Май 2008 г. *Том 178, № 5*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Импеданс и параметрическое возбуждение осцилляторов

Б.Я. Зельдович

Заметка посвящена описанию одного или нескольких связанных осцилляторов с помощью линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Специальное внимание уделено двум независимым понятиям: матрице частоты (как кинематическому объекту рассмотрения) и матрице импеданса. Последняя матрица введена в явной форме. Показано, что зависимость именно этой матрицы от времени приводит к параметрическому возбуждению и несохранению адиабатических инвариантов.

PACS numbers: 05.45.Xt, **45.05.+x**, **84.30.–r** DOI: 10.3367/UFNr.0178.200805d.0489

Содержание

1. Введение

Один из популярных примеров параметрического резонанса в каждодневной жизни — качели. По общему убеждению, изменяя расстояние от точки подвеса качелей до центра масс качальщика, можно легко и эффективно возбуждать колебания качелей. Оставим пока в стороне вопрос о том, соответствует ли это убеждение физической реальности или нет. Для нас важнее следующее. Фольклорная традиция приписывает параметрическое возбуждение качелей модуляции частоты $\omega(t) = \sqrt{g/L}$, где g [м с$^{-2}$] — ускорение силы тяжести, L [м] — расстояние между массой и осью подвеса. Знатоки в этом случае любят ссылаться на уравнение Матьё:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 \left[1 + \frac{2\omega_1}{\omega_0} \cos(pt)\right] x(t) = 0\,. \tag{1.1}$$

Общеизвестно, что если "мгновенная частота $\omega(t) \approx \approx \omega_0 + \omega_1 \cos(pt)$" модулирована с периодом $T = 2\pi/p$, достаточно близким к половине периода $T_0 = 2\pi/\omega_0$ немодулированного движения, то возникает параметрическая неустойчивость решения уравнения Матьё (1.1). Однако в лабораторных условиях можно отдельно модулировать длину $L(t)$ и эффективное ускорение силы тяжести $g(t)$. Последнее можно осуществить (рис. 1), двигая ось подвеса вверх и вниз с ускорением $a(t)$, так что $g_{\mathrm{eff}}(t) = g_0 + a(t)$.

Переупрощая основную цель настоящей заметки, можно сказать, что мы пытаемся в ней ответить на следующий вопрос. ***Верно ли, что модуляция именно мгновенной частоты*** $\omega(t) = \sqrt{g(t)/L(t)}$ ***приводит к параметрическому возбуждению***?

Удивительно, но большинство специалистов по параметрическим процессам отвечает на этот вопрос "да", хотя правильный ответ должен быть "нет"! И действительно, мы вводим в этой заметке понятие *импеданса для систем с сосредоточенными постоянными*, в том числе для механических систем, и показываем, что модуляция импеданса маятника $Z(t) = \sqrt{m^2 L^3(t)\, g_{\mathrm{eff}}(t)}$ приводит к параметрическому возбуждению. Иными словами, если мгновенная частота $\omega(t) = \sqrt{g(t)/L(t)}$ не изменяется со временем, а импеданс $Z(t)$ изменяется, то параметрическое возбуждение возможно. Напротив, если импеданс $Z(t)$ постоянен во времени, а мгновенная частота $\omega(t) = \sqrt{g(t)/L(t)}$ модулирована во времени, то параметрическое возбуждение осциллятора полностью отсутствует.

Б.Я. Зельдович. CREOL College of Optics and Photonics of the University of Central Florida,
CREOL-UCF, 4000 Central Florida Blvd, Orlando, FL 32816-2700, USA
Tel. (407) 823-68-31
Fax (407) 823-68-80
E-mail: boris@creol.ucf.edu

Статья поступила 19 октября 2007 г., после доработки 16 января 2008 г.

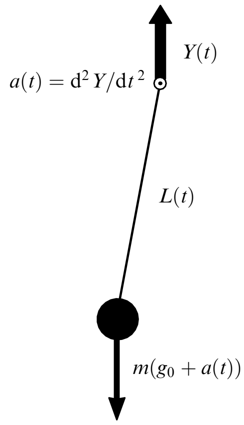

Рис. 1. Маятник (или качели), точка подвеса которого имеет промодулированные во времени высоту $Y(t)$ и длину $L(t)$. Вертикальное ускорение точки подвеса $a(t) = \mathrm{d}^2 Y/\mathrm{d}t^2$ приведет к изменению эффективной силы тяжести $mg_{\mathrm{eff}}(t) = m\big(g_0 + a(t)\big)$.

Кажущееся противоречие с хорошо известными математическими фактами об уравнении Матьё (1.1) разрешается достаточно просто. Именно, следует начинать с системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) первого порядка. Как раз при сведении этой системы к ОДУ второго порядка (1.1) и делаются дополнительные предположения: иногда правильные, а иногда нет.

Подобная ситуация имеет место в электрической LC-цепочке из индуктивности L и емкости C, частота которой $\omega = 1/\sqrt{LC}$, а импеданс $Z = \sqrt{L/C}$. И снова большинство специалистов считает (ошибочно), что модуляция частоты является причиной параметрического возбуждения, в то время как в действительности только модуляция импеданса приводит к параметрическому резонансу.

Похожая ситуация имеет место и в классической электродинамике. Большинство работающих в оптике считает, что френелевское отражение при нормальном падении волны на границу двух сред обусловлено скачком скорости распространения $v = c/n$. В действительности отражение при нормальном падении происходит из-за скачка импеданса $Z = \sqrt{\mu/\varepsilon}$, в то время как скачок скорости распространения $v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ может быть произвольным. Технология "Стелс" использует магнитно-диэлектрические покрытия, согласующие импеданс покрытий со значением 377 Ом, т.е. с величиной импеданса вакуума. В телевизионной промышленности согласуют 75-омный коаксиальный кабель с другим 75-омным кабелем, при этом скорости распространения в соединяемых кабелях не играют роли. Источник недоразумения оптиков состоит в том, что в оптическом диапазоне $\mu = \mu_{\mathrm{vac}}$, и поэтому импеданс и скорость распространения в оптике оказываются жестко связанными: $v = c/n$ и $Z = [377\ \text{Ом}]/n$.

В значительной части представленного ниже материала мы пользуемся терминологией лагранжевых и гамильтоновых уравнений с каноническими (симплектическими) преобразованиями и производящими функциями (см., например, [1–6]). *Тем не менее утверждения, которые мы делаем о независимых ролях импеданса и частоты, вполне могут быть поняты непосредственно из рассматриваемых систем ОДУ, без ссылок на лагранжеву или гамильтонову механику. В частности, мы призываем читателя начать с уравнений* (3.5)*, прочесть до конца раздел 3 и проследовать в раздел 4*. После этого, если интерес к предмету еще не будет утрачен, можно вернуться к обсуждению лагранжианов и гамильтонианов в разделе 2.

2. Лагранжиан, импульсы, гамильтониан: основные уравнения и определения

Мы рассматриваем систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Это будет не самая общая система ОДУ, но та, которую можно получить в качестве уравнений Эйлера–Лагранжа из вариационного принципа с билинейным лагранжианом. Неудивительно, что соответствующий гамильтониан оказывается тоже билинейным.

Мы будем использовать "векторы" и "транспонированные векторы" для n координат и соответствующих скоростей:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \cdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \qquad \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot x_1(t) \\ \cdots \\ \dot x_n(t) \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}(t) = \big(x_1(t), \ldots, x_n(t)\big), \qquad \dot{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}(t) = \big(\dot x_1(t), \ldots, \dot x_n(t)\big). \tag{2.1}$$

Будем считать, что функция Лагранжа билинейна по координатам и скоростям:

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = -\frac{1}{2}\,\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\hat K\mathbf{x} + \frac{1}{2}\,\dot{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\hat M\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\hat\beta\dot{\mathbf{x}} \equiv$$
$$\equiv -\frac{1}{2}\,x_i K_{ij} x_j + \frac{1}{2}\,\dot x_i M_{ij}\dot x_j + x_i\beta_{ij}\dot x_j\,. \tag{2.2}$$

Здесь $K_{ij}(t)$, $M_{ij}(t)$ и $\beta_{ij}(t)$ — матрицы $n \times n$, $\hat K$ и $\hat M$ — симметричные матрицы, а $\hat\beta$ может быть как симметричной матрицей, так и не вполне симметричной; все матрицы могут зависеть от времени. Как обычно, подразумевается суммирование по повторяющимся индексам, а символ шляпки над буквой обозначает матрицу. Обозначения K, M и β выбраны такими, чтобы напоминать константу упругости K осциллятора, массу M и магнитное поле B. Временна́я зависимость антисимметричной части $\hat\beta$ приводит согласно закону электромагнитной индукции Фарадея к вихревому электрическому полю, т.е. к электродвижущей силе.

Стандартные обозначения для векторов импульсов $\mathbf{p}$ и сил $\mathbf{f}$ имеют вид

$$p_i = p_i(t) \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot x_i} = M_{ij}\dot x_j + \hat\beta^{\mathrm{T}}_{ij} x_j\,,$$
$$f_i = f_i(t) \equiv \frac{\partial L}{\partial x_i} = -K_{ij}x_j + \hat\beta_{ij}\dot x_j\,, \tag{2.3}$$
$$\mathbf{p} = \hat M\dot{\mathbf{x}} + \hat\beta^{\,\mathrm{T}}\mathbf{x}\,, \qquad \mathbf{f} = \hat\beta\dot{\mathbf{x}} - \hat K\mathbf{x}\,.$$

Можно выразить скорости через импульсы:

$$\dot{\mathbf{x}} = \hat M^{-1}(\mathbf{p} - \hat\beta^{\,\mathrm{T}}\mathbf{x})\,. \tag{2.4}$$

Это выражение нужно также для перехода к гамильтониану:

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t) = \mathbf{p}^{\mathrm{T}}\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{p}) - L\big(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{p}), t\big) =$$
$$= \frac{1}{2}(\mathbf{p}^{\mathrm{T}} - \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\hat\beta)\,\hat M^{-1}(\mathbf{p} - \hat\beta^{\,\mathrm{T}}\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\,\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\hat K\mathbf{x}\,. \tag{2.5}$$

Стандартные вариационные уравнения Эйлера–Лагранжа имеют вид $\mathrm{d}\mathbf{p}/\mathrm{d}t = \mathbf{f}$. Другой способ выразить ту же самую мысль — записать канонические уравнения Гамильтона:

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}^{\mathrm{T}}}\,, \qquad \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}^{\mathrm{T}}}\,. \tag{2.6}$$

Для гамильтониана (2.5) или, что эквивалентно, для лагранжиана (2.2) эти уравнения таковы

$$\begin{aligned} \dot{p}_i(t) &= \beta_{ij}\dot{x}_j - K_{ij}x_j \equiv (\hat{\beta}\hat{M}^{-1})_{ij}\,p_j - (K + \hat{\beta}\hat{M}^{-1}\hat{\beta}^{\mathrm{T}})_{ij}x_j\,, \\ \dot{x}_i(t) &= M_{ij}^{-1}\,p_j - (\hat{M}^{-1}\hat{\beta}^{\mathrm{T}})_{ij}x_j\,. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Те же уравнения могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} \mathbf{p}(t) \\ \mathbf{x}(t) \end{pmatrix} = V\begin{pmatrix} \mathbf{p}(t) \\ \mathbf{x}(t) \end{pmatrix}, \\ &V = \begin{pmatrix} \hat{\beta}\hat{M}^{-1} & -(\hat{K} + \hat{\beta}\hat{M}^{-1}\hat{\beta}^{\mathrm{T}}) \\ \hat{M}^{-1} & -\hat{M}^{-1}\hat{\beta}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

где V — матрица $2n \times 2n$. Если свойства нашей системы стационарны, т.е. если все три матрицы $\hat{M}$, $\hat{K}$ и $\hat{\beta}$ не зависят от времени, то эти уравнения можно записать также в виде "второго закона Ньютона":

$$\hat{M}\,\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2} = (\hat{\beta} - \hat{\beta}^{\mathrm{T}})\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} - \hat{K}\mathbf{x} \quad (\text{стационарный случай})\,. \tag{2.9}$$

Это означает, что в стационарном случае важна только антисимметричная часть матрицы $\hat{\beta}$ в соответствии с выражением $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\big(\mathbf{A}(\mathbf{r})\big)$ в известном случае движения заряженной частицы в присутствии магнитного поля $\mathbf{B}$ в трехмерном пространстве. Само по себе уравнение (2.9) справедливо в стационарном случае для любого числа измерений. Ниже мы в основном будем пользоваться системой (2.8) для импульсов и координат.

3. Одномерный осциллятор

Для одномерного осциллятора (одна координата x, один импульс p) уравнения движения таковы:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\beta(t)}{m(t)}\,p - \left[K(t) + \frac{\beta^2}{m}\right]x\,, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{m(t)}\,p - \frac{\beta(t)}{m(t)}\,x\,. \tag{3.1}$$

В одномерном случае можно перейти к новым каноническим переменным с помощью симплектического преобразования и к новой константе упругости:

$$\begin{aligned} &p_{\mathrm{new}} = p_{\mathrm{old}} - \beta(t)x_{\mathrm{old}}\,, \qquad x_{\mathrm{new}} = x_{\mathrm{old}}\,, \\ &K_{\mathrm{new}}(t) = K_{\mathrm{old}}(t) - \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}\,. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Это преобразование основано на производящей функции $\Gamma(p_{\mathrm{new}}, x_{\mathrm{old}})$ (см., например, [1–6]):

$$\begin{aligned} &\Gamma(p_{\mathrm{new}}, x_{\mathrm{old}}, t) = p_{\mathrm{new}}x_{\mathrm{old}} - \frac{1}{2}\,\beta(t)x_{\mathrm{old}}^2\,, \\ &x_{\mathrm{new}} = \frac{\partial\Gamma}{\partial p_{\mathrm{new}}}\,, \qquad p_{\mathrm{old}} = \frac{\partial\Gamma}{\partial x_{\mathrm{old}}}\,, \qquad H_{\mathrm{new}} = H_{\mathrm{old}} + \frac{\partial\Gamma}{\partial t}\,. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Стоит отметить, что похожее преобразование $\mathbf{x}_{\mathrm{new}} = \mathbf{x}$, $\mathbf{p}_{\mathrm{new}} = \mathbf{p} - \hat{\beta}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$ не является симплектическим (т.е. каноническим), начиная уже с двумерного вектора $\mathbf{x}$. (Вызывает улыбку то, что именно такое, не симплектическое, преобразование представляют как гамильтоново читателям книги [7], называющейся *Введение в симплектическую геометрию*.)

Возвращаясь к одномерному случаю, приходим к результирующему гамильтониану

$$H_{\mathrm{new}}(p_{\mathrm{new}}, x_{\mathrm{new}}, t) = 0{,}5\left[\frac{p_{\mathrm{new}}^2}{m(t)} + K_{\mathrm{new}}(t)x_{\mathrm{new}}^2\right], \tag{3.4}$$

а уравнения принимают вид

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -K(t)x\,, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{m(t)}\,p\,, \tag{3.5}$$

где для краткости опущен индекс "new". *На самом деле для одномерного случая читатель может начать с уравнений* (3.5)*, полностью игнорируя весь предыдущий "высокий штиль" β-членов.*

Теперь пора ввести две величины: мгновенную частоту $\omega(t)$ и мгновенное значение импеданса $Z(t)$, определениями

$$\begin{aligned} &\omega(t) = \sqrt{\frac{K(t)}{m(t)}}\,, \qquad Z(t) = \sqrt{K(t)m(t)}\,, \\ &K(t) = \omega Z\,, \qquad \frac{1}{m(t)} = \frac{\omega}{Z}\,. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Используя частоту и импеданс, можно переписать уравнения (3.5) в виде

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -\omega(t)Z(t)x(t)\,, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega(t)}{Z(t)}\,p(t)\,. \tag{3.7}$$

Возможное происхождение термина "импеданс" для $Z(t)$ таково. Английский глагол "to impede" означает "мешать", "останавливать продвижение", "загораживать", например "задерживать продвижение войск". Если добавить в уравнения член с вязкой силой $f_{\mathrm{visc}} = -Z_{\mathrm{visc}}\,\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ (см. приложение В), то размерность Z_{visc} оказывается той же, что и у нашего импеданса $Z(t)$. Критическое значение затухания соответствует $Z_{\mathrm{visc}} = 2Z$, когда оба собственных значения временнóй эволюции переключаются с осцилляторно-затухающих на чисто затухающие. Так называемый фактор качества Q колебательной системы (например, LRC-контура в электронике) определяется как $Q = Z/Z_{\mathrm{visc}}$, он равен отношению $Q = \omega_0/\gamma$ частоты ω_0 к константе затухания γ [с$^{-1}$] (для энергии), $\gamma = Z_{\mathrm{visc}}/m$. Кстати, и величина $\beta(t)$ имеет размерность импеданса. Эта размерность зависит от размерности координаты x. Физический смысл импеданса в одномерном случае будет выявлен ниже как *аспектное отношение ячейки фазового пространства.*

Можно произвести еще одно каноническое (симплектическое) преобразование и перейти к новым переменным — новой координате X и новому импульсу P:

$$p(t) = \sqrt{Z(t)}\;P(t)\,, \qquad x(t) = \frac{1}{\sqrt{Z(t)}}\,X(t)\,. \tag{3.8}$$

Соответствующая система ОДУ в новых переменных такова:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} P(t) \\ X(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g(t) & -\omega(t) \\ \omega(t) & g(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P(t) \\ X(t) \end{pmatrix}, \qquad g(t) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\big(Z(t)\big). \tag{3.9}$$

Уравнения (3.9) получаются проще всего прямо из (3.7) и (3.8); можно также убедиться в том, что соответствующие производящая функция и новый гамильтониан имеют вид

$$\Gamma(x, P, t) = xP\sqrt{Z(t)}, \qquad H_{\text{new}}(P, X, t) = H_{\text{old}} + \frac{\partial\Gamma}{\partial t} = g(t)PX + \frac{\omega(t)}{2}(X^2 + P^2) \tag{3.10}$$

и что уравнения (3.9) являются прямым следствием гамильтониана (3.10).

