится сталкиваться с проблемой выделения однозначной аналитической ветви функции многих комплексных переменных. В работе показано, что, несмотря на отсутствие развитой математической теории, в квазистатическом приближении удается построить алгоритм, дающий однозначное, физически правильное решение при нахождении эффективных проницаемостей композитов, содержащих отрицательную диэлектрическую или магнитную проницаемость. Однако та же проблема выделения однозначной ветви, возникающая при переходе от описания электродинамических явлений с помощью пары диэлектрическая–магнитная проницаемость к описанию с помощью пары коэффициент преломления–импеданс, требует для своего решения

привлечения дополнительных физических представлений, а именно, требования положительности действительной части импеданса. Необходимость использовать различные ветви аналитической функции возникают при рассмотрении сред, которые являются одновременно магнитно-пассивными (мнимая часть магнитной проницаемости положительна) и электрически активными (мнимая часть диэлектрической проницаемости отрицательна) либо магнитно-активными и электрически пассивными. Заметим, что во всех остальных случаях, включая случай положительных проницаемостей, можно определить коэффициент преломления, как $n = \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\mu}$, и ограничиться лишь одной ветвью квадратного корня с разрезом по отрицательной действительной оси.

Авторы выражают благодарность за обсуждение и ценные замечания В.В. Шевченко, В.Г. Веселаго и А.Л. Эфросу. Работа была выполнена в рамках РФФИ проекта № 05-02-196444 НЦНИЛ и № 06-02-81053.

Список литературы

1. Веселаго В Г *УФН* **92** 517 (1967) [Veselago V G *Sov. Phys. Usp.* **10** 509 (1968)]
2. Pendry J B *Phys. Rev. Lett.* **85** 3966 (2000)
3. Priou A, Sihvola A, Tretyakov S, Vinogradov A (Eds) *Advances in Complex Electromagnetic Materials* (NATO ASI Series, 3: High Technology, Vol. 28) (Dordrecht: Kluwer Acad., 1997)
4. Zouhdi S, Sihvola A, Arsalane M (Eds) *Advances in Electromagnetics of Complex Media and Metamaterials* (NATO Science Series. Ser. II: Mathematics, Physics, and Chemistry, Vol. 89) (Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002)
5. Metamaterials Publications, <http://meta-materials.mit.edu/metamaterials/papers/papers.html>
6. Professor Sir John Pendry, <http://www3.imperial.ac.uk/people/j.pendry>
7. Исследовано в России. Investigated in Russia, http://www.jinr.ru/invest_in_Russia.html
8. Блюх К Ю, Блюх Ю П *УФН* **174** 439 (2004) [Bliokh K Yu, Bliokh Yu P *Phys. Usp.* **47** 393 (2004)]
9. Агранович В М, Гартштейн Ю Н *УФН* **176** 1051 (2006) [Agranovich V M, Gartstein Yu N *Phys. Usp.* **49** 1029 (2006)]
10. Шевченко В В *УФН* **177** 301 (2007) [Shevchenko V V *Phys. Usp.* **50** 287 (2007)]
11. Lindell I V et al. *Electromagnetic Waves in Chiral and Bi-Isotropic Media* (Boston: Artech House, 1994)
12. Kostin M V, Shevchenko V V, in *Proc. of Bianisotropics'93, Gomel, Belarus, 1993* (Eds A Sihvola, S Tretyakov, I Semchenko) (Helsinki: Univ. of Technology, 1993) p. 22
13. Kostin M V, Shevchenko V V, in *Proc. of 3rd Intern. Workshop on Chiral, Bi-isotropic and Bianisotropic Media* (Eds F Mariotte, J-P Parneix) (France: Perigueux, 1994) p. 49
14. Shevchenko V V, in *Proc. of 4th Intern. Conf. on Chiral, Bi-Isotropic and Bianisotropic Media* (Eds A Sihvola et al.) (State College: The Pennsylvania State Univ., 1995) p. 42
15. Kostin M V, Shevchenko V V, in *Proc. of 4th Intern. Conf. on Chiral, Bi-Isotropic and Bianisotropic Media* (Eds A Sihvola et al.) (State College: The Pennsylvania State Univ., 1995) p. 64
16. Vinogradov A P, Romanenko V E, in *Proc. of 4th Intern. Conf. on Chiral, Bi-Isotropic, and Bianisotropic Media* (Eds A Sihvola et al.) (State College: The Pennsylvania State Univ., 1995) p. 143
17. Pendry J B et al. *IEEE Trans. Micr. Theory Tech.* **47** 2075 (1999).
18. Шелкунов С А, Фриис Г Т *Антенны (Теория и практика)* (М.: Сов. радио, 1955)
19. Lagarkov A N, Sarychev A K, Smychkovich Y R, Vinogradov A P *J. Electromagn. Waves Appl.* **6** 1159 (1992)
20. Serdyukov A N et al. *Electromagnetics of Bi-Anisotropic Materials: Theory and Applications* (Amsterdam: Gordon and Breach Sci. Publ., 2001)
21. Smith D R et al. *Phys. Rev. B* **65** 195104 (2002)

