

## МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

# Статистическая топография и ляпуновские экспоненты в динамических стохастических системах

В.И. Кляцкин

*В работе обсуждается связь статистического описания динамических стохастических систем на основе идей статистической топографии с традиционным методом анализа устойчивости динамических систем по Ляпунову с помощью ляпуновских характеристических показателей (ляпуновские экспоненты). В качестве иллюстрации рассматривается ряд когерентных явлений, имеющих место с вероятностью единица, т.е. почти для всех реализаций стохастических систем. К таким явлениям относятся диффузия и кластеризация пассивной примеси в случайных гидродинамических потоках, динамическая локализация плоских волн в слоистых случайных средах и возникновение каустической структуры волнового поля в многомерных случайных средах.*

PACS numbers: 05.40. – a, 05.45. – a, 42.25.Dd, 46.65. + g, 47.27.eb

DOI: 10.3367/UFNr.0178.200804e.0419

## Содержание

1. Введение (419).
  2. Примеры динамических систем (420).
    - 2.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения. 2.2. Уравнения в частных производных.
  3. Статистическая топография случайных процессов и полей (423).
    - 3.1. Кривая типичной реализации случайного процесса. 3.2. Случайные поля.
  4. Безынерционная примесь в случайных гидродинамических потоках (426).
    - 4.1. Лагранжево описание (диффузия частиц). 4.2. Эйлерово описание.
  5. Локализация плоских волн в слоистых случайных средах (428).
  6. Каустическая структура волнового поля в случайно-неоднородной среде (429).
  7. Заключение (430).
- Список литературы (431).

## 1. Введение

В последнее время внимание как теоретиков, так и экспериментаторов привлекает вопрос о связи динамики усредненных характеристик решения задачи с поведением решения в отдельных реализациях. Это особенно актуально для геофизических проблем, связанных с атмосферой и океаном, где, вообще говоря, отсутствует

соответствующий ансамбль усреднения и экспериментаторы, как правило, имеют дело с отдельными реализациями.

Решение динамических задач для конкретных реализаций параметров среды практически безнадежно из-за их чрезвычайной математической сложности. В то же время исследователи интересуют основные особенности протекающих явлений, без отвлечения на частности. Поэтому очень привлекательной оказалась идея использовать хорошо развитый математический аппарат случайных процессов и полей, т.е. вместо отдельных реализаций исследуемых процессов рассматривать статистические средние по всему ансамблю возможных реализаций. В настоящее время, например, практически все задачи физики атмосферы и океана в той или иной степени основываются на статистическом анализе.

Введение случайности в параметрах среды порождает стохастичность в самих физических полях. Обычно используемые методы статистического усреднения (т.е. вычисления средних величин типа среднего значения процессов и полей  $\langle x(t) \rangle$ ,  $\langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle$ , пространственно-временных корреляционных функций  $\langle x(t)x(t') \rangle$ ,  $\langle \rho(\mathbf{r}, t)\rho(\mathbf{r}', t') \rangle$  и т.п., где через  $\langle \dots \rangle$  обозначено усреднение по ансамблю реализаций случайных параметров) сглаживают качественные особенности отдельных реализаций и зачастую полученные статистические характеристики не только не имеют ничего общего с поведением отдельных реализаций, но даже на первый взгляд им противоречат.

В ряде случаев существуют, однако, физические процессы и явления, происходящие с вероятностью единица (т.е. почти во всех их реализациях), называемые когерентными (см. работы [1, 2] и монографии [3–5], где подробно обсуждается этот вопрос).

Полная статистика, безусловно, содержит всю информацию о динамической системе. Однако на прак-

В.И. Кляцкин. Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН, Пыжевский пер. 3, 119017 Москва, Российская Федерация  
Тел. (495) 269-12-83  
E-mail: klyatskin@yandex.ru

Статья поступила 2 августа 2007 г.,  
после доработки 19 ноября 2007 г.

тике удается исследовать лишь некоторые простейшие статистические характеристики, связанные с одновременными и одноточечными распределениями вероятностей. Поэтому возникает вопрос: как, зная такого рода простейшие статистические характеристики и особенности системы, описать основные количественные и качественные характеристики поведения отдельных ее реализаций?

Ответ на этот вопрос дают *методы статистической топографии* (см., например, [6] и упомянутые выше монографии). Ниже, с одной стороны, рассматривается применение этих методов к простейшим физическим задачам и, с другой стороны, устанавливается их связь с традиционным методом анализа устойчивости, основанном на анализе ляпуновских экспонент.

Подходу, основанному на анализе устойчивости решений детерминированных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = A(t) \mathbf{x}(t)$$

по Ляпунову, уделяется большое внимание многими исследователями. При этом анализируется верхний предел решения задачи

$$\lambda_{\mathbf{x}(t)} = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln |\mathbf{x}(t)|,$$

который называется его характеристическим показателем [7]. В приложении к стохастическим динамическим системам при таком подходе зачастую для интерпретации и упрощения полученных результатов эти исследователи на последней стадии подключают статистический анализ и вычисляют их статистические средние такие, например, как

$$\langle \lambda_{\mathbf{x}(t)} \rangle = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \langle \ln |\mathbf{x}(t)| \rangle. \quad (1)$$

## 2. Примеры динамических систем

### 2.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения

В качестве первого примера упомянем работы [8, 9], в которых рассматривалась задача об относительной диффузии малоинерционных частиц в случайном гидродинамическом потоке с полем скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  (с нулевым средним значением) в рамках уравнения Ньютона

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) &= \mathbf{v}(t), & \mathbf{r}(0) &= \mathbf{r}_0, \\ \frac{d}{dt} \mathbf{v}(t) &= -\lambda [\mathbf{v}(t) - \mathbf{u}(\mathbf{r}(t), t)], & \mathbf{v}(0) &= \mathbf{v}_0(\mathbf{r}_0). \end{aligned} \quad (2)$$

В упомянутых работах уравнения (2) линеаризовывались относительно начальных положений частиц и вычислялись ляпуновские характеристические показатели (1). В этих же работах приведены и результаты численного моделирования стохастической системы уравнений (2).

Для безынерционных частиц параметр  $\lambda \rightarrow \infty$ . Как следует из системы уравнений (2),

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{u}(\mathbf{r}(t), t)$$

и в этом случае траектория частицы в гидродинамическом потоке с полем скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  описывается

уравнением

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0) = \mathbf{u}(\mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0), t), \quad \mathbf{r}(0|\mathbf{r}_0) = \mathbf{r}_0, \quad (3)$$

т.е. для безынерционных частиц задача определения их траекторий в гидродинамическом потоке является чисто кинематической. Здесь вертикальной чертой обозначена зависимость решения задачи от начального условия.

Отметим, что величина  $j(t|\mathbf{r}_0) = \det \|\partial r_i(t|\mathbf{r}_0)/\partial r_{j0}\|$ , называемая *расходимостью*, описывается уравнением

$$\frac{d}{dt} j(t|\mathbf{r}_0) = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} j(t|\mathbf{r}_0), \quad j(0|\mathbf{r}_0) = 1, \quad (4)$$

и для бездивергентного гидродинамического потока ( $\operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = 0$ ) величина  $j(t|\mathbf{r}_0) \equiv 1$ .

Остановимся на стохастических особенностях решения задачи (3) для системы частиц. С формальной точки зрения согласно уравнению (3) каждая частица движется независимым образом. Однако если случайное поле  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  имеет конечный пространственный радиус корреляции  $l_{\text{кор}}$ , то частицы, расстояние между которыми меньше  $l_{\text{кор}}$ , находятся в общей зоне влияния случайного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  и могут появляться новые коллективные особенности в динамике такой системы частиц.

Для стационарного поля скоростей,  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \equiv \mathbf{u}(\mathbf{r})$ , уравнение (3) упрощается и принимает вид

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) = \mathbf{u}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0.$$

В этом случае стационарные точки  $\bar{\mathbf{r}}$ , в которых  $\mathbf{u}(\bar{\mathbf{r}}) = 0$ , остаются неподвижными. При этом в зависимости от того, являются эти точки устойчивыми или неустойчивыми, они будут притягивать или отталкивать частицы, находящиеся в их окрестности. В силу случайности функции  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  положение точек  $\bar{\mathbf{r}}$  также случайно. Аналогичная ситуация должна иметь место и в общем случае пространственно-временного случайного поля скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ .

Если какие-то точки  $\bar{\mathbf{r}}$  в течение достаточно большого времени остаются устойчивыми, то в отдельных реализациях случайного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  в их окрестностях должны образовываться кластерные области частиц (т.е. компактные области повышенной концентрации частиц, которые располагаются в большей степени в разреженных зонах). Если же смена устойчивости этих точек на неустойчивость происходит достаточно быстро и частицы не успевают значительно перестроиться, то кластерные области образовываться не будут.

