

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Свойства изочастотных зависимостей
и законы геометрической оптики

Э.Г. Локк

На основе анализа геометрических и математических свойств различных изочастотных зависимостей (называемых также сечениями поверхности волновых векторов) изложены законы геометрической оптики для двумерных геометрий анизотропных сред и структур. Проанализирована связь между различными свойствами этих зависимостей (такими, как наличие асимптот, точек перегиба, центральной или осевой симметрии, однозначности или многозначности зависимости) и возникновением таких явлений, как невзаимное распространение, однонаправленное распространение, появление двух (нескольких) отраженных или преломленных лучей, отсутствие отражения, необратимость хода лучей при отражении и преломлении. Показано, что с помощью простых правил, основанных на исследовании изочастотных зависимостей на экстремум, можно установить, при каких углах падения в данной геометрии имеет место положительное отражение или преломление волны, а при каких — отрицательное отражение или преломление.

PACS numbers: 42.15. -i, 42.25.Gy, 78.20.Ci

DOI: 10.3367/UFNr.0178.200804d.0397

Содержание

1. Введение (397).
2. Магнитостатические волны — электромагнитные волны, распространяющиеся в магнитных пленках (398).
3. Предварительные замечания и определения (400).
4. Изочастотные поверхности и зависимости — характеристики, определяющие распространение, отражение и преломление волн (401).
5. Типы двумерных геометрий (402).
6. Законы распространения волн (402).
 - 6.1. Прямолинейное распространение волны. 6.2. Правило ориентации волнового вектора. 6.3. Возможные направления распространения волны. 6.4. Невзаимное и однонаправленное распространение волны.
7. Основные соотношения при исследовании отражения и преломления волн (405).
8. Законы отражения волн (408).
 - 8.1. Общие замечания. 8.2. Правило Евклида. 8.3. Обратное отражение. 8.4. Положительное и отрицательное отражение. 8.5. Отсутствие отраженного луча. 8.6. Возникновение двух или нескольких отраженных лучей. 8.7. Необратимость хода лучей при отражении.

9. Законы преломления волн (413).

- 9.1. Общие замечания. 9.2. Преломление волны, фазовый фронт которой параллелен границе. 9.3. Возникновение двух или нескольких преломленных лучей. 9.4. Положительное и отрицательное преломление. 9.5. Отсутствие преломленного луча. 9.6. Необратимость хода лучей при преломлении.

10. Заключение (416).

Список литературы (417).

1. Введение

Законы геометрической оптики, установленные много веков назад Евклидом, В. Снеллиусом, Р. Декартом и П. Ферма, известны во всем мире. Эти законы представляют собой совокупность нескольких, подтвержденных опытным путем, простых правил, которые описывают распространение, отражение и преломление света (электромагнитной волны) в изотропной среде. Хотя положения геометрической оптики имеют значение первых приближений и согласуются с наблюдаемыми явлениями, когда эффекты интерференции и дифракции несущественны (т.е. когда длина волны бесконечно мала), эти положения всегда используются и будут использоваться для определения условий формирования изображений при разработке различных оптических и радиотехнических систем и устройств.

Сравнительно недавно В.Г. Веселаго изложил законы геометрической оптики для изотропных сред с отрицательными диэлектрической и магнитной проницаемостями ϵ и μ [1]. Несмотря на то, что изотропная среда с отрицательными значениями ϵ и μ является гипотетической, появление этих законов, значительно отлича-

Э.Г. Локк, Фрязинский филиал института радиотехники и электроники РАН,
пл. акад. Введенского 1, 141190 Фрязино, Московская обл.,
Российская Федерация
Тел. (496) 565-25-62. Факс (495) 702-95-72
E-mail: edwin@ms.ire.rssi.ru

Статья поступила 6 сентября 2007 г.,
после доработки 9 ноября 2007 г.

шихся от аналогичных законов в обычных изотропных средах, привело к значительному росту количества исследований, в которых пытаются реализовать и использовать на практике эти необычные законы (см. обзорные статьи [2, 3]).

Законы распространения, отражения и преломления электромагнитных волн в анизотропных средах начали исследовать достаточно давно при изучении свойств известных одноосных кристаллов (см. [4–6] и имеющуюся там литературу). Поверхность волновых векторов одноосных оптических кристаллов состоит из двух поверхностей — сферы и эллипсоида, описывающих соответственно обыкновенную и необыкновенную волну, а сечения этих поверхностей — изочастотные зависимости¹ — представляют собой окружность и эллипс. Относительно недавно были начаты исследования волновых процессов в других анизотропных средах — акустических кристаллах [7–9], плазме [10, 11] и магнитоупорядоченных средах [12–14]. Изочастотные зависимости в этих средах могут иметь как более сложную, чем эллипс, замкнутую форму кривой (см., например, [8, 15, 16]), так и незамкнутую форму кривой, похожую на гиперболу (см., например, [11, рис. 104 и 138] и [12, рис. 4.13 и 5.6]). Исследования законов распространения, отражения и преломления волн в перечисленных анизотропных средах показали, что они не только существенно отличаются от соответствующих законов в изотропных средах (включая среды с отрицательными значениями ϵ и μ), но и значительно расширяют и дополняют существующие представления о поведении волн в известных оптических кристаллах. В то же время, анализируя результаты этих исследований, можно найти ряд общих закономерностей или правил, которые, подобно положениям геометрической оптики для изотропных сред, описывают в первом приближении распространение, отражение и преломление электромагнитных и акустических волн в анизотропных средах.

Различия в поведении волн в изотропных и в анизотропных средах обусловлены в основном двумя причинами. Во-первых, *сама волна в анизотропной среде*, как правило, является "необычной" и *принципиально отличается от волны в изотропной среде тем, что волновой вектор \mathbf{k} и вектор групповой (лучевой) скорости \mathbf{V} волны не коллинеарны*. Во-вторых, в анизотропных средах изочастотные зависимости, определяющие законы отражения и преломления волн, могут иметь достаточно сложную форму, из-за чего могут возникать новые физические эффекты. По сути дела, применение закона сохранения импульса к волнам с неколлинеарным характером *имеет свои особенности* (закон сохранения импульса "отвечает" за сохранение тангенциальной компоненты вектора \mathbf{k} на границах, но направление распространения энергии "определяет" вектор \mathbf{V} , связанный с \mathbf{k} дисперсионным соотношением) и может привести (в зависимости от свойств изочастотных характеристик) к возникновению таких явлений, как отрицательное отражение или преломление (когда отраженный, преломленный и падающий лучи располагаются с одной стороны от нормали к границе раздела), появление двух (или даже

нескольких) отраженных или преломленных лучей, отсутствие отражения вообще, однонаправленное и взаимное распространение и др.

Отметим, что к настоящему времени теоретические и экспериментальные исследования бегущих электромагнитных волн с неколлинеарным характером наиболее полно выполнены для магнитоупорядоченных сред, в особенности — для намагниченных до насыщения ферритовых пленок [12, 14, 17–25], магнитные свойства которых описываются тензором магнитной проницаемости второго ранга. Так как именно в этих исследованиях наблюдалось большое количество разнообразных физических эффектов и явлений, здесь в основном обсуждаются именно эти исследования. Несмотря на это, поскольку проводимый анализ основан лишь на законе сохранения импульса, то и все установленные закономерности являются характерными для волн любой природы с неколлинеарным характером в любых анизотропных средах. Отметим, что в последнее время, широкое распространение получили исследования волновых процессов в пространственно-периодических средах, часто называемых фотонными кристаллами, метаматериалами или сверхрешетками. Как известно, изочастотные характеристики этих сред в отличие от изочастотных характеристик сплошных анизотропных сред являются периодическими [26]. Поэтому изложенные в данной работе результаты можно использовать и при анализе изочастотных зависимостей пространственно-периодических сред в пределах периода (например, в первой зоне Бриллюэна) с последующим учетом периодичности изочастотной зависимости.

Ниже на основе анализа геометрических и математических свойств различных изочастотных зависимостей сформулированы законы геометрической оптики для анизотропных сред. Чтобы охватить большую часть материала, касающегося рассматриваемых вопросов, и сделать его доступным для более широкого круга читателей, изложение построено наглядно и кратко, с минимумом формул и уравнений. В то же время изложение является достаточно строгим, но не выходит за рамки геометрической оптики.

2. Магнитостатические волны — электромагнитные волны, распространяющиеся в магнитных пленках

Прежде всего, чтобы данная работа не казалась теоретической абстракцией, расскажем коротко о волнах, на примере которых, в основном, построен анализ изочастотных зависимостей.

Как известно, в тонких слоях магнитоупорядоченных сред, например в ферритах, могут эффективно возбуждаться и распространяться с малыми потерями электромагнитные волны, имеющие на СВЧ величину волнового числа k в пределах $10 - 10^4 \text{ см}^{-1}$ (или длину волны $5 \text{ мм} - 50 \text{ мкм}$), т.е. во много раз больше, чем в вакууме $k \gg k_0 \equiv \omega/c \sim 1 \text{ см}^{-1}$ [12, 14]. Поскольку для этих волн изменение обменной энергии незначительно в пределах длины волны, а их фазовая скорость намного меньше скорости света, то характеристики этих волн можно рассчитывать в магнитостатическом приближении, т.е. пренебречь, с одной стороны, влиянием обменного поля и, с другой стороны, членами $\sim \partial/\partial t$ в уравнениях Максвелла. Из-за использования магнитостатического

¹ В связи с тем, что термины "поверхность волновых векторов" и "изочастотная зависимость" отсутствуют в энциклопедиях и справочниках, краткое описание этих терминов приведено в разделе 4.

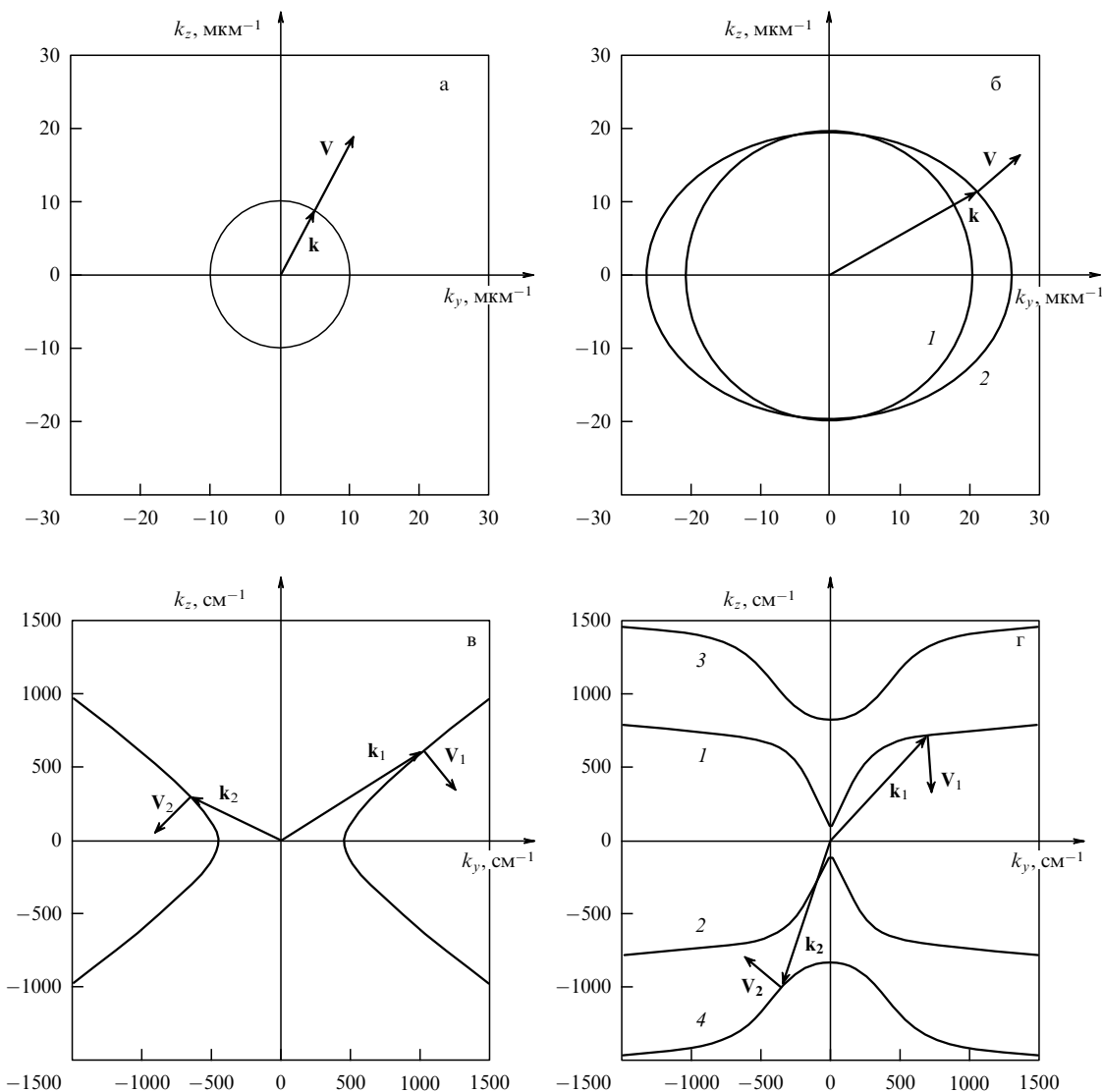


Рис. 1. Централно-симметричные изочастотные зависимости: (а) для красного света в вакууме ($\lambda = 0,6328$ мкм, $f = 4,7375 \times 10^{14}$ Гц); (б) для красного света в каломели (1 — для обыкновенной волны, $n_o = 1,96$, 2 — для необыкновенной волны, $n_e = 2,62$); (в, г) соответственно для поверхностной МСВ с $f = 2900$ МГц и для обратной объемной МСВ с $f = 2150$ МГц в свободной ферритовой пленке толщиной $d = 10$ мкм и $4\pi M_0 = 1750$ Гс при внешнем магнитном поле $H_0 = 300$ Э (1, 2 и 3, 4 — изочастотные кривые соответственно для первой и второй мод). Изображено несколько произвольных волновых векторов \mathbf{k} и соответствующих им векторов групповой скорости \mathbf{V} .

приближения эти волны в литературе стали называть магнитостатическими (МСВ) [17], а из-за пренебрежения обменной энергией их иногда называют также дипольными спиновыми волнами (хотя последнее название используется реже).

МСВ посвящено большое количество исследований (см. [12, 14] и имеющийся там список литературы), однако среди них относительно немного работ посвящено изучению неколлинеарных МСВ, при распространении которых в ферритовых пленках и возникают многие необычные физические эффекты.

В большинстве примеров, описываемых в данной работе, анализируется распространение, отражение или преломление МСВ в ферритовых пленках, пластинах или структурах на их основе. Отметим, что магнитные пленки, как двумерный объект исследования, имеют определенное преимущество перед объемными (трехмерными) анизотропными кристаллами: на плоской поверхности пленки можно легко расположить возбуж-

дающий и приемный преобразователи и, обеспечив им полную свободу перемещения и ориентации, исследовать направление распространения волны и ориентацию ее фазового фронта (в трехмерном кристалле это невозможно реализовать). Это позволило выполнить экспериментальные исследования для магнитных пленок в наиболее полном объеме по сравнению с другими анизотропными средами. Кроме того, для цели данной работы, посвященной анализу свойств изочастотных зависимостей, МСВ привлекательны не только разнообразием этих зависимостей (рис. 1, 2), но и отсутствием различий в поляризации волн, описываемых различными кривыми этих зависимостей, что существенно облегчает проведение анализа на примере МСВ.