Удобно ввести комплексные амплитуды $a(t)$, $a^*(t)$ и соответствующие медленно изменяющиеся амплитуды $b(t)$, $b^*(t)$ определениями

$$a(t) = \frac{X(t) + \mathrm{i}P(t)}{\sqrt{2\hbar}}, \qquad a^*(t) = \frac{X(t) - \mathrm{i}P(t)}{\sqrt{2\hbar}}, \tag{3.11}$$

$$b(t) = a(t)\exp\left(\mathrm{i}\int_0^t \omega(t')\,\mathrm{d}t'\right), \qquad b^*(t) = a^*(t)\exp\left(-\mathrm{i}\int_0^t \omega(t')\,\mathrm{d}t'\right). \tag{3.12}$$

С точки зрения классической механики постоянная $2\hbar$ может быть произвольной, например, даже равной 2. Удобство интерпретации $\hbar$ как постоянной Планка будет ясно в квантово-механическом случае, поскольку энергия (гамильтониан) для статических ω и Z выражается в виде $H = \hbar\omega(aa^* + a^*a)/2$, где a интерпретируется как оператор уничтожения одного кванта $\hbar\omega$. Оставаясь в рамках классической механики, мы получаем *точные* линейные ОДУ для "быстрых" амплитуд $a(t)$, $a^*(t)$ и "медленно изменяющихся" амплитуд $b(t)$, $b^*(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{i}\omega a(t) + g(t)\,a^*(t), \qquad \frac{\mathrm{d}a^*}{\mathrm{d}t} = g(t)a(t) + \mathrm{i}\omega a^*(t), \tag{3.13}$$

$$g(t) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\big(Z(t)\big), \tag{3.14}$$

$$\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t} = g(t)b^*(t)\exp\left[2\mathrm{i}\int_0^t \omega(t')\,\mathrm{d}t'\right], \qquad \frac{\mathrm{d}b^*}{\mathrm{d}t} = g(t)b(t)\exp\left[-2\mathrm{i}\int_0^t \omega(t')\,\mathrm{d}t'\right]. \tag{3.15}$$

Системы (3.13) или (3.15) позволяют сделать важный вывод. Именно, *даже в случае зависящей от времени частоты $\omega(t)$ адиабатический инвариант $aa^* \equiv bb^* = H/\hbar\omega$ строго сохраняется, если импеданс $Z(t)$ постоянен и тем самым $g(t) \equiv 0$.*

Следуя идеям, высказанным в [8] П. Парадоксовым, можно провести квантово-механическую интерпретацию установленного выше результата классической теории. В самом деле, волновые функции $\psi_n(x)$ стационарных состояний квантового осциллятора, т.е. состояний с определенным номером возбуждений n, — это хорошо известные эрмит-гауссовы функции с математическим ожиданием $\left\langle\big(a(t) + a^*(t)\big)^2\right\rangle = 2n + 1$, так что

$$\psi_n(x) = \text{const}\, H_n\left(x\sqrt{\frac{Z}{\hbar}}\right)\exp\left(-\frac{\big(x\sqrt{Z/\hbar}\big)^2}{2}\right), \tag{3.16}$$

$$\langle x^2\rangle = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\hbar}{Z}, \qquad \langle p^2\rangle = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar Z, \qquad \langle x^2\rangle\langle p^2\rangle = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2\hbar^2, \tag{3.17}$$

с минимальными дисперсиями в основном гауссовом состоянии, $n = 0$.

Из коммутационных соотношений мы знаем, что элементарная площадь ячейки фазового пространства $\delta p\,\delta x$ порядка $\hbar$ [Дж с] (на самом деле $2\pi\hbar(n + 1/2)$ для n-го состояния осциллятора). Поэтому элементарный квант энергии равен, согласно М. Планку, $\hbar\omega$ [Дж] (см. в приложении Д уравнение (Д.8)), *где частота ω* [рад с^{-1}] *— кинематический параметр. Форма* траектории в фазовом пространстве представляет собой *эллипс*[1]. ***Физический смысл импеданса — это аспектное отношение $\delta p/\delta x$ траектории осциллятора в фазовом пространстве:***

$$\delta p\,\delta x \approx \hbar\left(n + \frac{1}{2}\right), \qquad \frac{\delta p}{\delta x} = Z. \tag{3.18}$$

Подчеркнем, что аспектное отношение $\delta p/\delta x$ характеризует орбиту движения осциллятора в любом стационарном состоянии, включая состояние движения в классической механике. Импеданс Z имеет размерность [Дж с x^{-2}], какова бы ни была размерность координаты x.

Если импеданс $Z(t)$ не изменяется со временем, то каждая из эрмит-гауссовых волновых функций сохраняет свою форму, размер ($\Delta x \approx \sqrt{\hbar(n + 1/2)/Z}$) и номер n. Изменения проявляются лишь во временно́м фазовом множителе. То же можно интерпретировать и несколько иначе. Теорема Лиувилля классической механики утверждает, что площадь на фазовой плоскости сохраняется. Если сохраняется и аспектное отношение (т.е. импеданс), то из этого следует сохранение адиабатического инварианта.

Другой способ понять исключительный случай постоянного импеданса — записать гамильтониан (3.4) в исходных координате x и импульсе p, выразив массу m и упругость K через частоту и импеданс:

$$H(x, p) = p\dot{x}(p) - L\big(x, \dot{x}(p)\big) = 0{,}5\omega(t)\left(x^2 Z(t) + \frac{p^2}{Z(t)}\right). \tag{3.19}$$

Такая форма записи показывает, что для постоянного (т.е. не зависящего от времени) импеданса Z в нашей одномерной задаче, временна́я зависимость частоты $\omega(t)$ означает лишь зависящее от времени изменение масштаба гамильтониана (ср. также с (3.10)). Такая зависи-

[1] Вот как военные определяют, что такое эллипс: "Эллипс — это круг, вписанный в квадрат 3 на 4" (я узнал это определение от покойного ныне Александра Анатольевича (Сани) Овчинникова). В известном смысле переход от амплитуд a, a^* к обычным импульсу p и координате x как раз и состоит в замене аспектного отношения круга (1:1) отношением $\delta p/\delta x = Z^{1/2}/Z^{-1/2}$ вместо (3:4).

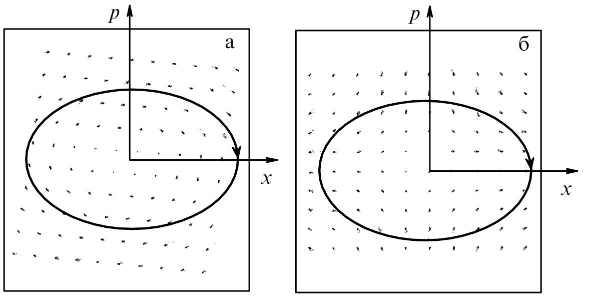

Рис. 2. (а) Векторное поле, отвечающее возмущению частоты, и стационарная траектория. (б) Векторное поле, отвечающее возмущению импеданса, и стационарная траектория.

мость гамильтониана от времени отвечает замене временно́й переменной

$$\tau(t) = \int_0^t \omega(t')\,\mathrm{d}t'\,. \tag{3.20}$$

Тем самым зависимость от времени частоты при постоянном импедансе не изменяет траекторий в фазовом пространстве (x, p), но изменяет их в расширенном пространстве (x, p, t). В разделе 5 мы покажем, однако, что для многомерных связанных осцилляторов предположения о не зависящей от времени импедансной матрице не достаточно для того, чтобы удерживать неизменными траектории в фазовом пространстве $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$.

Рисунок 2 демонстрирует различие действий на фазовой плоскости (x, p) двух видов возмущений исходно стационарного гамильтониана. На рисунке 2а приведено векторное поле возмущения частоты, а на рис. 2б представлено то же для возмущения импеданса. Видно, что именно возмущение импеданса пытается внести нетривиальные изменения в исходный стационарный эллипс.

Адиабатический инвариант $E/\hbar\omega$ сохраняется с хорошей точностью, если $Z(t)$ изменяется адиабатически, т.е. медленно на масштабе времени $\tau \approx 1/\omega$, поскольку связь между амплитудами $b(t)$ и $b^*(t)$ очень быстро осциллирует и поэтому не дает накапливающегося эффекта. Следуя П. Парадоксову [8], можно сказать, что параметрические переходы между состоянием n и состояниями $(n \pm 2)$ находятся вне резонанса с внешними возмущениями. Эта интерпретация показывает, что приблизительное сохранение адиабатического инварианта связано, главным образом, с отсутствием параметрических резонансов: первого порядка ($\omega_{\text{parameter}} = 2\omega_0$) или какого-либо высшего порядка теории возмущений, и необязательно из-за медленности изменения параметра (см. "языки Арнольда" в книге [2]).

В наших обозначениях параметрическое возбуждение — это изменение адиабатического инварианта bb^* (т.е. изменение числа квантов); оно может происходить лишь в случае, когда импеданс $Z(t)$ зависит от времени и, значит, $g(t) = 0{,}5\,\mathrm{d}\ln\big(Z(t)\big)/\mathrm{d}t \neq 0$. Параметрическое возбуждение особенно эффективно, когда параметр импеданса системы $Z(t)$ изменяется во времени на удвоенной частоте колебаний: в этом случае возникает медленно изменяющаяся связь между $b(t)$ и $b^*(t)$. Например, если

$$\begin{aligned} &\omega(t) \approx \omega_0 = \text{const}\,, \\ &Z(t) = Z_0 + Z_1 \cos(2\omega_0 t)\,, \qquad |Z_1| \ll Z_0\,, \end{aligned} \tag{3.21}$$

то

$$g(t) \approx g_1 \sin(2\omega_0 t)\,, \qquad g_1 = -\frac{Z_1}{Z_0}\,\omega_0\,. \tag{3.22}$$

Для слабой модуляции Z_1/Z_0 вблизи параметрического резонанса можно пренебречь быстроосциллирующими членами в уравнениях для $b(t)$, $b^*(t)$. Тогда уравнения и их решение принимают вид

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t} = \mathrm{i}\,\frac{g_1}{2}\,b^*(t)\,, \qquad \frac{\mathrm{d}b^*}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{i}\,\frac{g_1}{2}\,b(t)\,, \\ &b(t) = \cosh\frac{|g_1|t}{2}\,b(0) + \mathrm{i}\,\frac{g_1}{|g_1|}\,\sinh\frac{|g_1|t}{2}\,b^*(0)\,, \end{aligned} \tag{3.23}$$

явно демонстрируя параметрическое усиление с темпом экспоненциального возрастания амплитуды $|g_1|/2$ [c^{-1}]. Это вполне согласуется с картиной резонансных переходов между состояниями n и состояниями $(n \pm 2)$, разности энергий для этих переходов равны $\pm 2\hbar\omega_0$.

Сравним результат (3.23) с решениями уравнения Матьё. Представляя вещественную неизвестную переменную $x(t)$ в виде суммы комплексной амплитуды и сопряженной ей амплитуды,

$$x(t) = \frac{1}{2}\big[c(t)\exp(-\mathrm{i}\omega_0 t) + c^*(t)\exp(\mathrm{i}\omega_0 t)\big]\,, \tag{3.24}$$

можно свести уравнение Матьё (1.1) при $p = 2\omega_0$, т.е. в точном параметрическом резонансе и в том же приближении, к следующим связанным уравнениям и их решениям:

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{i}\,\frac{\omega_1}{2}\,c^*(t)\,, \qquad \frac{\mathrm{d}c^*}{\mathrm{d}t} = \mathrm{i}\,\frac{\omega_1}{2}\,c(t)\,, \\ &c(t) = \cosh\frac{|\omega_1|t}{2}\,c(0) - \mathrm{i}\,\frac{\omega_1}{|\omega_1|}\,\sinh\frac{|\omega_1|t}{2}\,c^*(0)\,. \end{aligned} \tag{3.25}$$

В этом случае параметрическое усиление происходит со скоростью экспоненциального возрастания амплитуды $|\omega_1|/2$ [c^{-1}].

Рассмотрим теперь два случая для маятника: когда модулируется длина и когда модулируется сила тяжести (см. раздел 4). В первом случае $g_{\text{eff}} = \text{const}$ и из соотношений (4.4) раздела 4 получаем

$$\begin{aligned} &L(t) = L_0 + L_1\cos(2\omega_0 t)\,, \\ &\omega(t) \approx \omega_0\left[1 - \frac{L_1}{2L_0}\cos(2\omega_0 t)\right], \\ &Z(t) \approx Z_0\left[1 + \frac{3L_1}{2L_0}\cos(2\omega_0 t)\right]. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Во втором случае $L(t) = \text{const}$ и

$$\begin{aligned} &g_{\text{eff}}(t) = g_0 + a_1\cos(2\omega_0 t)\,, \\ &\omega(t) \approx \omega_0 + \omega_0\left(\frac{a_1}{2g_0}\right)\cos(2\omega_0 t)\,, \\ &Z(t) \approx Z_0 + Z_0\left(\frac{a_1}{2g_0}\right)\cos(2\omega_0 t)\,. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Сравнивая решения (3.23) и (3.25), мы приходим к заключению, что уравнение Матьё (1.1) для случая модуляции длины при постоянной силе тяжести при интерпретации угла $\varphi(t)$ в качестве $x(t)$ дает *неправильный* результат для параметрического темпа усиления (в три раза меньший правильного результата; последний равен $3\omega_0|L_1|/4L_0$) и *неправильную* фазу усиливаемой компоненты. То же самое уравнение Матьё (1.1) дает правильный темп возрастания амплитуды $\omega_0|a_1|/4g_0$ и правильную фазу для модуляции силы тяжести при $L = \mathrm{const}$.

Это же можно сформулировать и несколько иначе. Если интерпретировать $x(t)$ в уравнении Матьё (1.1) как угловой момент маятника M_z, то модуляция длины даст, согласно (1.1), в три раза меньший коэффициент усиления (по сравнению с правильным), но правильную фазу усиливаемой компоненты. В то же время модуляция эффективной силы тяжести при постоянной длине дает верный результат для усиления, но ошибочный результат для фазы усиливаемой компоненты [2].

4. Конкретные примеры: маятник, LC-контур в электронике

Рассмотрим маятник, изображенный на рис. 1. Обозначим через $\varphi(t)$ мгновенное значение угла, составляемого маятником с вертикалью. Угловой момент маятника по отношению к оси подвеса z равен $M_z = I(t)\dot\varphi = mL^2(t)\dot\varphi$, где $I(t) = mL^2(t)$ — момент инерции по отношению к упомянутой выше оси. Величины φ и M_z — обобщенные канонические координата и импульс соответственно. Вертикальная компонента силы F_y, действующей на массу, и соответствующий момент силы T в системе координат подвеса выражаются в виде

$$|F_y| = m\big(g_0 + a(t)\big) \equiv mg_{\mathrm{eff}}(t)\,, \qquad a(t) = \frac{\mathrm{d}^2 Y(t)}{\mathrm{d}t^2}\,, \quad (4.1)$$

$$T(t) = -L(t)F_y(t)\sin\varphi(t) \approx -L(t)mg_{\mathrm{eff}}(t)\varphi(t)\,. \qquad (4.2)$$

Выражение (4.2) для момента силы T отвечает линеаризации по степеням малой амплитуды колебаний $\varphi(t)$ [рад]. В (4.1) учтена сила инерции $ma(t)$, где $a(t)$ — вертикальное ускорение оси подвеса. Уравнения движения для канонических переменных φ и M_z таковы:

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{mL^2(t)}\,M_z\,, \qquad \frac{\mathrm{d}M_z}{\mathrm{d}t} = -mL(t)g_{\mathrm{eff}}(t)\varphi\,. \qquad (4.3)$$

[2] Возможный источник этого недоразумения — традиционное использование термина "гиперболический поворот" для векторного поля при зависящем от времени импедансе (рис. 2б). Симплектическая группа $\mathrm{Sp}_{2n}(R)$ имеет размерность $n(2n+1)$, что для $n = 1$ (один импульс и одна координата: вещественные (2×2)-матрицы с единичным определителем) равно 3. Один генератор этой группы — это инфинитезимальный поворот в плоскости (P, X) вокруг начала координат, и есть только один тип этого поворота в собственном смысле. Для "гиперболических поворотов", однако, имеются два линейно-независимых генератора. Один из них сжимает P-направление и растягивает в то же число раз X-направление (как показано на рис. 2б). Другой генератор сжимает направление под углом $+45°$ и растягивает в то же число раз направление под углом $-45°$. Фаза внешнего возмущения (как мы видели, фаза модуляции импеданса) выбирает определенную комбинацию из этих двух последних генераторов. В то же время временна́я модуляция кинематического параметра, т.е. частоты, хотя тоже делает систему неавтономной, но не выделяет никакой предпочтительной фазы движения, поскольку соответствует повороту (P, X)-плоскости в обычном смысле.

Вводя мгновенные значения частоты $\omega(t)$ и импеданса $Z(t)$ (по отношению к координате φ) определениями

$$\begin{gathered}\omega(t) = \sqrt{\frac{g_{\mathrm{eff}}(t)}{L(t)}}\,, \qquad Z(t) = \sqrt{m^2L^3(t)g_{\mathrm{eff}}(t)}\,,\\ \frac{1}{mL^2(t)} = \frac{\omega(t)}{Z(t)}\,, \qquad mL(t)g_{\mathrm{eff}}(t) = \omega(t)Z(t)\,,\end{gathered} \qquad (4.4)$$

можно свести нашу систему к виду

$$\frac{\mathrm{d}M_z}{\mathrm{d}t} = -\omega(t)Z(t)\varphi(t)\,, \qquad \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega(t)}{Z(t)}\,M_z(t)\,, \qquad (4.5)$$

идентичному виду уравнений (3.7), с точностью до переобозначений $\varphi \to x$, $M_z \to p$. Мы убедились в разделе 3, что именно модуляция импеданса ($Z(t) = \sqrt{m^2L^3(t)g_{\mathrm{eff}}(t)}$ для маятника) ответственна за параметрическое возбуждение. Стоит отметить, что уравнения для горизонтальной координаты маятника $x(t) = L(t)\sin\varphi(t)$ оказываются довольно сложными даже в линеаризованном приближении, если $L(t)$ зависит от времени; поэтому мы пользуемся здесь углом φ и угловым моментом M_z.

Рассмотрим теперь другой важный пример системы с сосредоточенными постоянными: колебательный LC-контур в электронике (рис. 3). Напряжение на конденсаторе $V(t)$ [В] отвечает заряду (на нижнем электроде конденсатора на рис. 3) $Q(t) = -C(t)V(t)$. Здесь $C(t)$ [Ф] и $Q(t)$ [К] — зависящие от времени значения емкости и заряда соответственно. Напряжение $V(t)$ стремится увеличить магнитный поток $\Phi(t)$ в соленоиде. Этот магнитный поток (просуммированный по всем виткам соленоида) равен $\Phi(t) = L(t)I(t)$, где $I(t)$ [А] — ток, $L(t)$ [Г] — зависящая от времени индуктивность соленоида.