Численное моделирование [10, 11] показывает, что динамика системы частиц существенно различается в зависимости от того, является ли случайное поле скоростей бездивергентным или дивергентным. Так, на рис. 1а для конкретной реализации бездивергентного стационарного во времени поля скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  схематически изображен фрагмент эволюции системы частиц (двумерный случай) в безразмерном времени, связанном со статистическими параметрами поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ . В начальный момент времени частицы равномерно располагались в круге. В этом случае площадь, ограниченная контуром, сохраняется и частицы относительно равномерно заполняют область, ограниченную деформированным

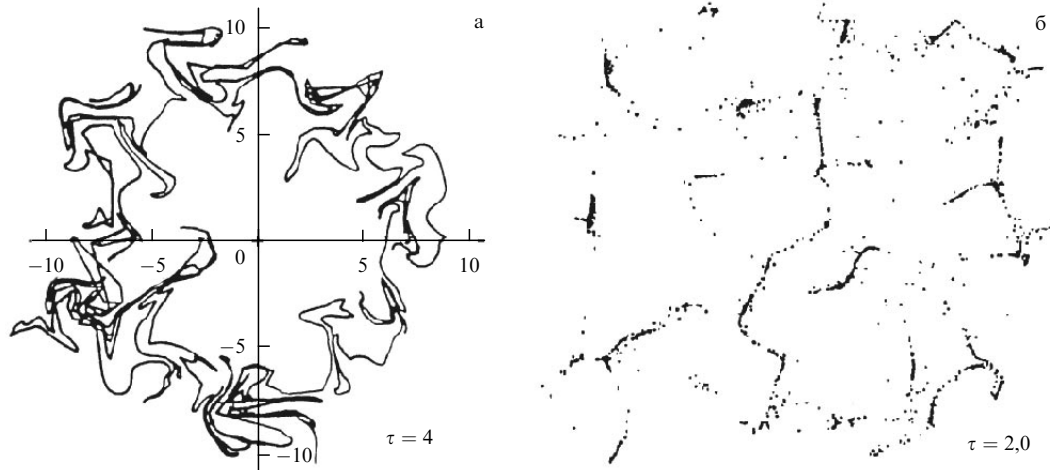


Рис. 1. Результаты моделирования диффузии системы частиц в соленоидальном (а) и потенциальном (б) случайных полях скоростей.

контуром. Возникает лишь сильная изрезанность фрактального характера этого контура. Такое явление интенсивно изучается в настоящее время и получило название *хаотической адвекции* (см., например, [12]).

Для потенциального же поля скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  частицы, равномерно расположенные в квадрате в начальный момент времени, в процессе временной эволюции образуют кластерные области. На рисунке 1б приведен фрагмент такой эволюции, полученный численным моделированием. Подчеркнем еще раз, что образование *кластеров* в этом случае — чисто кинематический эффект. Очевидно, что при усреднении по ансамблю реализаций случайного поля скоростей такая особенность динамики частиц полностью исчезает.

Существует простая модель диффузии примеси [13], позволяющая увидеть основное отличие диффузии в дивергентных и бездивергентных полях скоростей. В бездивергентных (несжимаемых) полях скоростей частицы (и, следовательно, поле плотности) не успевают притягиваться к устойчивым центрам притяжения за время их существования и слегка флуктуируют относительно своего первоначального местонахождения. В дивергентном же (сжимаемом) поле скоростей (за то же время существования устойчивых центров притяжения) частицы успевают притянуться к ним, так как этот процесс притяжения убыстряется экспоненциальным образом.

В качестве второго примера упомянем монографию [14], в которой в рамках одномерного стационарного уравнения Шрёдингера со случайным потенциалом рассматривалась одномерная задача о надбарьерном прохождении частиц через слой неупорядоченной среды. В этой же монографии вычислялись ляпуновские характеристические показатели (1). Такой задаче аналогична задача о распространении волн в одномерной случайной среде.

Пусть слой хаотически неоднородной среды занимает часть пространства  $L_0 < x < L$  и из области  $x > L$  на нее падает плоская волна  $u_0(x) = \exp[-ik(x - L)]$ . Из-за наличия неоднородностей возникают отраженная от слоя волна с коэффициентом отражения  $R_L = u(L) - 1$  и выходящая из слоя волна с коэффициентом прохождения  $T_L = u(L_0)$ .

Внутри слоя волновое поле описывается уравнением Гельмгольца

$$\frac{d^2}{dx^2} u(x) + k^2 [1 + \varepsilon(x)] u(x) = 0, \quad (5)$$

где функция  $\varepsilon(x)$ , которая считается случайной, описывает неоднородности среды. Вне слоя полагаем  $\varepsilon(x) = 0$ ; внутри же слоя предполагаем, что  $\varepsilon(x) = \varepsilon_1(x) + i\gamma$ , где  $\varepsilon_1(x)$  — действительная часть, ответственная за процессы рассеяния волны в среде, а мнимая часть  $\gamma \ll 1$  описывает поглощение волны в среде.

Данное уравнение следует дополнить краевыми условиями — условиями непрерывности волнового поля  $u(x)$  и ее производной  $du(x)/dx$  на границах слоя и условиями излучения на этих границах, которые можно записать в виде

$$u(L) + \frac{i}{k} \frac{du(x)}{dx} \Big|_{x=L} = 2, \quad u(L_0) - \frac{i}{k} \frac{du(x)}{dx} \Big|_{x=L_0} = 0. \quad (6)$$

В предположении, что известны статистические характеристики функции  $\varepsilon(x)$ , статистическая задача сводится к нахождению статистических характеристик как коэффициентов отражения и прохождения волны, связанных со значением поля на границах слоя, так и интенсивности волнового поля  $I(x) = |u(x)|^2$  внутри неоднородной среды.

Рассматриваемое волновое уравнение по своей форме совпадает с уравнением для осциллятора с изменяющейся собственной частотой (если заменить пространственную переменную  $x$  на переменную  $t$  — время), для которого, как хорошо известно, имеет место явление *параметрического резонанса* на частотах  $2k/n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Учитывая, что функция  $\varepsilon(x)$  в общем случае имеет составляющие всех частот, включая и указанные, ясно, что аналогичное явление должно иметь место и для рассматриваемой задачи и может быть названо явлением *стохастического волнового параметрического резонанса*. При этом в силу краевых условий (которые "зажимают" значения волнового поля на границах слоя неоднородной среды) статистический экспоненциальный рост поля может происходить только в глубине слоя, вдали от его границ.

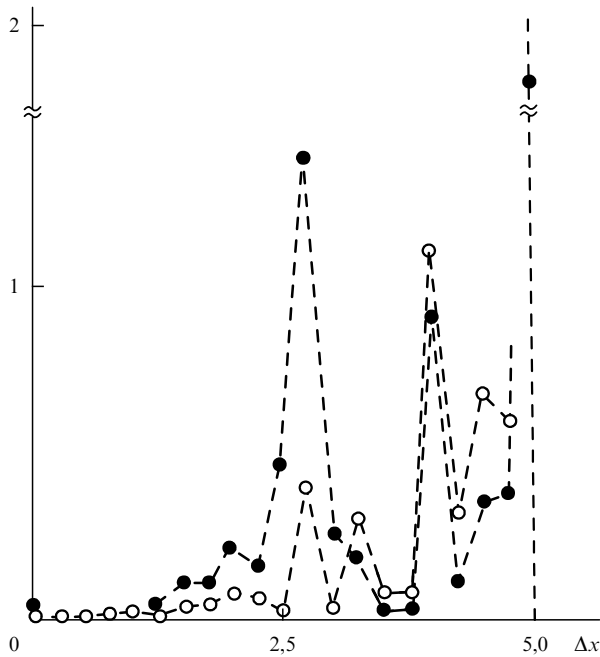


Рис. 2. Численное моделирование динамической локализации для двух реализаций неоднородностей среды.

Однако в отдельных реализациях это явление не осуществляется. На рисунке 2 приведены две реализации интенсивности волнового поля в достаточно толстом слое среды, соответствующие двум реализациям неоднородностей среды, полученным численным моделированием (см., например, [1, 15] и монографии [3, 4]). Не останавливаясь на детальном описании параметров задачи, отметим только, что на этом рисунке явно просматривается тенденция резкого экспоненциального спада (с большими выбросами как в сторону увеличения интенсивности, так и к значениям, близким к нулю), обусловленная многократным переотражением волны в хаотически неоднородной среде (*динамическая локализация*). При этом параметр  $\gamma \ll 1$  и, следовательно, влияние малого поглощения на динамическую локализацию несущественно.

Отметим, что при переходе к континуальным обобщениям рассматриваемых задач в механике и электродинамике сплошных сред, т.е. к полям, описываемым уравнениями в частных производных, анализ устойчивости по Ляпунову возможен только при помощи разложений решений в ряды по полной системе ортогональных функций, т.е. при переходе к бесконечномерной системе обыкновенных дифференциальных уравнений. В применении такой методики к стохастическим задачам возникает вопрос о перестановочности операций разложения в ряды и статистического усреднения. В частности, при аппроксимации статистических характеристик случайных процессов и полей сингулярными (обобщенными) функциями (как, например, в приближении дельта-коррелированных флуктуаций параметров системы) эти операции, как правило, не перестановочны.

## 2.2. Уравнения в частных производных

Пример такого поля в гидродинамике — поле плотности пассивной примеси  $\rho(\mathbf{r}, t)$ , которое описывается уравне-

нием непрерывности

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \right) \rho(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \rho(\mathbf{r}, 0) = \rho_0(\mathbf{r}). \quad (7)$$

Здесь  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  — поле скоростей примеси в гидродинамическом потоке  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ . При этом общая масса примеси сохраняется в процессе эволюции, т.е.

$$M = M(t) = \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r} \rho_0(\mathbf{r}) = \text{const}.$$

Само же поле скоростей примеси  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  в гидродинамическом потоке  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  для малоинерционных частиц можно описывать квазилинейным уравнением в частных производных (см., например, [16])

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = -\lambda [\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)], \quad (8)$$

которое следует рассматривать как феноменологическое. В общем случае возможны неединственность решения уравнения (8), существование разрывов и т.п. Однако в асимптотическом случае малой инерционности примеси (параметр  $\lambda \rightarrow \infty$ , который и представляет для нас интерес), решение задачи будет единственным на разумном интервале времени. Отметим, что линейный по полю скоростей  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  член  $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \lambda \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  в правой части (8) является известной *формулой Стокса* для силы сопротивления, действующей на медленно движущуюся частицу, порожденную гидродинамическим потоком  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ . При аппроксимации частицы шаром радиуса  $a$  параметр  $\lambda = 6\pi a \eta / m_p$ , где  $\eta$  — коэффициент динамической вязкости,  $m_p$  — масса частицы (см., например, [17, 18]).