22. Левин Л *Теория волноводов* (М.: Радио и связь, 1981)
23. Виноградов А П *Электродинамика композитных материалов* (М.: УРСС, 2001)
24. Born M, Wolf E *Principles of Optics* (Oxford: Pergamon Press, 1969) [Борн М, Вольф Э *Основы оптики* (М.: Наука, 1973)]
25. Ваганов Р Б, Каценеленбаум Б З *Основы теории дифракции* (М.: Наука, 1982)
26. Pokrovsky A L, Efros A L *Solid State Commun.* **125** 283 (2002)
27. Tayeb G, Petit R *Opt. Acta* **31** 1361 (1984)
28. Шевченко В В *Радиотехника и электроника* **48** 1202 (2003) [Shevchenko V V *J. Commun. Technol. Electron.* **48** 1102 (2003)]
29. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Электродинамика сплошных сред* (М.: Наука, 1992) [Landau L D, Lifshitz E M *Electrodynamics of Continuous Media* (Oxford: Pergamon Press, 1984)]
30. Landauer R *AIP Conf. Proc.* **40** 2 (1978)
31. Sanchez-Palencia E *Non-Homogeneous Media and Vibration Theory* (Berlin: Springer-Verlag, 1980) [Санчес-Паленсия Э *Неоднородные среды и теория колебаний* (М.: Мир, 1984)]
32. Жиков В В, Козлов С М, Олейник О А *Усреднение дифференциальных операторов* (М.: Физматлит, 1993)
33. Дыхне А М *ЖЭТФ* **59** 110 (1970) [Dykhne A M *Sov. Phys. JETP* **32** 63 (1971)]
34. Garnett J C M *Philos. Trans. R. Soc. London* **203** 385 (1904)
35. Garnett J C M *Philos. Trans. R. Soc. London* **205** 237 (1906)
36. Clausius R *Mechanische Wärmetheorie* Vol. 2 (Braunschweig: F. Vieweg, 1878) p. 62
37. Mossotti O F *Mem. Soc. Sci. Modena* **14** 49 (1850)
38. Lorenz H A *Wiedem. Ann.* **9** 641 (1880)
39. Lorentz L *Wiedem. Ann.* **11** 10 (1881)
40. Herring C J. *Appl. Phys.* **31** 1939 (1960)
41. Виноградов А П, Каримов А М, Сарычев А К *ЖЭТФ* **94** 301 (1988) [Vinogradov A P, Karimov A M, Sarychev A K *Sov. Phys. JETP* **67** 212 (1988)]
42. Оделевский В И *ЖТФ* **21** 667 (1951)
43. Оделевский В И *ЖТФ* **21** 678 (1951)
44. Оделевский В И *ЖТФ* **21** 1379 (1951)
45. Brown W F "Dielectrics", in *Handbuch der Physik* Vol. XVII (Ed. S Flügge) (Berlin: Springer-Verlag, 1956) p. 1 [Браун В *Диэлектрики* (М.: ИЛ, 1961)]
46. Bruggeman D A G *Ann. Phys. (Leipzig)* **24** 636 (1935)
47. Sarychev A K, Vinogradov A P *Phys. Status Solidi B* **117** K113 (1983)
48. Hui P M, Stroud D *Phys. Rev. B* **33** 2163 (1986)
49. Lagarkov A N, Sarychev A K *Phys. Rev. B* **53** 6318 (1996)
50. von Hippel A R *Dielectrics and Waves* (New York: Wiley, 1954) [фон Хиппель А Р *Диэлектрики и волны* (М.: ИЛ, 1960)]
51. Lichtenecker K, Kother Z. *Phys.* **32** 255 (1931)
52. Wagner K W *Arch. Electrochem.* **2** 371 (1914)