Система описывается следующими уравнениями:

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = V(t)\,, \qquad \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = I(t)\,,\\ \Phi(t) = L(t)I(t)\,, \qquad Q(t) = -C(t)V(t)\,.\end{gathered} \qquad (4.6)$$

Первое из уравнений (4.6) — закон электромагнитной индукции Фарадея (аналог соотношения $\dot p = f$), второе выражает закон сохранения заряда (аналогичный $v = \dot x$), третье и четвертое — материальные соотношения (аналогичные $p = mv$ и $f = -kx$). Исключая промежуточные величины V и I, мы получаем систему двух

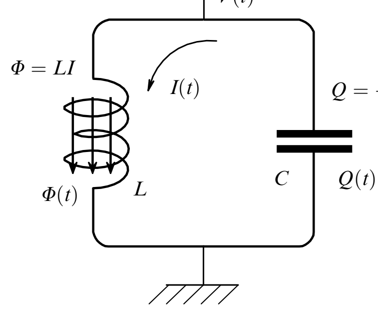

Рис. 3. Колебательный LC-контур.

уравнений

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{Q(t)}{C(t)}\,, \qquad \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \frac{\Phi(t)}{L(t)}\,. \tag{4.7}$$

Введем частоту ω [рад c^{-1}] и импеданс Z [Ом] формулами

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}\,, \qquad Z = \sqrt{\frac{L}{C}}\,, \qquad \frac{1}{L} = \frac{\omega}{Z}\,, \qquad \frac{1}{C} = \omega Z\,. \tag{4.8}$$

В результате система уравнений (4.7) принимает вид

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\omega(t)Z(t)Q(t)\,, \qquad \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega(t)}{Z(t)}\,\Phi(t)\,, \tag{4.9}$$

т.е. с точностью до подстановки $\Phi \to p$, $Q \to x$ идентична системе уравнений (3.5), (3.7). Это доказывает, что параметрическое возбуждение колебательного LC-контура вызывается модуляцией импеданса $Z(t)$, а не частоты $\omega(t)$.

5. Многомерный случай без "магнитных" сил

В этом разделе мы рассмотрим случай $\hat\beta = 0$, т.е. случай без сил "магнитного типа". Тогда система уравнений (2.8) принимает вид

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\mathbf{p}\\ \mathbf{x}\end{pmatrix} = V\begin{pmatrix}\mathbf{p}\\ \mathbf{x}\end{pmatrix};\\ V = \begin{pmatrix}\hat 0 & -\hat K\\ \hat M^{-1} & \hat 0\end{pmatrix}, \quad \text{или} \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = -\hat K\mathbf{x}\,, \qquad \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \hat M^{-1}\mathbf{p}\,.\end{gathered} \tag{5.1}$$

Мы хотим ввести тензорные аналоги частоты и импеданса. Вот каков наш подход к системе уравнений (5.1), в которой обе положительно-определенные матрицы $\hat M$ и $\hat K$ в общем случае могут зависеть от времени. Определим мгновенную симметричную вещественную матрицу $\hat Z(t)$ как решение матричного уравнения

$$\hat Z\hat M^{-1}\hat Z = \hat K\,, \quad \hat M = \hat M^{\mathrm{T}}\,, \quad \hat K = \hat K^{\mathrm{T}}\,, \quad \hat Z = \hat Z^{\mathrm{T}} \tag{5.2}$$

(напомним: индекс T обозначает транспонирование матрицы, так что все три матрицы $\hat M$, $\hat K$ и $\hat Z$ симметричны). Вот явное (хотя и несколько громоздкое) выражение для решения этого уравнения:

$$\hat Z = \hat M^{1/2}(\hat M^{-1/2}\hat K\hat M^{-1/2})^{1/2}\hat M^{1/2}\,. \tag{5.3}$$

Вот другое выражение, которое дает идентичный окончательный результат:

$$\hat Z = \hat K^{1/2}(\hat K^{1/2}\hat M^{-1}\hat K^{1/2})^{-1/2}\hat K^{1/2}\,. \tag{5.4}$$

Уравнение (5.2), *определяющее* $\hat Z$-*матрицу, вместе с его формальным решением* (5.3) *или* (5.4) *составляют один из главных результатов настоящей заметки*: *обобщение понятия импеданса для многомерного случая без сил магнитного типа.* В приложении А мы представим явный вид решения $\hat Z$ уравнения (5.2) для (2×2)-матриц $\hat M$ и $\hat K$; для более высоких размерностей уравнения (5.3), (5.4) требуют использования собственных значений матриц $\hat M$ и $\hat K$.

Способ получения несколько громоздкой формулы (5.3) таков. Сначала производим симплектическое преобразование для перехода к таким новым координатам и импульсам, в которых масса становится единичной матрицей:

$$\mathbf{p}_{\mathrm{new}} = \frac{1}{\hat M^{1/2}}\,\mathbf{p}\,, \qquad \mathbf{x}_{\mathrm{new}} = \hat M^{1/2}\mathbf{x}\,. \tag{5.5}$$

Тогда для стационарной системы (т.е. когда матрицы $\hat M$ и $\hat K$ не зависят от времени) уравнения движения принимают вид

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_{\mathrm{new}}}{\mathrm{d}t} = -\hat M^{-1/2}\hat K\hat M^{-1/2}\mathbf{x}_{\mathrm{new}}\,,\\ \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}_{\mathrm{new}}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{p}_{\mathrm{new}} \qquad (\text{стационарный случай})\,.\end{gathered} \tag{5.6}$$

Тем самым можно интерпретировать $\hat K_{\mathrm{new}} = \hat M^{-1/2}\hat K\hat M^{-1/2}$ как новую симметричную матрицу упругости. После этого решение уравнения типа (4.2) $\hat Z_{\mathrm{new}}\hat Z_{\mathrm{new}} = \hat K_{\mathrm{new}}$ очевидно: $\hat Z_{\mathrm{new}} = \hat K_{\mathrm{new}}^{1/2}$. Возвращаясь к исходным координатам $(\mathbf{p}, \mathbf{x})$, получаем результат (5.3). Конечно, после такого "вывода" результат (5.3) был проверен прямой подстановкой в (5.2). Аналогичная процедура, при которой новая матрица упругости превращается посредством симплектического преобразования в единичную, дает формулу (5.4), которая затем также проверяется прямой подстановкой в (5.2).

Возвращаясь к общей зависящей от времени системе, можно воспользоваться этой $(n\times n)$-матрицей $\hat Z$, для того чтобы ввести новые векторы канонических импульсов $\mathbf{P}$ и координат $\mathbf{X}$:

$$\begin{gathered}\begin{pmatrix}\mathbf{P}\\ \mathbf{X}\end{pmatrix} = \hat Z_{2n}\begin{pmatrix}\mathbf{p}\\ \mathbf{x}\end{pmatrix}, \qquad \hat Z_{2n}(t) = \begin{pmatrix}\hat Z^{-1/2} & \hat 0\\ \hat 0 & \hat Z^{1/2}\end{pmatrix};\\ \begin{pmatrix}\mathbf{p}\\ \mathbf{x}\end{pmatrix} = \hat Z_{2n}^{-1}\begin{pmatrix}\mathbf{P}\\ \mathbf{X}\end{pmatrix}, \qquad \hat Z_{2n}^{-1} = \begin{pmatrix}\hat Z^{1/2} & \hat 0\\ \hat 0 & \hat Z^{-1/2}\end{pmatrix}.\end{gathered} \tag{5.7}$$

И действительно, матрица преобразования $\hat Z_{2n}$ и обратная ей матрица $\hat Z_{2n}^{-1}$ являются симплектическими $(2n\times 2n)$-матрицами. (Читатель может освежить свою память в вопросе о симплектических матрицах, обратившись к приложению Б.) Теперь уравнения для $\mathbf{P}$ и $\mathbf{X}$ принимают вид

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\mathbf{P}(t)\\ \mathbf{X}(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\hat G_1 & -\hat\Omega_2\\ \hat\Omega_1 & \hat G_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{P}(t)\\ \mathbf{X}(t)\end{pmatrix}. \tag{5.8}$$

Здесь мы ввели четыре $(n\times n)$-матрицы:

$$\begin{gathered}\hat\Omega_1 = \hat Z^{1/2}\hat M^{-1}\hat Z^{1/2} \equiv \hat\Omega_1^{\mathrm{T}}\,, \qquad \hat\Omega_2 = \hat Z^{-1/2}\hat K\hat Z^{-1/2} \equiv \hat\Omega_2^{\mathrm{T}}\,,\\ \hat G_1 = \hat Z^{-1/2}\,\frac{\mathrm{d}\hat Z^{1/2}}{\mathrm{d}t}\,,\\ \hat G_2 = -\hat Z^{1/2}\,\frac{\mathrm{d}\hat Z^{-1/2}}{\mathrm{d}t} \equiv \frac{\mathrm{d}\hat Z^{1/2}}{\mathrm{d}t}\,\hat Z^{-1/2} \equiv \hat G_1^{\mathrm{T}}\,.\end{gathered} \tag{5.9}$$

Преобразование выражения для $\hat G_2$ осуществляется с помощью тождеств

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\hat A^{-1} = -\hat A^{-1}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\hat A\right)\hat A^{-1}\,,\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\hat Z^{-1/2} = -\hat Z^{-1/2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\hat Z^{1/2}\right)\hat Z^{-1/2}\,,\end{gathered} \tag{5.10}$$

которые, в свою очередь, легко выводятся дифференцированием тождества $\hat{B}\hat{B}^{-1} = \hat{1}$. Гамильтониан, соответствующий уравнениям (5.8), таков:

$$H(\mathbf{P}, \mathbf{X}, t) = \mathbf{P}^{\mathrm{T}} \hat{G}_2 \mathbf{X} + \frac{1}{2} (\mathbf{P}^{\mathrm{T}} \hat{\Omega}_1 \mathbf{P} + \mathbf{X}^{\mathrm{T}} \hat{\Omega}_2 \mathbf{X}) . \quad (5.11)$$

К гамильтониану (5.11) можно прийти, подбирая $H(\mathbf{P}, \mathbf{X}, t)$ под описание уравнений (5.8). Этот же гамильтониан можно найти и иным путем, по ходу дела еще и доказывая симплектический (канонический) характер преобразования (5.7), если воспользоваться производящей функцией $\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{P}, t)$:

$$\mathbf{X} = \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{P}^{\mathrm{T}}} , \quad \mathbf{p} = \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{x}^{\mathrm{T}}} ,$$
$$H_{\mathrm{new}}(\mathbf{P}, \mathbf{X}, t) = H_{\mathrm{old}}\big(\mathbf{p}(\mathbf{P}), \mathbf{x}(\mathbf{X}), t\big) + \frac{\partial \Gamma(\mathbf{P}, \mathbf{x}, t)}{\partial t} , \quad (5.12)$$
$$\Gamma(\mathbf{P}, \mathbf{x}, t) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \hat{Z}^{1/2} \mathbf{P} .$$

Можно проверить, что, поскольку матрица $\hat{Z}$ удовлетворяет уравнению (5.2), две симметричные вещественные "матрицы частот" $\hat{\Omega}_1$ и $\hat{\Omega}_2$, введенные в (5.9), на самом деле равны друг другу и ниже обозначаются просто как $\hat{\Omega}$:

$$\hat{\Omega} = \hat{\Omega}_1 = \hat{\Omega}_2 = \hat{Z}^{1/2} \hat{M}^{-1} \hat{Z}^{1/2} = \hat{Z}^{-1/2} \hat{K} \hat{Z}^{-1/2} . \quad (5.13)$$

Введем, подобно тому, как это делалось в случае одного осциллятора, вектор "комплексных амплитуд" $\mathbf{a}(t)$ и комплексно-сопряженный вектор $\mathbf{a}^*(t)$ определениями

$$\mathbf{a}(t) = \frac{\mathbf{X}(t) + \mathrm{i}\mathbf{P}(t)}{\sqrt{2\hbar}} , \quad \mathbf{a}^*(t) = \frac{\mathbf{X}(t) - \mathrm{i}\mathbf{P}(t)}{\sqrt{2\hbar}} . \quad (5.14)$$

В результате связанные уравнения для комплексных векторов $\mathbf{a}(t)$ и $\mathbf{a}^*(t)$ примут вид

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}(t)}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{i}\hat{\omega}(t)\mathbf{a}(t) + \hat{g}(t)\mathbf{a}^*(t) ,$$
$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}^*(t)}{\mathrm{d}t} = \mathrm{i}\hat{\omega}(t)\mathbf{a}^*(t) + \hat{g}(t)\mathbf{a}(t) . \quad (5.15)$$

Здесь $\hat{\omega}(t)$ — эрмитова матрица:

$$\hat{\omega} = \hat{\Omega} + \frac{\hat{G}_1 - \hat{G}_1^{\mathrm{T}}}{2\mathrm{i}} \equiv \hat{\omega}^+ = \hat{\Omega} - \frac{\hat{G}_1^{\mathrm{T}} - \hat{G}_1}{2\mathrm{i}} , \quad (5.16)$$

а действительная эрмитова матрица $\hat{g}(t)$ определена как

$$\hat{g}(t) = \frac{\hat{G}_1 + \hat{G}_1^{\mathrm{T}}}{2} . \quad (5.17)$$

Рассмотрим сначала случай, когда матрица импеданса не зависит от времени. Тогда $\hat{g}(t) \equiv 0$ и свойство эрмитовости матрицы $\hat{\omega}(t)$ приводит к эволюции вектора $\mathbf{a}(t)$ по типу унитарного преобразования:

$$\mathbf{a}(t) = \hat{U}(t, t_0)\mathbf{a}(t_0) , \quad \frac{\mathrm{d}\hat{U}(t, t_0)}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{i}\hat{\omega}(t)\hat{U}(t, t_0) ,$$
$$\hat{U}^+(t, t_0) = \hat{U}^{-1}(t, t_0) . \quad (5.18)$$

В общем случае матрицы $\hat{\omega}(t_1)$ и $\hat{\omega}(t_2)$ не коммутируют друг с другом в различающиеся моменты времени t_1 и t_2; поэтому простая экспоненциальная формула для $\hat{U}(t, t_0)$ (подобная (3.12)) здесь не имеет места. Ее следует заменить "упорядоченной по времени экспонентой" (см., например, [9]); мы не будем останавливаться на этих деталях.

Рассмотрим теперь уравнения для "медленно изменяющихся" комплексных векторов $\mathbf{b}(t)$, $\mathbf{b}^*(t)$:

$$\mathbf{a}(t) = \hat{U}(t)\,\mathbf{b}(t) , \quad \mathbf{a}^*(t) = \hat{U}^*(t)\,\mathbf{b}^*(t) ,$$
$$\frac{\mathrm{d}\hat{U}(t)}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{i}\hat{\omega}(t)\hat{U}(t) , \quad (5.19)$$

где в общем случае мы допускаем $\hat{g}(t) \neq 0$ и подразумеваем, что эрмитова матрица $\hat{\omega}(t)$ выражается в виде (5.16). Выберем для определенности $t_0 = 0$. Тогда уравнения для $\mathbf{b}(t)$, $\mathbf{b}^*(t)$ таковы:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{b}(t)}{\mathrm{d}t} = \hat{U}^{-1}(t)\hat{g}(t)\hat{U}^*(t)\mathbf{b}^*(t) ,$$
$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{b}^*(t)}{\mathrm{d}t} = \big[\hat{U}^{-1}(t)\big]^*\hat{g}(t)\hat{U}(t)\mathbf{b}(t) . \quad (5.20)$$

Как и в случае одного осциллятора, мы приходим здесь к важному выводу; повторим его. *Даже в случае зависящей от времени матрицы частоты $\hat{\omega}(t)$ адиабатический инвариант $\mathbf{aa}^* \equiv \mathbf{bb}^* = \sum H/\hbar\omega$ точно сохраняется, если матрица импеданса $\hat{Z}$ постоянна во времени и тем самым $\hat{g}(t) \equiv 0$.* Иными словами, сохранение адиабатического инварианта означает, что параметрическое возбуждение системы осцилляторов отсутствует в случае не зависящей от времени матрицы импеданса. Более знакомым является утверждение о том, что адиабатический инвариант сохраняется с хорошей точностью, если импеданс $\hat{Z}(t)$ изменяется адиабатически, т.е. медленно на масштабе времени $\tau \approx 1/\omega$, поскольку в этом случае связь между медленными амплитудами $\mathbf{b}(t)$ и $\mathbf{b}^*(t)$ быстро осциллирует и не дает накапливающегося эффекта. Сохранение адиабатического инварианта $\mathbf{aa}^* \equiv \equiv \mathbf{bb}^* = \sum H/\hbar\omega$ представляет собой частный случай законов сохранения Мэнли – Роу, в котором возможные переходы могут лишь заменить один квант в какой-либо моде квантом какой-то другой моды. Иными словами, сохранение адиабатического инварианта заключается в том, что параметрическое возбуждение системы связанных осцилляторов отсутствует, если матрица импеданса не зависит от времени.

Вычисления, подобные проделанным для одномерного осциллятора, дают для средних значений $\langle x_i x_k \rangle$ и $\langle p_i p_k \rangle$ в основном состоянии системы:

$$\langle x_i x_k \rangle = 0{,}5\hbar \hat{Z}_{ik}^{-1} , \quad \langle p_i p_k \rangle = 0{,}5\hbar \hat{Z}_{ik} ,$$
$$\langle x_i p_k \rangle = -0{,}5\mathrm{i}\hbar\delta_{ik} , \quad \langle p_i x_k \rangle = 0{,}5\mathrm{i}\hbar\delta_{ik} , \quad (5.21)$$
$$\langle p_i x_k + x_k p_i \rangle = 0 , \quad \langle p_i x_k - x_k p_i \rangle = -\mathrm{i}\hbar\delta_{ik} .$$

Последняя формула является прямым следствием канонических коммутационных соотношений. Волновая функция основного состояния в координатном представлении является многомерной гауссовой функцией:

$$\psi(\mathbf{x}) = \mathrm{const}\,\exp\left(-\frac{1}{2\hbar}\sum_{i,k} Z_{ik} x_i x_k\right) . \quad (5.22)$$

Волновые функции возбужденных состояний можно найти, применяя нужное число раз подходящие операторы $\mathbf{a}^*$ к волновой функции основного состояния (5.22), когерентные состояния также можно получить этим способом; мы не будем входить в подробности (см., например, [10]). И опять практически очевидно, что если одновременные изменения массы и упругости оставляют матрицу импеданса неизменной, то волновая функция основного состояния сохраняется и, с естественным обобщением для возбужденных состояний, мы получаем также и сохранение адиабатического инварианта $\mathbf{aa}^*$.