Уравнения (7), (8) дают *эйлерово описание* эволюции поля плотности пассивной примеси. Они являются уравнениями в частных производных первого порядка и могут быть решены методом характеристик. При этом характеристические кривые  $\mathbf{r}(t)$ ,  $\mathbf{v}(t)$  для уравнения (8) совпадают с уравнениями (2), описывающими движение частицы. А уравнение (7) принимает вид

$$\frac{d}{dt} \rho(t|\mathbf{r}_0) = - \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0), t)}{\partial \mathbf{r}} \rho(t|\mathbf{r}_0), \quad \rho(0|\mathbf{r}_0) = \rho_0(\mathbf{r}_0). \quad (9)$$

Такой переход составляет *лагранжево описание* динамики примеси.

Для безынерционной примеси ( $\lambda \rightarrow \infty$ )  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  и уравнения (7), (9) упрощаются и записываются как

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \right) \rho(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \rho(\mathbf{r}, 0) = \rho_0(\mathbf{r}), \quad (10)$$

$$\frac{d}{dt} \rho(t|\mathbf{r}_0) = - \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0), t)}{\partial \mathbf{r}} \rho(t|\mathbf{r}_0), \quad \rho(0|\mathbf{r}_0) = \rho_0(\mathbf{r}_0). \quad (11)$$

При этом с вероятностью единица осуществляется кластеризация поля плотности  $\rho(\mathbf{r}, t)$  в дивергентном гидродинамическом потоке с полем скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  (при  $\text{div} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \neq 0$ ).

Сопоставляя уравнение (11) с уравнением (4), получаем связь лагранжевой плотности частицы с расходимостью вида

$$\rho(t|\mathbf{r}_0) = \frac{\rho_0(\mathbf{r}_0)}{j(t|\mathbf{r}_0)}. \quad (12)$$

В качестве второго примера рассмотрим распространение волн в случайно-неоднородной трехмерной среде на основе скалярного параболического уравнения, которое справедливо для описания распространения волн в среде с крупномасштабными трехмерными неоднородностями и описывает рассеяние волны на малые углы (см., например, [19–21] и монографию [3]):

$$\frac{\partial}{\partial x} U(x, \mathbf{R}) = \frac{i}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} U(x, \mathbf{R}) + \frac{ik}{2} \varepsilon(x, \mathbf{R}) U(x, \mathbf{R}), \quad (13)$$

$$U(0, \mathbf{R}) = U_0(\mathbf{R}).$$

Здесь введены обозначения:  $x$  — координата в направлении распространения волны,  $\mathbf{R}$  — координаты в поперечной плоскости,  $\varepsilon(x, \mathbf{R})$  — отклонение диэлектрической проницаемости от единицы. Это уравнение является, естественно, приближенным.

Если ввести амплитуду и фазу волнового поля по формуле

$$U(x, \mathbf{R}) = A(x, \mathbf{R}) \exp [iS(x, \mathbf{R})],$$

то уравнение переноса для интенсивности волнового поля  $I(x, \mathbf{R}) = |u(x, \mathbf{R})|^2$  можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} I(x, \mathbf{R}) + \frac{1}{k} \nabla_{\mathbf{R}} \{ \nabla_{\mathbf{R}} S(x, \mathbf{R}) I(x, \mathbf{R}) \} = 0, \quad (14)$$

$$I(0, \mathbf{R}) = I_0(\mathbf{R}).$$

Откуда следует, что в общем случае произвольно падающего волнового пучка сохраняется мощность волны в плоскости  $x = \text{const}$ :

$$E_0 = \int I(x, \mathbf{R}) d\mathbf{R} = \int I_0(\mathbf{R}) d\mathbf{R}.$$

Уравнение (14) по форме совпадает с уравнением (7), и, следовательно, его можно трактовать как уравнение переноса консервативной примеси в потенциальном поле скоростей.

Реализации поля интенсивности, как хорошо известно, имеют кластерный характер и кластеризация проявляется в виде *каустических структур* из-за эффектов случайных фокусировок и дефокусировок волнового поля в случайной среде. Так, на рис. 3 приведены фотографии поперечного сечения лазерного пучка, распространяющегося в турбулентной среде в лабораторных исследованиях [22] при различных интенсивностях флуктуаций диэлектрической проницаемости. Аналогичные картинки из работы [23] приведены на рис. 4. Эти рисунки получены путем численного моделирования, выполненного в работах [24, 25], на основе записи решения

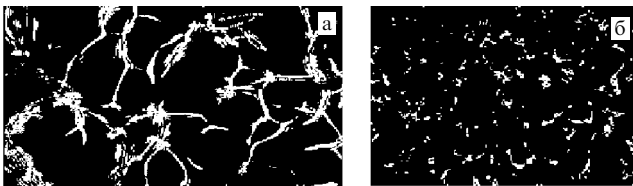


Рис. 3. Поперечное сечение лазерного пучка при распространении в турбулентной среде (в лабораторных условиях) в области сильных фокусировок (а) и в области сильных (насыщенных) флуктуаций (б).

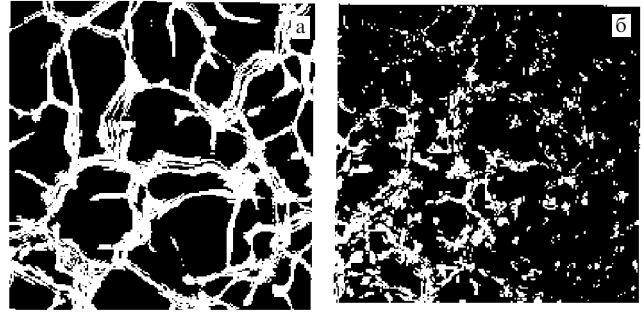


Рис. 4. Поперечное сечение лазерного пучка при распространении в турбулентной среде (численное моделирование) в области сильных фокусировок (а) и в области сильных (насыщенных) флуктуаций (б).

уравнения (13) в виде континуального интеграла. На этих рисунках ясно видно возникновение каустической структуры волнового поля.

### 3. Статистическая топография случайных процессов и полей

Обсудим теперь основные положения метода статистической топографии. Прежде всего введем понятие типичной реализации случайного процесса  $z(t)$ , характеризующее основные особенности поведения отдельной реализации процесса в целом на всем интервале времени  $t \in (0, \infty)$ .

#### 3.1. Кривая типичной реализации случайного процесса

Пусть  $z(t)$  — случайный процесс. Статистические характеристики процесса  $z(t)$  в фиксированный момент времени  $t$  полностью описываются либо ее плотностью вероятностей  $P(z, t)$ , параметрически зависящей от времени  $t$ , либо интегральной функцией распределения

$$F(z, t) = \text{Prob} (z(t) < z) = \int_{-\infty}^z dz' P(z', t),$$

которая определяет вероятность того, что в фиксированный момент времени  $t$  значение процесса  $z(t) < z$ .

Назовем *кривой типичной реализации* случайного процесса  $z(t)$  детерминированную кривую  $z^*(t)$ , которая является *медианой интегральной функции распределения*. Эта функция определяется как решение алгебраического уравнения

$$F(z^*(t), t) = \frac{1}{2}.$$

Основанием для этого служит свойство медианы, заключающееся в том, что для любого интервала времени  $(t_1, t_2)$  случайный процесс  $z(t)$  как бы "обвивает" кривую  $z^*(t)$  таким образом, что среднее время, в течение которого выполняется неравенство  $z(t) > z^*(t)$ , совпадает со средним временем, в течение которого выполняется обратное неравенство  $z(t) < z^*(t)$  (рис. 5), т.е.

$$\langle T_{z(t) > z^*(t)} \rangle = \langle T_{z(t) < z^*(t)} \rangle = \frac{1}{2} (t_2 - t_1).$$

Кривая  $z^*(t)$  может, естественно, существенно отличаться от любой конкретной реализации процесса  $z(t)$ , и она не описывает величину возможных выбросов. Таким образом, кривая типичной реализации  $z^*(t)$  случайного

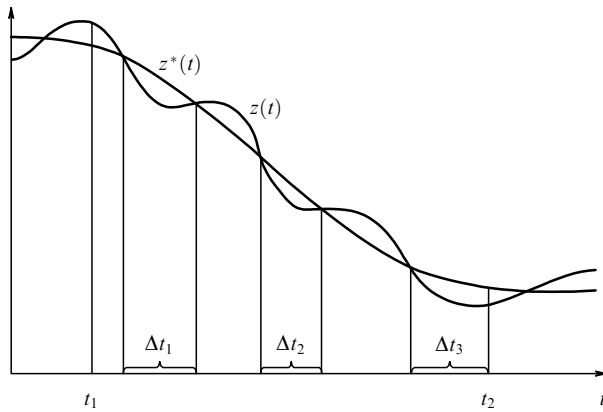


Рис. 5. К определению кривой типичной реализации случайного процесса.

процесса  $z(t)$ , полученная с помощью одновременной плотности вероятностей, определена, тем не менее, на всем интервале времени  $t \in (0, \infty)$ .

Для конкретных типов случайных процессов можно, разумеется, получить и дополнительную информацию, характеризующую выбросы относительно этой кривой.