Введем декартову систему координат, в которой плоскость yz параллельна плоскости пленки (или структуры), при этом плоскости yz будет соответствовать плоскость волновых чисел k_y, k_z . Однородное магнитное поле \mathbf{H}_0 , намагничивающее пленку (структуру) до насы-

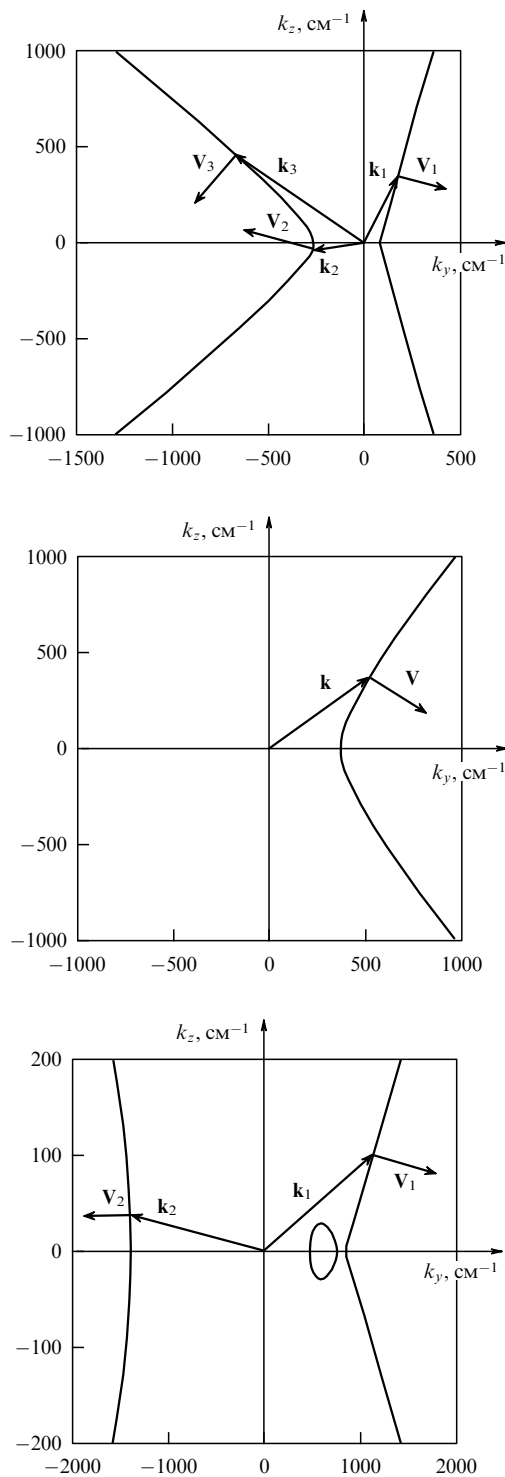


Рис. 2. Изочастотные зависимости, не являющиеся центрально-симметричными. Рассчитаны для поверхностной МСВ в структуре ФДМ при различных частотах f и расстоянии l между ферритовой пленкой и металлической плоскостью: (а) $f = 2800$ МГц, $l = 0$; (б) $f = 4200$ МГц, $l = 0$; (в) $f = 3236$ МГц, $l = 17$ мкм (параметры d , $4\pi M_0$ и H_0 такие же, как и на рис. 1). Изображено несколько произвольных волновых векторов \mathbf{k} и соответствующих им векторов групповой скорости \mathbf{V} (на нижнем рисунке масштаб по оси k_z выбран в 10 раз больше, чем по оси k_y , для более наглядного изображения овала; все векторы \mathbf{V} овала направлены внутрь).

щения, приложим вдоль оси z . Напомним, что ферритовая среда описывается тензором магнитной проницае-

мости $\vec{\mu}$ вида [14]

$$\vec{\mu} = \begin{vmatrix} \mu & iv & 0 \\ -iv & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (1)$$

где

$$\mu = 1 + \frac{\omega_M \omega_H}{\omega_H^2 - \omega^2}, \quad (2)$$

$$v = \frac{\omega_M \omega}{\omega_H^2 - \omega^2}, \quad (3)$$

$\omega_H = \gamma H_0$, $\omega_M = 4\pi\gamma M_0$, $\omega = 2\pi f$, γ — гиромагнитная постоянная, $4\pi M_0$ — намагниченность насыщения феррита, f — частота электромагнитной волны.

Исследования показали, что в свободной касательно намагниченной ферритовой пленке могут распространяться два типа МСВ, дисперсионное уравнение для которых можно найти в [12, 17]: поверхностная МСВ и обратная объемная МСВ, имеющие не только разный характер (прямой и обратный), но и различное распределение энергии по толщине пленки (экспоненциальное и тригонометрическое соответственно).

Отметим, что в ферритовой пластине кроме решения типа МСВ, существует еще другое решение, подобное ТН-волне (см., например, [27]). Поскольку ТН-волна взаимодействует с веществом через компоненту тензора магнитной проницаемости $\mu_{zz} = 1$, то для нее ферритовая пластина идентична обычному диэлектрику, не обладающему магнитными свойствами, а законы отражения и преломления тривиальны.

3. Предварительные замечания и определения

В последующем изложении, как и в геометрической оптике изотропных сред, используется понятие луча, под которым понимается линия, вдоль которой переносится энергия волны. Отметим, что поскольку волны в анизотропных средах имеют в общем случае неколлинеарный характер, то линия луча параллельна вектору групповой скорости \mathbf{V} , а волновой вектор \mathbf{k} будет отклонен от линии луча на некоторый угол χ .

Обобщая известные определения для прямой и обратной волн на случай анизотропных сред, будем называть прямой волну, для которой скалярное произведение векторов $\mathbf{V}\mathbf{k} > 0$, а обратной — волну, для которой скалярное произведение $\mathbf{V}\mathbf{k} < 0$. В случае $\mathbf{V}\mathbf{k} = 0$, который возможен лишь теоретически, волна не является распространяющейся и имеет $|\mathbf{V}| = V = 0$. Данные определения применимы для определения характера волны в любой среде², если потери малы.

Кроме того, будем называть осью коллинеарного распространения (или просто коллинеарной осью) для определенной волны направление, в котором векторы \mathbf{V} и \mathbf{k} коллинеарны.

² Отметим, что указанные определения еще не вошли в справочники и энциклопедии. Например, в [28, с. 384] отмечается, что "в анизотропной среде понятия прямой и обратной волн строго применимы лишь к вполне определенным направлениям, связанным с главными осями тензоров восприимчивости или деформации".

4. Изочастотные поверхности и зависимости — характеристики, определяющие распространение, отражение и преломление волн

В связи с тем, что термины "изочастотная поверхность" и "изочастотная зависимость" не являются общепринятыми, опишем кратко, что они означают.

Поскольку при отражении и преломлении волн выполняется закон сохранения импульса (требующий сохранения на границах тангенциальной компоненты волнового вектора \mathbf{k}), для анализа отражения и преломления определенной волны в пространстве волновых чисел $\Sigma_k = \{0; k_x, k_y, k_z\}$ удобно использовать ее *изочастотную поверхность*, описываемую непосредственно дисперсионным уравнением анизотропной среды при фиксированном значении частоты ω . При этом групповую скорость волны \mathbf{V} в анизотропной среде находят как градиент частоты в пространстве волновых векторов [12, 29]

$$\mathbf{V} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} = \text{grad}_{\mathbf{k}} \omega, \quad \text{или} \quad \mathbf{V} = x_0 \frac{\partial \omega}{\partial k_x} + y_0 \frac{\partial \omega}{\partial k_y} + z_0 \frac{\partial \omega}{\partial k_z}. \quad (4)$$

Поэтому вектор групповой скорости \mathbf{V} всегда направлен по нормали к изочастотной поверхности.

Как известно, для распространяющейся в изотропной среде электромагнитной волны с фиксированной частотой ω изочастотная поверхность (или поверхность волновых векторов) представляет собой сферу. В этом случае волновой вектор \mathbf{k} и вектор групповой скорости \mathbf{V} , определяющий направление луча, всегда параллельны друг другу. Но для анизотропных сред изочастотная поверхность не является сферической и векторы \mathbf{V} и \mathbf{k} оказываются не параллельными.

По аналогии с трехмерной средой для анализа распространения, отражения и преломления определенной волны в двумерных структурах используют ее *изочастотную зависимость*, которую можно рассматривать как сечение дисперсионной поверхности $\omega(k_y, k_z)$ в пространстве переменных $\{ \omega, k_y, k_z \}$ плоскостью, соответствующей постоянному значению частоты. Для волны с известным характером (прямым или обратным) изочастотная зависимость описывает взаимно однозначное соответствие между волновым вектором \mathbf{k} , проведенным в данную точку этой зависимости, и направлением, вдоль которого ориентирован вектор групповой скорости \mathbf{V} (и которое перпендикулярно изочастотной зависимости в данной точке). Если характер волны неизвестен, то следует установить его, вычислив направление вектора \mathbf{V} по формуле (4).

Изочастотные зависимости удобно использовать также для анализа отражения и преломления волн в трехмерных анизотропных средах, рассматривая эти зависимости для каждой среды как сечения изочастотных поверхностей плоскостью падения (поскольку в плоскости падения лежат волновые векторы падающей, отраженной и преломленной волн).

Очевидно, что для изотропных сред изочастотные зависимости представляют собой окружности (рис. 1а). В одноосных оптических кристаллах изочастотная поверхность состоит из двух поверхностей — сферы и эллипсоида, первая из которых описывает обыкновенную волну, у которой (как у волны в изотропной среде) векторы \mathbf{k} и \mathbf{V} всегда параллельны, а вторая — необыкновенную волну, у которой векторы \mathbf{k} и \mathbf{V} в общем случае не параллельны. Соответственно, изочастотная зависимость одноосных кристаллов состоит из окружности и эллипса (рис. 1б). В двуосных оптических кристаллах, где изочастотная поверхность представляет собой самопересекающуюся поверхность четвертого порядка, изочастотная зависимость состоит из окружности и овала, которые в некоторых сечениях изочастотной поверхности пересекаются [4, с. 747, рис. 14.8]. Изочастотная зависимость для акустической волны в кристаллах, относящихся к тетрагональной сингонии (парателлулите, рутиле, титанате бария, бромиде ртути и др.), похожа на укороченную эпициклоиду или гипоциклоиду⁴ [8, 15, 16]. В касательно намагниченной⁵ до насыщения свободной ферритовой пленке изочастотная зависимость поверхностной МСВ подобна гиперболе⁶ (рис. 1в).

Анализ изочастотных зависимостей наиболее плодотворен при исследовании двумерных геометрий, в особенности при решении таких задач, в которых интересуются лишь ориентациями векторов \mathbf{k} и \mathbf{V} падающей, отраженной и преломленной волн и не интересуются амплитудами отраженного и преломленного лучей. Использование изочастотной зависимости при анализе двумерных геометрий имеет простой физический смысл: поскольку эта зависимость описывает все возможные волны с данной частотой ω и различными волновыми векторами, то для нахождения направлений отраженного или преломленного луча остается найти на изочастотных зависимостях сред *точки*, которые удовлетворяют закону сохранения импульса при известной ориентации границы и заданном угле падения волны. Из этого следует, что *отражение и преломление волн в каждой конкретной среде будет полностью определяться такими геометрическими характеристиками изочастотных зависимостей, как наличие и количество асимптот, осей симметрии, точек перегиба, наличие центральной симметрии, однозначность или многозначность зависимости*.

В связи с этим изочастотные зависимости использовали прежде всего при исследовании распространения волн в двумерных структурах (см., например, [31, с. 209, фиг. 92а] и [32]), причем для анализа волновых процессов в магнитоупорядоченных средах впервые их, по-види-

⁴ Общий вид и описание эпициклоид и гипоциклоид можно найти в [30, с. 127, 128].

⁵ Отметим, что решение типа МСВ существует и в нормально намагниченной ферритовой пластине, но в этом случае изочастотные зависимости МСВ представляют собой окружности и, следовательно, для этих МСВ останутся справедливыми законы геометрической оптики изотропных сред.

⁶ Изочастотная зависимость поверхностной МСВ состоит из двух кривых, которые, строго говоря, не являются гиперболами, а представляют собой более сложные кривые, для обозначения которых не существует специального термина. Поэтому можно говорить лишь о кривых, похожих или подобных гиперболе.

³ В рассматриваемых далее двумерных геометриях координата x перпендикулярна плоскости структуры, а волна распространяется в плоскости yz .

тому, применили в [33, 34], а для анализа распространения МСВ в магнитных пленках — в [35, 36].

Отметим, что хотя в данной работе используется термин "изочастотная зависимость" (поверхность, кривая), в других работах для обозначения изочастотной зависимости можно встретить такие термины, как "изочастота" [22, 26, 32, 37], "сечение изонергетической поверхности" [34], "эквизотная линия" [12]. При исследовании распространения света в анизотропных оптических кристаллах, электромагнитных волн в плазме и при описании акустических волн в кристаллах часто используется термин "поверхность волнового вектора" [7–9, 11, 29, 38]. В первом и во втором случаях поверхность волнового вектора обычно изображают в координатных осях волновых чисел, нормированных на величину волнового числа электромагнитной волны в вакууме, — k_x/k_0 , k_y/k_0 и k_z/k_0 (т.е. оси обозначают показатели преломления волны вдоль соответствующих осей декартовой системы координат). Для акустических волн поверхность волнового вектора называют еще поверхностью акустической медленности и изображают в координатных осях $1/V_x^{\text{ph}}$, $1/V_y^{\text{ph}}$ и $1/V_z^{\text{ph}}$. Поскольку в акустических кристаллах дисперсия линейна, то в каждом конкретном направлении фазовая скорость волны V^{ph} одинакова по величине для всех частот, и поверхность, построенная в координатных осях k_x/ω , k_y/ω и k_z/ω , по существу, является характеристикой определенного анизотропного акустического кристалла. В средах, характеризующихся частотной дисперсией (например, в ферритовых пленках) удобнее использовать зависимости (поверхности), построенные в координатных осях волновых чисел. Однако независимо от способа нормировки очевидно, что изочастотная зависимость, сечение поверхности волновых векторов, сечение поверхности медленности и другие аналогичные характеристики имеют один и тот же физический смысл, изложенный выше.

5. Типы двумерных геометрий

Поскольку цель данной работы состоит в том, чтобы описать и сравнить законы геометрической оптики в различных анизотропных средах и структурах, отличающихся геометрическими характеристиками изочастотных зависимостей, то можно ограничиться анализом двумерных геометрий.

Двумерными геометриями будем называть различные двумерные плоскопараллельные структуры и те частные случаи геометрий трехмерных анизотропных сред, где в каждой из сред плоскость падения совпадает с одной из плоскостей симметрии изочастотной поверхности среды. В этих случаях все волновые векторы \mathbf{k} и все векторы групповой скорости \mathbf{V} , соответствующие изочастотной зависимости, лежат в одной плоскости — плоскости падения (как и в случае двумерных структур). Таким образом, весь анализ двумерных геометрий проводится в плоскости падения, что значительно облегчает и делает более наглядным исследование законов отражения и преломления волн.

Среди двумерных геометрий особое значение имеют двумерные плоскопараллельные структуры, поскольку их нельзя рассматривать как частный случай трехмерных геометрий. Так, если двумерная структура является несимметричной (например, ферритовая пластина, одна из поверхностей которой металлизирована), то обычно

ей соответствует изочастотная зависимость, которая не является центрально-симметричной (см. рис. 2), что приводит к необычным законам распространения, отражения и преломления волн.

6. Законы распространения волн

6.1. Прямолинейное распространение волны

В однородной анизотропной среде, как и в однородной изотропной среде, волна распространяется из одной точки в другую прямолинейно, т.е. луч представляет собой прямую линию. Для изотропной среды с известным показателем преломления эта формулировка полностью определяет параметры волны и направление ее распространения. В анизотропной среде этого закона недостаточно, так как волны, распространяющиеся в разных направлениях, обладают разными параметрами. Кроме того, в анизотропной среде могут существовать направления, вдоль которых волны вообще не могут распространяться или же параметры волны существенно различаются при ее распространении в прямом и в обратном направлении. Для описания перечисленных явлений необходимо сформулировать новые законы или правила. Очевидно, что при описании этих законов в анизотропной среде удобно ввести систему отсчета, связанную с одной из осей симметрии изочастотной зависимости⁷.