Это рассмотрение можно распространить на случай более общих, чем ранее рассмотренные билинейные, гамильтонианов $H(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$. Именно, пусть

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = H_0(\mathbf{p}, \mathbf{r})\, s(t)\,. \tag{5.23}$$

Легко видеть, что в этом случае уравнения Гамильтона, следующие из гамильтониана $H(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$, отличаются от подобных уравнений для $H_0(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ простым изменением масштаба времени $t \to \tau$, таким, что $\mathrm{d}\tau/\mathrm{d}t = s(t)$. Иными словами, траектории в фазовом пространстве $(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ для этих двух гамильтонианов идентичны, а траектории в расширенном фазовом пространстве $(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$ различны при $s(t) \neq 1$. Поскольку гамильтониан $H_0(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ не зависит от времени, движение соответствующей системы ограничено гиперповерхностью постоянной энергии $H_0(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = E_0$. Мы, однако, видели, что для многомерных связанных осцилляторов система с постоянной матрицей импеданса может, тем не менее, содержать нетривиальную зависимость гамильтониана, не сводящуюся просто к нелинейной замене переменной времени (или, что эквивалентно, единицы энергии).

6. Двумерное движение в присутствии магнитного поля

Рассмотрим теперь конкретный случай движения в плоскости (x, y) в присутствии магнитного поля $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$, когда действие этого поля описывается антисимметричным тензором $\hat{\beta}$. Для определенности будем считать тензор массы $\hat{M}$ изотропным. В этом случае удобно выразить $\hat{\beta}$ через так называемую ларморовскую частоту $L = qB/2m$ [рад с$^{-1}$], где q — электрический заряд частицы и m — ее масса. Мы также допускаем некоторую анизотропию тензора упругости $\hat{K}$, который подходящим выбором координат в плоскости (x, y) может быть приведен к диагональному виду именно в (x, y)-осях. Иными словами, мы примем

$$\begin{gathered}\beta_{xy} = -\beta_{yx} = mL\,, \qquad \beta_{xx} = \beta_{yy} = 0\,, \\ \hat{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & mL \\ -mL & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{K} = \begin{pmatrix} m\omega_x^2 & 0 \\ 0 & m\omega_y^2 \end{pmatrix}, \\ \hat{M} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}.\end{gathered} \tag{6.1}$$

Явное выражение для гамильтониана в этих обозначениях таково:

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t) = (2m)^{-1}\left[(p_x + ymL)^2 + (p_y - xmL)^2\right] + \\ + \frac{1}{2}(mx^2\omega_x^2 + my^2\omega_y^2)\,. \tag{6.2}$$

Уравнения Лагранжа – Гамильтона принимают вид

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ x \\ y \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & L \\ -L & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -m(\omega_x^2 + L^2) & 0 \\ 0 & -m(\omega_y^2 + L^2) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1/m & 0 \\ 0 & 1/m \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & L \\ -L & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ x \\ y \end{pmatrix}. \tag{6.3}$$

Эти уравнения справедливы и для зависящих от времени параметров m, L, ω_x, ω_y. Согласно (6.3) ларморовская прецессия (при $q > 0$) происходит с вектором угловой скорости, противоположным направлению магнитного поля (диамагнетизм). Введем новые импульсы P_+ и P_-, а также новые координаты X_+ и X_- с помощью преобразования с симплектической матрицей $\hat{Z}_4$,

$$\begin{pmatrix} P_+ \\ P_- \\ X_+ \\ X_- \end{pmatrix} = \hat{Z}_4 \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \hat{Z}_4 = \begin{pmatrix} \hat{S} & \hat{U} \\ \hat{V} & \hat{W} \end{pmatrix}, \tag{6.4}$$

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2Z_1}} & 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2Z_1}} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{U} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\sqrt{Z_1}}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\dfrac{\sqrt{Z_1}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \\ \hat{V} = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{\sqrt{2Z_1}} \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2Z_1}} \end{pmatrix}, \qquad \hat{W} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{Z_1}}{\sqrt{2}} & 0 \\ \dfrac{\sqrt{Z_1}}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.5}$$

(К сожалению, ни одна из матриц S, U, V, W не является обратимой, поскольку у всех равен нулю определитель. Поэтому элегантные формулы для работы с блоками матриц здесь не срабатывают.) Короче, введем новые импульсы P_+ и P_- и новые координаты X_+ и X_- как

$$P_+ = \frac{p_x}{\sqrt{2Z_1}} + y\sqrt{\frac{Z_1}{2}}\,, \qquad P_- = \frac{p_x}{\sqrt{2Z_1}} - y\sqrt{\frac{Z_1}{2}}\,, \\ X_+ = \frac{-p_y}{\sqrt{2Z_1}} + x\sqrt{\frac{Z_1}{2}}\,, \qquad X_- = \frac{p_y}{\sqrt{2Z_1}} + x\sqrt{\frac{Z_1}{2}}\,. \tag{6.6}$$

Обратное преобразование тоже достаточно просто:

$$p_x = \sqrt{\frac{Z_1}{2}}(P_+ + P_-)\,, \qquad p_y = \sqrt{\frac{Z_1}{2}}(-X_+ + X_-)\,, \\ x = \frac{1}{\sqrt{2Z_1}}\,(X_+ + X_-)\,, \qquad y = \frac{1}{\sqrt{2Z_1}}\,(P_+ - P_-)\,. \tag{6.7}$$

В общем случае, когда $Z_1(t)$ зависит от времени, уравнения движения таковы:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} P_+ \\ P_- \end{pmatrix} = -g_1(t)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_+ \\ P_- \end{pmatrix} - \hat{\Omega}_2\begin{pmatrix} X_+ \\ X_- \end{pmatrix}, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} X_+ \\ X_- \end{pmatrix} = g_1(t)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_+ \\ X_- \end{pmatrix} + \hat{\Omega}_1\begin{pmatrix} P_+ \\ P_- \end{pmatrix}, \tag{6.8} \\ g_1(t) = \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}\ln Z_1(t)}{\mathrm{d}t}$$

(ср. также с рис. 2б). Конкретные выражения для симметричных матриц $\hat{\Omega}_1$, $\hat{\Omega}_2$ приведены ниже (см.

уравнения (6.11), (6.12)). Уравнения (6.8) являются каноническими для гамильтониана

$$H(P_+, P_-, X_+, X_-, t) = g_1(t)(X_+P_- + X_-P_+) + \\ + \frac{1}{2}\,\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\hat{\Omega}_1\mathbf{P} + \frac{1}{2}\,\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\hat{\Omega}_2\mathbf{X}\,. \tag{6.9}$$

Если этот "промежуточный" импеданс не зависит от времени, то уравнения движения принимают вид

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} P_+ \\ P_- \end{pmatrix} = -\hat{\Omega}_2\begin{pmatrix} X_+ \\ X_- \end{pmatrix}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} X_+ \\ X_- \end{pmatrix} = \hat{\Omega}_1\begin{pmatrix} P_+ \\ P_- \end{pmatrix}. \tag{6.10}$$

Замечательным образом преобразование (6.6) с $Z_1(t) = \mathrm{const}$ приводит к уравнениям, в которых новые импульсы $\mathbf{P}$ "притягиваются возвращающей силой", пропорциональной $-\hat{\Omega}_2\mathbf{X}$, а новые координаты $\mathbf{X}$ возрастают со временем пропорционально $+\hat{\Omega}_1\mathbf{P}$. Иными словами, это преобразование позволило устранить члены, связывающие $\mathrm{d}\mathbf{P}/\mathrm{d}t$ с $\mathbf{P}$, а также члены, связывающие $\mathrm{d}\mathbf{X}/\mathrm{d}t$ с $\mathbf{X}$. В результате матрица $\hat{\Omega}_2$ начинает играть роль тензора упругости, а матрица $\hat{\Omega}_1$ — роль обратной матрицы массы. В каком-то смысле это преобразование похоже на переход в систему координат, вращающуюся с частотой ларморовской прецессии L. Переход во вращающуюся систему сделал бы, однако, возвращающую силу явно зависящей от времени (при $\omega_x \neq \omega_y$). Симплектическое преобразование не зависит от времени при $Z_1 = \mathrm{const}$ и тем самым не нарушает закона сохранения энергии даже при $\omega_x \neq \omega_y$.

Симметричные вещественные матрицы $\hat{\Omega}_1$ и $\hat{\Omega}_2$ при $\omega_x \neq \omega_y$ выглядят довольно сложно:

$$\hat{\Omega}_1 = \begin{pmatrix} L + \dfrac{m(\omega_y^2 + L^2)}{2Z_1^2} + \dfrac{Z_1^2}{2m} & -\dfrac{m(\omega_y^2 + L^2)}{2Z_1^2} + \dfrac{Z_1^2}{2m} \\ -\dfrac{m(\omega_y^2 + L^2)}{2Z_1^2} + \dfrac{Z_1^2}{2m} & -L + \dfrac{m(\omega_y^2 + L^2)}{2Z_1^2} + \dfrac{Z_1^2}{2m} \end{pmatrix}, \tag{6.11}$$

$$\hat{\Omega}_2 = \begin{pmatrix} L + \dfrac{m(\omega_x^2 + L^2)}{2Z_1^2} + \dfrac{Z_1^2}{2m} & \dfrac{m(\omega_x^2 + L^2)}{2Z_1^2} - \dfrac{Z_1^2}{2m} \\ \dfrac{m(\omega_x^2 + L^2)}{2Z_1^2} - \dfrac{Z_1^2}{2m} & -L + \dfrac{m(\omega_x^2 + L^2)}{2Z_1^2} + \dfrac{Z_1^2}{2m} \end{pmatrix}, \tag{6.12}$$

Дальнейшее их преобразование с помощью дополнительной безразмерной матрицы, удовлетворяющей уравнению

$$\hat{z}_2\hat{\Omega}_1^{-1}\hat{z}_2 = \hat{\Omega}_2\,, \tag{6.13}$$

позволяет сделать новые $\hat{\Omega}_1$ и $\hat{\Omega}_2$ идентичными. Явные выражения для матрицы $\hat{z}_2$, удовлетворяющей уравнению (6.13), даются уравнениями (5.3), (5.4) и уравнением (A.7) из приложения A.

Собственные частоты двух линейно-независимых мод для стационарного случая таковы:

$$\omega_{+,\,-} = \\ = \sqrt{2L^2 + \frac{1}{2}(\omega_x^2 + \omega_y^2) \pm \sqrt{\left[2L^2 + \frac{1}{2}(\omega_x^2 + \omega_y^2)\right]^2 - \omega_x^2\omega_y^2}\,. \tag{6.14}$$

Далее мы ограничимся изотропной потенциальной ямой $\omega_x = \omega_y = \omega_{xy}$; тогда выбор

$$Z_1 = m\sqrt{L^2 + \omega_{xy}^2} \tag{6.15}$$

приводит к простой диагональной форме матрицы $\hat{\Omega}_1 = \hat{\Omega}_2 = \hat{\Omega}$:

$$\hat{\Omega}_1 = \hat{\Omega}_2 = \hat{\Omega} = \begin{pmatrix} \omega_+ & 0 \\ 0 & \omega_- \end{pmatrix}, \\ \omega_+ = \sqrt{\omega_{xy}^2 + L^2} + L\,, \qquad \omega_- = \sqrt{\omega_{xy}^2 + L^2} - L\,. \tag{6.16}$$

И действительно, честное решение характеристического уравнения для системы (6.10) со стационарными матрицами (6.11), (6.12) в изотропном случае $\omega_x = \omega_y = \omega_{xy}$ дает точно такие же две собственные частоты ω_+ и ω_- даже без специального выбора $Z_1 = \mathrm{const}$.

Как и в предыдущем, немагнитном, случае, можно ввести комплексные амплитуды или будущие квантово-механические операторы уничтожения и рождения:

$$a_+(t) = \frac{X_+(t) + \mathrm{i}P_+(t)}{\sqrt{2\hbar}}\,, \qquad a_+^*(t) = \frac{X_+(t) - \mathrm{i}P_+(t)}{\sqrt{2\hbar}}\,, \\ a_-(t) = \frac{X_-(t) + \mathrm{i}P_-(t)}{\sqrt{2\hbar}}\,, \qquad a_-^*(t) = \frac{X_-(t) - \mathrm{i}P_-(t)}{\sqrt{2\hbar}}\,. \tag{6.17}$$

Квантовые уровни этой осцилляторной системы характеризуются номерами n_+ и n_- возбуждения соответствующих квантов $\hbar\omega_+$ и $\hbar\omega_-$:

$$E(n_+, n_-) = \hbar\omega_+\left(n_+ + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega_-\left(n_- + \frac{1}{2}\right). \tag{6.18}$$

Если потенциальной ямы нет, $\omega_{xy} = 0$, а есть лишь магнитное поле, то получаются знаменитые уровни Ландау с $\omega_+ = 2L$, равной удвоенной ларморовской частоте, т.е. циклотронной частоте. В то же время частота ω_- обращается в нуль и возникает вырождение центров циклотронных орбит.

Выражения типа (6.17) позволяют вычислять матричные элементы перехода, флуктуации и т.п. Соответствующие выражения для обычных координат (x, y) и обобщенных импульсов (p_x, p_y) таковы:

$$x(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{4Z_1}}\,(a_+ + a_+^* + a_- + a_-^*)\,, \\ y(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{4Z_1}}\,\frac{a_+ - a_+^* - a_- + a_-^*}{\mathrm{i}}\,, \tag{6.19}$$

$$p_x(t) = \sqrt{\hbar Z_1}\,\frac{a_+ - a_+^* + a_- - a_-^*}{2\mathrm{i}}\,, \\ p_y(t) = \sqrt{\hbar Z_1}\,\frac{-a_+ - a_+^* + a_- + a_-^*}{2}\,. \tag{6.20}$$

Могут также понадобиться выражения для скоростей v_x и v_y:

$$v_x(t) = Ly + \frac{p_x}{m}\,, \qquad v_y(t) = -Lx + \frac{p_y}{m}\,. \tag{6.21}$$

Рассмотрим состояние системы с определенными числами квантов n_+ и n_-. Для них

$$\langle x\rangle = \langle y\rangle = \langle p_x\rangle = \langle p_y\rangle = \langle v_x\rangle = \langle v_y\rangle = 0\,, \tag{6.22}$$

$$Z_1\langle x^2\rangle = Z_1\langle y^2\rangle = \frac{\langle p_x^2\rangle}{Z_1} = \frac{\langle p_y^2\rangle}{Z_1} = \frac{\hbar}{2}\left(n_+ + \frac{1}{2} + n_- + \frac{1}{2}\right), \tag{6.23}$$

$$\begin{gathered}\langle xp_x + p_x x\rangle = \langle yp_y + p_y y\rangle = 0\,,\\ \langle xp_x - p_x x\rangle = \langle yp_y - p_y y\rangle = \mathrm{i}\hbar\,,\end{gathered} \tag{6.24}$$

$$\begin{gathered}\langle xp_y - p_y x\rangle = \langle yp_x - p_x y\rangle = 0\,,\\ -\langle xp_y + p_y x\rangle = \langle yp_x + p_x y\rangle = \hbar(n_+ - n_-)\,,\end{gathered} \tag{6.25}$$

$$\left\langle \frac{m(v_x^2+v_y^2)}{2} + \frac{m\omega_{xy}^2(x^2+y^2)}{2}\right\rangle = \\ = \hbar\omega_+\left(n_+ + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega_-\left(n_- + \frac{1}{2}\right). \tag{6.26}$$

Эти формулы могут быть полезны для статистической физики такой системы.

7. Статистическая физика осциллятора в магнитном поле

Поучительно вычислить для состояния с определенными n_+ и n_- математическое ожидание $\langle M_z\rangle$ магнитного момента $M_z = 0{,}5q(xv_y - yv_x)$ [А м^2]. Подстановка выражений (6.22)–(6.26) в M_z дает (для $q > 0$):

$$\langle M_z\rangle = \frac{q}{2}\langle xv_y - yv_x\rangle = \frac{q\hbar}{2m\sqrt{L^2+\omega_{xy}^2}}\times \\ \times\left[-L + n_-\left(\sqrt{L^2+\omega_{xy}^2} - L\right) - n_+\left(\sqrt{L^2+\omega_{xy}^2} + L\right)\right]. \tag{7.1}$$

Известная формула Планка для термодинамически равновесного среднего значения числа квантов имеет специальный вид в пределе высоких температур:

$$\langle n\rangle = \left[\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_{\mathrm{B}}T}\right) - 1\right]^{-1} \approx \frac{k_{\mathrm{B}}T}{\hbar\omega} - \frac{1}{2} + \frac{1}{12}\frac{\hbar\omega}{k_{\mathrm{B}}T} + O\left(\frac{\hbar\omega}{k_{\mathrm{B}}T}\right)^2. \tag{7.2}$$

В то же время $\langle n\rangle \to 0$ при очень низкой температуре. В результате ожидаемое значение магнитного момента при очень низкой температуре (диамагнитный отклик) выражается в виде

$$\langle M_z\rangle = -\frac{|q|\hbar}{2m}\frac{L}{\sqrt{L^2+\omega_{xy}^2}} \equiv -\frac{q^2\hbar}{4m}\frac{B}{\sqrt{\omega_{xy}^2 + (qB/2m)^2}}\,, \tag{7.3}$$

здесь $|q|\hbar/2m$ — магнетон Бора. При $B \to 0$ этот результат совпадает с формулой Ланжевена. Уравнения (7.1), (7.2) позволяют проиллюстрировать теорему Бора и Ван Лёвен (см., например, [11]):

$$\langle M_z\rangle = \frac{q}{2}\langle xv_y - yv_x\rangle \approx -\frac{|q|\hbar}{2m}\frac{\hbar L}{3k_{\mathrm{B}}T} \quad \text{при} \quad k_{\mathrm{B}}T \to \infty\,, \tag{7.4}$$

так что магнитный момент исчезает как $\hbar^2$ в классическом пределе $\hbar \to 0$.