**3.1.1. Простейшие случайные процессы.** Для гауссова случайного процесса  $z(t)$  со средним значением  $\langle z(t) \rangle$  и дисперсией  $\sigma^2(t)$  одновременная плотность вероятностей

$$P(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}} \exp \left\{ -\frac{[z - \langle z(t) \rangle]^2}{2\sigma^2(t)} \right\},$$

и кривая типичной реализации совпадает со средним значением процесса  $z(t)$

$$z^*(t) = \langle z(t) \rangle. \quad (15)$$

Для этого процесса производящая (или характеристическая) функция имеет вид

$$\begin{aligned} \langle \exp [\lambda z(t)] \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dz \exp [\lambda z(t)] P(z, t) = \\ &= \exp \left\{ \lambda \langle z(t) \rangle + \frac{\lambda^2}{2} \sigma^2(t) \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Для логарифмически нормального случайного процесса  $y(t)$ , логарифм которого является гауссовым случайным процессом  $z(t)$ ,

$$y(t) = \exp z(t),$$

одновременная плотность вероятностей  $P(y, t)$  записывается как

$$P(y, t) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}} \exp \left\{ -\frac{\ln^2 [\exp [-\langle z(t) \rangle] y]}{2\sigma^2(t)} \right\},$$

и кривая типичной реализации определяется равенством

$$y^*(t) = \exp \langle z(t) \rangle = \exp \langle \ln y(t) \rangle. \quad (17)$$

Если известно поведение моментных функций логарифмически нормального случайного процесса  $y(t)$ , т.е.

функции  $\langle y^n(t) \rangle$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), то тем самым известны и статистические характеристики случайного процесса  $z(t) = \ln y(t)$ . В самом деле, согласно формуле (16) при  $\lambda = n$  имеем

$$\langle y^n(t) \rangle = \langle \exp [n \ln y(t)] \rangle = \exp \left\{ n \langle \ln y(t) \rangle + \frac{n^2}{2} \sigma_{\ln y}^2(t) \right\}$$

и, следовательно,

$$\langle \ln y(t) \rangle = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \ln \langle y^n(t) \rangle, \quad \sigma_{\ln y}^2(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2} \ln \langle y^n(t) \rangle. \quad (18)$$

### 3.1.2. Простейшие марковские случайные процессы

*Винеровский случайный процесс.* Винеровский случайный процесс определяется как решение стохастического уравнения

$$\frac{d}{dt} w(t) = z(t), \quad w(0) = 0,$$

где  $z(t)$  — гауссов дельта-коррелированный во времени процесс (процесс "белого шума") с параметрами

$$\langle z(t) \rangle = 0, \quad \langle z(t)z(t') \rangle = 2\sigma^2\tau_0 \delta(t - t'). \quad (19)$$

Относительно приближения дельта-коррелированности процессов во времени и физического смысла параметров  $\sigma^2$  и  $\tau_0$  см., например, монографии [3, 4].

Решение этого уравнения

$$w(t) = \int_0^t dt z(t)$$

является непрерывным гауссовым нестационарным случайным процессом с параметрами

$$\langle w(t) \rangle = 0, \quad \langle w(t)w(t') \rangle = 2\sigma^2\tau_0 \min(t, t').$$

*Винеровский случайный процесс со сносом.* Обсудим более общий процесс со сносом, зависящий от параметра  $\alpha$  по формуле

$$w(t; \alpha) = -\alpha t + w(t), \quad \alpha > 0.$$

Процесс  $w(t; \alpha)$  — марковский процесс и его плотность вероятностей  $P(w, t; \alpha)$  описывается выражением

$$P(w, t; \alpha) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \exp \left\{ -\frac{(w + \alpha t)^2}{4Dt} \right\}, \quad (20)$$

где через коэффициент диффузии обозначена величина  $D = \sigma^2\tau_0$  и кривая типичной реализации винеровского случайного процесса со сносом представляет собой линейную функцию времени

$$w^*(t; \alpha) = -\alpha t.$$

С помощью винеровского случайного процесса можно конструировать разные другие процессы, удобные для моделирования различных физических явлений. Для положительных величин такой простейшей аппроксимацией является логарифмически нормальный (лог-нормальный) процесс, который и рассмотрим более подробно.

*Логарифмически нормальный процесс.* Определим логнормальный случайный процесс по формуле

$$y(t; \alpha) = \exp w(t; \alpha) = \exp \left\{ -\alpha t + \int_0^t d\tau z(\tau) \right\}, \quad (21)$$

где  $z(t)$  — гауссов процесс "белого шума" с параметрами (19). Он описывается стохастическим уравнением

$$\frac{d}{dt} y(t; \alpha) = \{-\alpha + z(t)\} y(t; \alpha), \quad y(0; \alpha) = 1.$$

Одновременная плотность вероятностей логнормального процесса

$$P(y, t; \alpha) = \frac{1}{2y\sqrt{\pi Dt}} \exp \left\{ -\frac{\ln^2 [y \exp(\alpha t)]}{4Dt} \right\}. \quad (22)$$

Для распределения (22) характерна такая особенность, как появление длинного пологого "хвоста" при  $Dt \gg 1$ , означающего усиление роли больших выбросов процесса  $y(t; \alpha)$  в формировании одновременной статистики.

Зная только одноточечные статистические характеристики процесса  $y(t; \alpha)$ , можно получить важную информацию о поведении реализаций процесса  $y(t; \alpha)$  на всем интервале времен  $(0, \infty)$ .

В частности, логнормальный процесс  $y(t; \alpha)$  является марковским процессом и его одновременная плотность вероятностей (22) описывается уравнением Фоккера — Планка:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \alpha \frac{\partial}{\partial y} y \right) P(y, t; \alpha) = D \frac{\partial}{\partial y} y \frac{\partial}{\partial y} y P(y, t; \alpha), \quad (23)$$

$$P(y, 0; \alpha) = \delta(y - 1).$$

Исходя из уравнения (23) легко написать уравнения для моментных функций процесса  $y(t; \alpha)$ , решения которых определяются равенствами

$$\langle y^n(t; \alpha) \rangle = \exp \left[ n \left( n - \frac{\alpha}{D} \right) Dt \right], \quad (24)$$

$$\left\langle \frac{1}{y^n(t; \alpha)} \right\rangle = \exp \left[ n \left( n + \frac{\alpha}{D} \right) Dt \right], \quad n = 1, 2, \dots$$

и которые экспоненциально растут во времени.

Исходя из уравнения (23) также легко получить равенство

$$\langle \ln y(t) \rangle = -\alpha t,$$

и, следовательно, параметр  $\alpha$  можно записать в виде

$$-\alpha = \frac{1}{t} \langle \ln y(t) \rangle, \quad (25)$$

т.е. он согласно равенству (1) является *ляпуновским характеристическим показателем* (ляпуновская экспонента) для логнормального случайного процесса  $y(t)$ . А кривой типичной реализации процесса  $y(t; \alpha)$  оказывается экспоненциально спадающая кривая

$$y^*(t) = \exp \langle \ln y(t) \rangle = \exp(-\alpha t) \quad (26)$$

в соответствии с формулой (17).

Экспоненциальный рост моментов обусловлен выбросами процесса  $y(t; \alpha)$  относительно кривой типичной реализации  $y^*(t; \alpha)$  как в сторону больших, так и малых значений  $y$ , т.е. он является чисто статистическим эффектом, обусловленным усреднением по всему ансамблю реализаций.

Таким образом, мы имеем явное противоречие между характером поведения статистических характеристик процесса  $y(t; \alpha)$  и поведением процесса в конкретных реализациях.

Все эти свойства логнормального процесса проявляются в динамике конкретных физических систем в виде таких когерентных явлений, как *кластеризация* и *локализация*.

### 3.2. Случайные поля

В статистической топографии случайных полей основным объектом изучения, как и в обычной топографии горных массивов, является система контуров — линий уровня (в двумерном случае) или поверхностей постоянных значений (в трехмерном случае), определяемых равенством  $f(\mathbf{r}, t) = f = \text{const}$ .

Для анализа системы контуров (в двумерном случае) удобно ввести сингулярную индикаторную функцию

$$\varphi(\mathbf{R}, t; f) = \delta(f(\mathbf{R}, t) - f),$$

сосредоточенную на них.

Через эту функцию выражаются, например, такие величины, как общая площадь областей, ограниченных линиями уровня, и где  $f(\mathbf{R}, t) > f$ :

$$S(t; f) = \int \theta(f(\mathbf{R}, t) - f) d\mathbf{R} = \int_f^\infty df' \int d\mathbf{R} \varphi(\mathbf{R}, t; f')$$

и общая "масса" поля в этих областях:

$$M(t; f) = \int_f^\infty f' df' \int d\mathbf{R} \varphi(\mathbf{R}, t; f').$$

Среднее значение индикаторной функции по ансамблю реализаций определяет одновременную во времени и одноточечную в пространстве плотность вероятностей  $P(\mathbf{R}, t; f) = \langle \varphi(\mathbf{R}, t; f) \rangle$ , и, следовательно, средние значения всех выражений определяются этой плотностью вероятностей.

Дополнительную информацию о структуре поля  $f(\mathbf{R}, t)$  можно получить, включив в рассмотрение его пространственный градиент  $\mathbf{p}(\mathbf{R}, t) = \nabla f(\mathbf{R}, t)$ . Так, например, общая длина контуров описывается выражением

$$l(t; f) = \int d\mathbf{R} |\mathbf{p}(\mathbf{R}, t)| \delta(f(\mathbf{R}, t) - f) = \oint dl.$$

Включение в рассмотрение пространственных производных второго порядка позволяет оценить общее число контуров  $f(\mathbf{R}, t) = f = \text{const}$  с помощью приближенной (с точностью до незамкнутых линий) формулы

$$N(t; f) \sim \frac{1}{2\pi} \int d\mathbf{R} \kappa(\mathbf{R}, t; f) |\mathbf{p}(\mathbf{R}, t)| \delta(f(\mathbf{R}, t) - f),$$

где  $\kappa(\mathbf{R}, t; f)$  — кривизна линии уровня.