6.2. Правило ориентации волнового вектора

Для различных направлений распространения луча ψ угол наклона волнового вектора \mathbf{k} по отношению к линии луча определяется выражением

$$\chi = \varphi - \psi, \quad (5)$$

где φ и ψ — углы наклона соответственно волнового вектора \mathbf{k} и вектора групповой скорости \mathbf{V} к выбранной оси отсчета⁸. Очевидно, что если значения χ будут лежать в пределах $-90^\circ < \chi < 90^\circ$, то волна имеет прямой

⁷ При выводе дисперсионного уравнения во всех анизотропных средах и структурах используется система координат, связанная с осями симметрии изочастотной зависимости (поверхности). При этом угол φ , определяющий ориентацию волнового вектора \mathbf{k} относительно выбранной оси симметрии, как правило, входит непосредственно в дисперсионное уравнение, записанное в полярной системе координат (см., например, уравнения для МСВ в свободной пленке [12, с. 76, уравнение (4.14)] и в различных структурах [39]). Не всегда каждая ось симметрии изочастотной зависимости соответствует оси коллинеарного распространения волны (как, например, ось k_z на рис. 1в или ось k_y на рис. 1г). Ниже при описании распространения МСВ во всех структурах в качестве оси отсчета углов использована ось k_y , а при описании распространения света в кристалле каломели — оптическая ось k_z .

⁸ Здесь и далее углы φ и ψ будем отсчитывать от выбранной оси симметрии таким образом, чтобы их величины лежали в пределах от -180° до $+180^\circ$, причем направление отсчета углов против часовой стрелки примем за положительное. Однако следует иметь в виду, что иногда при выполнении простых арифметических действий результирующие углы могут лежать вне указанных пределов. В таких случаях к полученному результату следует добавить или вычесть 360° . Например, вычисляя угол χ между векторами \mathbf{V}_2 и \mathbf{k}_2 на рис. 1в по формуле (5), получим $\chi_2 = \varphi_2 - \psi_2 = 154^\circ - (-135^\circ) = 289^\circ = 289^\circ - 360^\circ = -71^\circ$. Очевидно, что вычисленные углы χ следует отсчитывать от вектора \mathbf{V} к вектору \mathbf{k} (как показано далее на рис. 4).

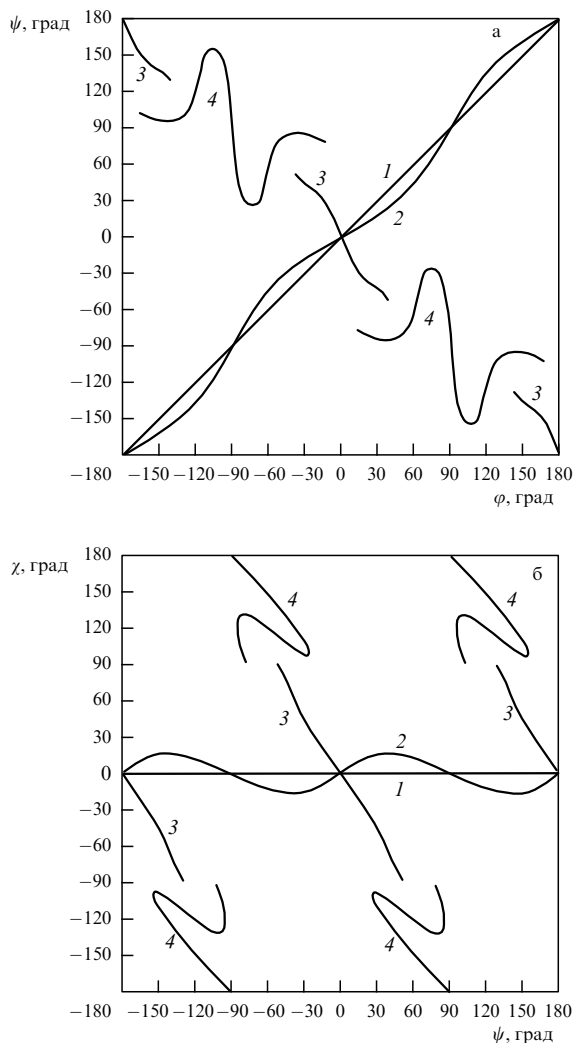


Рис. 3. Зависимость $\psi(\varphi)$ направления вектора групповой скорости \mathbf{V} от наклона волнового вектора \mathbf{k} к оси y (а) и зависимость $\chi(\psi)$ угла наклона вектора \mathbf{k} к линии луча от направления луча ψ (б) для изочастотных зависимостей, приведенных на рис. 1: 1 и 2 — для обыкновенной и необыкновенной волн красного света в каломели, 3 и 4 — для поверхностной и для первой моды обратной объемной МСВ в ферритовой пленке (в качестве оси отсчета углов φ и ψ на рис. 1 для кристалла каломели использована оптическая ось k_z , а для ферритовой пленки — перпендикулярная магнитному полю \mathbf{H}_0 ось k_y).

характер, а если в пределах $90^\circ < |\chi| \leq 180^\circ$ — обратный характер.

При анализе распространения волн в анизотропных средах зависимости $\psi(\varphi)$ и $\chi(\psi)$ имеют важное значение (рис. 3). Зависимость $\psi(\varphi)$ обычно измеряют в экспериментах: например, при исследовании МСВ возбуждение волны производится путем определенной ориентации входного преобразователя относительно выбранной оси, т.е. задается угол φ , а измеряется направление распространения луча ψ . Из зависимости $\psi(\varphi)$ по формуле (5) легко получить зависимость $\chi(\psi)$, описывающую наклон вектора \mathbf{k} к линии луча при различных направлениях луча. Как видно из рис. 3б, в средах с эллиптической изочастотной зависимостью величина χ никогда не превышает некоторого максимального значения χ_{\max} (для каломели, описываемой кривой 2 на рис. 3б, $\chi_{\max} \approx 16,4^\circ$), тогда как в средах, у которых изочастотная зависимость похожа на гиперболу, величина χ может

принимать все возможные значения, т.е. для прямой волны изменяется в пределах $0 \leq |\chi| < 90^\circ$ (рис. 3б, кривая 3), а для обратной волны — в пределах $90^\circ < |\chi| \leq 180^\circ$ (рис. 3б, кривая 4).

Отметим, что нередко в анизотропных средах в одном и том же направлении могут распространяться несколько лучей с различными волновыми векторами. Например, как видно на рис. 3б, в каломели в направлении $\psi = 30^\circ$ могут распространяться луч обыкновенной волны с $\chi = 0$ (описываемый прямой 1) и луч необыкновенной волны с $\chi = 15,9^\circ$ (описываемый кривой 2), причем оба луча будут отличаться еще и поляризацией. В ферритовой пленке в направлении $\psi = 80^\circ$ могут распространяться три луча первой моды обратной объемной МСВ, характеризующиеся наклоном волнового вектора к линии луча $\chi = -97^\circ$, $\chi = -131^\circ$ и $\chi = -169^\circ$ (рис. 3б, кривая 4).

6.3. Возможные направления распространения волны

Как видно на рис. 1 и 2, изочастотная зависимость анизотропной среды или структуры может состоять из одной, двух, трех или даже бесконечного количества кривых (если в структуре возбуждается не одна, а несколько или множество мод), причем иногда эта зависимость представляет собой семейство однотипных кривых (рис. 1г), а иногда состоит из кривых разных типов (рис. 2в). Поскольку разные типы кривых обладают различными геометрическими свойствами, то для определения возможных направлений распространения волны в среде необходимо проанализировать свойства всех кривых. Однако иногда наличие или отсутствие в изочастотной зависимости какого-то конкретного типа кривых определяет свойства среды в целом.

Правило 1. Если хоть одна кривая изочастотной зависимости представляет собой замкнутую линию, то волна может распространяться в плоскости изочастотной зависимости в любом направлении, за исключением, может быть, некоторых конкретных направлений.

Примерами замкнутых кривых являются окружность, эллипс, различные овалы и другие, более сложные кривые (такие, например, которые описывают изочастотные зависимости акустических волн в кристаллах парателлурита, рутила и др. [8, 15, 16]). Следует отметить, что возможны два случая расположения замкнутой изочастотной кривой, когда точка 0 плоскости $k_y k_z$ находится либо вне, либо внутри области, ограниченной этой кривой. В первом случае (см., например, овал на рис. 2в) для вектора \mathbf{V} возможны любые ориентации, но вектор \mathbf{k} может быть ориентирован только в некотором секторе углов, ограниченном касательными к данной изочастотной кривой, причем в направлениях, соответствующих точкам касания (где векторы \mathbf{V} и \mathbf{k} перпендикулярны друг другу), волна распространяться не может⁹. Во втором случае как для вектора групповой скорости \mathbf{V} , так и для волнового вектора \mathbf{k} возможны любые ориентации (рис. 1а, б) и волна может распространяться в плоскости в любых направлениях¹⁰.

⁹ Следует иметь в виду, что если изочастотная зависимость включает еще и другие кривые, то в этих направлениях могут распространяться волны с другими волновыми векторами.

¹⁰ Если изочастотная кривая достаточно сложная и имеет точки, в которых векторы \mathbf{V} и \mathbf{k} перпендикулярны друг другу, то в направлениях векторов \mathbf{V} , описываемых этими точками, волна распространяться не сможет.

Правило 2. Если все кривые изочастотной зависимости похожи на гиперболы и имеют асимптоты, то в плоскости изочастотной зависимости, как правило, существует сектор углов, в котором волна не может распространяться.

Рассмотрим случай (рис. 1в), когда изочастотная зависимость представляет собой две одинаковые подобные гиперболом кривые, не имеющие точек перегиба (в которых вторая производная равна нулю). Если асимптоты кривых направлены под углами $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ и φ_4 (на рис. 1в $\varphi_1 = 34^\circ, \varphi_2 = 146^\circ, \varphi_3 = -146^\circ$ и $\varphi_4 = -34^\circ$), то возможные направления волнового вектора \mathbf{k} будут лежать в интервале углов $\varphi_4 < \varphi < \varphi_1$ и в симметричном (относительно оси k_z) интервале углов $\varphi_2 < |\varphi| \leq 180^\circ$, а возможные направления распространения луча ψ — в пределах $\varphi_1 - 90^\circ < \psi < \varphi_4 + 90^\circ$ и в пределах симметричного интервала углов. Значения углов

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \varphi_1 - 90^\circ, & \psi_2 &= \varphi_2 + 90^\circ, \\ \psi_3 &= \varphi_3 - 90^\circ & \text{и} & \psi_4 = \varphi_4 + 90^\circ \end{aligned} \quad (6)$$

принято называть углами отсечки¹¹. Они соответствуют предельным направлениям луча, для которых угол между векторами \mathbf{k} и \mathbf{V} $|\chi| \rightarrow 90^\circ$ (формулы (6) можно получить также из (5), полагая $\chi = \pm 90^\circ$). Соответственно в секторах углов $\psi_2 < \psi < \psi_1$ и $\psi_4 < \psi < \psi_3$ энергия волны распространяться не может (на рис. 1в — это секторы $-124^\circ < \psi < -56^\circ$ и $56^\circ < \psi < 124^\circ$).

В случае, когда изочастотная зависимость имеет точки перегиба (кривые на рис. 1г и правая кривая на рис. 2а), значения углов, ограничивающие возможные направления распространения луча, будут определять не соответствующие углы отсечки $\psi_1 - \psi_4$, а значения угла ψ в точках перегиба. Например, хотя для кривых 1 и 2 на рис. 1г асимптоты направлены под углами $\varphi_1 = 14^\circ, \varphi_2 = 166^\circ, \varphi_3 = -166^\circ$ и $\varphi_4 = -14^\circ$, а соответствующие углы отсечки равны $\psi_1 = -76^\circ, \psi_2 = -104^\circ, \psi_3 = 104^\circ$ и $\psi_4 = 76^\circ$, энергия волны может распространяться в более широком секторе углов $-154^\circ < \psi < -26^\circ$ и $26^\circ < \psi < 154^\circ$ (а не при $-104^\circ < \psi < -76^\circ$ и $76^\circ < \psi < 104^\circ$) за счет того, что значения углов ψ в точках перегиба сильно отличаются от значений углов отсечки (ср. максимальные и конечные значения ψ на кривых 4 рис. 3а). Таким образом, наличие точек перегиба всегда приводит к существенному увеличению сектора возможных направлений луча и к существенному уменьшению сектора направлений, в которых распространение луча невозможно. Иногда сектор углов, в котором распространение луча невозможно, может полностью исчезнуть (что имело бы место для случая сложной гиперболоподобной кривой: например, если бы на рис. 2в овал касался соседней кривой так, что имелся бы узкий "выход" из внутренней области овала).

Отметим, что если изочастотная зависимость будет похожа на сопряженные гиперболы¹², то в такой среде будут существовать лишь отдельные направления (определяемые углами отсечки (6)), в которых волна не распространяется.

6.4. Невзаимное и однонаправленное распространение волны

Правило 1 (о невзаимном распространении волны). Если изочастотная зависимость среды не является центрально-симметричной фигурой, то возникает невзаимное распространение волн, когда параметры волны, распространяющейся в прямом и в обратном направлении, отличаются.

Действительно, если изочастотная зависимость не является центрально-симметричной и если на ней найти две точки, которым соответствуют два противоположно направленных вектора групповой скорости \mathbf{V}_1 и \mathbf{V}_2 (рис. 2а), то два луча, характеризующиеся этими векторами \mathbf{V}_1 и \mathbf{V}_2 , будут иметь разные длины волны, значение угла χ и величину групповой скорости, поскольку $k_1 \neq k_2, \chi_1 \neq \chi_2$ и $V_1 \neq V_2$ (рис. 4). Более того, может оказаться так, что для данного вектора групповой скорости \mathbf{V} (например, для вектора \mathbf{V}_3 на рис. 2а) не существует противоположно направленного вектора групповой скорости! Условия, при которых возникает такая необычная ситуация, обсуждаются ниже.

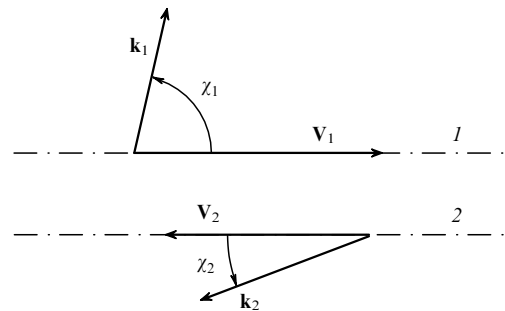


Рис. 4. Пример ориентации векторов \mathbf{V} и \mathbf{k} при невзаимном распространении волны: 1, 2 — линии противоположно направленных лучей (изображены лучи, описываемые векторами $\mathbf{V}_1, \mathbf{k}_1$ и $\mathbf{V}_2, \mathbf{k}_2$ на рис. 2а).

Если же изочастотная зависимость — центрально-симметричная (рис. 1а–г), то векторы групповой скорости, соответствующие двум любым противоположно направленным волновым векторам, также направлены противоположно и равны по величине. Следовательно, любые два луча, распространяющиеся в противоположных направлениях, имеют одинаковые параметры (длину волны λ , значение угла χ , величину групповой скорости V). В случае многомодовой волны изочастотная зависимость состоит из бесконечного количества кривых (рис. 1г) и как в прямом, так и в обратном направлении может распространяться бесконечное количество лучей с разными волновыми векторами, но каждой паре центрально-симметричных кривых будут соответствовать противоположно направленные лучи с одинаковыми параметрами.