Если магнитное поле сильное, т.е. если $L \gg \omega_x, \omega_y$, то частота ω_- гораздо меньше, чем даже ω_x, ω_y. Например, в изотропном случае ($L \gg \omega_x = \omega_y = \omega_{xy}$) нижнюю частоту можно получить, пренебрегая инерцией: следует приравнять силу Лоренца $qBv = qBr\omega_-$ (при круговом движении с радиусом r и пока еще неизвестной угловой скоростью ω_-) к возвращающей силе $m(\omega_{xy})^2 r$. Верхнюю частоту можно приблизительно вычислить, пренебрегая возвращающей силой потенциальной ямы, и приравнять центростремительную силу $m(\omega_+)^2 r$ к силе Лоренца $qBv \equiv qB\omega_+ r$. В этом приближении

$$\omega_- \approx \frac{\omega_{xy}^2}{2L}\,, \qquad \omega_+ \approx 2L\,, \tag{7.5}$$

где $2L = qB/m$ — циклотронная частота.

С методической точки зрения определенный интерес представляет случай, при котором

$$\begin{gathered} L \gg \omega_{xy}\,, \qquad \omega_+ \approx 2L\,, \qquad \omega_- \approx \frac{\omega_{xy}^2}{2L} \ll \omega_{xy} \ll L\,, \\ \hbar\omega_- \ll k_{\mathrm{B}}T \ll \hbar\omega_+\,, \qquad \langle n_+\rangle \cong 0\,, \qquad \langle n_-\rangle \approx \frac{k_{\mathrm{B}}T}{\hbar\omega_-} - \frac{1}{2}\,. \end{gathered} \tag{7.6}$$

Тогда возникает ненулевой диамагнитный отклик:

$$\langle M_z\rangle = \frac{q}{2}\langle xv_y - yv_x\rangle \approx \frac{-|q|\hbar}{2m} + \frac{k_{\mathrm{B}}T}{B_z}\,, \tag{7.7}$$

где второй, "классический", парамагнитный член представляет собой малую добавку к основному квантовому диамагнитному члену. Наличие этой парамагнитной поправки связано с тем, что магнитное поле подразумевалось очень сильным: циклотронный квант $2\hbar L$ гораздо больше тепловой энергии $k_{\mathrm{B}}T$, а низкочастотный квант $\hbar\omega_-$ гораздо меньше ее.

8. Общий случай; обсуждение

Мы обсудим здесь наиболее общий многомерный случай, когда тензор $\hat\beta$ может обладать как симметричной, так и антисимметричной частями. В стационарном случае симметричная часть $\hat\beta^{\mathrm{s}}$ тензора $\hat\beta$ влияет на траектории в $(\mathbf{p}, \mathbf{x})$-пространстве, но не влияет на траектории в пространстве $(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$. В самом деле, можно выполнить калибровочное преобразование лагранжиана по отношению к симметричной части $\hat\beta^{\mathrm{s}}$ тензора $\hat\beta$

$$x_i\beta_{ij}^{\mathrm{s}}\dot x_j = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}x_i\beta_{ij}^{\mathrm{s}}x_j\right) - x_i x_j\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\beta_{ij}^{\mathrm{s}}\,. \tag{8.1}$$

Хорошо известно, что добавление к лагранжиану полной производной по времени от функции координат и времени (но не скоростей) не изменяет уравнений Эйлера–Лагранжа для $(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$. Зависящая от времени симметричная часть $\hat\beta^{\mathrm{s}}$ тензора $\hat\beta$ дает дополнительный вклад в тензор упругости (ср. с формулой (3.2)). Антисимметричная часть $\hat\beta^{\mathrm{a}}$ тензора $\hat\beta$ приводит к силам магнитного типа, которые сами не производят работы над частицей; временна́я зависимость $\hat\beta^{\mathrm{a}}$ (т.е. "магнитного поля"), согласно закону электромагнитной индукции Фарадея, приводит к вихревым силам с ненулевой работой на замкнутом контуре. Эта работа в физике называется электродвижущей силой (э.д.с.).

Предположим, что удалось найти такую симплектическую $(2n \times 2n)$-матрицу $\hat{Z}_{2n}$ (т.е. матрицу, удовлетворяющую условиям симплектичности (Б.5)–(Б.8) (см. приложение Б)), что

$$\hat{Z}_{2n} = \begin{pmatrix} \hat{S} & \hat{U} \\ \hat{V} & \hat{W} \end{pmatrix}, \quad \hat{Z}_{2n}^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{W}^{\mathrm{T}} & -\hat{U}^{\mathrm{T}} \\ -\hat{V}^{\mathrm{T}} & \hat{S}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}, \tag{8.2}$$
$$\hat{S}\hat{U}^{\mathrm{T}} - \hat{U}\hat{S}^{\mathrm{T}} = 0, \quad \hat{V}\hat{W}^{\mathrm{T}} - \hat{W}\hat{V}^{\mathrm{T}} = 0, \quad \hat{S}\hat{W}^{\mathrm{T}} - \hat{U}\hat{V}^{\mathrm{T}} = \hat{1},$$

$$\hat{Z}_{2n} \begin{pmatrix} \hat{\beta}\hat{M}^{-1} & -(\hat{K} + \hat{\beta}\hat{M}^{-1}\hat{\beta}^{\mathrm{T}}) \\ \hat{M}^{-1} & -\hat{M}^{-1}\hat{\beta}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \hat{Z}_{2n}^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{0} & -\hat{\Omega} \\ \hat{\Omega} & \hat{0} \end{pmatrix}. \tag{8.3}$$

Автор на момент написания настоящей заметки не обладает доказательством существования и (или) единственности такой матрицы $\hat{Z}_{2n}$. Однако, как подсказывает интуиция физика, такая матрица должна существовать. Более того, в отсутствие вырождения матрица $\hat{Z}_{2n}$, делающая пока еще неизвестную $(n \times n)$-"матрицу частоты" $\hat{\Omega}$ диагональной, должна быть единственной, с точностью до нумерации n мод.

Выражения для "старых" импульсов и координат при этом таковы:

$$\mathbf{p} = \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \left[\left(-\hat{U}^{\mathrm{T}} - \mathrm{i}\hat{W}^{\mathrm{T}}\right)\mathbf{a} + \left(-\hat{U}^{\mathrm{T}} - \mathrm{i}\hat{W}^{\mathrm{T}}\right)\mathbf{a}^* \right],$$
$$\mathbf{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \left[\left(\mathrm{i}\hat{V}^{\mathrm{T}} + \hat{S}^{\mathrm{T}}\right)\mathbf{a} + \left(-\mathrm{i}\hat{V}^{\mathrm{T}} + \hat{S}^{\mathrm{T}}\right)\mathbf{a}^* \right]. \tag{8.4}$$

Кроме того, если состояние системы в гильбертовом пространстве представимо в виде произведения состояний с определенными числами n_j квантов в j-й осцилляторной моде, то

$$\langle a_k \rangle = \langle a_k^* \rangle = 0, \quad \langle a_k a_m \rangle = \langle a_k^* a_m^* \rangle = 0,$$
$$\langle a_k a_m^* \rangle - \delta_{km} = \langle a_k^* a_m \rangle = n_k \delta_{km}. \tag{8.5}$$

Соответствующие формулы для ожидаемых значений $\langle \mathbf{x} \rangle$, $\langle \mathbf{p} \rangle$, $\langle \mathbf{xp} \rangle$, $\langle \mathbf{xv} \rangle$ и т.п. логически просты, но громоздки в записи, и поэтому здесь не приведены (ср. с детальными выражениями для двумерного движения в магнитном поле в разделе 6).

Возможный подход к многомерным системам с антисимметричными компонентами тензора $\hat{\beta}$ был уже упомянут в разделе 6. Именно, можно перейти в систему координат, вращающуюся с ларморовской угловой скоростью L. Для двух импульсов и двух координат можно произвести симплектическое преобразование:

$$\begin{pmatrix} \tilde{p}_x \\ \tilde{p}_y \\ \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \hat{Z}_4 \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ x \\ y \end{pmatrix}, \quad \hat{Z}_4(t) = \begin{pmatrix} \hat{R}(t) & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{R}(t) \end{pmatrix},$$
$$\hat{R}(t) = \begin{pmatrix} \cos(Lt) & -\sin(Lt) \\ \sin(Lt) & \cos(Lt) \end{pmatrix}, \quad \hat{R}^{\mathrm{T}}(t) = \hat{R}^{-1}(t). \tag{8.6}$$

Уравнения (6.3) преобразуются с использованием тождества

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{R}(t)\right]\hat{R}^{-1}(t) = \begin{pmatrix} -L\sin(Lt) & -L\cos(Lt) \\ L\cos(Lt) & -L\sin(Lt) \end{pmatrix} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} \cos(Lt) & \sin(Lt) \\ -\sin(Lt) & \cos(Lt) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -L \\ L & 0 \end{pmatrix}. \tag{8.7}$$

В результате уравнения (6.3) приобретают вид

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{p}} \\ \tilde{\mathbf{x}} \end{pmatrix} = \frac{\mathrm{d}\hat{Z}_4(t)}{\mathrm{d}t}\hat{Z}_4^{-1}(t)\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{p}} \\ \tilde{\mathbf{x}} \end{pmatrix} + \hat{Z}_4(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \hat{0} & -\hat{R}(t)(\hat{K} - \hat{\beta}^{\mathrm{a}}\hat{M}^{-1}\hat{\beta}^{\mathrm{a}})\hat{R}^{-1}(t) \\ \hat{R}(t)\hat{M}^{-1}\hat{R}^{-1}(t) & \hat{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{p}} \\ \tilde{\mathbf{x}} \end{pmatrix}. \tag{8.8}$$

Напомним, мы предполагали, что антисимметричная матрица $\hat{\beta}$ имеет вид (6.1). Воистину замечательно, что те члены в уравнении (6.3), которые связывали импульсы сами с собой и координаты сами с собой, исчезли! Можно сказать, что в ларморовски вращающейся системе координат эти члены были компенсированы силой Кориолиса. После этого можно использовать процедуру определения матрицы импеданса по отношению к координатам $\tilde{\mathbf{x}}$. Далее следует произвести преобразование в *комплексные* амплитуды $\tilde{\mathbf{a}}$, $\tilde{\mathbf{a}}^*$. Затем, по-прежнему используя комплексные амплитуды, можно обратно перейти в лабораторную (т.е. невращающуюся) систему. После этого можно снова перейти от лабораторных *комплексных* амплитуд к *вещественным* лабораторным импульсам и координатам P_+, P_-, X_+, X_-. Поскольку эта процедура справедлива в любой момент времени, можно перейти к пределу $t \to 0$, применяя некое подобие правила Лопиталя. Процедура перехода от вещественных импульсов и координат к новому базису, затем к комплексным амплитудам, потом к комплексным же амплитудам в старом базисе и, наконец, к новым вещественным импульсам и координатам напоминает процедуру нахождения вещественных "импульсов" и "координат" для "бегущих" осцилляторов волн в классической электродинамике, где исходно заданы осцилляторы стоячих волн (см., например, книгу [12, § 52][3]).

Возвращаясь к задаче с антисимметричной вещественной матрицей β произвольной размерности, можно воспользоваться известной теоремой (см., например, [13]) о приведении общей антисимметричной матрицы с помощью вращений (а вращения, как известно, сохраняют симплектичность) к блочной форме, в которой каждый блок имеет вид либо

$$\begin{pmatrix} 0 & L_j \\ -L_j & 0 \end{pmatrix}, \tag{8.9}$$

либо нулевой матрицы размерности 1. Затем можно сделать преобразование для перехода в систему координат, которая вращается в плоскости соответствующего блока (8.9) с подходящими ларморовскими угловыми скоростями L_j, индивидуальными для каждой j-й плоскости, и произвести описанные выше манипуляции с *вещественными/комплексными* амплитудами. Такую программу, вероятно, можно осуществить; однако автор настоящей заметки пока еще этого не сделал[4], за исключением случая двух импульсов и двух координат (см. раздел 6).

[3] В *Теории поля* Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица § 52 скромно называется "Собственные колебания поля" и, судя по названию, должен был бы иметь почти тривиальное содержание. В действительности, описанная там процедура не столь проста, по крайней мере для автора настоящей заметки.

[4] "Кто любит более меня, тот пишет далее меня" (запись в альбом милой дамы).

Возвращаясь к общей идеологии импеданса, уместно сделать следующее замечание, которое не представляется столь уж очевидным. Опыт работы с квантовым осциллятором, имеющим массу m и частоту ω, подсказывает (необоснованно!) следующую оценку:

$$\delta y_+ \approx \sqrt{\frac{\hbar}{2Z_+}} = (?) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_+}}\,, \qquad \delta y_- \approx \sqrt{\frac{\hbar}{2Z_-}} = (?) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_-}} \tag{8.10}$$

(ср. с примером для магнитного поля из раздела 6). Результаты рассмотрения в этом разделе показывают, что интуитивные оценки типа (8.10) для импеданса Z_- здесь в корне не верны. В самом деле, для изотропного случая обе моды движения, высоко- и низкочастотная, имеют один и тот же импеданс $Z_1 = m(L^2 + \omega_{xy}^2)^{1/2}$.

Типичное возражение против использования отдельного понятия импеданса Z (в отличие от произведения $m\omega$) состоит в том, что масса m обычно не зависит от времени. Одно из опровержений этого возражения состоит в релятивистской зависимости "поперечной" массы от скорости.

Движение электронов вблизи дна зоны проводимости в твердом теле с анизотропным тензором массы — другой пример. Тензор инерции, который играет роль массы во вращательном движении, с определенностью допускает зависимость от времени; это особенно выпукло проявляется для маятника с переменной длиной. В электрических цепях (см. раздел 4) частота $\omega = 1/\sqrt{LC}$ и импеданс $Z = \sqrt{L/C}$ с определенностью являются независимыми параметрами, поскольку индуктивность L и емкость C могут одновременно и независимо изменяться со временем.

В случае движения в присутствии магнитного поля ситуация еще более специальная: даже при постоянном значении массы можно независимо изменять частоту и импеданс. Важно отметить, что можно поддерживать импеданс Z_1 (см. уравнение (6.15)) постоянным, изменяя одновременно магнитное поле (или циклотронную частоту $2L$) и упругость механической "пружины" (изотропную частоту ω_{xy}) в противоположных направлениях: одну увеличивать, а другую уменьшать в подходящей пропорции.

Вероятно, гироскопические силы в классической динамике твердых тел и силы Кориолиса во вращающейся системе координат могут приводить к антисимметричным компонентам тензора $\hat{\beta}$. Этот вопрос, однако, требует отдельного рассмотрения.

9. Заключение

В настоящей заметке мы подчеркиваем независимость понятий импеданса как "динамического параметра" и частоты как "кинематического параметра". Модуляция именно импеданса, а не частоты ответственна за параметрическое возбуждение. *Форма* стационарной траектории в фазовом пространстве осциллятора является эллипсом. Физический смысл *импеданса Z — это аспектное отношение траектории в фазовом пространстве* $Z = \delta p/\delta x$, размерность импеданса — [Дж с x^{-2}] для соответствующей размерности координаты x.

Выведено уравнение для матрицы импеданса в многомерном случае. Сохранение адиабатического инварианта обсуждается как частный случай соотношений Мэнли – Роу. По-видимому, генерация пар частица – античастица гравитационными полями тоже может рассматриваться в терминах своего рода импеданса; однако этот вопрос требует отдельного изучения.

Автор благодарен многочисленным друзьям, коллегам и родственникам, с которыми он обсуждал результаты настоящей заметки; вот их имена: Н.Б. Баранова, Г.И. Баренблатт, В.Б. Брагинский, С.М. Воронин, Л.П. Грищук, Дж. Гудман, П.В. Елютин, В.С. Либерман, М.А. Либерман, В.И. Заляпин, К.Б. Зельдович, А.Е. Каплан, Д. Кауп, Е.И. Кац, Д. Кристодоулидес, К.К. Лихарев, С. Мохов, Дж. Найфе, С.П. Новиков, М.А. Овчинников, М.Я. Овчинникова, Л.П. Питаевский, О.В. Руденко, А.Е. Сигман. С.М. Воронин указал мне на существенную опечатку в выражении для импеданса маятника. М.А. Овчинников предложил идею рис. 2а, б. М.Я. Овчинникова предложила формулировку "аспектное отношение траектории в фазовом пространстве". Я глубоко признателен Г.И. Баренблатту, В.И. Заляпину, Л.Б. Глебову, А.Е. Каплану и Э. Ван-Страйланду за моральную и организационную поддержку моей работы по тематике импеданса.

10. Приложения

А. Решение импедансного уравнения для матриц 2 × 2
Рассмотрим задачу решения уравнения для нахождения матрицы импеданса $\hat{Z}$:

$$\hat{Z}\hat{M}^{-1}\hat{Z} = \hat{K}\,. \tag{A.1}$$

Здесь $\hat{M}$ — симметричная вещественная матрица массы, $\hat{K}$ — симметричная вещественная матрица упругости; обе матрицы подразумеваются положительно-определенными. Для случая 2×2-матриц нам удалось найти явное решение уравнения (A.1), оно описано ниже.