53. Sheng P *Phys. Rev. Lett.* **25** 60 (1980)
54. Niklasson G A, Granqvist C G *J. Appl. Phys.* **55** 3382 (1984)
55. Brouers F J. *Phys. C Solid State Phys.* **19** 7183 (1986)
56. Gibson U J, Buhrman R A *Phys. Rev. B* **27** 5046 (1983)
57. Granovsky A, Kuzmichev M, Clerc J P *J. Magn. Soc. Jpn* **23** 382 (1999)
58. Lagarkov A N, Kissel V N *Phys. Rev. Lett.* **92** 077401 (2004)
59. Симовский К Р *Радиотехника и электроника* **52** 1031 (2007) [Simovski C R *J. Commun. Technol. Electron.* **52** 953 (2007)]
60. Vinogradov A P, Aivaziyan A V *Phys. Rev. E* **60** 987 (1999)
61. Виноградов А П, Мерзлякин А М *ЖЭТФ* **121** 565 (2002) [Vinogradov A P, Merzlikin A V *JETP* **94** 482 (2002)]
62. Bergman D G *Phys. Rep.* **43** 377 (1978)
63. Lozovik Yu E, Klyuchnik A V, in *The Dielectric Function of Condensed Systems* (Eds L V Keldysh, D A Kirzhnits, A A Maradudin) (Amsterdam: Elsevier, 1987) p. 300
64. Виноградов А П, Панина Л В, Сарычев А К *ДАН СССР* **306** 847 (1989) [Vinogradov A P, Panina L V, Sarychev A K *Sov. Phys. Dokl.* **34** 530 (1989)]
65. Hui P M, Stroud D *Phys. Rev. B* **33** 2163 (1986)
66. Granek R, Abraham Nitzan J. *Chem. Phys.* **90** 3784 (1989)
67. Poincare H *Acta Math.* **XXVI** 43 (1902)
68. Osgood W F *Topics in the Theory of Functions of Several Complex Variables* (New York: Dover Publ., 1966)
69. Сивухин Д В *Оптика и спектроскопия* **3** 308 (1957)
70. Вайнштейн Л А *Электромагнитные волны* (М.: Радио и связь, 1988)
71. Brillouin L *Wave Propagation and Group Velocity* (New York: Academic Press, 1960)

On the effective constitutive parameters of metamaterials

A.P. Vinogradov, A.V. Dorofeenko

*Institute for Theoretical and Applied Electromagnetics,
ul. Izhorskaya 13, 125412 Moscow, Russian Federation
Tel. (7-495) 485-83 55. Fax (7-495) 484-26 33
E-mail: a-vinogr@yandex.ru*

S. Zouhdi

*Laboratoire de Génie Electrique de Paris
Supélec-Pierre & Marie Curie University, France*

Mixing formulas for the effective parameters of a composite material with negative permittivity inclusions are analyzed. Problems encountered in using the formulas are identified, and computational algorithms leading to physically meaningful solutions are presented. Refractive index calculation for media with arbitrary values of electric permittivity and magnetic permeability is discussed.

PACS numbers: **41.20.-q**, 78.20.Ci, 81.05.Rm

DOI: 10.3367/UFNr.0178.200805e.0511

Bibliography — 71 references

Received 7 December 2007

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **178** (5) 511–518 (2008)

Physics – Uspekhi **51** (5) (2008)