Однако следует отметить, что в некоторых двумерных структурах противоположно направленные лучи, имеющие одинаковые параметры λ, χ, V , все же могут отличаться. Например, расчеты и эксперименты, выполненные для поверхностной МСВ в свободной ферритовой пленке (изочастотная зависимость приведена на рис. 1в), показали [12, 17], что у двух лучей, распространяющихся в противоположных направлениях, энергия волны локализована вблизи противоположных поверх-

¹¹ Часто углы $\psi_1 - \psi_4$ называют углами отсечки групповой скорости \mathbf{V} , а углы $\varphi_1 - \varphi_4$ — углами отсечки волнового вектора \mathbf{k} .

¹² О сопряженных гиперболах см. [30, с. 203].

ностей пленки. Поэтому при возбуждении поверхностной МСВ со стороны одной из поверхностей пленки луч, локализованный вблизи этой поверхности, возбуждается намного эффективнее, чем луч, локализованный вблизи противоположной поверхности и распространяющийся в противоположном направлении. Это явление также обычно называют невзаимным распространением волны. Позже было установлено, что противоположно направленные лучи неколлинеарной обратной объемной МСВ в свободной пленке также характеризуются несимметричным распределением энергии по толщине пленки и невзаимным распространением волны [25]. Таким образом, в некоторых двумерных структурах¹³ противоположно направленные лучи с одинаковыми параметрами λ , χ , V могут отличаться распределением энергии волны по толщине структуры.

Правило 2 (об однонаправленном распространении волны). *Если изочастотная зависимость среды состоит из одной кривой, подобной гиперболы, не имеет точек перегиба и целиком расположена либо в положительной, либо в отрицательной полуплоскости волнового числа k_y (или k_z), то все возможные лучи, описываемые этой зависимостью, являются однонаправленными, т.е. ни для одного из них не существует луча, распространяющегося в противоположном направлении.*

Описанная выше изочастотная зависимость характерна для МСВ в ферритовой пластине, одна из поверхностей которой металлизирована, в части частотного диапазона волны $\omega_H + 0,5\omega_M < \omega < \omega_H + \omega_M$ (рис. 2б). Кроме того, подобная изочастотная зависимость возникает в структурах ферритовая пластина – "магнитная стенка" [40] и "магнитная стенка" – ферритовая пластина – металл [39], причем в этих структурах однонаправленное распространение возникает в более широком интервале частот. Как показал анализ свойств металлизированной ферритовой пластины, с уменьшением частоты углы между асимптотами изочастотной кривой и осью k_y становятся все больше, а сектор углов ψ , в котором возможно распространение волны, сужается. Однако в металлизированной ферритовой пластине при уменьшении частоты ω ниже значения $\omega_H + 0,5\omega_M$ однонаправленное распространение исчезает (появляется еще изочастотная кривая в левой полуплоскости, как на рис. 2а), тогда как в структуре "магнитная стенка" – ферритовая пластина – металл и при дальнейшем уменьшении частоты остается всего одна изочастотная кривая, которая стремится к прямой линии, совпадающей с осью k_z , при $\omega \rightarrow \sqrt{\omega_H(\omega_H + \omega_M)}$. При частотах, лежащих немного выше указанного значения, изочастотная зависимость последней структуры практически не отличается от прямой линии и распространение волны оказывается возможным вблизи одного единственного направления — в положительном направлении оси y [39].

Отметим, что в некоторых структурах с несимметричной изочастотной зависимостью однонаправленное распространение волны может иметь место для определенного интервала направлений вектора групповой скорости \mathbf{V} , даже если изочастотная зависимость не расположена в одной полуплоскости. Так, как видно из

рис. 2а, для векторов \mathbf{V} , соответствующих дальним участкам левой изочастотной кривой (например, для вектора \mathbf{V}_3), нельзя найти противоположно направленных векторов \mathbf{V} ни для одной точки изочастотной зависимости.

Отметим, что с физической точки зрения явление однонаправленности следует понимать как невозможность распространения в противоположных направлениях волн *данного* типа (в рассматриваемых случаях — МСВ), а не любых волн в данной среде вообще. Действительно, только для МСВ (иначе говоря, только для волн с величинами волновых чисел k в пределах $10-10^4 \text{ см}^{-1}$) изочастотная зависимость похожа на гиперболу, предельную, например, на рис. 2б. Однако вблизи асимптот изочастотной зависимости МСВ (где значения k не лежат в указанных пределах, так как $k \rightarrow \infty$) уже при $k \sim 10^5 \text{ см}^{-1}$ при расчете дисперсионных зависимостей необходимо будет учитывать обменное взаимодействие, т.е. изочастотная зависимость начнет отходить от асимптот, переходя в изочастотную зависимость обменных спиновых волн¹⁴. Кроме того, следует помнить, что кроме МСВ в ферритовых пластинках может возбуждаться и волна ТН-типа с $k \sim k_0 \sim 1 \text{ см}^{-1}$ (см. раздел 2 и [27]).

7. Основные соотношения при исследовании отражения и преломления волн

При отражении и преломлении электромагнитных волн сохраняется тангенциальная компонента импульса волны. Выясним, какие особенности и отличия возникают при применении этого общего закона к волнам в изотропных и анизотропных средах.

На рисунках 5 и 6 в плоскости волновых чисел и в реальной плоскости приведены геометрии отражения и преломления электромагнитной волны соответственно в изотропной и в анизотропной средах. На рисунке 5 показано отражение и преломление красного света, падающего из вакуума на поверхность стекла с показателем преломления $n = 1,5$, а на рис. 6 — отражение и преломление поверхностной МСВ, распространяющейся из свободной ферритовой пленки в структуру феррит – диэлектрик – металл (ФДМ). Структура ФДМ [20–23, 41–47], представляющая собой ферритовую пленку, над одной из поверхностей которой на некотором расстоянии l расположена металлическая плоскость, имеет несимметричную изочастотную зависимость [47], что позволяет на ее примере рассмотреть большинство особенностей отражения и преломления волн в анизотропных средах.

Используем для описания волн в анизотропных средах традиционную, связанную с общей осью симметрии систему координат $\Sigma = \{0; y, z\}$ и соответствующую ей в плоскости волновых чисел систему координат

¹⁴ Если бы на гиперболу оказалась похожа изочастотная зависимость какой-нибудь другой анизотропной среды, в которой обменное взаимодействие несущественно, то вблизи асимптот (где $k \rightarrow \infty$) вскоре перестало бы выполняться приближение сплошной среды (как только величина k стала бы сравнима с расстоянием между молекулами) и асимптотический характер изочастотной зависимости опять бы исчез. Таким образом, в реальной среде изочастотная зависимость может быть похожа на гиперболу лишь условно — в некотором (иногда достаточно большом) интервале значений k .

¹³ Независимо от того, является изочастотная зависимость структуры центрально-симметричной или нет.

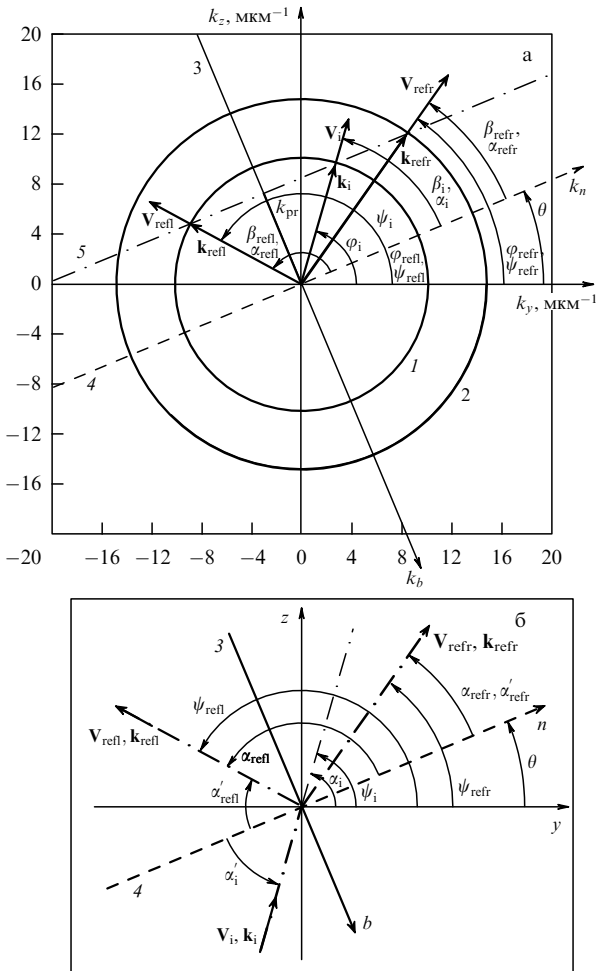


Рис. 5. Геометрия отражения и преломления красного света с $f = 4,7375 \times 10^{14}$ Гц в плоскости волновых чисел k_y, k_z (а) и в плоскости падения yz (б) (пояснение к сохранению тангенциальной компоненты импульса): 1 — изочастотная зависимость в вакууме, 2 — изочастотная зависимость в стекле, 3 — граница раздела, 4 — нормаль к границе, 5 — проектирующая прямая.

$\Sigma_k = \{0; k_y, k_z\}$. Чтобы полнее продемонстрировать аналогию при описании отражения и преломления волн в изотропных и в анизотропных средах, введем и в изотропной среде аналогичные системы координат Σ и Σ_k .

Пусть в каждой из сред нормаль \mathbf{n} к плоской границе (поверхности) раздела составляет угол θ с осью y . Пусть падающая волна описывается волновым вектором \mathbf{k}_i , ориентированным под углом φ_i к оси k_y . Проводя через конец вектора \mathbf{k}_i прямую, параллельную нормали, и находя точки пересечения этой прямой с изочастотными зависимостями сред, можно определить, какими должны быть в рамках закона сохранения импульса волновые векторы отраженной и преломленной волн \mathbf{k}_{refl} и \mathbf{k}_{refr} и соответствующие им углы φ_{refl} и φ_{refr} относительно оси k_y (см. рис. 5 и 6).

При описании отражения и преломления в изотропных средах обычно используют систему координат $\Sigma' = \{0; b, n\}$, в которой ось абсцисс b связана с границей раздела, а ось ординат n — с нормалью к этой границе. Введем дополнительно как для изотропной, так и для анизотропной сред систему координат Σ' и соответствующую ей в плоскости волновых чисел систему координат

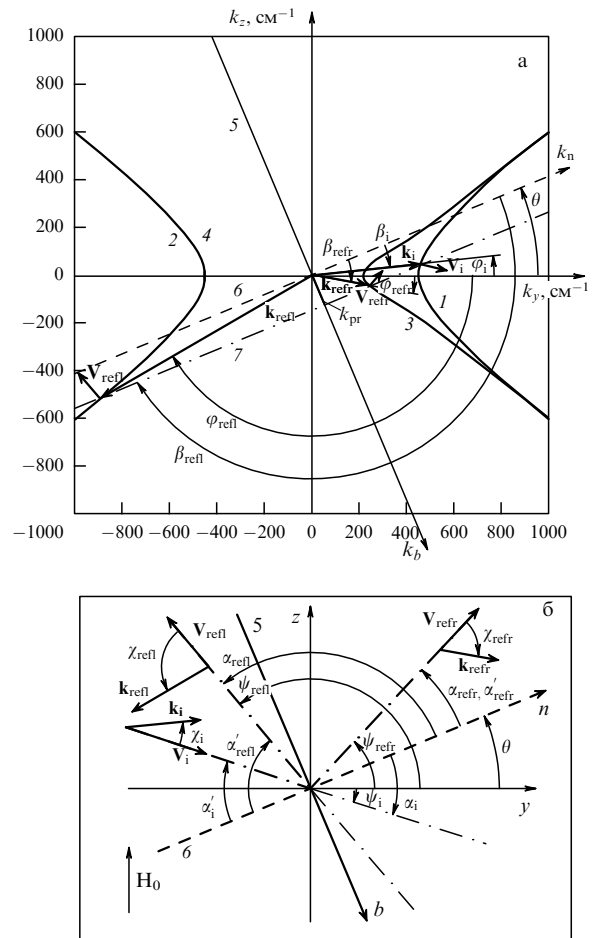


Рис. 6. Геометрия отражения и преломления поверхностной МСВ с $f = 2900$ МГц в плоскости волновых чисел k_y, k_z (а) и в плоскости ферритовой пленки yz (б) (пояснение к сохранению тангенциальной компоненты импульса): 1, 2 — изочастотные кривые поверхностной МСВ в свободной ферритовой пленке, 3, 4 — изочастотные кривые поверхностной МСВ в структуре ФДМ при расстоянии между ферритом и металлом 30 мкм, 5 — граница раздела, 6 — нормаль к границе, 7 — проектирующая прямая.

нат $\Sigma'_k = \{0; k_b, k_n\}$, причем начало координат системы Σ'_k совместим с началом системы координат $\Sigma_k = \{0; k_y, k_z\}$. Положительное направление осей n и k_n удобно выбрать так, чтобы единичные векторы \mathbf{n}_0 и \mathbf{k}_{n0} были направлены на границу, а для осей b и k_b выберем положительное направление так, чтобы оси абсцисс b и k_b вместе с осями ординат n и k_n составляли правую систему координат.

Углы в системах координат Σ , Σ_k и Σ' , Σ'_k будем отсчитывать так, чтобы они лежали в пределах от -180° до 180° , причем отсчет углов будем производить соответственно от оси y (или k_y) и от нормали n (или k_n), считая положительным направление против часовой стрелки.

Как будет видно из последующего изложения, одновременное использование систем координат Σ , Σ_k и Σ' , Σ'_k оказывается удобным и позволяет установить ряд особенностей отражения и преломления волн.

Из прямоугольных треугольников, в которых векторы \mathbf{k}_i , \mathbf{k}_{refl} и \mathbf{k}_{refr} являются гипотенузами, легко определить, что как для изотропной, так и для анизотропной сред проекция k_{pr} вектора \mathbf{k}_i на границу раздела

равна¹⁵

$$k_{pr} = k_i \sin \beta_i = k_i \sin (\varphi_i - \theta), \quad (7)$$

проекция k_{pr} вектора \mathbf{k}_{refl} на границу раздела

$$k_{pr} = k_{refl} \sin \beta'_{refl} = k_{refl} \sin \beta_{refl} = k_{refl} \sin (\varphi_{refl} - \theta), \quad (8)$$

и проекция k_{pr} вектора \mathbf{k}_{refr} на границу

$$k_{pr} = k_{refr} \sin \beta_{refr} = k_{refr} \sin (\varphi_{refr} - \theta). \quad (9)$$

Приравнивая выражения (7) и (8) в соответствии с законом сохранения импульса, имеем

$$\frac{k_i}{k_{refl}} = \frac{\sin \beta_{refl}}{\sin \beta_i} \quad \text{или} \quad \frac{k_i}{k_{refl}} = \frac{\sin (\varphi_{refl} - \theta)}{\sin (\varphi_i - \theta)}, \quad (10)$$

а приравнивая выражения (8) и (9), получаем

$$\frac{k_i}{k_{refr}} = \frac{\sin \beta_{refr}}{\sin \beta_i} \quad \text{или} \quad \frac{k_i}{k_{refr}} = \frac{\sin (\varphi_{refr} - \theta)}{\sin (\varphi_i - \theta)}. \quad (11)$$

В выражениях (7)–(11) через β_i , β_{refl} и β_{refr} обозначены углы между соответствующими волновыми векторами \mathbf{k}_i , \mathbf{k}_{refl} и \mathbf{k}_{refr} и единичным вектором \mathbf{k}_{n0} (или \mathbf{n}_0). Углы β_i , β_{refl} и β_{refr} системы Σ'_k связаны с ориентацией нормали θ и соответствующими углами φ_i , φ_{refl} и φ_{refr} системы Σ_k соотношениями (см. рис. 5 и 6)

$$\beta_i = \varphi_i - \theta, \quad (12)$$

$$\beta_{refl} = \varphi_{refl} - \theta, \quad (13)$$

$$\beta_{refr} = \varphi_{refr} - \theta. \quad (14)$$

Отметим, что при используемом отсчете углов β_i , β_{refl} и β_{refr} (относительно вектора \mathbf{k}_{n0}) все их значения всегда являются либо положительными, либо отрицательными (см. рис. 5 и 6). Поэтому в формулах (7)–(11) все синусы либо всегда положительные, либо всегда отрицательные.