Удобно свести задачу к такой, в которой все три матрицы имеют единичный определитель. Именно, для произвольных 2×2-матриц можно ввести

$$\hat{\mu} = (\det\hat{M})^{-1/2}\,\hat{M}\,, \qquad \hat{\kappa} = (\det\hat{K})^{-1/2}\,\hat{K}\,, \qquad \hat{\zeta} = (\det\hat{Z})^{-1/2}\hat{Z}\,. \tag{A.2}$$

Каждая из новых матриц $\hat{\mu}$, $\hat{\kappa}$ и $\hat{\zeta}$ имеет равный единице определитель, и из (A.1) следует, что

$$\det\hat{Z} = \sqrt{\det\hat{M}\det\hat{K}}\,, \qquad \hat{\zeta}\hat{\mu}^{-1} = \hat{\kappa}\hat{\zeta}^{-1}\,. \tag{A.3}$$

Наиболее общие симметричные положительно-определенные 2×2-матрицы с определителем, равным 1, имеют вид

$$\hat{\mu} = \begin{pmatrix} m & t \\ t & \dfrac{1+t^2}{m} \end{pmatrix}, \qquad \hat{\kappa} = \begin{pmatrix} k & u \\ u & \dfrac{1+u^2}{k} \end{pmatrix}, \tag{A.4}$$

где m и k — произвольные положительные вещественные числа, t и u — произвольные вещественные числа. Матрица, обратная к $\hat{\mu}$, выглядит просто, поскольку ее определитель равен 1:

$$\hat{\mu}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1+t^2}{m} & -t \\ -t & m \end{pmatrix}. \tag{А.5}$$

Введем параметры для матрицы $\hat{\zeta}$ с единичным определителем:

$$\hat{\zeta} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1, \quad \hat{\zeta}^{-1} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}. \tag{А.6}$$

В этих обозначениях уравнение (А.3) оказывается *линейным* (для 2×2-матриц $\hat{\zeta}$ и $\hat{\zeta}^{-1}$) по отношению к коэффициентам α, β, γ, δ и поэтому имеет достаточно простое решение:

$$\beta = \gamma = (u+t)\sqrt{\frac{mk}{2km(1-ut) + m^2(1+u^2) + k^2(1+t^2)}}\,,$$
$$\alpha = \frac{\beta}{u+t}\,(m+k)\,, \qquad \delta = \frac{\beta}{u+t}\left(\frac{1+u^2}{k} + \frac{1+t^2}{m}\right). \tag{А.7}$$

Таким образом, матрица импеданса $\hat{Z}$ оказывается, как и ожидалось, симметричной и существует для любых вещественных значений m, k, t и u в предположении положительности m и k. Формулы (А.7) были проверены прямой подстановкой. Дополнительная проверка приложима к особенно простому диагональному случаю, когда $t = u = 0$; тогда:

$$\beta = \gamma = 0\,, \qquad \alpha = \sqrt{km}\,, \qquad \delta = \frac{1}{\sqrt{km}}\,, \tag{А.8}$$

как и должно быть для диагональных матриц $\hat{\mu}$ и $\hat{\kappa}$ типа (А.4) при $t = u = 0$.

Б. Линейные преобразования координат и импульсов: в каком случае они являются каноническими преобразованиями? Симплектические матрицы

Рассмотрим "векторы" и "транспонированные векторы" из n исходных координат и n исходных импульсов:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \cdots \\ x_N(t) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{p}(t) = \begin{pmatrix} p_1(t) \\ \cdots \\ p_N(t) \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}(t) = \big(x_1(t), \ldots, x_N(t)\big)\,, \quad \mathbf{p}^{\mathrm{T}}(t) = \big(p_1(t), \ldots, p_N(t)\big)\,. \tag{Б.1}$$

Рассмотрим их линейные преобразования в $\mathbf{X}$ и $\mathbf{P}$ "новые" координаты и импульсы:

$$\mathbf{P} = \hat{S}\mathbf{p} + \hat{U}\mathbf{x}\,, \qquad \mathbf{X} = \hat{V}\mathbf{p} + \hat{W}\mathbf{x}\,,$$
$$\begin{pmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{X} \end{pmatrix} = \hat{Z}_{2n}\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{S} & \hat{U} \\ \hat{V} & \hat{W} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}, \tag{Б.2}$$

где $\hat{S}$, $\hat{U}$, $\hat{V}$ и $\hat{W}$ — вещественные $(n \times n)$-матрицы, $\hat{Z}_{2n}$ — вещественная $(2n \times 2n)$-матрица. Способ запомнить порядок матриц в наших обозначениях таков: они идут в порядке букв латинского алфавита слева направо в верхней строке, и затем снова слева направо в нижней строке (буква "T" пропущена, так как она используется для обозначения транспонированной матрицы). Это преобразование является каноническим, если скобки Пуассона новых переменных по отношению к старым переменным удовлетворяют соотношениям:

$$\{X_i, X_j\} = 0\,, \qquad \{P_i, P_j\} = 0\,, \qquad \{P_i, X_j\} = \delta_{ij}\,. \tag{Б.3}$$

Здесь скобки Пуассона пары функций $f(x,p)$ и $g(x,p)$ определены как

$$\{f, g\} = \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial g}{\partial x_k} - \frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial g}{\partial p_k}\right). \tag{Б.4}$$

В квантовой механике скобки Пуассона заменяются коммутаторами операторов физических величин f и g. Прямая подстановка дает соотношения между матрицами $\hat{S}$, $\hat{U}$, $\hat{V}$ и $\hat{W}$, следующие из требования каноничности преобразования:

$$\hat{S}\hat{U}^{\mathrm{T}} = (\hat{S}\hat{U}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \equiv \hat{U}\hat{S}^{\mathrm{T}}\,, \qquad \hat{V}\hat{W}^{\mathrm{T}} = (\hat{V}\hat{W}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \equiv \hat{W}\hat{V}^{\mathrm{T}}\,,$$
$$\hat{S}\hat{W}^{\mathrm{T}} - \hat{U}\hat{V}^{\mathrm{T}} = \hat{1}_n\,, \qquad \hat{W}\hat{S}^{\mathrm{T}} - \hat{V}\hat{U}^{\mathrm{T}} = \hat{1}_n\,. \tag{Б.5}$$

При этом последнее равенство в (Б.5) получается транспонированием предыдущего. В то же время равенства, транспонированные по отношению к первому и второму из (Б.5), совпадают с исходными. Условия (Б.5) означают, что $(2n \times 2n)$-матрица $\hat{Z}_{2n}$ — симплектическая, т.е. обладает свойством

$$\hat{Z}_{2n}\hat{R}(\hat{Z}_{2n})^{\mathrm{T}} = \hat{R}\,, \qquad \hat{R} = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1}_n \\ -\hat{1}_n & \hat{0} \end{pmatrix};$$
$$\hat{Z}_{2n} = \begin{pmatrix} \hat{S} & \hat{U} \\ \hat{V} & \hat{W} \end{pmatrix} \Rightarrow (\hat{Z}_{2n})^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{W}^{\mathrm{T}} & -\hat{U}^{\mathrm{T}} \\ -\hat{V}^{\mathrm{T}} & \hat{S}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}. \tag{Б.6}$$

Можно убедиться, что условие симплектичности может быть также записано в виде

$$(\hat{Z}_{2n})^{\mathrm{T}}\hat{R}\hat{Z}_{2n} = \hat{R}\,, \tag{Б.7}$$

т.е. с переставленными $\hat{Z}_{2n}$ и $(\hat{Z}_{2n})^{\mathrm{T}}$ по сравнению с (Б.6). Поэтому кроме соотношений (Б.5) выполняются также соотношения:

$$\hat{S}^{\mathrm{T}}\hat{V} = (\hat{S}^{\mathrm{T}}\hat{V})^{\mathrm{T}} \equiv \hat{V}^{\mathrm{T}}\hat{S}\,, \qquad \hat{U}^{\mathrm{T}}\hat{W} = (\hat{U}^{\mathrm{T}}\hat{W})^{\mathrm{T}} \equiv \hat{W}^{\mathrm{T}}\hat{U}\,,$$
$$\hat{S}^{\mathrm{T}}\hat{W} - \hat{V}^{\mathrm{T}}\hat{U} = \hat{1}_n\,, \qquad \hat{W}^{\mathrm{T}}\hat{S} - \hat{U}^{\mathrm{T}}\hat{V} = \hat{1}_n\,. \tag{Б.8}$$

И снова последнее равенство в (Б.8) является транспонированным от предыдущего. В то же время равенства, транспонированные по отношению к первому и второму из (Б.8), совпадают с исходными.

В. Осцилляторы с двумя типами диссипации

В этом приложении рассмотрены колебательные системы, имеющие сразу два типа трения, т.е. затухания. Сами по себе эти примеры достаточно просты. Требуется, однако, немало усилий по выбору таких координат и их обозначений, чтобы уравнения для этих систем, во-первых, имели простой вид и, во-вторых, сводились к стандартной форме (В.6), (В.9)[5]. Первая из рассмотренных систем — масса m на пружине (рис. 4). Один конец пружины прикреплен к массе, координата

[5] Если читатель полагает, что это очень легко, то пусть попробует прочесть приложение В один раз, и затем самостоятельно вывести уравнения (В.9) с правильными выражениями для Γ_1, Γ_2.

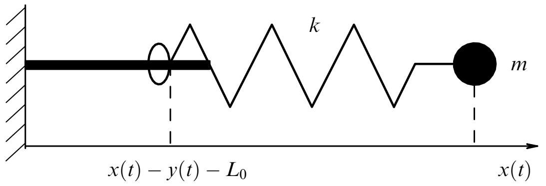

Рис. 4. Масса на пружине с двумя типами затухания.

которой обозначена как $x(t)$. Другой конец пружины приделан к невесомому кольцу подвеса, координата которого обозначена как $x(t)-y(t)-L_0$, здесь L_0 — равновесная длина пружины. Кольцо находится на штанге и испытывает трение "вязкого типа". Уравнение движения невесомого подвеса таково:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(x(t)-y(t)-L_0\big)=\eta f_{\mathrm{pivot}}\,. \tag{B.1}$$

Здесь параметр η [с кг$^{-1}$] — вязкая подвижность подвеса, т.е. коэффициент пропорциональности между приложенной силой и результирующей скоростью подвеса относительно неподвижной штанги. Эта сила, действующая на подвес (со знаком $+$) и на массу (со знаком $-$), пропорциональна деформации пружины $y(t)$:

$$f_{\mathrm{pivot}}=ky(t)\,. \tag{B.2}$$

На массу действуют две силы: со стороны деформированной пружины и сила ее собственного вязкого трения, так что связь между скоростью $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ и импульсом p, а также второй закон Ньютона имеют вид

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{p(t)}{m}\,,\qquad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=f_x=-ky(t)-Z_{\mathrm{visc}}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,. \tag{B.3}$$

Здесь Z_{visc} [кг с$^{-1}$] — коэффициент вязкого трения массы. Можно исключить переменные $x(t)$ и $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$, получив в результате замкнутую систему для $y(t)$ и $p(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=-\frac{Z_{\mathrm{visc}}}{m}\,p(t)-ky(t)\,,\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{m}\,p(t)-\eta ky(t)\,. \tag{B.4}$$

Введем частоту ω_0, вычисленную без учета затухания, и импеданс Z_y (по отношению к координате y):

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}\,,\qquad Z_y=\sqrt{km}\,,\qquad k=\omega_0 Z_y\,,\qquad \frac{1}{m}=\frac{\omega_0}{Z_y}\,. \tag{B.5}$$

Тогда система (B.4) приводится к виду

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}&=-\omega_0\,\frac{Z_{\mathrm{visc}}}{Z_y}\,p-\omega_0 Z_y y\equiv-\Gamma_1\,p-\omega_0 Z_y y\,,\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}&=\frac{\omega_0}{Z_y}\,p-\omega_0(\eta Z_y)y\equiv\frac{\omega_0}{Z_y}\,p-\Gamma_2 y\,.\end{aligned} \tag{B.6}$$

Эта система характеризуется одним "динамическим параметром" — импедансом Z_y [кг с$^{-1}$], одним "кинематическим параметром" — частотой ω_0 [рад с$^{-1}$] — и двумя безразмерными параметрами, характеризующими затухание: $\alpha=Z_{\mathrm{visc}}/Z_y=\Gamma_1/\omega_0$ и $\beta=\eta Z_y=\Gamma_2/\omega_0$:

$$\Gamma_1=\alpha\omega_0\equiv\omega_0\,\frac{Z_{\mathrm{visc}}}{Z_y}\,,\qquad \Gamma_2=\beta\omega_0\equiv\omega_0(\eta Z_y)\,. \tag{B.7}$$

Если все параметры не зависят от времени, то импеданс Z_y можно исключить с помощью преобразования

$$P(t)=\frac{p(t)}{\sqrt{Z_y}}\,,\qquad Y(t)=y(t)\,\sqrt{Z_y}\,, \tag{B.8}$$

так что система приобретает чисто "кинематическую" форму:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=-\Gamma_1 P-\omega_0 Y\,,\qquad \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}=\omega_0 P-\Gamma_2 Y\,. \tag{B.9}$$

Физический смысл индивидуальных констант затухания Γ_1 и Γ_2 отчетливо проявляется для случаев $\omega_0\ll\Gamma_1$ и $\omega_0\ll\Gamma_2$ соответственно или, что эквивалентно, при $Y\equiv0$ и $P\equiv0$. В первом случае импульс P затухает как $\exp(-\Gamma_1 t)$, а во втором случае координата Y затухает как $\exp(-\Gamma_2 t)$. Поиск решения стандартной системы (B.9) в виде $\propto\exp(-\mathrm{i}\omega t)$ приводит к двум комплексным собственным значениям частоты ω:

$$\omega_{1,2}=-\mathrm{i}\,\frac{1}{2}(\Gamma_1+\Gamma_2)\pm\sqrt{\omega_0^2-\frac{1}{4}(\Gamma_1-\Gamma_2)^2}\,. \tag{B.10}$$

Следует подчеркнуть, что два источника затухания дают вклады в амплитудное затухание $\Gamma=-\mathrm{Im}\,\omega_{1,2}$ в виде *арифметического среднего* $(\Gamma_1+\Gamma_2)/2$. Легко понять, почему суммарный вклад представляет собой арифметическое среднее. В самом деле, осциллятор "проводит половину времени", обладая в основном кинетической энергией (затухание которой определяется коэффициентом Γ_1), а другую "половину времени" он обладает в основном потенциальной энергией (затухание которой определяется коэффициентом Γ_2). Однако поправка к вещественной части собственной частоты определяется *разностью* констант затухания: $(1/4)(\Gamma_1-\Gamma_2)^2$. В частности, можно подобрать два источника затухания так, чтобы выполнялось равенство $\Gamma_1=\Gamma_2$. Тогда вещественная часть частоты остается точно равной ω_0 при любом значении Q-фактора, включая случай $Q\ll1$ (здесь Q определено как $Q=\omega_0/(\Gamma_1+\Gamma_2)$).

Другая система — классический LC-колебательный контур (рис. 5), в котором мы рассмотрим два механизма затухания. Один из них — потери в сопротивлении R_L [Ом], включенном последовательно с индуктивностью L. Другой механизм затухания — потери в проводимости G [Ом$^{-1}$] вследствие утечки заряда конденсатора C. Полный магнитный поток $\Phi(t)$ (с учетом всех витков соленоида) вызывается прохождением тока $I(t)$ через индук-

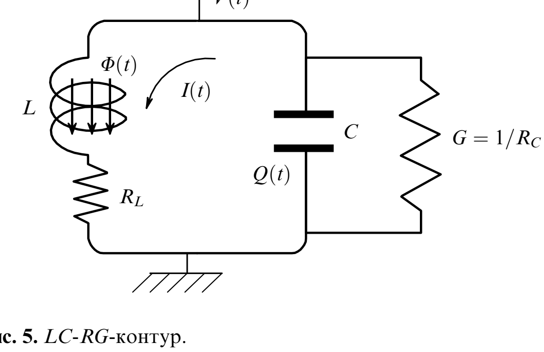

Рис. 5. LC-RG-контур.

тор:

$$\Phi(t) = LI(t)\,. \tag{В.11}$$

Здесь L [Г] — значение индуктивности. Закон электромагнитной индукции Фарадея утверждает, что напряжение $V_L(t) = V(t) - R_L I(t)$ ведет к увеличению магнитного потока:

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = V(t) - R_L I(t)\,. \tag{В.12}$$

Заряд $Q(t)$ (на нижней обкладке конденсатора на рис. 5) равен

$$Q(t) = -CV(t)\,. \tag{В.13}$$

Наконец, ток $I(t)$ выражается в виде

$$I(t) = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} - GV(t)\,. \tag{В.14}$$

Исключая $V(t)$ и $I(t)$, получаем замкнутую систему ОДУ для $\Phi(t)$ и $Q(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{R_L}{L}\,\Phi(t) - \frac{1}{C}\,Q(t)\,, \qquad \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{L}\,\Phi(t) - \frac{G}{C}\,Q(t)\,. \tag{В.15}$$

И снова, вводя импеданс системы Z, невозмущенную затуханием частоту ω_0 и две скорости амплитудного затухания, Γ_L для RL-цепочки и Γ_C для GC-цепочки, определениями

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}}\,, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\,, \quad \Gamma_L = \frac{R_L}{L}\,, \quad \Gamma_C = \frac{G}{C} \equiv \frac{1}{R_C C}\,, \tag{В.16}$$

приводим систему (В.15) к виду

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\Gamma_L \Phi(t) - \omega_0 Z Q(t)\,, \qquad \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega_0}{Z}\,\Phi(t) - \Gamma_C Q(t)\,. \tag{В.17}$$

Эта стандартная система вида (В.6), (В.9), для которой справедливы все выше сделанные выводы относительно такой системы.

Основная часть настоящей заметки была посвящена рассмотрению схожести и различия между двумя частями энергии (гамильтониана): потенциальной и кинетической. Схожесть связана с кинематическим параметром — частотой ω_0; различие описывается на основе понятия импеданса. Продолжая это направление, мы рассмотрели в приложении В симметрию и асимметрию между затуханием кинетической энергии и затуханием потенциальной энергии. Рассмотренные вопросы имеют прямое отношение к асимптотическому поведению сильнозатухающих колебаний.

Г. Что такое адиабатический инвариант?

Обсуждая содержание настоящей заметки со студентами, я обнаружил, что новое поколение (чуть не написал клише "выбирает Пепси") не всегда знакомо с адиабатическими инвариантами — понятием из классической лагранжевой/гамильтоновой механики. Ниже приведено формальное определение адиабатического инварианта на простом примере одномерного движения $x(t)$ в поле стационарного потенциала $U(x)$ (рис. 6). Закон

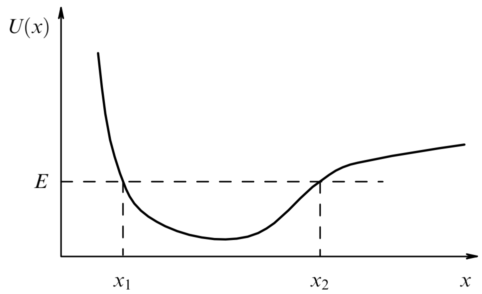

Рис. 6. Движение между двумя точками поворота x_1 и x_2 в поле стационарного потенциала $U(x)$.