Отметим, что для пространственно однородного поля  $f(\mathbf{R}, t)$ , когда соответствующие одноточечные плотности вероятностей не зависят от  $\mathbf{R}$ , статистические средние всех выражений будут характеризовать соответствующие удельные (приходящиеся на единицу площади) значения этих величин. В этом случае для одноточечных статистических характеристик случайные поля статистически эквивалентны случайным процессам, для которых кривая типичной реализации характеризует поведение во времени случайного поля в любой фиксированной точке пространства. Это принципиальное отличие статистического описания от традиционного ляпуновского подхода.

Проиллюстрируем теперь применение идеологии статистической топографии на примере задач, рассмотренных в разделе 2

#### 4. Безынерционная примесь в случайных гидродинамических потоках

Случайное поле скоростей предполагается в общем случае дивергентным полем ( $\text{div } \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \neq 0$ ) и в то же время статистически однородным и изотропным в пространстве и стационарным во времени случайным гауссовым полем с корреляционным и спектральным тензорами ( $\langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle = 0$ ):

$$B_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \langle u_i(\mathbf{r}, t) u_j(\mathbf{r}', t') \rangle = \int d\mathbf{k} E_{ij}(\mathbf{k}, t - t') \exp[i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')], \quad (27)$$

$$E_{ij}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d\mathbf{r} B_{ij}(\mathbf{r}, t) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}),$$

$$E_{ij}(\mathbf{k}, t) = E_{ij}^s(\mathbf{k}, t) + E_{ij}^p(\mathbf{k}, t),$$

где  $d$  — размерность пространства, а спектральные составляющие тензора поля скоростей имеют структуру

$$E_{ij}^s(\mathbf{k}, t) = E^s(k, t) \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right), \quad (28)$$

$$E_{ij}^p(\mathbf{k}, t) = E^p(k, t) \frac{k_i k_j}{k^2}.$$

Здесь  $E^s(k, t)$  и  $E^p(k, t)$  — соответственно солениоидальная и потенциальная компоненты спектральной плотности поля скоростей.

Временной радиус корреляции поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  определим равенством

$$\begin{aligned} \tau_0 \sigma_{\mathbf{u}}^2 &= \int_0^\infty d\tau B_{ii}(0, \tau) = \\ &= \int_0^\infty d\tau \int d\mathbf{k} [(d-1)E^s(k, \tau) + E^p(k, \tau)], \end{aligned}$$

где дисперсия поля скоростей  $\sigma_{\mathbf{u}}^2 = B_{ii}(0, 0) = \langle \mathbf{u}^2(\mathbf{r}, t) \rangle$ .

При статистическом анализе воспользуемся приближением дельта-коррелированности во времени случайного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ , при котором корреляционный тензор поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  аппроксимируется выражением (см., например, монографии [3, 4])

$$B_{ij}(\mathbf{r}, t) = 2B_{ij}^{\text{eff}}(\mathbf{r})\delta(t), \quad B_{ij}^{\text{eff}}(\mathbf{r}) = \int_0^\infty dt B_{ij}(\mathbf{r}, t).$$

#### 4.1. Лагранжево описание (диффузия частиц)

**4.1.1. Одноточечные статистические характеристики.** Исходя из системы уравнений (3) для одновременной лагранжевой плотности вероятностей  $P(\mathbf{r}, j, t|\mathbf{r}_0)$  координаты частицы  $\mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0)$  и ее расходимости  $j(t|\mathbf{r}_0)$ , в приближении гауссова дельта-коррелированного во времени гидродинамического поля скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ , приходим к уравнению Фоккера – Планка:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - D_0 \Delta \right) P(\mathbf{r}, j, t|\mathbf{r}_0) = D^p \frac{\partial^2}{\partial j^2} j^2 P(\mathbf{r}, j, t|\mathbf{r}_0), \quad (29)$$

$$P(\mathbf{r}, j, 0|\mathbf{r}_0) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta(j - 1).$$

Решение уравнения (29) имеет вид

$$P(\mathbf{r}, j, t|\mathbf{r}_0) = P(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}_0) P(j, t|\mathbf{r}_0), \quad (30)$$

где  $P(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}_0)$  — вероятностное распределение координат частицы, удовлетворяющее уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}_0) = D_0 \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} P(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}_0), \quad P(\mathbf{r}, 0|\mathbf{r}_0) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

Следовательно, (30) является гауссовым распределением

$$P(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}_0) = \frac{1}{(4\pi D_0 dt)^{d/2}} \exp \left\{ -\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2}{4D_0 t} \right\}, \quad (31)$$

где  $d$  — размерность пространства.

Подчеркнем, что полученное решение (30) означает статистическую независимость координат  $\mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0)$  и расходимости  $j(t|\mathbf{r}_0)$  в окрестности частицы с лагранжевой координатой  $\mathbf{r}_0$ .

Плотность вероятностей для расходимости удовлетворяет уравнению Фоккера – Планка, следующего из (29),

$$\frac{\partial}{\partial \tau} P(j, \tau) = \frac{\partial^2}{\partial j^2} j^2 P(j, \tau), \quad P(j, 0|\mathbf{r}_0) = \delta(j - 1). \quad (32)$$

Здесь и ниже используется безразмерное время  $\tau = D^p t$ . При этом случайный процесс  $j(t|\mathbf{r}_0)$  является логнормальным и его плотность вероятностей не зависит от параметра  $\mathbf{r}_0$

$$P(j, t|\mathbf{r}_0) = \frac{1}{2j\sqrt{\pi\tau}} \exp \left\{ -\frac{\ln^2(j \exp \tau)}{4\tau} \right\}. \quad (33)$$

Следовательно, для лагранжевых моментов расходимости получаем выражение

$$\langle j^n(t|\mathbf{r}_0) \rangle = \exp [n(n-1)\tau],$$

означающее, в частности, экспоненциальный рост ее моментов (при  $n > 1$ ) в лагранжевом представлении.

Для реализаций расходимости имеем экспоненциально спадающую кривую типичной реализации вида:

$$j^*(t) = \exp(-\tau),$$

которая и является ляпуновской экспонентой.

Подчеркнем, что исследованные выше лагранжевы статистические свойства частицы в потоках, содержа-



щих случайную потенциальную составляющую, качественно отличаются от статистических свойств частицы в бездивергентных потоках, где расходимость сохраняется  $j(t) = 1$ . Приведенные выше статистические оценки случайного процесса  $j(t)$  показывают, что они формируются выбросами их реализаций относительно кривых типичных реализаций.

В то же время распределения вероятностей координат частиц в обоих случаях дивергентного и бездивергентного поля скоростей по сути одинаковы.

**4.1.2. Двухточечные статистические характеристики.** Рассмотрим теперь совместную динамику двух частиц в отсутствие среднего потока. В этом случае совместная плотность вероятностей относительной диффузии двух частиц

$$P(\mathbf{l}, t) = \langle \delta(\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t) - \mathbf{l}) \rangle$$

удовлетворяет уравнению Фоккера – Планка

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{l}, t) = \frac{\partial^2}{\partial l_\alpha \partial l_\beta} D_{\alpha\beta}(\mathbf{l}) P(\mathbf{l}, t), \quad P(\mathbf{l}, 0) = \delta(\mathbf{l} - \mathbf{l}_0), \quad (34)$$

где

$$D_{\alpha\beta}(\mathbf{l}) = 2 [B_{\alpha\beta}^{\text{eff}}(0) - B_{\alpha\beta}^{\text{eff}}(\mathbf{l})]$$

— структурная матрица векторного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ , а  $\mathbf{l}_0$  — начальное расстояние между частицами.

В общем случае решить уравнение (34) не удастся. Однако если начальное расстояние между частицами  $l_0 \ll l_{\text{cor}}$ , где  $l_{\text{cor}}$  — пространственный радиус корреляции поля скорости  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ , то можно разложить функции  $D_{\alpha\beta}(\mathbf{l})$  в ряд Тейлора, в результате чего в первом приближении получаем

$$D_{\alpha\beta}(\mathbf{l}) = - \frac{\partial^2 B_{\alpha\beta}^{\text{eff}}(\mathbf{l})}{\partial l_i \partial l_j} \Big|_{\mathbf{l}=\mathbf{0}} l_i l_j.$$

С использованием представления (28) диффузионный тензор упрощается и может быть записан в виде

$$D_{\alpha\beta}(\mathbf{l}) = \frac{1}{d(d+2)} \left\{ [D^s(d+1) + D^p] \delta_{\alpha\beta} l^2 - 2(D^s - D^p) l_\alpha l_\beta \right\}, \quad (35)$$

где  $d$  — размерность пространства.

Подставляя теперь (35) в (34), умножая обе части получившегося уравнения на  $|\mathbf{l}|^n = l^n$  и интегрируя по  $\mathbf{l}$ , получаем замкнутое уравнение

$$\frac{d}{dt} \ln \langle l^n(t) \rangle = \frac{1}{d(d+2)} \left\{ [D^s(d+1) + D^p] n(d+n-2) - 2(D^s - D^p) n(n-1) \right\},$$

решение которого соответствует экспоненциально растущим во времени функциям для всех моментов ( $n = 1, 2, \dots$ ). При этом распределение вероятностей для случайного процесса  $l(t)/l_0$  будет логарифмически нормальным.

Следовательно, в соответствии с формулами (17) и (18) кривой типичной реализации для расстояния между двумя частицами будет экспоненциальная функция

времени

$$l^*(t) = l_0 \exp \left\{ \frac{1}{d(d+2)} [D^s d(d-1) - D^p(4-d)] t \right\}, \quad (36)$$

и эта функция связана с *ляпуновской экспонентой*.