Однако направления распространения лучей задают не углы φ_i , φ_{refl} , φ_{refr} или β_i , β_{refl} , β_{refr} , входящие в выражения (7)–(11), а углы ψ_i , ψ_{refl} , ψ_{refr} и α_i , α_{refl} , α_{refr} , определяющие направление групповых скоростей \mathbf{V}_i , \mathbf{V}_{refl} и \mathbf{V}_{refr} падающего, отраженного и преломленного лучей соответственно в системах координат Σ , Σ_k и Σ' , Σ'_k . Связь между углами ψ_i , ψ_{refl} , ψ_{refr} и α_i , α_{refl} , α_{refr} дается соотношениями (см. рис. 5 и 6)

$$\alpha_i = \psi_i - \theta, \quad (15)$$

$$\alpha_{refl} = \psi_{refl} - \theta, \quad (16)$$

$$\alpha_{refr} = \psi_{refr} - \theta. \quad (17)$$

Углы ψ_i , ψ_{refl} и ψ_{refr} (а затем из (15)–(17) и углы α_i , α_{refl} , α_{refr}) можно найти по известным значениям углов φ_i , φ_{refl} , φ_{refr} и величинам k_i , k_{refl} , k_{refr} из дисперсионного уравнения для определенной волны¹⁶.

Введем также традиционно используемые углы падения, отражения и преломления α'_i , α'_{refl} и α'_{refr} , связанные с углами α_i , α_{refl} и α_{refr} , отсчитываемыми от вектора \mathbf{n}_0 (или \mathbf{k}_{n0}), следующим образом¹⁷:

$$\alpha'_i = \alpha_i, \quad (18)$$

$$\alpha'_{refl} = 180^\circ - \alpha_{refl}, \quad (19)$$

$$\alpha'_{refr} = \alpha_{refr}. \quad (20)$$

Положительным направлением отсчета для введенного по формуле (19) угла отражения α'_{refl} (в отличие от всех остальных углов) следует считать направление по часовой стрелке. Именно при таком способе отсчета угла α'_{refl} для отражения в изотропных средах можно говорить, что угол падения равен углу отражения (с учетом знака).

Таким образом, если найденные по формулам (18)–(20) углы α'_{refl} и α'_{refr} имеют тот же знак, что и угол α'_i (как на рис. 5), то будем говорить, что имеет место положительное отражение или преломление, а если угол α'_i и углы α'_{refl} , α'_{refr} имеют разные знаки (как на рис. 6), то будем говорить, что имеют место отрицательное отражение и преломление. Как видно на рис. 5 и 6, все изложенное справедливо как для изотропных, так и для анизотропных сред. Характерные же особенности отражения и преломления для различных геометрий определяются геометрическими свойствами конкретными изочастотных зависимостей, что будет рассмотрено ниже.

Следует отметить, что при заданном положении границы и нормали \mathbf{n}_0 падающую волну может описывать не любой волновой вектор изочастотной зависимости, а лишь тот, для которого соответствующий вектор групповой скорости удовлетворяет условию падения (падающий луч должен быть направлен на границу)

$$(\mathbf{V}_i \mathbf{n}) > 0, \quad \text{или} \quad (\mathbf{V}_i \mathbf{k}_{n0}) > 0, \quad \text{или} \quad |\alpha'_i| < 90^\circ. \quad (21)$$

Кроме того, не все точки пересечения между кривыми изочастотных зависимостей обеих сред и проектирующей прямой¹⁸ будут соответствовать отраженной или преломленной волне. Очевидно, что возникновению отражения могут соответствовать только те точки пересечения с исходной изочастотной зависимостью, в которых вектор групповой скорости удовлетворяет условию отражения (отраженный луч направлен от границы в исходную среду)

$$(\mathbf{V}_{refl} \mathbf{n}) < 0, \quad \text{или} \quad (\mathbf{V}_{refl} \mathbf{k}_{n0}) < 0, \quad \text{или} \quad |\alpha'_{refl}| < 90^\circ. \quad (22)$$

Преломление же будут описывать лишь те точки пересечения проектирующей прямой с изочастотной зависимостью второй среды, в которых вектор групповой скорости удовлетворяет условию преломления (преломленный луч направлен из исходной среды за границу)

$$(\mathbf{V}_{refr} \mathbf{n}) > 0, \quad \text{или} \quad (\mathbf{V}_{refr} \mathbf{k}_{n0}) > 0, \quad \text{или} \quad |\alpha'_{refr}| < 90^\circ. \quad (23)$$

¹⁵ В [12, 18 и 23] вместо соотношений (7)–(9) для анизотропной среды дается более сложное выражение, которое можно привести к выражениям (7)–(9) после некоторых упрощений.

¹⁶ Например, дисперсионные уравнения для МСВ в свободной пленке и в различных структурах можно найти в [12–14, 17, 25, 39, 41–43, 47], а способ нахождения зависимости $\psi(\varphi)$ на примере МСВ описан в [12, с. 232–236] и в [25].

¹⁷ Напомним, что поскольку в соответствии со сделанными предположениями везде использованы значения углов, лежащие в интервале от -180° до 180° , то при отрицательных значениях α_{refl} в (19) для нахождения значения α'_{refl} следует дополнительно вычесть 360° .

¹⁸ Ниже так будем кратко называть прямую, проведенную параллельно нормали через конец волнового вектора \mathbf{k}_i падающей волны (прямая 7 на рис. 6).

Выполнение условий (22) и (23) является необходимым и достаточным для возникновения отраженных и преломленных лучей только в тех случаях, когда все кривые изочастотных зависимостей обеих сред описывают волны с одинаковой поляризацией. В противном случае условия (22) и (23) являются лишь необходимыми. Поэтому если кривые изочастотной зависимости одной или обеих сред описывают волны с различной поляризацией, то после нахождения на изочастотных зависимостях точек, удовлетворяющих условиям (22) и (23), следует проверить, возникнут ли соответствующие указанным точкам отраженные и преломленные волны с учетом поляризации падающего луча по отношению к плоскости падения и выделенным направлениям каждой анизотропной среды (т.е. направлениям, которые обуславливают анизотропию данной среды — кристаллографическим осям или направлениям приложенного постоянного магнитного или электрического поля). Например, когда линейно поляризованный свет нормально падает на оптический кристалл [5, с. 383], то в зависимости от направления поляризации падающего луча по отношению к оптической оси интенсивность возбуждения обыкновенного и необыкновенного лучей в кристалле поочередно меняется от нуля до максимального значения. Поскольку методы учета поляризации подробно изложены в литературе и их описание не является целью данной работы, посвященной анализу математических свойств изочастотных зависимостей, то везде далее будем считать, что падающий луч имеет такую поляризацию, при которой всем точкам пересечения проектирующей прямой с изочастотными зависимостями соответствуют волны с отличной от нуля амплитудой. Отметим, что такому предположению соответствует наиболее общий случай отражения и преломления волн. Кроме того, поскольку в рамках данной работы нас не интересуют поляризации и интенсивности отраженных и преломленных лучей, то сделанное предположение позволит сосредоточиться на анализе свойств изочастотных зависимостей, не делая частых отступлений, связанных с учетом поляризации. Поэтому в дальнейшем о поляризации лучей будет упоминаться лишь при необходимости.

Отметим здесь, что в отличие от изотропных сред, где совсем неважно, каким способом измерены зависимости $\alpha'_{\text{refl}}(\alpha'_i)$ и $\alpha'_{\text{refl}}(\alpha'_i)$ ¹⁹ — путем изменения ориентации границы раздела сред²⁰ или путем поворота возбуждающего преобразователя (передающей антенны), — в случае анизотропной среды эти два способа приведут к совершенно разным результатам. При использовании первого способа, когда ориентация возбуждающего преобразователя относительно выбранной оси не меняется, *параметры падающей волны* (векторы \mathbf{k}_i , \mathbf{V}_i и связанные с ними углы φ_i и ψ_i) *остаются постоянными*, тогда как при использовании второго способа параметры падающей волны различны для каждого нового

¹⁹ В изотропных средах зависимость $\alpha'_{\text{refl}}(\alpha'_i)$ представляет собой прямую линию $\alpha'_{\text{refl}} = \alpha'_i$.

²⁰ Следует отметить, что не в любой анизотропной среде легко можно изменять ориентацию границы. Например, в касательно намагниченной ферритовой пленке, имеющей прямой край, это несложно сделать, поворачивая пленку вокруг нормали к поверхности пленки (при условии, что анизотропия в плоскости пленки мала), а для оптических или акустических кристаллов необходимо изготовить ряд образцов с различной ориентацией границы.

значения угла падения α'_i (поскольку меняется ориентация возбуждающего преобразователя по отношению к выбранной оси). Указанную особенность следует учитывать при проведении как теоретических, так и экспериментальных исследований.

8. Законы отражения волн

8.1. Общие замечания

В изотропных средах, где изочастотная кривая представляет собой окружность, волновые векторы падающей и отраженной волн \mathbf{k}_i и \mathbf{k}_{refl} являются радиусами одной и той же окружности и всегда

$$k_{\text{refl}} = k_i = \text{const}. \quad (24)$$

Поэтому выражение (10) приобретает вид $\sin \beta_i = \sin \beta_{\text{refl}}$, откуда получаем

$$\beta_{\text{refl}} = \beta_i \quad \text{либо} \quad \beta_{\text{refl}} = 180^\circ - \beta_i. \quad (25)$$

Очевидно, что первое решение в (25) соответствует исходной волне, а второе — отраженной. Кроме того, изочастотная кривая в форме окружности обладает еще одним уникальным свойством: любой волновой вектор \mathbf{k} , соединяющий центр с любой точкой окружности, и вектор групповой скорости \mathbf{V} , нормальный к этой же точке окружности, коллинеарны для всех точек окружности. Для обычных изотропных сред, в которых распространяются прямые волны, это свойство приводит к тому, что всегда $\psi_i = \varphi_i$, $\psi_{\text{refl}} = \varphi_{\text{refl}}$ и $\beta_i = \alpha_i$, $\beta_{\text{refl}} = \alpha_{\text{refl}}$. Отсюда с учетом второго выражения в (25) для ориентации групповых скоростей получим соотношение

$$\alpha_{\text{refl}} = 180^\circ - \alpha_i, \quad (26)$$

которое после подстановки в (19) приводит к известному закону Евклида — угол отражения луча равен углу падения луча:

$$\alpha'_{\text{refl}} = \alpha'_i. \quad (27)$$

Для гипотетической изотропной среды с отрицательными значениями ϵ и μ , в которой распространяется обратная волна, из второго выражения в (25) также можно получить выражения (26) и (27) (следует лишь использовать соотношения $\psi_i = \varphi_i - 180^\circ$, $\psi_{\text{refl}} = \varphi_{\text{refl}} - 180^\circ$, $\beta_i = \alpha_i - 180^\circ$ и $\beta_{\text{refl}} = \alpha_{\text{refl}} - 180^\circ$).

Если попробовать провести аналогичные рассуждения для анизотропной среды, сразу же выяснится, что в любой анизотропной среде в общем случае $k_i \neq k_{\text{refl}}$, поэтому об отражении в целом имеет смысл говорить лишь для каждой конкретной анизотропной среды.

Однако зададимся вопросом: можно ли найти какие-нибудь общие закономерности, характерные для отражения волн в анизотропных средах? Оказывается можно. Эти закономерности сформулированы ниже и сопровождаются кратким комментарием.

8.2. Правило Евклида

Если граница среды параллельна одной из осей симметрии изочастотной зависимости и при отражении волны, характеризующейся волновым вектором \mathbf{k}_i и вектором

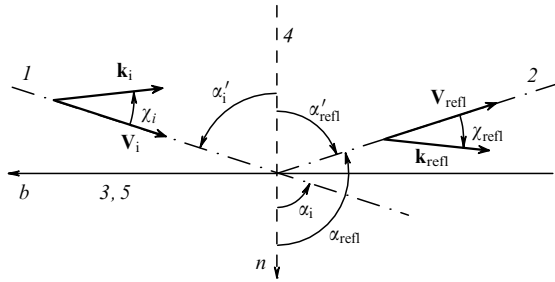


Рис. 7. Отражение по правилу Евклида, когда граница параллельна оси симметрии: 1, 2 — линии падающего и отраженного лучей, 3 — граница раздела, 4 — нормаль к границе, 5 — ось симметрии структуры или среды.

групповой скорости V_i , возникает один отраженный луч, характеризующийся соответствующими векторами k_{refl} и V_{refl} , то угол отражения α'_{refl} будет равен углу падения α'_i , а величины соответствующих векторов k_i , V_i и k_{refl} , V_{refl} будут равны, т.е.

$$k_{\text{refl}} = k_i, \quad V_{\text{refl}} = V_i, \quad \alpha'_{\text{refl}} = \alpha'_i. \quad (28)$$

Если же в результате отражения волны при указанной геометрии возникает множество отраженных лучей, то среди них обязательно найдется луч, для которого справедливы соотношения (28).

Действительно, если на рис. 6а сориентировать границу параллельно, например, оси симметрии k_y (чтобы нормаль была направлена противоположно оси k_z), то, проводя через конец вектора k_i прямую, параллельную оси k_z , легко найдем векторы k_{refl} и V_{refl} , показанные на рис. 7. Аналогичную схему отражения легко получить и для любых других анизотропных сред. Следует иметь в виду, что изочастотная зависимость анизотропной среды (структуры) может иметь разное количество осей симметрии: у эллипса (рис. 1б) и у зависимость, похожих на симметричные гиперболы (рис. 1в, г), их две, у зависимость, приведенных на рис. 2, — одна, у изочастотных зависимость акустических кристаллов, относящихся к тетрагональной сингонии, — четыре [8, 15, 16] и т.д. Изочастотная зависимость изотропных сред (окружность) имеет бесконечное количество осей симметрии, поэтому в этих средах правило Евклида справедливо при любой ориентации границы.

Если изочастотная зависимость среды состоит из нескольких кривых или семейства кривых²¹ и возникает множество отраженных лучей (например, такой случай имеет место для обратной МСВ при расположении границы параллельно оси k_y на рис. 1г), то отраженному лучу, для которого справедливы соотношения (28), на изочастотной зависимости соответствует точка, симметричная относительно границы точке, описывающей падающий луч.

²¹ Отметим здесь, что в таких средах может одновременно возбуждаться множество падающих волн, соответствующих различным изочастотным кривым. Чтобы иметь в эксперименте лишь одну падающую волну (иначе каждая падающая волна даст множество отраженных лучей), следует принимать специальные меры (например, для возбуждения только первой моды обратной МСВ достаточно эффективным является использование возбуждающего преобразователя, ширина которого больше половины длины волны второй моды).

8.3. Обратное отражение

Если изочастотная зависимость является центрально-симметричной и если граница раздела сред перпендикулярна волновому вектору падающего луча k_i , то волновые векторы всех отраженных лучей будут коллинеарны вектору k_i , а для одного из отраженных лучей угол отражения α'_{refl} , волновой вектор k_{refl} и вектор групповой скорости V_{refl} будут связаны с соответствующими параметрами падающего луча (углом падения α'_i и векторами k_i и V_i) соотношениями

$$k_{\text{refl}} = -k_i, \quad V_{\text{refl}} = -V_i, \quad \alpha'_{\text{refl}} = -\alpha'_i. \quad (29)$$

Очевидно, что если в результате отражения возникает один отраженный луч, то соотношения (29) справедливы именно для него (рис. 8).