сохранения энергии для этой задачи можно записать в виде

$$\frac{p^2}{2m} + U(x) = E = \mathrm{const}\,. \tag{Г.1}$$

В результате импульс p зависит от координаты x следующим образом:

$$p(x) = \pm\big|p(x)\big| = \pm\sqrt{2m\big(E - U(x)\big)}\,. \tag{Г.2}$$

Здесь знаки + и − отвечают интервалам движения в положительном и отрицательном направлениях x соответственно. Стационарное колебательное движение происходит между двумя точками поворота x_1 и x_2, в которых вся энергия E переходит в потенциальную:

$$U(x_1) = E\,, \qquad U(x_2) = E\,. \tag{Г.3}$$

Поскольку $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = p/m$, то период T этого движения

$$T = T(E) = \oint \mathrm{d}t = 2\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}t = 2m\int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}x'}{\big|p(x')\big|} \equiv \equiv \sqrt{2m}\int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{\mathrm{d}x'}{\sqrt{E - U(x')}}\,. \tag{Г.4}$$

Адиабатический инвариант формально определяется как площадь внутри этой траектории на фазовой плоскости,

$$A = A(E) = \oint p\,\mathrm{d}x = 2\int_{x_1}^{x_2} p(x')\,\mathrm{d}x' = = 2\sqrt{2m}\int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \sqrt{E - U(x')}\;\mathrm{d}x'\,, \tag{Г.5}$$

с очевидным соотношением

$$T(E) = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}E}\,. \tag{Г.6}$$

Квантово-механическая мотивация, стоящая за этим определением (см. заметку [8] П. Парадоксова), такова. В квазиклассическом приближении Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна (ВКБ) между импульсом p и "длиной волны" Λ соблюдается соотношение де Бройля: $\Lambda = 2\pi\hbar/p$. Стационарное движение частицы с волновыми свойствами требует, чтобы на этой траектории укладывалось целое число $\tilde{n}$ длин волн:

$$\oint \frac{\mathrm{d}x'}{\Lambda(x')} = \frac{2}{2\pi\hbar}\int_{x_1}^{x_2} p(x')\,\mathrm{d}x' = \frac{A(E)}{2\pi\hbar} = \tilde{n}\,. \tag{Г.7}$$

Несколько более аккуратный подход (так называемое приближение Бора–Зоммерфельда, соответствующее правилам квантования в старой квантовой теории) состоит в замене (для гладких потенциалов $U(x)$) числа $\tilde{n}$ числом $(n+1/2)$, где n — целое. В результате классический адиабатический инвариант выражается через это число n старой квантовой теории как

$$A(E) = 2\pi\hbar\left(n+\frac{1}{2}\right). \tag{Г.8}$$

Это уравнение при учете функциональной зависимости $A(E)$, вычисляемой с помощью (Г.5) для конкретной потенциальной кривой $U(x)$, позволяет найти, по крайней мере приближенно, значения E_n дискретных уровней энергии. В том же ВКБ-приближении частота $\omega = 2\pi/T$ классического движения приближенно соответствует разности энергий соседних уровней, деленной на $\hbar$:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{E_{n+1}-E_n}{\hbar}. \tag{Г.9}$$

Большинство учебников классической механики содержат следующее правильное и важное утверждение: *медленные изменения параметров системы оставляют адиабатический инвариант практически неизменным*. Вот как П. Парадоксов объясняет сохранение адиабатического инварианта. Медленные изменения параметров системы не создают временны́х компонент Фурье для возмущений, которые могли бы вызывать переходы $n \to n'$, поскольку эти переходы отвечают частотам

$$\omega(n\to n') \approx \frac{2\pi(n-n')}{T}. \tag{Г.10}$$

В результате система продолжает оставаться в состоянии с неизменными n и в силу (Г.8) в состоянии с неизменным адиабатическим инвариантом $A(E)$. Эти рассуждения показывают, что медленный характер изменения параметров является достаточным условием сохранения $A(E)$ с хорошей точностью, но не необходимым. Даже быстрые изменения не повлияют сколько-нибудь заметно на $A(E)$, если они не содержат соответствующих резонансных частот.

Для потенциала степенно́го типа

$$U(x) = \frac{k}{\alpha}\,|x|^{\alpha}, \qquad \alpha > 0, \tag{Г.11}$$

несложные вычисления дают

$$x_{2,1}(E) = \pm\left(\frac{\alpha E}{k}\right)^{1/\alpha}, \qquad A(E) = 4x_2(E)\sqrt{2mE}\,B(\alpha),$$
$$B(\alpha) = \int_0^1 \sqrt{1-y^{\alpha}}\,\mathrm{d}y, \tag{Г.12}$$

$$T(E) = 2\sqrt{2m}\int_0^{x_2(E)} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E-(k/\alpha)x^{\alpha}}} = 2\sqrt{2m}\,\frac{x_2(E)}{\sqrt{E}}\,D(\alpha),$$
$$D(\alpha) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^{\alpha}}}, \tag{Г.13}$$

$$A(E) = \mathrm{const}\,E^{1/\alpha+0,5}, \qquad T(E) = \mathrm{const}'\,E^{1/\alpha-0,5}. \tag{Г.14}$$

Случай линейного гармонического осциллятора $\alpha = 2$ особенно поучителен:

$$A(E) = \frac{2\pi E}{\omega_0}, \qquad T = \frac{2\pi}{\omega_0}, \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \tag{Г.15}$$

так что период не зависит от амплитуды (т.е. от энергии), а формула квантования Бора–Зоммерфельда дает точный ответ:

$$E_n = \hbar\omega_0\left(n+\frac{1}{2}\right). \tag{Г.16}$$

Сохранение адиабатического инварианта для линейного гармонического осциллятора означает, что $E \propto \omega_0$, т.е. адиабатическое изменение энергии следует изменению частоты. Поскольку оператор числа квантов $\hat{n}$ связан с комплексными амплитудами a^*, a соотношением

$$\hat{n}+\frac{1}{2} = \frac{aa^*+a^*a}{2}, \tag{Г.17}$$

сохранение aa^* также означает, что $E \propto \omega$, т.е. сохранение адиабатического инварианта.

Д. Классическая механика сохранения адиабатического инварианта

Изучая различные книги по классической механике, я всегда ощущал некоторое замешательство. Адиабатический инвариант $A(E)$ — это площадь на фазовой плоскости, заключенная внутри траектории постоянной энергии, в предположении стационарности гамильтониана. Из теоремы Лиувилля мы все знаем, что площадь (объем) в фазовом пространстве строго сохраняется в процессе эволюции. Поэтому естественно было бы ожидать, что сохранение адиабатического инварианта как-то связано с теоремой Лиувилля. К моему огорчению, почти во всех книгах, которые мне удалось просмотреть, в соответствующих разделах никак не упоминается теорема Лиувилля (см., впрочем, [6]). По этой причине ниже я пытаюсь дать объяснение сохранению $A(E)$, которое бы устраивало меня лично. (Отсюда, вообще говоря, не следует, что оно будет устраивать других. Увы!)

Рассмотрим движение одномерной механической системы с координатой $x(t)$ и импульсом $p(t)$, удовлетворяющими стандартным уравнениям Гамильтона

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H\big(x,p,\lambda(t)\big)}{\partial x}, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H\big(x,p,\lambda(t)\big)}{\partial p}. \tag{Д.1}$$

Параметр $\lambda(t)$ принимает постоянное значение λ_1 в отрицательной бесконечности по времени и постоянное значение λ_2 в положительной временно́й бесконечности. На рисунках 7, 8 представлены возможные графики изменения с $\lambda_1 \neq \lambda_2$; эти два предельных значения могут и совпадать. Важно, что внутри этого временно́го интервала $\lambda(t)$ изменяется. Энергия сохраняется и в начальном, и в конечном состояниях, но не в промежутке.

Сохранение энергии E в одномерном финитном (осцилляторном, но не обязательно гармоническом) движении означает, что каждая из траекторий, обозначенных как $x(t)$ на рис. 7, 8, описывается замкнутой кривой на фазовой плоскости (p,x), представленной на рис. 9. На рисунке 9а показаны траектории в фазовом

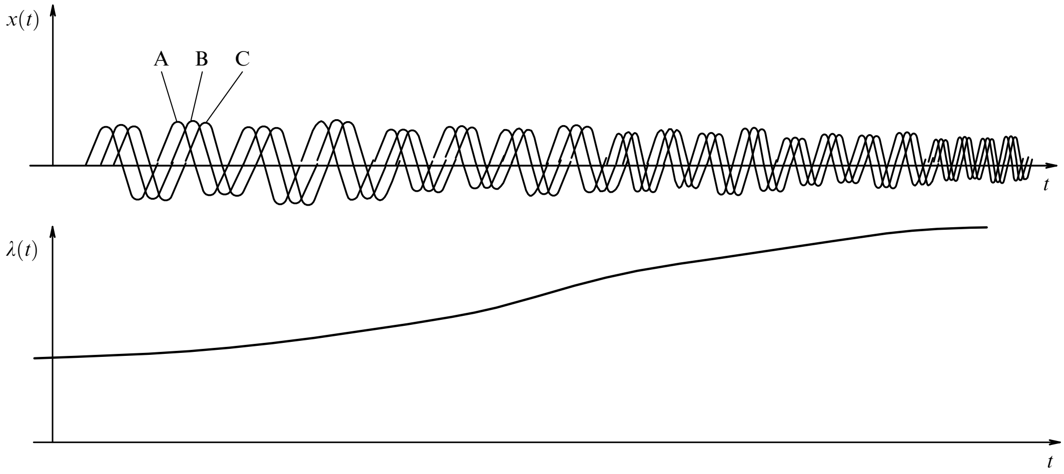

Рис. 7. Колебательное движение системы. Графики A, B и C при $t \to -\infty$ представляют движения с одной и той же энергией. Это означает, что при $t \to -\infty$ эти графики различаются лишь сдвигом во времени (или, что то же, по фазе). Параметр $\lambda(t)$ в этом случае изменялся медленно.

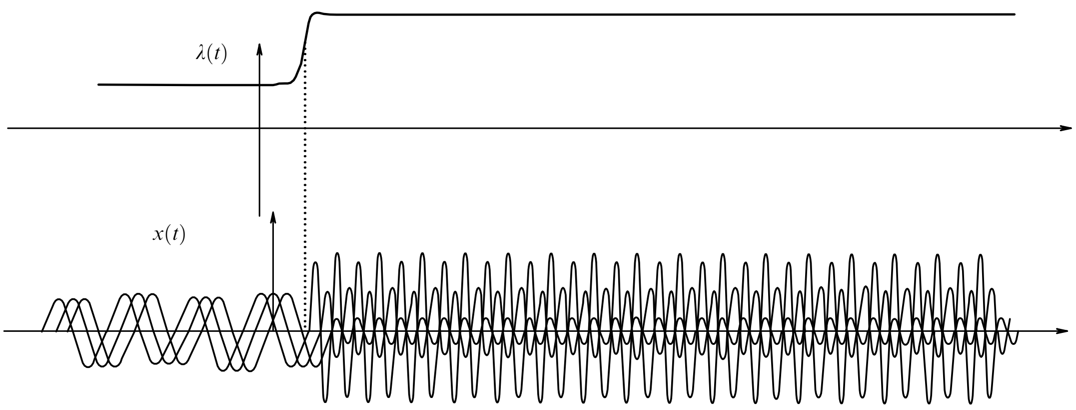

Рис. 8. Колебательное движение системы. Три графика при $t \to -\infty$ представляют движения с одной и той же энергией. Это означает, что при $t \to -\infty$ эти графики различаются лишь сдвигом по времени (или, что то же, по фазе). Параметр $\lambda(t)$ в этом случае изменялся быстро.

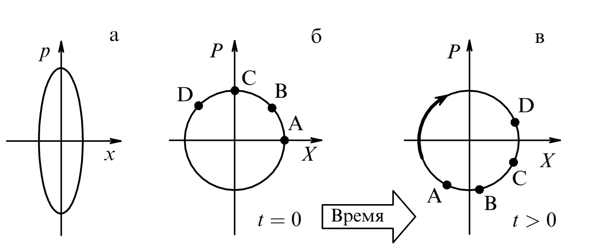

Рис. 9. Фазовая плоскость линейного гармонического осциллятора с постоянным параметром λ и, следовательно, с постоянной энергией. (а) Эллиптическая кривая на фазовой плоскости. (б) Изменение масштаба (p, x) позволяет превратить исходный эллипс в круг. (в) Временна́я эволюция соответствует движению точек по кругу, т.е. вращению точек вокруг начала координат.

пространстве линейного гармонического осциллятора: это эллипсы с площадью, равной адиабатическому инварианту $A(E)$, и аспектным отношением $\delta p/\delta x = Z$, где Z — импеданс. Переходя к новым переменным $P = p/\sqrt{Z}$, $X = x\sqrt{Z}$, можно превратить этот эллипс в круг (рис. 9б). Тогда эволюция во времени при $\lambda(t) = \mathrm{const}$ сопровождается сохранением энергии и тем самым соответствует чистому вращению на плоскости P, X (рис. 9в). Подчеркнем, что точки A, B, C, D и т.д. при заданной энергии занимают положение друг друга при эволюции и тем самым образуют замкнутую траекторию: эллипс или круг, в зависимости от выбора координат — p, x или P, X. Часть этих фазовых точек представлена на рис. 7 как A, B и C.

Зависимость от времени координаты $x(t)$ и импульса $p(t)$ может быть представлена как "циркуляция" точек-представителей A–B–C–D– … –A вдоль замкнутой траектории, и положение индивидуальной точки соответствует конкретной фазе колебательного движения. Ангармонизм может приводить к неэллиптической форме траектории и, что еще важнее, к зависимости периода колебаний от амплитуды (энергии).

Рассмотрим теперь два качественно разных типа ансамблей точек на фазовой плоскости, которые оба, впрочем, отвечают равномерной плотности заселения на единицу площади фазовой плоскости. Как следует из теоремы Лиувилля, эта однородная плотность остается постоянной в процессе движения.

Ансамбль первого типа с точками, ограниченными кривыми A–B–C– … –A на рис. 9, 10, окружен замкнутой траекторией фиксированной энергии E_0. Точки A–B–C– … –H–A на этой траектории представляют собой разные фазы движения; они переходят друг в друга при эволюции за счет не зависящего от времени гамиль-

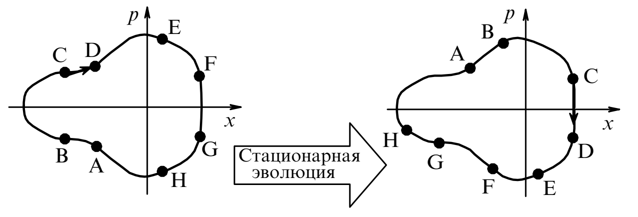

Рис. 10. Нелинейный осциллятор в стационарных условиях. Точки A – B – C – … – H – A находятся на истинной траектории (на кривой, отвечающей постоянной энергии; стационарный ансамбль). Поэтому временна́я эволюция оставляет эти точки на *той же* кривой, со сдвигом по фазе.

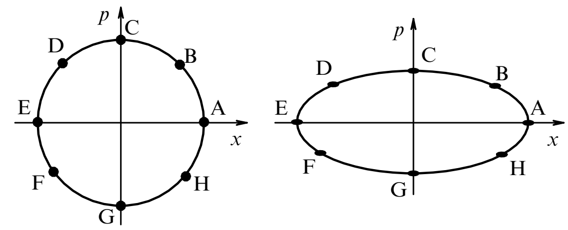

Рис. 12. *Адиабатическая* эволюция линейного гармонического осциллятора. Новые положения точек A – B – … – H – A также образуют траекторию постоянной энергии. Поскольку частота и, главное, импеданс, вообще говоря, изменились, новая кривая является эллипсом в "старых" канонических координатах (p, x).

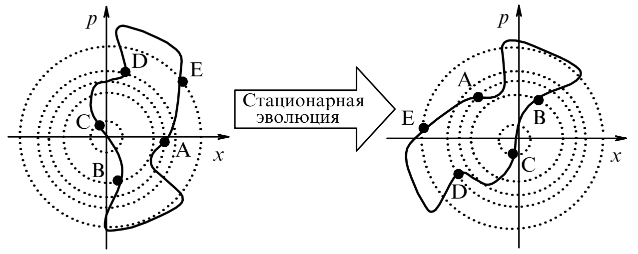

Рис. 11. Линейный гармонический осциллятор в стационарных условиях. Точки A, B, C, D, E лежат на замкнутой кривой, содержащей *разные* значения энергии при разных фазах (нестационарный ансамбль). Поэтому в процессе эволюции кривая меняет свое положение на фазовой плоскости, даже для стационарного гамильтониана. В этом конкретном случае линейного гармонического осциллятора стационарная эволюция отвечает вращению вокруг начала координат.

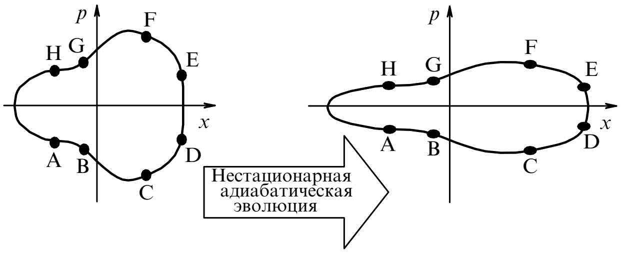

Рис. 13. *Адиабатическая* эволюция *нелинейного*, т.е. ангармонического, осциллятора. Новые положения точек A – B – … – H – A также образуют траекторию с (новой) постоянной энергией.

тониана, т.е. при $\lambda = \text{const}$. Поэтому ансамбль таких точек стационарен как внутри, так и на границе, т.е. воспроизводит себя в процессе движения. Мы можем также назвать такой ансамбль фазово-инвариантным: ни одна из фаз движения не представлена с бо́льшим весом, чем любая другая.

Второй тип ансамбля тоже состоит при $t = t_0$ из точек с постоянной плотностью; однако не все фазы представлены в равной пропорции (рис. 11). Для определенности рис. 11 выполнен для линейного гармонического осциллятора и к тому же в таких координатах, при которых соответствующие траектории в фазовом пространстве являются окружностями. Очевидно, что, например, через $3/8$ периода, этот ансамбль переместится в другое положение на фазовой плоскости (см. рис. 11). Введение такого ансамбля должно сопровождаться явным указанием того момента времени $t = t_0$, в который мы этот ансамбль рассматриваем.

Обсудим теперь эволюцию системы между $t \to -\infty$ и $t \to +\infty$, когда параметр $\lambda(t)$ изменяется от постоянного значения λ_1 до постоянного значения λ_2 (см. рис. 7 и 8). Предположим также, что при $t \to -\infty$ мы берем стационарный (т.е. фазово-инвариантный) ансамбль точек на фазовой плоскости с максимальной энергией E_1 на границе A – B – C – … – A. Далее следует рассмотреть два предельных случая возможного поведения параметра $\lambda(t)$ во времени.