Отсюда следует, что в двумерном случае ( $d = 2$ ) выражение

$$l^*(t) = l_0 \exp \left[ \frac{1}{4} (D^s - D^p) t \right]$$

существенно зависит от знака разности  $D^s - D^p$ . В частности, для бездивергентного поля скоростей ( $D^p = 0$ ) имеем экспоненциально растущую типичную реализацию, что соответствует экспоненциально быстрому разбеганию частиц при малых расстояниях между ними. Этот результат справедлив для времен

$$\frac{1}{4} D^s t \ll \ln \frac{l_{\text{cor}}}{l_0},$$

при которых справедливо разложение (35). В другом предельном случае — потенциальном поле скоростей ( $D^s = 0$ ) — типичной реализацией будет экспоненциально убывающая кривая, т.е. налицо стремление частиц "слиться". Это означает, что должны образовываться *кластеры*, т.е. зоны компактного сосредоточения частиц, расположенные в большей степени в разреженных зонах, что согласуется с результатами численного моделирования эволюции реализации однородного в начальный момент времени распределения частиц в случайном потенциальном поле скоростей, приведенного на рис. 1б (правда, для совершенно другой статистической модели поля скоростей). По-видимому, само явление кластеризации не зависит от модели случайного поля скоростей, хотя, конечно, статистические параметры, характеризующие это явление, могут существенно зависеть от модели. Таким образом, для кластеризации частиц должно выполняться неравенство

$$D^s < D^p. \quad (37)$$

В трехмерном же случае ( $d = 3$ ) из (36) следует, что

$$l^*(t) = l_0 \exp \left[ \frac{1}{15} (6D^s - D^p) t \right],$$

и кривая типичной реализации будет экспоненциально затухать со временем при выполнении более жесткого (чем в двумерном случае) условия

$$D^p > 6D^s.$$

В одномерном случае

$$l^*(t) = l_0 \exp(-D^p t)$$

кривая типичной реализации всегда убывает со временем, так как поле скоростей в этом случае всегда дивергентно.

#### 4.2. Эйлерово описание

Для описания локального поведения реализаций поля примеси в пространстве в случайном поле скоростей

$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  нужно знать вероятностное распределение ее плотности. Исходя из стохастического уравнения (7), уравнение для плотности вероятностей поля плотности (концентрации) примеси можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - D_0 \Delta\right) P(\mathbf{r}, t; \rho) = D_\rho \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \rho^2 P(\mathbf{r}, t; \rho), \quad (38)$$

$$P(\mathbf{r}, 0; \rho) = \delta(\rho - \rho_0(\mathbf{r})),$$

где коэффициент диффузии в  $\rho$ -пространстве  $D_\rho = D^P$ .

Из уравнения (38), в частности, следует, что моментные функции поля плотности описываются уравнением

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - D_0 \Delta\right) \langle \rho^n(\mathbf{r}, t) \rangle = D_\rho n(n-1) \langle \rho^n(\mathbf{r}, t) \rangle, \quad (39)$$

$$\langle \rho^n(\mathbf{r}, 0) \rangle = \rho_0^n(\mathbf{r}).$$

Его решение имеет структуру

$$\langle \rho^n(\mathbf{r}, t) \rangle = \exp[n(n-1)\tau] \int d\mathbf{r}' P(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}') \rho_0^n(\mathbf{r}'), \quad (40)$$

где функция  $P(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}')$  описывается равенством (31), а параметр  $\tau = D_\rho t$ .

Если начальная плотность примеси всюду одинакова:  $\rho_0(\mathbf{r}) = \rho_0 = \text{const}$ , то вероятностное распределение плотности не зависит от  $\mathbf{r}$  и описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t; \rho) = D_\rho \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \rho^2 P(t; \rho), \quad P(0; \rho) = \delta(\rho - \rho_0), \quad (41)$$

которое совпадает с уравнением (32) для расходимости и отличается только начальным условием.

Следовательно, в этом случае эйлерово поле плотности логнормально с плотностью вероятностей и соответствующей интегральной функцией распределения:

$$P(t; \rho) = \frac{1}{2\rho\sqrt{\pi\tau}} \exp\left\{-\frac{\ln^2(\rho \exp(\tau/\rho_0))}{4\tau}\right\}, \quad (42)$$

$$F(t; \rho) = \Phi\left(\frac{\ln(\rho \exp(\tau/\rho_0))}{2\sqrt{\tau}}\right),$$

где  $\Phi(z)$  — интеграл вероятностей (функция ошибок)

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z dy \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right).$$

С точки зрения одноточечных характеристик поля плотности  $\rho(\mathbf{r}, t)$  в этом случае задача статистически эквивалентна случайному процессу расходимости в лагранжевом описании  $j(t)$  и при этом все моментные функции, начиная со второй, экспоненциально растут со временем:

$$\langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle = \rho_0, \quad \langle \rho^n(\mathbf{r}, t) \rangle = \rho_0^n \exp[n(n-1)\tau], \quad (43)$$

а в соответствии с формулами (17) и (18) кривая типичной реализации поля плотности в любой фиксированной точке пространства экспоненциально спадает во времени:

$$\rho^*(t) = \rho_0 \exp(-t), \quad (44)$$

что свидетельствует о наличии кластерного характера флуктуаций плотности среды в произвольных дивергент-

ных потоках. Формирование же эйлеровой статистики плотности в любой фиксированной точке пространства идет за счет флуктуаций плотности вокруг этой кривой.

Выше обсуждалось одноточечное вероятностное распределение плотности примеси в эйлеровом представлении, что уже позволило сделать ряд заключений о поведении реализаций поля плотности во времени в фиксированных точках пространства. Покажем теперь, что это распределение дает также возможность выяснить некоторые характерные особенности пространственно-временной структуры реализаций поля плотности.

Для наглядности ограничимся здесь двумерным случаем. Как говорилось выше, важные сведения о пространственном поведении реализаций несет анализ линий уровня, определяемых равенством

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho = \text{const}. \quad (45)$$

В частности, такие функционалы поля плотности, как общая величина площади в области, где  $\rho(\mathbf{r}, t) > \rho$  —  $S(t, \rho)$ , общая масса примеси, заключенная в этой области,  $M(t, \rho)$ , средние значения которых определяются одноточечной плотностью вероятностей, описываются выражениями:

$$\langle S(t, \rho) \rangle = \int_\rho^\infty d\tilde{\rho} \int d\mathbf{r} P(\mathbf{r}, t; \tilde{\rho}), \quad (46)$$

$$\langle M(t, \rho) \rangle = \int_\rho^\infty \tilde{\rho} d\tilde{\rho} \int d\mathbf{r} P(\mathbf{r}, t; \tilde{\rho}).$$

Подставив сюда решение уравнения (38), после несложных преобразований легко найти явные выражения для этих величин:

$$\langle S(t, \rho) \rangle = \int d\mathbf{r} \Phi\left(\frac{1}{2\sqrt{\tau}} \ln \frac{\rho_0(\mathbf{r}) \exp(-\tau)}{\rho}\right), \quad (47)$$

$$\langle M(t, \rho) \rangle = \int d\mathbf{r} \rho_0(\mathbf{r}) \Phi\left(\frac{1}{2\sqrt{\tau}} \ln \frac{\rho_0(\mathbf{r}) \exp \tau}{\rho}\right).$$

Отсюда видно, в частности, что при  $\tau \gg 1$  средняя площадь областей, где плотность выше заданного уровня  $\rho$ , убывает со временем по закону

$$\langle S(t, \rho) \rangle \approx \frac{1}{\sqrt{\pi\tau\rho}} \exp\left(-\frac{\tau}{4}\right) \int d\mathbf{r} \sqrt{\rho_0(\mathbf{r})}, \quad (48)$$

в то время как заключенная в этих областях средняя масса примеси

$$\langle M(t, \rho) \rangle \approx M - \sqrt{\frac{\rho}{\pi\tau}} \exp\left(-\frac{\tau}{4}\right) \int d\mathbf{r} \sqrt{\rho_0(\mathbf{r})} \quad (49)$$

монотонно стремится к полной массе  $M = \int d\mathbf{r} \rho_0(\mathbf{r})$ . Это еще раз подтверждает сделанный ранее вывод о том, что частицы примеси со временем стремятся собраться в кластеры — компактные области повышенной плотности, окруженные разреженными областями.

## 5. Локализация плоских волн в слоистых случайных средах

Для конкретных вычислений статистических характеристик решения волновой задачи обычно используется модель флуктуаций функции  $\varepsilon(x)$  в виде гауссова

дельта-коррелированного случайного процесса (процесса *белого шума*) с параметрами

$$\langle \varepsilon_1(x) \rangle = 0, \quad \langle \varepsilon_1(x) \varepsilon_1(x') \rangle = B_\varepsilon(x - x') = 2\sigma_\varepsilon^2 l_0 \delta(x - x'), \quad (50)$$

где  $B_\varepsilon(x - x')$  — корреляционная функция,  $\sigma_\varepsilon^2 \ll 1$  — дисперсия, а  $l_0$  — радиус корреляции для случайной функции  $\varepsilon_1(x)$ . Такая аппроксимация означает, что переход к асимптотическому случаю  $l_0 \rightarrow 0$  в точном решении задачи с конечным радиусом корреляции  $l_0$  приводит к результатам, совпадающим с решением статистической задачи с параметрами (50).

Отметим, что основная принципиальная часть результатов мало зависит от модели среды. Использование конкретной модели позволяет количественно вычислить основные параметры задачи.