Рассмотрим вначале случай, когда возникает всего один отраженный луч. В изотропных средах, где соответствующие векторы k и V всегда параллельны, обратное отражение реализуется только при нормальном падении волны на границу, т.е. при $\alpha'_i = -\alpha'_{\text{refl}} = 0$. В анизотропных средах, где векторы k и V в общем случае не параллельны, обратное отражение имеет место и при косом падении волны на границу. Например, если на рис. 6 выбрать такую ориентацию границы, чтобы нормаль k_{n0} была сонаправлена с волновым вектором падающего луча k_i , то отраженный луч будет описывать волновой вектор, центрально-симметричный вектору k_i , и получится схема отражения, показанная на рис. 8. Очевидно, что, когда возникает всего один отраженный луч, падающая и отраженная волны всегда имеют одинаковый характер — либо прямой, либо обратный, причем, когда обе волны имеют прямой характер (как на рис. 8), углы падения и отражения связаны с величиной угла χ_i между векторами V_i и k_i соотношениями (с учетом

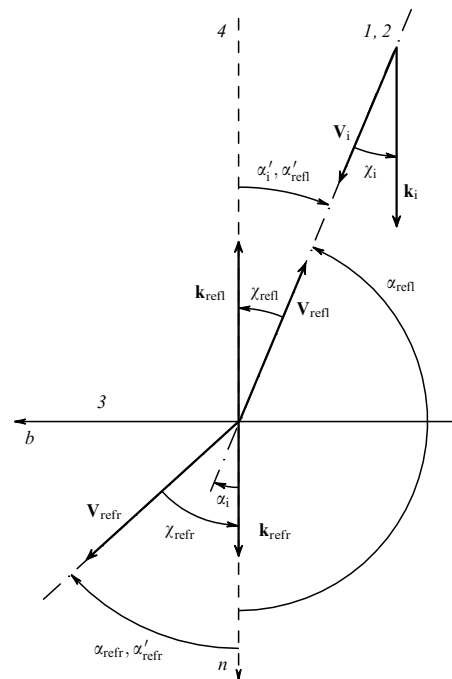


Рис. 8. Отражение и преломление волны, фазовый фронт которой параллелен границе раздела: 1, 2 — линии падающего и отраженного лучей, 3 — граница раздела, 4 — нормаль к границе.

формулы (5))

$$\alpha'_i = -\alpha'_{\text{refl}} = -\chi_i = \psi_i - \varphi_i, \quad (30)$$

а когда обе волны имеют обратный характер, справедливы соотношения

$$\alpha'_i = -\alpha'_{\text{refl}} = 180^\circ - \chi_i = 180^\circ - \varphi_i + \psi_i. \quad (31)$$

В случае, если изочастотная зависимость среды состоит из нескольких кривых, может появиться несколько отраженных лучей (например, множество отраженных лучей может появиться для обратной МСВ, когда падающему лучу соответствует вектор \mathbf{k}_1 на рис. 1г, а граница перпендикулярна вектору \mathbf{k}_1), причем отраженному лучу, для которого справедливы соотношения (29) и (31), на изочастотной зависимости будет соответствовать точка, центрально-симметричная точке, описывающей падающий луч. Если все кривые изочастотной зависимости описывают волну с одинаковым характером — или прямым, или обратным (как на рис. 1г), — то для всех отраженных лучей волновые векторы будут направлены противоположно волновому вектору падающей волны \mathbf{k}_i . Если же одна из отраженных волн имеет не такой характер, как падающая волна, то волновой вектор этой отраженной волны сонаправлен с вектором \mathbf{k}_i . Последний случай можно реализовать, например, в структуре, где на одинаковом расстоянии l от обеих поверхностей ферритовой пластины расположены металлические плоскости (изочастотная зависимость этой структуры при определенных значениях l представляет собой два центрально-симметричных овала (похожих на овал, изображенный на рис. 2в), у каждого из которых ближняя к началу координат часть дуги описывает прямую волну, а дальняя часть дуги — обратную волну).

Следует отметить, что для анизотропных сред, у которых изочастотные кривые не являются центрально-симметричными (см. рис. 2), закон обратного отражения (29) не имеет места.

8.4. Положительное и отрицательное отражение

Чтобы сформулировать условия, когда отражение будет положительным и когда отрицательным, исследуем изочастотную зависимость среды на наличие экстремумов и особых точек в системе координат $\Sigma'_k = \{0; k_b, k_n\}$. Вначале опишем указанное исследование для произвольной изочастотной зависимости, а затем рассмотрим его на примере изочастотной зависимости поверхностной МСВ в свободной пленке. Пусть изочастотная зависимость некоторой волны описывается в системе координат $\Sigma_k = \{0; k_y, k_z\}$ дисперсионным уравнением $F(k_y, k_z) = 0$. Для описания этой изочастотной зависимости в системе координат Σ'_k произведем замену переменных по формулам²²

$$\begin{aligned} k_y &= k_n \cos \theta + k_b \sin \theta, \\ k_z &= k_n \sin \theta - k_b \cos \theta. \end{aligned} \quad (32)$$

Тогда изочастотная зависимость волны описывается уравнением $F(k_b, k_n) = 0$ или, если из этого уравнения

переменную k_n можно выразить в явном виде, зависимостью $k_n = P(k_b)$. Пусть также зависимость $P(k_b)$ расположена в диапазоне значений²³ $k_{b \min} < k_b < k_{b \max}$. Разобьем весь диапазон значений $k_{b \min} < k_b < k_{b \max}$ на интервалы, разделенные точками $k_{b1}, k_{b2}, \dots, k_{bm}$, в которых производная²⁴ $\partial P / \partial k_b$ равна нулю или стремится к бесконечности, либо зависимость $P(k_b)$ имеет разрыв. Напомним, что в физическом смысле каждое значение k_b соответствует потенциально возможной общей проекции волновых векторов падающего и отраженного лучей \mathbf{k}_i и \mathbf{k}_{refl} . Поэтому очевидно, что каждому интервалу $k_{b \min} < k_b < k_{b1}, k_{b1} < k_b < k_{b2}, \dots, k_{bm} < k_b < k_{b \max}$ и каждой точке $k_{b1}, k_{b2}, \dots, k_{bm}$ соответствует определенный характер отражения волны, поскольку в каждой из точек²⁵ $k_{b1}, k_{b2}, \dots, k_{bm}$ либо вектор групповой скорости падающей волны \mathbf{V}_i , либо вектор групповой скорости отраженной волны \mathbf{V}_{refl} будет либо коллинеарен, либо перпендикулярен вектору \mathbf{k}_{n0} (и вектору нормали \mathbf{n}_0).

При анализе зависимости $P(k_b)$ следует иметь в виду, что она, как правило, не является функцией и каждому значению k_b , лежащему в одном из перечисленных выше интервалов, может соответствовать несколько значений k_n ; поэтому удобно считать, что зависимость $P(k_b)$ в каждом таком интервале состоит из отдельных участков $P_0(k_b), P_1(k_b), P_2(k_b), \dots$ и т.д.

Очевидно, что для возникновения отражения в каких-либо из перечисленных выше интервалов или значений k_b необходимо, чтобы в данном интервале значений k_b (или при данном значении k_b) хотя бы для одного участка выполнялось условие падения (21), а для второго (или хотя бы для одного из других участков) — условие отражения (22). Участок зависимости $P(k_b)$, который удовлетворяет условию (21) и соответствует падающему лучу²⁶, обозначим $P_0(k_b)$, а участок, который удовлетворяет условию (22) и соответствует j -му отраженному лучу, обозначим $P_j(k_b)$ ²⁷. Теперь можно сформулировать правило, определяющее характер отражения.

В тех интервалах значений k_b , где на участке изочастотной зависимости $P_j(k_b)$, соответствующем j -му отраженному лучу, производная $\partial P_j / \partial k_b$ имеет такой же знак, что и производная $\partial P_0 / \partial k_b$ на участке $P_0(k_b)$,

²² В некоторых случаях, например, когда изочастотная зависимость похожа на гиперболу, диапазон значений k_b может быть не ограничен, т.е. $k_{b \min} = -\infty$ и $k_{b \max} = +\infty$.

²⁴ В случае, если зависимость $P(k_b)$ задана в неявном виде уравнением $F(k_b, k_n) = 0$, указанная производная может быть найдена по правилам нахождения производной неявной зависимости [30].

²⁵ За исключением точек разрыва зависимости $P(k_b)$.

²⁶ Отметим, что в некоторых случаях участков, удовлетворяющих условию (21), может оказаться несколько. Тогда выбор участка, соответствующего падающему лучу, следует осуществлять исходя из конкретных условий эксперимента или теоретической задачи (например, интересуясь лишь падающим лучом с конкретной ориентацией или величиной волнового вектора и т.п.).

²⁷ Для простоты здесь и ниже предполагается, что либо все кривые в изочастотной зависимости среды описывают волны с одинаковой поляризацией, либо падающий луч имеет такую поляризацию, при которой всем точкам пересечения проектирующей прямой с изочастотной зависимостью соответствуют волны с отличной от нуля амплитудой. В реальной же ситуации, если кривые изочастотной зависимости описывают волны с различной поляризацией, исходя из поляризации падающего луча и конкретной геометрии падения волны на границу, необходимо удостовериться, что соответствующие отраженные волны имеют ненулевую амплитуду.

²² Выражения (32) можно определить из [30, с. 196], считая, что система координат Σ_k получена в результате поворота системы координат Σ'_k на угол $90^\circ - \theta$ (это видно, например, из рис. 6а).

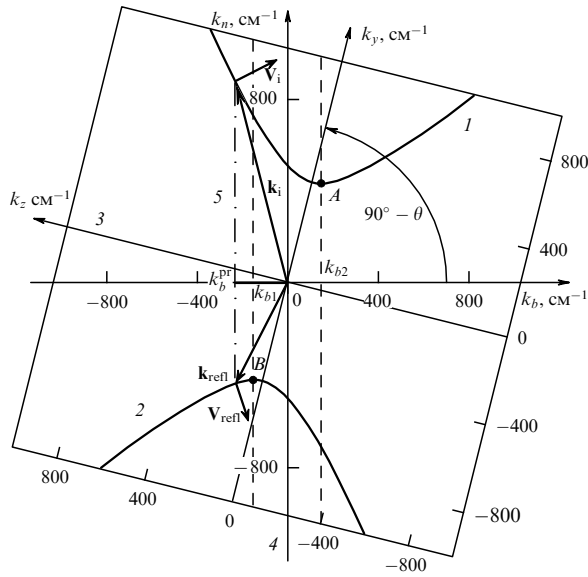


Рис. 9. Определение характера отражения на примере поверхностной МСВ в системе координат, связанной с границей и нормалью: 1, 2 — изочастотные кривые, 3 — граница пленки и связанная с ней ось k_b , 4 — нормаль к границе и связанная с ней ось k_n , 5 — проектирующая прямая, A, B — точки экстремума изочастотной зависимости в системе координат $k_b k_n$.

соответствующем падающему лучу, j -й отраженный луч испытывает отрицательное отражение. Если же знаки производных $\partial P_j / \partial k_b$ и $\partial P_0 / \partial k_b$ разные, то j -й отраженный луч испытывает положительное отражение. При тех значениях k_b из множества $\{k_{b1}, k_{b2}, \dots, k_{bm}\}$, при которых производная $\partial P_0 / \partial k_b = 0$, падающий луч ориентирован нормально к границе, а если $\partial P_j / \partial k_b = 0$, то j -й отраженный луч ориентирован нормально к границе.

Рассмотрим кратко, как это правило работает на конкретном примере изочастотной зависимости $P(k_b)$ для поверхностной МСВ в свободной ферритовой пленке (рис. 9)²⁸. При данной ориентации границы раздела по отношению к оси симметрии k_y возникают две точки экстремума — A и B, причем в каждом интервале значений k_b всегда имеется два участка изочастотной зависимости $P_0(k_b)$ и $P_1(k_b)$, из которых первый удовлетворяет условию (21) и всегда лежит на кривой 1, а второй — условию (22) и всегда лежит на кривой 2 (см. рис. 9). Обозначим k_b^{pr} проекцию волнового вектора \mathbf{k}_i на границу (ось k_b). В зависимости от того, какой конкретно вектор \mathbf{k}_i будет соответствовать падающему лучу, возникнут следующие случаи отражения:

1) если значение k_b^{pr} лежит в интервале $k_b^{\text{pr}} < k_{b1}$ (как показано на рис. 9), то на участке $P_0(k_b)$, где лежит конец вектора \mathbf{k}_i , производная $\partial P_0 / \partial k_b < 0$, а на соответствующем участке $P_1(k_b)$, где лежит конец вектора \mathbf{k}_{refl} , производная $\partial P_1 / \partial k_b > 0$; знаки производных разные, поэтому имеет место положительное отражение;

2) если $k_b^{\text{pr}} = k_{b1}$, то проектирующая прямая (прямая 5 на рис. 9) проходит через точку B, в которой $\partial P_1 / \partial k_b = 0$; в этом случае отраженный луч будет направлен перпендикулярно к границе, хотя падающий луч направлен под углом к границе;

3) если $k_{b1} < k_b^{\text{pr}} < k_{b2}$, то $\partial P_0 / \partial k_b < 0$ и $\partial P_1 / \partial k_b < 0$; так как знаки производных одинаковые, имеет место отрицательное отражение, причем при $k_b^{\text{pr}} = 0$ происходит обратное отражение, при котором выполняются условия (29);

4) если $k_b^{\text{pr}} = k_{b2}$, то проектирующая прямая проходит через точку A, в которой $\partial P_0 / \partial k_b = 0$; в этом случае волна падает нормально на границу, но отраженный луч направлен под углом к границе;

5) если $k_b^{\text{pr}} > k_{b2}$, то $\partial P_0 / \partial k_b > 0$ и $\partial P_1 / \partial k_b < 0$; так как знаки производных разные, имеет место положительное отражение.

Отметим, что изложенное правило справедливо независимо от того, имеет ли волна в данной среде прямой или обратный характер²⁹.

Как обратное, так и отрицательное отражение при косом падении волны на границу можно наблюдать в эксперименте для МСВ в ферритовых пленках [25], для акустических волн в акустических кристаллах [48] и для света при отражении внутрь оптического кристалла (хотя в работах по кристаллооптике об этом практически не упоминается).

8.5. Отсутствие отраженного луча

Очевидно, что для отсутствия отраженного луча условие (22) не должно выполняться ни для одного участка изочастотной зависимости. При определенной ориентации границы по отношению к оси симметрии это возможно в следующих случаях.

Отражение будет отсутствовать при любых углах падения луча на границу, если:

1) изочастотная зависимость состоит только из центрально-симметричных кривых, подобных гиперболом и не имеющих точек перегиба, а граница раздела перпендикулярна какой-либо асимптоте этих кривых;

2) изочастотная зависимость является функцией³⁰ в некоторой системе координат, а граница параллельна оси абсцисс этой системы координат;

3) изочастотная зависимость состоит из семейства кривых, каждая из которых в отдельности в некоторой системе координат обладает свойством однозначности (подобно функции), причем все кривые целиком расположены в одной полуплоскости, а граница раздела параллельна границе этой полуплоскости.

Отметим, что под термином "отсутствие отражения" подразумевается отсутствие отраженной волны, описываемой той же изочастотной зависимостью. Очевидно, что в реальных анизотропных средах энергия падающей волны может быть преобразована в другие типы волн (в случае МСВ в ферритовой пленке это могут быть, например, обменные спиновые волны или краевые волны, распространяющиеся вдоль границы³¹).