Первый из них — адиабатический случай *медленного изменения* $\lambda(t)$, показанного на рис. 7. Именно здесь срабатывает главный "логический аргумент" доказательства. Это медленное изменение *не может* (с разумной точностью) *выделить* какую-либо фазу исходного движения. Поэтому все точки ансамбля подвергнутся одному и тому же процессу эволюции, а следовательно, конечный ансамбль тоже будет фазово-инвариантным с граничными точками A – B – C – … – A на траектории с некоторым новым (но общим!) значением энергии E_2 (рис. 12, 13). Тогда сохранение фазового объема (теорема Лиувилля) немедленно приводит к сохранению адиабатического инварианта $A(E)$, который здесь просто совпадает с площадью на фазовой плоскости, что и требовалось доказать.

Другой предельный случай — это случай, в котором параметр $\lambda(t)$ изменяется достаточно быстро, так что мы можем указать конкретную фазу движения, отвечающую, например, максимальному положительному значению $\mathrm{d}\lambda(t)/\mathrm{d}t$ (см. рис. 8). Поведение траекторий на фазовой плоскости для этого предельного случая показано на рис. 14 и 15. Иными словами, эволюция точек нашего исходного ансамбля, имеющих разные фазы (например, A, B, C), дает конечные состояния с *разными* значениями энергии: $E_2(\mathrm{A})$, $E_2(\mathrm{B})$, $E_2(\mathrm{C})$.

Именно в этом пункте рассмотрение адиабатических инвариантов в настоящей заметке отличается от общепринятого (см., например, [1 – 6]). Именно, главное утверждение, которое нужно делать в неадиабатическом случае, *не состоит* в том, что имеет место некоторое изменение адиабатического инварианта $A(E)$ по сравнению с его исходным значением. Главное, что нужно отмечать прежде всего, — это то, что неадиабатическая эволюция приводит к *фазово-чувствительному разбросу* траектории, к разбросу значений конечных энергий E_2, конечного адиабатического инварианта $A(E_2)$.

В действительности, в большинстве случаев слабой неадиабатичности *усредненное по начальным фазам значение* $\langle A(E_2) - A(E_1) \rangle$ равно нулю в первом порядке по

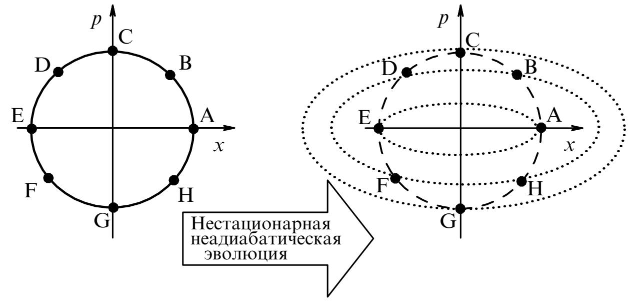

Рис. 14. *Неадиабатическая* (быстрая) эволюция линейного гармонического осциллятора. Различные исходные точки A – B – … – H – A получают разное изменение энергии, и новые точки образуют ансамбль второго типа, а последовательность точек A – B – … … – H – A уже не образует траектории.

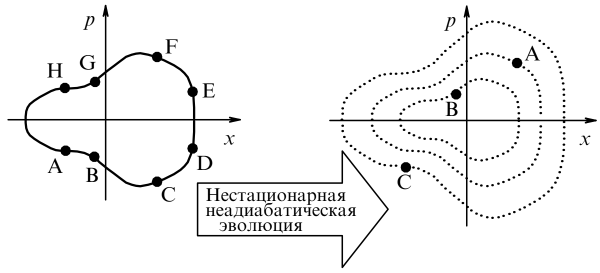

Рис. 15. *Неадиабатическая* (быстрая) эволюция *нелинейного* осциллятора. Различные исходные точки A – B – … – H – A получают разное изменение энергии, и новые точки образуют ансамбль второго типа, а последовательность точек A – B – … – H – A уже не образует траектории.

малому параметру, характеризующему изменение $A(E)$. В первом порядке по этому параметру возникает *разброс* $A(E)$. В результате формулировки типа "адиабатический параметр изменился на 3 %" могут вводить в заблуждение; они отвлекают внимание от более важного *свойства фазовой чувствительности*, от разброса конечных значений E_2 и $A(E_2)$, чувствительного к начальной фазе.

Хорошим примером неадиабатического возмущения является действие импульса $\lambda(t)$ резонансной силы $F(t) = \lambda(t)\cos(\omega t)$ на гармонический осциллятор; этот пример взят из [3]. Уравнения движения таковы:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{p(t)}{m}\,, \qquad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -m\omega^2 x(t) + \lambda(t)\cos(\omega t)\,, \tag{Д.2}$$

где предполагается, что $\lambda(-\infty) = \lambda(+\infty) = 0$. Общее решение этого уравнения при $t \to +\infty$ имеет вид

$$x(t) = a_0\cos(\omega t - \varphi) + b\cos(\omega t - \beta)\,, \tag{Д.3}$$

$$p(t) = -m\omega a_0 \sin(\omega t - \varphi) - m\omega b \sin(\omega t - \beta)\,, \tag{Д.4}$$

где

$$b\exp(\mathrm{i}\beta) = (m\omega)^{-1}\int \lambda(\tau)\cos(\omega\tau)\exp(-\mathrm{i}\omega\tau)\,\mathrm{d}\tau\,, \tag{Д.5}$$

и интегрирование производится от $\tau = -\infty$ до $\tau = +\infty$. Конечное значение адиабатического инварианта легко вычисляется:

$$A(E_2) = A(E_1) + 2b\sqrt{2\pi m\omega A(E_1)}\,\cos(\varphi - \beta) + 2\pi m\omega b^2\,. \tag{Д.6}$$

Легко видеть, что эффект первого порядка по b состоит в фазово-чувствительном разбросе конечных значений $A(E_2)$. Лишь член второго порядка $\propto b^2$ дает фазово-нечувствительное систематическое возрастание адиабатического инварианта.

Другой пример неадиабатического возмущения — параметрический резонанс, вызываемый модуляцией импеданса с частотой 2ω. Здесь также возникает усиление или ослабление, чрезвычайно чувствительное к фазе исходных колебаний, которую следует отсчитывать от фазы модуляции параметра (импеданса).

Е. Передача энергии в резонансных связанных осцилляторах

В большинстве учебников осцилляторы описываются стандартным ОДУ второго порядка

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = 0\,, \tag{Е.1}$$

где единственным сообщаемым параметром осциллятора является его собственная частота $\omega = \sqrt{k/m}$. Чего здесь не хватает?[6] Большинство не отдает себе отчета в том, что не хватает информации об импедансе $Z = \sqrt{km}$, здесь k — константа упругости, m — масса. На первый взгляд, по заданному значению начальной координаты $x(t=0)$ и начальной скорости $v_x(t=0)$ можно найти траекторию, пользуясь только уравнением (Е.1). В результате может создаться ложное впечатление о том, что два осциллятора — один с тяжелой массой m_1 и жесткой пружиной (большим k_1), а другой с легкой массой m_2 и мягкой пружиной (малое k_2) — физически эквивалентны, если их собственные частоты одинаковы (рис. 16). Хотелось бы надеяться, что в основной части настоящей заметки мы смогли убедить читателя в том, что для осциллятора с зависящими от времени параметрами импеданс — необходимое понятие. Как насчет стационарного случая? В этом приложении мы покажем, что в стационарной системе двух связанных осцилляторов даже с одинаковыми собственными частотами энергообмен существенно зависит от соотношения импедансов.

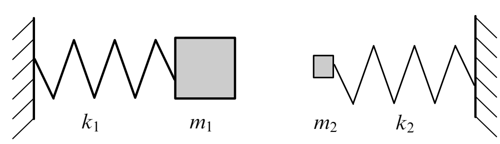

Рис. 16. Два осциллятора, которые могут обладать идентичными собственными частотами, физически различаются — у них разные импедансы.

[6] Хорошо известна история со студентом кулинарного техникума, которому на экзамене дали попробовать борщ и задали вопрос: "Чего здесь не хватает?" — имея в виду, какие ингредиенты были недовложены при приготовлении борща. Ответ: "Хлеба не хватает", — показывает не только легендарную тупость студента, но и старинную российскую гастрономическую традицию: есть обед с хлебом. В уравнении (Е.1) не хватает информации об импедансе. Эта информация — "вне уравнения (Е.1)", равно как и хлеб — "вне борща"; оба, однако, важны. Можно сказать, что частота и импеданс составляют насущную пищу ("щи да кашу") теории колебаний.

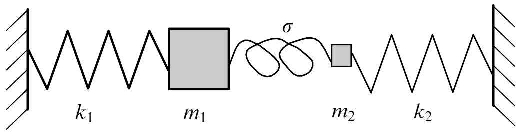

Рис. 17. Два осциллятора, исходно имеющие одинаковые собственные частоты, в дальнейшем связываются весьма мягкой пружинкой (константа упругости σ). Будут ли биения в этой системе приводить к полной передаче энергии от одного осциллятора к другому? Если импедансы не равны, то правильный ответ — "нет".

Первый шаг к пониманию здесь состоит в том, чтобы записать уравнение (E.1) при наличии внешней силы $F(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = \frac{1}{m}\,F(t) \equiv \frac{\omega}{Z}\,F(t)\,. \tag{E.2}$$

Видно, что влияние одной и той же силы $F(t)$ слабее для осциллятора с бóльшим Z.

Поучительно рассмотреть систему двух взаимно резонансных осцилляторов, т.е. таких, собственные частоты которых были равны до включения связи (рис. 17). Пусть осцилляторы соединены слабой пружиной с константой упругости σ. Привычно думать, что резонанс между исходными собственными частотами приведет к следующему красивому явлению. Именно, возбудим, например, некоторое смещение первого осциллятора $x_1(t=0)=a$ и дадим нулевое смещение второму $x_2(t=0)=0$. Привычно ожидаемый эффект состоит в том, что *вся* энергия колебаний будет передана второму осциллятору, затем обратно первому и т.д. Непосредственные вычисления показывают, однако, что смещение $x_1(t)$ ведет себя как

$$x_1(t) = \frac{a}{Z_1+Z_2}\bigl(Z_1\cos(\omega_- t) + Z_2\cos(\omega_+ t)\bigr)\,. \tag{E.3}$$

Здесь ω_- и ω_+ — частоты двух собственных мод в присутствии связи:

$$\omega_- = \omega\,, \qquad \omega_+ = \omega\sqrt{1+\frac{\sigma}{\omega}\left(\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}\right)}\,. \tag{E.4}$$

Из (E.3) видно, что полная передача энергии происходит лишь при $Z_1 = Z_2$.

Встает естественный вопрос: можно ли модифицировать связь так, чтобы добиться полной перекачки энергии? Решение состоит в том, чтобы взять модифицированный гамильтониан взаимодействия, так что полный гамильтониан принимает вид

$$H(p_1,p_2,x_1,x_2) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{m_1}\,p_1^2 + k_1x_1^2 + \frac{1}{m_2}\,p_2^2 + k_2x_2^2 + \sigma\left(\frac{x_1}{\alpha}-\frac{x_2}{\beta}\right)^2\right], \tag{E.5}$$

где введены два безразмерных коэффициента α и β. Предположение о равных исходных частотах $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ легко описать, используя представление (3.19) для гамильтониана:

$$H(p_1,p_2,x_1,x_2) = \frac{\omega}{2}\left[\frac{1}{Z_1}\,p_1^2 + Z_1x_1^2 + \frac{1}{Z_2}\,p_2^2 + Z_2x_2^2\right] + \frac{1}{2}\,\sigma\left(\frac{x_1}{\alpha}-\frac{x_2}{\beta}\right)^2. \tag{E.6}$$

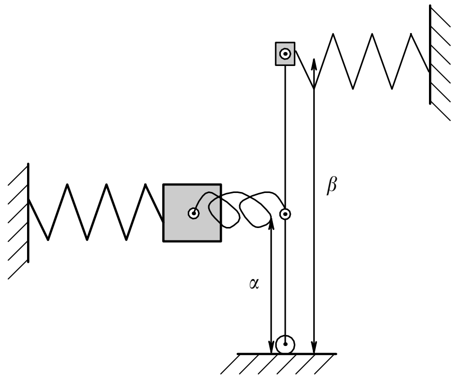

Рис. 18. Возможная конструкция "трансформатора импеданса" для резонансных связанных осцилляторов.

Переход к новым переменным P_1, P_2, X_1, X_2 с помощью преобразований

$$p_1 = P_1\sqrt{Z_1}\,,\quad p_2 = P_2\sqrt{Z_2}\,,\quad x_1 = \frac{X_1}{\sqrt{Z_1}}\,,\quad x_2 = \frac{X_2}{\sqrt{Z_2}} \tag{E.7}$$

позволяет записать гамильтониан системы в виде

$$\tilde{H}(P_1,P_2,X_1,X_2) = \frac{\omega}{2}(P_1^2+X_1^2+P_2^2+X_2^2) + \frac{1}{2}\,\sigma\left(\frac{X_1}{\alpha\sqrt{Z_1}}-\frac{X_2}{\beta\sqrt{Z_2}}\right)^2. \tag{E.8}$$

При этом становится очевидным, что система оказывается симметричной по отношению к новым переменным, тем самым допуская полный энергообмен лишь в случае

$$\left|\alpha\sqrt{Z_1}\right| = \left|\beta\sqrt{Z_2}\right|. \tag{E.9}$$

Мы предоставляем читателю самому сконструировать устройства с различными "рычагами" с подходящим отношением α/β; такие устройства можно рассматривать как "трансформаторы импеданса". Возможная конструкция показана на рис. 18, где невесомый твердый стержень прикреплен в трех местах: к неподвижной оси, к одной из масс через пружинку и к другой массе непосредственно. Очевидно, более длинный рычаг (пропорциональный β) нужно присоединить к осциллятору с меньшим импедансом (т.е. с меньшей массой). Можно представить себе также осцилляторы, в которых связь обеспечивается общим вкладом в кинетическую энергию. Согласования импедансов можно добиться и в этом случае, и формулы (E.7) особенно удобны для решения такой задачи.

Трансформаторы импеданса (включая обычные бытовые трансформаторы 220/127, см. повесть Э. Успенского о гарантийных человечках) широко используются и хорошо изучены в электронике; поэтому согласование импедансов для LC-контуров мы обсуждать не станем.

Список литературы

1. Арнольд В И *Математические методы классической механики* 3-е изд. (М.: Наука, 1989) [Arnold V I *Mathematical Methods of Classical Mechanics* 2nd ed. (Berlin: Springer-Verlag, 1989)]

2. Арнольд В И *Обыкновенные дифференциальные уравнения* 3-е изд. (М.: Наука, 1984) с. 196 [Translated into English: Arnold V I *Ordinary Differential Equations* (Berlin: Springer-Verlag, 1992)]
3. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Механика* (М.: Наука, 1982) [Translated into English: Landau L D, Lifshitz E M *Mechanics* (Oxford: Pergamon Press, 1976)]
4. Goldstein H *Classical Mechanics* (Cambridge, Mass.: Addison-Wesley, 1950) [Голдстейн Г *Классическая механика* (М.: Наука, 1975)]
5. Sussman G J, Wisdom J *Structure and Interpretation of Classical Mechanics* (Cambridge, Mass.: MIT Press, 2001)
6. José J V, Saletan E J *Classical Dynamics*: *A Contemporary Approach* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998)
7. Berndt R *Einführung in die symplektische Geometrie* (Braunschweig: Vieweg Verlag, 1998) [Translated into English: *An Introduction to Symplectic Geometry* (Providence, RI: American Mathematical Society, 2001) p. 74 – 75]
8. Парадоксов П *УФН* **89** 707 (1966) [Paradoksov P *Sov. Phys. Usp*. **9** 618 (1967)]
9. Берестецкий В Б, Лифшиц Е М, Питаевский Л П *Квантовая электродинамика* (М.: Наука, 1980) [Translated into English: Berestetskii V B, Lifshitz E M, Pitaevskii L P *Quantum Electrodynamics* (Oxford: Pergamon Press, 1982)]
10. Glauber R J "Optical coherence and photon statistics", in *Optique et électronique Quantiques. Quantum Optics and Electronics. Lectures, hes Houches, 1964 Session of the Summer School of Theoretical Physics, Univ. of Grenoble* (Eds C DeWitt, A Blandin, C Cohen-Tannoudji) (New York: Gordon and Breach, 1965) p. 63 [Глаубер Р "Когерентные свойства оптических полей", в сб. *Квантовая оптика и квантовая радиофизика. Лекции в летней школе теоретической физики Гренобльского университета, Лезуш, Франция* (М.: Мир, 1966)]
11. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Статистическая физика* (М.: Наука, 1976) [Translated into English: Landau L D, Lifshitz E M *Statistical Physics* (Oxford: Pergamon Press, 1980)]
12. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Наука, 1988) [Translated into English: Landau L D, Lifshitz E M *The Classical Theory of Fields* (Oxford: Pergamon Press, 1983)]
13. Гантмахер Ф Р *Теория матриц* (М.: Наука, 1988) [Translated into English: Gantmakher F R *Applications of the Theory of Matrices* (Mineola, NY: Dover Publ., 2005)]

Impedance and parametric excitation of oscillators

B.Ya. Zeldovich
CREOL College of Optics and Photonics of the University of Central Florida, CREOL-UCF, 4000 Central Florida Blvd, Orlando, FL 32816-2700, USA
Tel. (*407*) *823-68 31. Fax* (*407*) *823-68 80*
E-mail: *boris@creol.ucf.edu*

Linear ordinary differential equations for one or several coupled oscillators are discussed with an emphasis on the notion of the frequency matrix (as a kinematic entity) and, separately, on that of the impedance matrix. The latter matrix is explicitly introduced and shown to be responsible, via its time-dependence, for parametric excitation and for the nonconservation of adiabatic invariants.

PACS numbers: 05.45.Xt, **45.05.+x**, **84.30.–r** DOI: 10.3367/UFNr.0178.200805d.0489

Bibliography — 13 references *Received 19 October 2007, revised 16 January 2008*

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **178** (5) 489 – 510 (2008) *Physics – Uspekhi* **51** (5) (2008)