Статистический анализ решения задачи показывает, что для достаточно толстого слоя среды, а именно  $D(L - L_0) \gg 1$  (где величина  $D = k^2 \sigma_\varepsilon^2 l_0 / 2$  связана со статистическими характеристиками функции  $\varepsilon(x)$ ), с вероятностью единица  $|T_L| \rightarrow 0$  и, следовательно,  $|R_L| \rightarrow 1$ , т.е. полупространство ( $L_0 \rightarrow -\infty$ ) случайно-неоднородной среды полностью отражает падающую волну за счет многократного переотражения в среде, т.е. имеет место *динамическая локализация волнового поля* в этом слое.

Однако среднее значение интенсивности волнового поля для полупространства случайной среды  $\langle I(L - x) \rangle = 2$ , а более высокие моменты, нормированные на их значения на границе слоя, описываются выражением

$$\langle I^n(L - x) \rangle = \exp [Dn(n - 1)(L - x)],$$

т.е. интенсивность волнового поля имеет логарифмически нормальное распределение вероятностей, а моментные функции экспоненциально растут в глубь среды.

При этом типичная реализация интенсивности волны в среде описывается экспоненциально спадающей кривой

$$I^*(x) = 2 \exp [-D(L - x)]$$

и совпадает с ляпуновской экспонентой, а величина  $l_{\text{loc}} = 1/D$  называется *длиной локализации* (см., например, [14]) и определяет пространственный масштаб затухания интенсивности волнового поля в среде в отдельных его реализациях.

Таким образом, видим, что формирование статистики осуществляется за счет больших выбросов относительно кривой типичной реализации, что означает отсутствие *статистической локализации волнового поля*.

## 6. Каустическая структура волнового поля в случайно-неоднородной среде

Введем амплитуду и фазу волнового поля, а также комплексную фазу волны по формуле

$$u(x, \mathbf{R}) = A(x, \mathbf{R}) \exp [iS(x, \mathbf{R})] = \exp [\phi(x, \mathbf{R})],$$

где

$$\phi(x, \mathbf{R}) = \chi(x, \mathbf{R}) + iS(x, \mathbf{R}),$$

$\chi(x, \mathbf{R}) = \ln A(x, \mathbf{R})$  — уровень амплитуды волны, а  $S(x, \mathbf{R})$  — флуктуации фазы волны относительно фазы падающей волны  $kx$ . Исходя из параболического уравнения (13), можно получить для комплексной фазы нелинейное уравнение так называемого *метода плавных возмущений* Рытова (МПВ):

$$\frac{\partial}{\partial x} \phi(x, \mathbf{R}) = \frac{i}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} \phi(x, \mathbf{R}) + \frac{i}{2k} [\mathbf{V}_{\mathbf{R}} \phi(x, \mathbf{R})]^2 + i \frac{k}{2} \varepsilon(x, \mathbf{R}). \quad (51)$$

Для случая плоской падающей волны, который и будет рассмотрен в дальнейшем, без ограничения общности, можно считать, что  $u_0(\mathbf{R}) = 1$  и, следовательно,  $\phi(0, \mathbf{R}) = 0$ .

Разделяя в уравнении (51) действительную и мнимую части, получаем уравнения

$$\begin{aligned} \chi(x, \mathbf{R}) + \frac{1}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} S(x, \mathbf{R}) + \frac{1}{k} [\mathbf{V}_{\mathbf{R}} \chi(x, \mathbf{R})] [\mathbf{V}_{\mathbf{R}} S(x, \mathbf{R})] &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} S(x, \mathbf{R}) - \frac{1}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} \chi(x, \mathbf{R}) - \frac{1}{2k} [\mathbf{V}_{\mathbf{R}} \chi(x, \mathbf{R})]^2 + \\ + \frac{1}{2k} [\mathbf{V}_{\mathbf{R}} S(x, \mathbf{R})]^2 &= \frac{k}{2} \varepsilon(x, \mathbf{R}). \end{aligned} \quad (52)$$

Если функция  $\varepsilon(x, \mathbf{R})$  достаточно мала, то для решения уравнений (52) можно построить итерационные ряды по полю  $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ . При этом так называемому первому приближению МПВ Рытова соответствуют гауссовы поля  $\chi(x, \mathbf{R})$ ,  $S(x, \mathbf{R})$ , статистические характеристики которых определяются из статистического усреднения соответствующих итерационных рядов. Так, вторые моменты (в том числе и дисперсии) этих полей определяются из линеаризованной системы уравнений (52), т.е. системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \chi_0(x, \mathbf{R}) &= -\frac{1}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} S_0(x, \mathbf{R}), \\ \frac{\partial}{\partial x} S_0(x, \mathbf{R}) &= \frac{1}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} \chi_0(x, \mathbf{R}) + \frac{k}{2} \varepsilon(x, \mathbf{R}), \end{aligned} \quad (53)$$

а средние значения — из непосредственного усреднения уравнений (52). Линейная система уравнений (53) может быть решена с помощью преобразования Фурье по поперечной координате.

Рассмотрим теперь статистическое описание волнового поля. Считаем, что случайное поле  $\varepsilon(x, \mathbf{R})$  является гауссовым однородным и изотропным полем с параметрами

$$\langle \varepsilon(x, \mathbf{R}) \rangle = 0, \quad B_\varepsilon(x - x', \mathbf{R} - \mathbf{R}') = \langle \varepsilon(x, \mathbf{R}) \varepsilon(x', \mathbf{R}') \rangle.$$

В приближении дельта-коррелированных флуктуаций параметров среды эту корреляционную функцию можно аппроксимировать "эффективной" функцией

$$B_\varepsilon(x, \mathbf{R}) = B_\varepsilon^{\text{eff}}(x, \mathbf{R}) = \delta(x) A(\mathbf{R}),$$

$$A(\mathbf{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} dx B_\varepsilon(x, \mathbf{R}),$$

при этом случайное поле  $\phi(x, \mathbf{R})$  будет статистически однородным полем в плоскости  $\mathbf{R}$  и все одноточечные статистические характеристики его не зависят от параметра  $\mathbf{R}$ . Статистические свойства амплитудных флуктуаций в рассматриваемом приближении описываются

дисперсией уровня амплитуды, т.е. параметром  $\sigma_0^2(x) = \langle \chi_0^2(x, \mathbf{R}) \rangle$ .

Чтобы найти среднее значение уровня амплитуды, воспользуемся уравнением (14). Для плоской падающей волны, усредняя это уравнение по ансамблю реализаций поля  $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ , получаем равенство  $\langle I(x, \mathbf{R}) \rangle = 1$ , которое можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \langle I(x, \mathbf{R}) \rangle &= \langle \exp [2\chi_0(x, \mathbf{R})] \rangle = \\ &= \exp [2\langle \chi_0(x, \mathbf{R}) \rangle + 2\sigma_0^2(x)] = 1. \end{aligned}$$

Следовательно, в первом приближении МПВ  $\langle \chi_0(x, \mathbf{R}) \rangle = -\sigma_0^2(x)$ . Что касается дисперсии интенсивности волны, которая называется *индексом мерцания*, то для нее в первом приближении МПВ имеем

$$\beta_0^2(x) = \langle I^2(x, \mathbf{R}) \rangle - 1 = \langle \exp [4\chi_0(x, \mathbf{R})] \rangle - 1 \approx 4\sigma_0^2(x). \quad (54)$$

Таким образом, интенсивность волнового поля является логарифмически нормальным случайным полем и его одноточечная плотность вероятностей определяется выражением

$$P(x; I) = \frac{1}{I\sqrt{2\pi\beta_0(x)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\beta_0(x)} \ln^2 \left( I \exp \left[ \frac{1}{2} \beta_0(x) \right] \right) \right\}. \quad (55)$$

Теперь можно рассмотреть статистически эквивалентный случайный процесс  $I(x)$  с плотностью вероятностей (55). Для этого процесса кривой типичной реализации интенсивности волнового поля является экспоненциально спадающая с дистанцией кривая

$$I^*(x) = \exp \left[ -\frac{1}{2} \beta_0(x) \right]$$

в любой фиксированной точке пространства  $\mathbf{R}$ , что свидетельствует о возникновении кластерной (каустической) структуры поля интенсивности. Формирование статистики (например, моментных функций  $\langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle$ ) осуществляется за счет больших выбросов процесса  $I(x)$  относительно этой кривой.

Полученное описание флуктуаций интенсивности на основе первого приближения МПВ справедливо при значениях параметра  $\beta_0(x) \leq 1$ . При дальнейшем увеличении параметра  $\beta_0(x)$ , метод плавных возмущений становится несправедливым и необходимо принимать во внимание нелинейный характер уравнения для комплексной фазы волнового поля. Эта область флуктуаций, называемая *областью сильных фокусировок*, очень трудна для аналитических исследований. При дальнейшем же увеличении параметра  $\beta_0(x)$  ( $\beta_0^2(x) \geq 10$ ) статистические характеристики интенсивности выходят на режим насыщения, и эта область изменения параметра  $\beta_0(x)$  называется *областью сильных флуктуаций интенсивности*.

В области сильных фокусировок моменты интенсивности можно аппроксимировать выражением (см., например, [26])

$$\langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle = n! \exp \left\{ n(n-1) \frac{\beta^2(x) - 1}{4} \right\},$$

которому соответствует плотность вероятностей вида

$$P(x, I) = \frac{1}{\sqrt{\pi(\beta(x) - 1)}} \times \int_0^\infty dz \exp \left\{ -zI - \frac{1}{\beta(x) - 1} \left[ \ln z - \frac{\beta(x) - 1}{4} \right]^2 \right\},$$

где параметр  $\beta^2(x)$  описывает дисперсию флуктуаций интенсивности в этой области и, например, для случая турбулентной среды

$$\beta^2(x) = 1 + 0,861 (\beta_0^2(x))^{-2/5}.$$

Здесь  $\beta_0^2(x)$  — дисперсия интенсивности волнового поля, рассчитанная по первому приближению метода плавных возмущений.