²⁹ На первый взгляд может показаться, что для обратной волны это правило должно быть сформулировано наоборот. Однако, если на рис. 9 везде изменить направление векторов \mathbf{V} на противоположное, то в соответствии с условиями (21) и (22) участки изочастотной зависимости $P_0(k_b)$ и $P_1(k_b)$ поменяются ролями: первый будет соответствовать отраженной волне, а второй — падающей. Формулировка же правила не изменится.

³⁰ Напомним, что функцией называется зависимость, у которой каждому значению абсциссы соответствует одно значение ординаты.

³¹ К сожалению, до сих пор нет детального, подтвержденного экспериментом ответа на вопрос о том, в какие конкретно типы волн или в какие формы энергии преобразуется энергия МСВ при отсутствии отраженной волны типа МСВ.

²⁸ Обе кривые изочастотной зависимости для поверхностной МСВ описывают волны с одинаковой поляризацией.

Изочастотная зависимость для поверхностной МСВ в свободной ферритовой пленке является примером зависимости, соответствующей первому из перечисленных выше случаев. Действительно, если на рис. 9 границу раздела расположить перпендикулярно одной из асимптот, то при любых параметрах падающего луча проектирующая прямая больше нигде не пересечет изочастотную зависимость и отражение не возникает.

Пример зависимостей, соответствующих второму случаю, — изочастотная зависимость МСВ в ферритовой пленке, одна из поверхностей которой металлизирована в интервале частот $\omega_H + 0,5\omega_M < \omega < \omega_H + \omega_M$ (рис. 2б), и изочастотная зависимость МСВ в ферритовой пленке, на одной из поверхностей которой созданы граничные условия типа "магнитной стенки" в интервале частот $\sqrt{\omega_H(\omega_H + \omega_M)} < \omega < \omega_H + 0,5\omega_M$ (см. рис. 5 в [40]). В отличие от случая поверхностной МСВ в свободной ферритовой пленке, где отражение отсутствует лишь при одном-единственном положении границы θ по отношению к оси симметрии k_y , в этих структурах отражение отсутствует в достаточно большом интервале значений θ . Отметим также структуру металл-ферритовая пластина—"магнитная стенка", где изочастотная зависимость стремится к прямой линии, совпадающей с осью k_z , при $\omega \rightarrow \sqrt{\omega_H(\omega_H + \omega_M)}$ (см. [39] и раздел 6.4). Если же значения ω лежат немного выше указанной частоты, можно получить изочастотную зависимость, очень близкую к прямой линии и не совпадающую с осью k_z . Таким образом, в этой структуре отражение будет отсутствовать в максимально возможном интервале значений θ .

8.6. Возникновение двух или нескольких отраженных лучей

Очевидно, что для возникновения двух отраженных лучей необходимо, чтобы изочастотная зависимость и проектирующая прямая пересекались в трех точках, для одной из которых должно выполняться условие (21), а для двух других — условие (22). Можно сформулировать следующее правило.

При определенной ориентации границы по отношению к оси симметрии изочастотной зависимости возникает не менее двух отраженных лучей, если изочастотная зависимость обладает хотя бы одним из следующих свойств³²:

- 1) состоит из двух кривых, одна из которых является замкнутой;
- 2) состоит из трех и более кривых³³;
- 3) одна из кривых изочастотной зависимости имеет точки перегиба.

Изочастотные зависимости оптических кристаллов обладают первым из указанных свойств (см., например, рис. 1б), что и является причиной возникновения в них двулучеотражения (при соответствующей поляризации падающего луча) [49–51]. Аналогичным свойством обладает также изочастотная зависимость МСВ в структуре ФДМ при определенных параметрах структуры (рис. 2в).

Изочастотная зависимость для акустической волны в тетрагональных кристаллах и изочастотная зависимость

в металлизированной ферритовой пленке (рис. 2а) обладают третьим из описанных свойств³⁴, а изочастотная зависимость для объемной обратной МСВ в свободной ферритовой пленке (рис. 1г) — вторым и третьим свойствами. В обоих случаях теоретические расчеты по возникновению двух отраженных лучей подтверждены экспериментальными наблюдениями [48, 25].

Если одна из кривых изочастотной зависимости имеет точки перегиба, то при определенном расположении проектирующей прямой вблизи одной из них возникают как минимум три точки пересечения этой прямой с данной изочастотной кривой³⁵. При этом всегда можно так выбрать ориентацию вектора нормали \mathbf{n}_0 (или \mathbf{k}_{n0}), чтобы в одной из точек пересечения удовлетворялось условие (21) и в двух — условие (22) (последним соответствуют два отраженных луча). Отметим, что поскольку все три точки лежат на одной и той же кривой, то в данном случае поляризация не влияет на возникновение отраженных лучей. Чем больше точек перегиба будет иметь изочастотная зависимость, тем больше может появиться отраженных лучей при определенной ориентации границы.

Изочастотные зависимости, показанные на рис. 1а, в, не могут иметь больше двух точек пересечения с проектирующей прямой, потому что эти зависимости не удовлетворяют ни одному из перечисленных условий (из рис. 1в видно, что двух кривых, подобных гиперболам, недостаточно для получения трех точек пересечения). Поэтому в средах, имеющих подобные изочастотные зависимости, никогда не возникает второй отраженный луч.

Если изочастотная зависимость описывает многомодовую волну (рис. 1г), то независимо от наличия точек перегиба при определенной ориентации границы будет возникать несколько отраженных лучей, соответствующих высшим модам.

8.7. Необратимость хода лучей при отражении

Если изочастотная зависимость среды не является центрально-симметричной фигурой, то возникает необратимость хода лучей при отражении. Это правило следует из закона о невзаимном распространении волны (см. раздел 6.4). Действительно, предположим, что падающий и отраженный лучи описываются векторами $\mathbf{V}_0, \mathbf{k}_0$ и $\mathbf{V}_1, \mathbf{k}_1$ соответственно. Если найти на изочастотной зависимости точку, которая описывает луч с волновым вектором \mathbf{k}_2 и групповой скоростью \mathbf{V}_2 , направленной противоположно вектору \mathbf{V}_1 , то окажется, что $\mathbf{k}_2 \neq \mathbf{k}_1$ (как показано на рис. 4). Поэтому, если теперь луч с параметрами $\mathbf{k}_2, \mathbf{V}_2$ рассматривать в качестве падающего и, применив к вектору \mathbf{k}_2 закон сохранения импульса, найти новый отраженный луч с параметрами $\mathbf{k}_3, \mathbf{V}_3$, то окажется, что $\mathbf{k}_3 \neq \mathbf{k}_0$ и $\mathbf{V}_3 \neq \mathbf{V}_0$. Эти рассуждения легко проверить на примере металлизированной ферритовой пленки, изочастотная зависимость которой не является центрально-симметричной (рис. 2а). Следует иметь в виду, что для некоторых изочастотных зависимостей, не являющихся центрально-симметричными (например, как в структуре ФДМ (рис. 6а)), сильно

³² См. сноску 27.

³³ Из этого правила существует одно гипотетическое исключение, — когда изочастотная зависимость состоит из параллельных прямых.

³⁴ На рисунке 2а правая кривая имеет точки перегиба.

³⁵ Как возникают три точки пересечения проектирующей прямой с изочастотной зависимостью, имеющей точки перегиба, легко понять из рис. 10, приведенного в разделе 9.4.

отличаться могут только определенные участки (например, в структуре ФДМ — это участки, лежащие вблизи оси симметрии k_y), тогда как другие участки (в структуре ФДМ — это участки, лежащие далеко от оси k_y) можно считать практически центрально-симметричными и для таких участков при проведении описанных выше построений получится, что векторы \mathbf{k}_3 и \mathbf{k}_0 , а также векторы \mathbf{V}_3 и \mathbf{V}_0 практически одинаковы.

Из сформулированных законов ясно, что при исследовании отражения в анизотропных средах основной характеристикой следует считать зависимость угла отражения от угла падения волны $\alpha'_{\text{refl}}(\alpha'_i)$. В изотропных средах эта зависимость описывается прямой линией $\alpha'_{\text{refl}} = \alpha'_i$. В анизотропных средах — это сложная зависимость, которая может иметь экстремумы и участки неоднозначности, соответствующие возникновению нескольких отраженных лучей (см., например, [23, 25]).

9. Законы преломления волн

9.1. Общие замечания

Из соотношения (11), полученного в разделе 7, следует, что если обе среды являются изотропными и их изочастотные зависимости представляют собой окружности, то векторы \mathbf{k}_{refr} и \mathbf{k}_i являются радиусами различных окружностей и всегда

$$\frac{k_{\text{refr}}}{k_i} = n = \text{const}. \quad (33)$$

Поэтому из (11) для изотропных сред получаем

$$\frac{\sin \beta_i}{\sin \beta_{\text{refr}}} = n. \quad (34)$$

Величину n в выражениях (33) и (34) называют показателем преломления. Поскольку для изочастотной зависимости в форме окружности любые соответствующие векторы \mathbf{k} и \mathbf{V} коллинеарны, то для обычных изотропных сред, в которых распространяются прямые волны, всегда справедливы соотношения

$$\beta_i = \alpha_i = \alpha'_i \quad \text{и} \quad \beta_{\text{refr}} = \alpha_{\text{refr}} = \alpha'_{\text{refr}}. \quad (35)$$

Поэтому закон (34), полученный для волновых векторов, оказывается справедливым и для групповых скоростей:

$$\frac{\sin \alpha'_i}{\sin \alpha'_{\text{refr}}} = n. \quad (36)$$

Если среда, в которую волна преломляется, представляет собой гипотетическую изотропную среду с отрицательными ε и μ , в которой распространяется обратная волна, а ориентации векторов \mathbf{k} и \mathbf{V} связаны соотношением $\beta_{\text{refr}} = \alpha'_{\text{refr}} + 180^\circ$ (или $\beta_{\text{refr}} = \alpha'_{\text{refr}} - 180^\circ$), то, подставляя это соотношение в (34), получим выражение для групповых скоростей

$$\frac{\sin \alpha'_i}{\sin \alpha'_{\text{refr}}} = -n. \quad (37)$$

Очевидно, что если и исходная среда будет обладать отрицательными ε и μ , то для групповых скоростей также получится выражение (36).

Для изотропных сред показатель преломления n является постоянной величиной и представляет собой одну из важнейших характеристик среды.

Если попробовать провести аналогичные рассуждения для случая, когда одна или обе среды анизотропны, то сразу же выяснится, что, во-первых, показатель преломления $n = k_{\text{refr}}/k_i$ не является постоянной величиной при различных геометриях падения волны и, во-вторых, углы α_i и α_{refr} , задающие ориентацию лучей, и углы β_i и β_{refr} не равны, как в (35), а связаны дисперсионным уравнением, поэтому не имеет места и простое соотношение (36). Таким образом, для анизотропных сред показатель преломления n утрачивает одну из своих функций, описываемую выражением (36), — величина n не характеризует степень преломления лучей; но при этом сохраняется вторая функция, описываемая выражениями (33) и (34), — величина n описывает степень преломления волновых векторов и показывает, во сколько раз отличаются волновые числа (длины волн) в обеих средах при данной геометрии падения волны.

Иногда при описании преломления вводят лучевой или энергетический показатель преломления $n_V = c/V$ [4, с. 734]. Так, при исследовании преломления света из вакуума в анизотропный оптический кристалл, у которого изочастотные кривые необыкновенной волны имеют вид эллипса, введение показателя n_V может оказаться полезным, поскольку в этом случае, во-первых, не возникает отрицательного преломления и, во-вторых, ориентации векторов \mathbf{k} и \mathbf{V} для эллипса отличаются не очень сильно (см. рис. 3, кривые 2), т.е. величина n_V в этом случае всегда положительна и изменяется в небольших пределах $n_{V \min} < n_V < n_{V \max}$. В тех случаях, когда возникает отрицательное преломление (например, при исследовании преломления МСВ из свободной пленки в структуру ФДМ) можно по аналогии с формулой (36) ввести показатель преломления n'_V вектора групповой скорости \mathbf{V}^{36} (чтобы как-то описать степень преломления векторов \mathbf{V} при различных геометриях падения волны), однако, по-видимому, это не имеет смысла, поскольку величина n'_V , вычисленная по формуле (36), будет изменяться в пределах от $-\infty < n'_V < +\infty$ [24]. В целом же для всех анизотропных геометрий полное представление о преломлении волны можно получить из зависимости угла преломления от угла падения $\alpha'_{\text{refr}}(\alpha'_i)$, поэтому далее ни показатель n_V , ни показатель n'_V не будут использоваться.

Изложенные рассуждения показывают, что не имеет смысла говорить о преломлении волн в целом, необходимо исследовать преломление для каждой конкретной анизотропной геометрии с известной ориентацией осей симметрии изочастотных зависимостей сред по отношению к границе раздела.

Однако зададимся вопросом: можно ли найти какие-нибудь общие закономерности, характерные для преломления волн в анизотропных геометриях?

Оказывается можно. Эти закономерности сформулированы ниже и сопровождаются кратким комментарием.

³⁶ Удобным может оказаться введение показателя n'_V , например, при исследовании преломления волны из вакуума в изотропную среду с отрицательными ε и μ . В этом случае можно положить $n'_V = -n$ и записать формулу (37) с использованием n'_V .

9.2. Преломление волны, фазовый фронт которой параллелен границе

Если волна, характеризующаяся волновым вектором \mathbf{k}_i и вектором групповой скорости \mathbf{V}_i , падает на границу раздела сред так, что вектор \mathbf{k}_i перпендикулярен границе, то волновые векторы тех преломленных лучей, которые описывают прямые волны, будут сонаправлены с вектором \mathbf{k}_i , а волновые векторы тех преломленных лучей, которые описывают обратные волны, будут направлены противоположно вектору \mathbf{k}_i . При этом если падающая волна имеет прямой характер, то угол падения α'_i и угол χ_i между векторами \mathbf{V}_i и \mathbf{k}_i будут связаны формулой $\alpha'_i = -\chi_i$ (см. рис. 8), а если падающая волна имеет обратный характер, то $\alpha'_i = 180^\circ - \chi_i$. Если j -й преломленный луч имеет прямой характер (как на рис. 8), то угол преломления $\alpha'_{j\text{refr}}$ и угол $\chi_{j\text{refr}}$ между векторами $\mathbf{V}_{j\text{refr}}$ и $\mathbf{k}_{j\text{refr}}$ этого луча связаны формулой $\alpha'_{j\text{refr}} = -\chi_{j\text{refr}}$, а если j -й преломленный луч имеет обратный характер, то $\alpha'_{j\text{refr}} = 180^\circ - \chi_{j\text{refr}}$. Очевидно, что если знаки углов α'_i и $\alpha'_{j\text{refr}}$ совпадают, то для j -го преломленного луча (независимо от того, прямую или обратную волну описывает этот луч) имеет место положительное преломление (как на рис. 8), а если знаки углов α'_i и $\alpha'_{j\text{refr}}$ разные, то отрицательное преломление. Особо можно выделить случаи, когда $\alpha'_i = 0$ или когда $\alpha'_{j\text{refr}} = 0$ (что имеет место, когда в первой или во второй среде волна распространяется вдоль коллинеарной оси или когда одна из сред является изотропной). В первом случае падающая волна будет перпендикулярна границе (а преломленная — не обязательно), а во втором случае преломленная волна перпендикулярна границе (а падающая — не обязательно).

9.3. Возникновение двух или нескольких преломленных лучей

Для возникновения двух преломленных лучей необходимо, чтобы изочастотная зависимость среды, в которую волна преломляется, и проектирующая прямая пересекались в двух точках, для которых должно выполняться условие преломления (23). Очевидно также, что при этом изочастотная зависимость исходной среды и та же проектирующая прямая должны пересекаться в точке, для которой выполняется условие падения (21). Можно сформулировать следующее правило.