Эти асимптотические формулы описывают переход в область *насыщенных* флуктуаций интенсивности, где  $\beta(x) \rightarrow 1$  при  $\beta_0^2(x) \rightarrow \infty$ . В этой области соответственно имеем

$$\langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle = n!, \quad P(x, I) = \exp(-I).$$

Экспоненциальное распределение вероятностей интенсивности волнового поля означает, что комплексное поле  $u(x, \mathbf{R})$  является гауссовым случайным полем. Следовательно, в этой области средняя удельная площадь областей, внутри которых  $I(x, \mathbf{R}) > I$ , и удельная средняя мощность, сосредоточенная в этих областях, постоянны и не описывают поведение интенсивности волнового поля в отдельных реализациях. В этом случае не информативен и переход к статистически эквивалентному случайному процессу, так как кривой типичной реализации для него будет также постоянная величина.

Понять структуру волнового поля в этом случае можно, анализируя такие величины, как удельная средняя длина контуров и среднее удельное число контуров (см., например, [21]). Эти величины продолжают расти с ростом параметра  $\beta_0(x)$  в отличие от удельной средней площади. Это связано с тем, что определяющую роль в этом режиме играет интерференция парциальных волн, приходящих с разных направлений.

Динамическая картина поведения линий уровня зависит от соотношения между процессами фокусировки и дефокусировки излучения отдельными участками турбулентной среды. Фокусировка на неоднородностях большого масштаба приводит к появлению высоких пиков на случайном рельефе интенсивности. В режиме максимальных фокусировок ( $\beta_0(x) \sim 1$ ) около половины всей мощности волны концентрируется в узких высоких пиках. При увеличении параметра  $\beta_0(x)$  начинает преобладать дефокусировка излучения, вызывающая расплывание высоких пиков и образование сильноизрезанного (интерференционного) рельефа с большим числом вершин уровня  $I \sim 1$ , что и наблюдалось как в лабораторных экспериментах (см. рис. 3), так и при численном моделировании (см. рис. 4).

## 7. Заключение

Подход к анализу стохастических динамических задач на основе идей статистической топографии, позволяющий по одноточечным статистическим характеристикам слу-

чайных процессов и полей определять количественные и качественные характеристики отдельных реализаций этих величин на всем интервале времени (во всем пространстве), возник в процессе дискуссий с экспериментаторами, которые имеют дело в основном с отдельными реализациями.

Подходу, основанному на традиционном методе анализа устойчивости динамических систем по Ляпунову с помощью анализа ляпуновских характеристических показателей, по-прежнему уделяется большое внимание многими исследователями. И, как было показано выше, ляпуновскую экспоненту для случайных процессов можно отождествлять с кривой типичной реализации для логнормального закона положительных нестационарных во времени характеристик решений стохастических динамических систем. Это естественно, так как, по сути дела, оба метода основаны на линеаризации исходной динамической системы. Отличие состоит только в том, что при вычислении кривой типичной реализации сразу используются такие свойства случайных параметров, как стационарность во времени и однородность и изотропность в пространстве. Кроме того, практически всегда удается провести анализ в рамках приближения дельта-коррелированности во времени флуктуирующих параметров, т.е. на основе уравнения Фоккера – Планка, что позволяет избежать громоздких вычислений и значительно упростить их процедуру.

Для стохастических однородных в пространстве динамических систем, описываемых уравнениями в частных производных, можно перейти к статистически эквивалентным случайным процессам и, следовательно, изучить его кривую типичной реализации. И эта кривая теперь позволяет получить информацию о формировании кластерных структур случайного поля, в отличие от ляпуновского подхода.

В случае же неприменимости линеаризации или стационарности одновременного распределения вероятностей решения задачи, как, например, в случае распространения волн в турбулентной среде в области "насыщенных флуктуаций" интенсивности излучения, кривая типичной реализации не информативна и сложную картину каустической структуры волнового поля удается объяснить только на основе изучения статистической топографии волнового поля в полном объеме.

Работа проводилась в рамках ЕНО "Регулярная и хаотическая гидродинамика" при поддержке РФФИ (проекты: 07-05-0006а, 05-05-64745а и 07-05-92210-НЦНИЛ.а).

## Список литературы

1. Кляцкин В И, Гурарий Д *УФН* **169** 171 (1999) [Klyatskin V I, Gurarie D *Phys. Usp.* **42** 165 (1999)]
2. Кляцкин В И, в сб. *Нелинейные волны 2004* (Под ред. А В Гапонова-Грехова, В И Некоркина) (Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2005) с. 256
3. Кляцкин В И *Стохастические уравнения глазами физика* (М.: Физматлит, 2001)
4. Кляцкин В И *Динамика стохастических систем* (М.: Физматлит, 2002)
5. Кляцкин В И *Диффузия и кластеризация пассивной примеси в случайных гидродинамических потоках* (М.: Физматлит, 2005)
6. Isichenko M В *Rev. Mod. Phys.* **64** 961 (1992)
7. *Математическая энциклопедия* Т. 3 (Гл. ред. И М Виноградов) (М.: Советская энциклопедия, 1982)
8. Mehlig В, Wilkinson М *Phys. Rev. Lett.* **92** 250602 (2004)
9. Wilkinson М, Mehlig В *Europhys. Lett.* **71** 186 (2005)
10. Saichev А I, Woyczynski W А, in *Stochastic Models in Geosystems* (The IMA Volumes in Math. and Its Applications, Vol. 85, Eds S А Molchanov, W А Woyczynski) (New York: Springer, 1997) p. 359
11. Zirbel С L, Cinlar Е, in *Stochastic Models in Geosystems* (The IMA Volumes in Math. and Its Applications, Vol. 85, Eds S А Molchanov, W А Woyczynski) (New York: Springer, 1997) p. 459
12. Ареф Х *Нелинейная динамика* **2** 111 (2006)
13. Кляцкин В И, Кошель К В *УФН* **170** 771 (2000) [Klyatskin V I, Koshel' K V *Phys. Usp.* **43** 717 (2000)]
14. Лифшиц И М, Гредескул С А, Пастур Л А *Введение в теорию неупорядоченных систем* (М.: Наука, 1982) [Translated into English: Lifshits I М, Gredeskul S А, Pastur L А *Introduction to the Theory of Disordered Systems* (New York: Wiley, 1988)]
15. Кляцкин В И, Саичев А И *УФН* **162** (3) 161 (1992) [Klyatskin V I, Saichev А I *Sov. Phys. Usp.* **35** 231 (1992)]
16. Maxey М R, Riley J J *Phys. Fluids* **26** 883 (1983)
17. Lamb Н *Hydrodynamics* (New York: Dover Publ., 1945) [Лэмб Г *Гидродинамика* (М.: Гостехиздат, 1947)]
18. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Гидродинамика* (М.: Наука, 1986) [Translated into English: Landau L D, Lifshitz Е М *Fluid Mechanics* (Oxford: Pergamon Press, 1987)]
19. Татарский В И *Распространение волн в турбулентной атмосфере* (М.: Наука, 1967)
20. Рытов С М, Кравцов Ю А, Татарский В И *Введение в статистическую радиофизику* Т. 1, 2 (М.: Наука, 1977, 1978) [Translated into English: Rytov S М, Kravtsov Yu А, Tatarskii V I *Principles of Statistical Radiophysics* (Berlin: Springer-Verlag, 1987–1989)]
21. Кляцкин В И *УФН* **174** 177 (2004) [Klyatskin V I *Phys. Usp.* **47** 169 (2004)]
22. Гурвич А С, Каллистратова М А, Мартвель Ф Е *Изв. вузов. Радиофиз.* **20** 1020 (1977) [Gurvich А S, Kallistratova М А, Martvel Е Е *Radiophys. Quantum Electron.* **20** 705 (1978)]
23. Kravtsov Yu А *Rep. Prog. Phys.* **55** 39 (1992)
24. Flatté S М, Wang G-Y, Martin J J. *Opt. Soc. Am. A* **10** 2363 (1993)
25. Flatté S М, Bracher С, Wang G-Y J. *Opt. Soc. Am. A* **11** 2080 (1994)
26. Dashen R J. *Math. Phys.* **20** 894 (1979); *Opt. Lett.* **9** 110 (1984)

## Statistical topography and Lyapunov's exponents in dynamic stochastic systems

V.I. Klyatskin

A.M. Obukhov Institute of Atmospheric Physics, Russian Academy of Sciences,  
Pyzhevskii per. 3, 119017 Moscow, Russian Federation  
Tel. (7-495) 269-1283  
E-mail: klyatskin@yandex.ru

The description of stochastic dynamic systems using the ideas of statistical topography; and the conventional Lyapunov-exponent stability analysis of dynamic systems are discussed in terms of how they relate to each other. As an illustration, a number of coherent phenomena occurring with probability unity, i.e., in almost all realizations of the random process, are examined, including the diffusion and clustering of passive tracers in random hydrodynamic flows; dynamical plane wave localization in randomly layered media; and the formation of caustic structures in wavefields of various kinds propagating through multidimensional random media.

PACS numbers: **05.40. – a**, **05.45. – a**, **42.25.Dd**, **46.65. + g**, **47.27.eb**  
Bibliography — 26 references  
*Uspekhi Fizicheskikh Nauk* **178** (4) 419–431 (2008)

DOI: 10.3367/UFNr.0178.200804e.0419  
Received 2 August 2007, revised 19 November 2007  
*Physics – Uspekhi* **51** (4) (2008)