При определенной ориентации границы по отношению к оси симметрии изочастотной зависимости среды, в которую волна преломляется, возникает не менее двух преломленных лучей, если изочастотная зависимость этой среды обладает хотя бы одним из следующих свойств³⁷:

- 1) состоит из двух кривых, одна из которых замкнутая;
- 2) состоит из трех и более кривых;
- 3) одна из кривых изочастотной зависимости имеет точки перегиба.

Изочастотные зависимости оптических кристаллов обладают первым из указанных свойств (см., например, рис. 1б), что и является причиной возникновения в них двух преломленных лучей (при соответствующей поляризации падающего луча) [4, 5, 50].

Поскольку сформулированное правило совпадает с правилом, описывающим появление двух отраженных лучей, то пояснения к правилу можно найти в предыдущем разделе. Кроме того, ниже рассматривается пример, в котором возникают два преломленных луча за счет наличия в изочастотной зависимости точки перегиба.

9.4. Положительное и отрицательное преломление

Чтобы сформулировать условия, когда преломление из одной анизотропной среды в другую будет положительным и когда отрицательным (при этом важно лишь, чтобы преломление действительно имело место³⁸, и совершенно неважно, из какой среды в какую преломляется луч), исследуем изочастотные зависимости обеих сред на наличие экстремумов и особых точек в системе координат $\Sigma'_k = \{0; k_b, k_n\}$. Опишем вначале указанное исследование для произвольных изочастотных зависимостей, а затем рассмотрим его на примере изочастотных зависимостей поверхностной МСВ, преломляющейся из свободной ферритовой пленки в структуру ФДМ.

Пусть изочастотная зависимость некоторой волны в исходной среде описывается дисперсионным уравнением $F(k_{y1}, k_{z1}) = 0$, а во второй среде, в которую волна преломляется, — уравнением $G(k_{y2}, k_{z2}) = 0$ ³⁹. Для описания обеих изочастотных зависимостей в системе координат $\Sigma'_k = \{0; k_b, k_n\}$ произведем замены переменных по аналогии с формулой (32). Тогда изочастотные зависимости волны в каждой из сред будут описываться уравнениями $F(k_b, k_n) = 0$ и $G(k_b, k_n) = 0$ или, если из этих уравнений переменную k_n можно выразить в явном виде, зависимостями $k_n = P(k_b)$ и $k_n = R(k_b)$. Пусть также диапазон значений⁴⁰ $k_{b\text{min}} < k_b < k_{b\text{max}}$ является пересечением двух диапазонов значений переменной k_b , в одном из которых расположена зависимость $P(k_b)$, а в другом — зависимость $R(k_b)$. Разобьем весь диапазон значений $k_{b\text{min}} < k_b < k_{b\text{max}}$ на интервалы, разделенные точками $k_{b1}, k_{b2}, \dots, k_{bm}$, в которых хотя бы одна из производных $\partial P/\partial k_b$ или $\partial R/\partial k_b$ равна нулю или стремится к бесконечности либо одна из зависимостей $P(k_b)$ или $R(k_b)$ имеет разрыв. Очевидно, что каждому интервалу $k_{b\text{min}} < k_b < k_{b1}$, $k_{b1} < k_b < k_{b2}, \dots, k_{bm} < k_b < k_{b\text{max}}$ и каждой точке $k_{b1}, k_{b2}, \dots, k_{bm}$ будет соответствовать определенный характер преломления волны, поскольку в каждой из точек $k_{b1}, k_{b2}, \dots, k_{bm}$ либо вектор групповой скорости падающей волны \mathbf{V}_i , либо вектор групповой скорости преломленной волны \mathbf{V}_{refr} будет коллинеарен или перпендикулярен вектору \mathbf{k}_{n0} (и вектору нормали \mathbf{n}_0).

При анализе зависимостей $P(k_b)$ и $R(k_b)$ следует иметь в виду, что они, как правило, не являются функциями, и каждому значению k_b , лежащему в одном из перечисленных выше интервалов, может соответство-

³⁸ Например, чисто теоретически можно рассмотреть преломление электромагнитной волны из воздуха через прямой торец магнитной пластины, полагая, что преломленный луч будет представлять собой МСВ. Однако в действительности реализовать такое преломление невозможно.

³⁹ Оси симметрии (оптические оси) первой и второй сред не обязательно будут параллельны друг другу, поэтому в общем случае дисперсионные уравнения сред могут быть записаны в разных системах координат.

⁴⁰ Здесь и далее см. также пояснения, приведенные в сносках к разделу 8.4.

³⁷ См. сноску 27.

вать несколько значений k_n ; поэтому удобно считать, что зависимости $P(k_b)$ и $R(k_b)$ в каждом таком интервале состоят из отдельных участков $P_0(k_b), P_1(k_b), P_2(k_b), \dots$ и $R_1(k_b), R_2(k_b), R_3(k_b), \dots$.

Очевидно, что для возникновения преломления в каких-либо из перечисленных выше интервалов или значений k_b необходимо, чтобы в данном интервале значений k_b (или при данном значении k_b) хотя бы для одного участка выполнялось условие падения (21), а для второго (или хотя бы для одного из других участков) — условие преломления (23). Участок зависимости $P(k_b)$, который удовлетворяет условию (21) и соответствует падающему лучу, обозначим $P_0(k_b)$, а участок, который удовлетворяет условию (23) и соответствует j -му преломленному лучу, обозначим $R_j(k_b)$ ⁴¹. Теперь можно сформулировать правило, определяющее характер отражения.

В тех интервалах значений k_b , где на участке изочастотной зависимости $R_j(k_b)$, соответствующем j -му преломленному лучу, производная $\partial R_j / \partial k_b$ имеет такой же знак, что и производная $\partial P_0 / \partial k_b$ на участке $P_0(k_b)$, соответствующем падающему лучу, j -й преломленный луч испытывает положительное преломление. Если же знаки производных $\partial R_j / \partial k_b$ и $\partial P_0 / \partial k_b$ разные, то j -й преломленный луч испытывает отрицательное преломление. При тех значениях k_b из множества $\{k_{b1}, k_{b2}, \dots, k_{bm}\}$, при которых производная $\partial P_0 / \partial k_b = 0$, падающий луч ориентирован нормально к границе, а если $\partial R_j / \partial k_b = 0$, то j -й преломленный луч ориентирован нормально к границе.

Рассмотрим кратко, как это правило работает на конкретном примере, в котором поверхностная МСВ преломляется из свободной ферритовой пленки в структуру ФДМ (рис. 10)⁴². При данной ориентации границы раздела по отношению к общей оси симметрии изочастотных зависимостей обеих сред на зависимостях $P(k_b)$ и $R(k_b)$ возникает шесть точек экстремума, четыре из которых, обозначенные буквами A, B, C и D , показаны⁴³ на рис. 10. В зависимости от того, какой конкретно вектор \mathbf{k}_i (или его проекция на границу k_b^{pr}) будет соответствовать падающему лучу, возникнут следующие случаи преломления:

1) если значение k_b^{pr} лежит в интервале $k_b^{\text{pr}} \leq k_{b1}$, то проектирующая прямая, проведенная через конец вектора \mathbf{k}_i , пересечет кривую 2 зависимости $R(k_b)$ в одной точке, которой соответствует положительное преломление, так как знаки производных $\partial P / \partial k_b$ и $\partial R / \partial k_b$ одина-

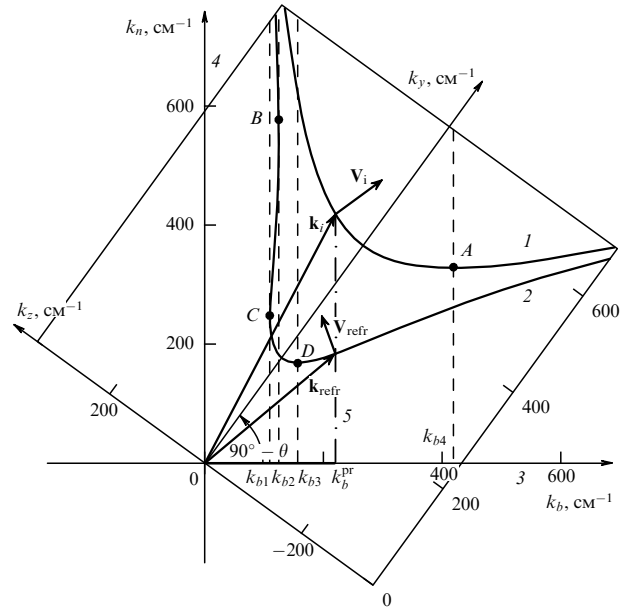


Рис. 10. Определение характера преломления на примере поверхностной МСВ в системе координат, связанной с границей и нормалью: 1, 2 — изочастотные кривые, 3 — граница пленки и связанная с ней ось k_b , 4 — нормаль к границе и связанная с ней ось k_n , 5 — проектирующая прямая, A, B, C и D — точки экстремума изочастотной зависимости в системе координат $k_b k_n$.

ковы (отметим, что участки изочастотных зависимостей $P(k_b)$ и $R(k_b)$, соответствующие этому случаю, расположены далеко от начала координат и поэтому не видны на рис. 10);

2) если значение k_b^{pr} лежит в интервале $k_{b1} < k_b^{\text{pr}} < k_{b2}$, то проектирующая прямая пересечет кривую 2 в трех точках, которые будут лежать на участках $R_1(k_b)$ (ниже точки C), $R_2(k_b)$ (участок BC кривой 2) и $R_3(k_b)$ (выше точки B) зависимости $R(k_b)$; второй из перечисленных точек не будет соответствовать преломлению, так как для нее не выполняется условие (23), а две другие точки дадут положительное преломление (знаки производных $\partial P / \partial k_b$ и $\partial R / \partial k_b$ одинаковы); т.е. всего возникает два луча с положительным преломлением;

3) если значение k_b^{pr} лежит в интервале $k_{b2} \leq k_b^{\text{pr}} < k_{b3}$, то, как и в случае 1, проектирующая прямая пересечет кривую 2 в одной точке, которой соответствует положительное преломление (знаки производных $\partial P / \partial k_b$ и $\partial R / \partial k_b$ одинаковы);

4) если значение $k_b^{\text{pr}} = k_{b3}$, т.е. проектирующая прямая проходит через точку D , то преломленный луч будет направлен перпендикулярно к границе раздела, хотя падающий луч направлен под углом к ней;

5) если значение k_b^{pr} лежит в интервале $k_{b3} < k_b^{\text{pr}} < k_{b4}$, то проектирующая прямая пересечет кривую 2 в одной точке, которой соответствует отрицательное преломление (знаки производных $\partial P / \partial k_b$ и $\partial R / \partial k_b$ различны);

6) если значение $k_b^{\text{pr}} = k_{b4}$, т.е. конец вектора \mathbf{k}_i проходит через точку A , то падающий луч будет направлен перпендикулярно к границе раздела, хотя преломленный луч направлен под углом к ней;

7) если значение k_b^{pr} лежит в интервале $k_b^{\text{pr}} > k_{b4}$, то, как и в случаях 1 и 3, проектирующая прямая пересечет кривую 2 в одной точке, которой соответствует положительное преломление (знаки производных $\partial P / \partial k_b$ и $\partial R / \partial k_b$ одинаковы).

⁴¹ См. сноску 27.

⁴² При описании указанного преломления можно считать, что все кривые изочастотных зависимостей для поверхностной МСВ как в свободной пленке, так и в структуре ФДМ описывают волны с одинаковой поляризацией.

⁴³ Рисунок 10 получен из рис. 6 путем поворота системы координат $k_y k_z$ на угол $90^\circ - \theta$, причем значение θ на рис. 10 выбрано не такое, как на рис. 6, чтобы продемонстрировать появление дополнительных точек экстремума, обусловленных наличием на изочастотной зависимости $R(k_b)$ точек перегиба. Четыре точки экстремума, показанные на рис. 10, расположены в положительной полуплоскости значений k_y . Еще две точки экстремума расположены на изочастотных кривых, лежащих в отрицательной полуплоскости значений k_y (аналогично тому, как на рис. 9 расположена точка B). Однако при данной ориентации границы для всех точек, лежащих на этих кривых, не выполняются условия падения (21) и преломления (23), поэтому, для большей наглядности на рис. 10 показана только положительная полуплоскость значений k_y .

Отметим, что изложенное правило справедливо независимо от того, имеет ли волна в одной или в обеих средах прямой или обратный характер. Данное утверждение наглядно можно продемонстрировать именно на примере преломления МСВ из свободной пленки в структуру ФДМ. Как известно, при определенном изменении параметров структуры ФДМ ее изочастотная зависимость еще больше вытягивается в направлении начала координат [47], причем некоторые участки зависимости начинают описывать обратные волны еще до того, как на этой зависимости образуется автономный овал (как на рис. 2в). Очевидно, что если на рис. 10 вместо кривой 2 была бы использована такая зависимость (имеющая участки, описывающие обратную волну), то приведенный выше анализ практически не изменился бы (разве что на указанной изочастотной зависимости появились бы точки, для которых векторы \mathbf{k}_{refr} и \mathbf{V}_{refr} были бы перпендикулярны друг другу и волна оказалась бы нераспространяющейся).

Отрицательное преломление МСВ из свободной ферритовой пленки в структуру ФДМ наблюдалось в эксперименте [24].

Аналогичным образом можно провести анализ характера преломления и для любых других анизотропных двумерных геометрий.

9.5. Отсутствие преломленного луча

Отсутствие преломленного луча (известное также как полное внутреннее отражение) — широко известное в изотропных средах явление и возникает, если использовать терминологию оптики, при преломлении волны из любой оптически более плотной среды (где величина k больше) в оптически менее плотную среду (где величина k меньше). Это явление имеет место и в анизотропных средах, причем значение предельного угла не является константой для двух данных сред, а зависит от ориентации осей симметрии изочастотных зависимостей сред по отношению к границе. Из рисунка 6 легко видеть, что при преломлении МСВ из свободной пленки в структуру ФДМ преломленный луч возникает всегда (при любой ориентации границы), а при преломлении из структуры ФДМ в свободную пленку — не всегда. По-видимому, нельзя сформулировать какое-то общее правило для всех анизотропных сред, предсказывающее отсутствие преломленного луча. Определенно можно сказать лишь, что для отсутствия преломленного луча либо условие (23) не должно выполняться (т.е. не должно быть точек пересечения проектирующей прямой с изочастотной зависимостью второй среды, в которую волна преломляется), либо поляризация падающего луча должна быть такой по отношению к выделенным направлениям второй среды, что тем точкам пересечения, для которых выполняется условие (23), будут соответствовать волны с нулевой амплитудой (см., например, [5, с. 383]).

9.6. Необратимость хода лучей при преломлении

Если изочастотная зависимость хотя бы одной из сред не является центрально-симметричной, то возникает необратимость хода лучей при преломлении. Это правило следует из закона о невязном распространении волны (см. раздел 6.4). Предположим для определенности, что изочастотная зависимость среды, в которую волна преломляется, не является центрально-симметричной (как на рис. 6), а также, что падающий и преломленный лучи описываются векторами \mathbf{V}_i , \mathbf{k}_i и $\mathbf{V}'_{\text{refr}}$, $\mathbf{k}'_{\text{refr}}$ соответственно. Если найти на изочастотной зависимости структуры ФДМ точку, которая описывает луч с волновым вектором \mathbf{k}'_i и групповой скоростью \mathbf{V}'_i , направ-

ленной противоположно вектору \mathbf{V}_i , то окажется, что $\mathbf{k}'_i \neq \mathbf{k}_{\text{refr}}$ (эта точка будет лежать на кривой 4 в левом верхнем квадранте плоскости k_y, k_z на рис. 6). Поэтому, если теперь луч с параметрами \mathbf{k}'_i , \mathbf{V}'_i рассматривать в качестве падающего и, применив к вектору \mathbf{k}'_i закон сохранения импульса, найти новый преломленный луч с параметрами $\mathbf{k}'_{\text{refr}}$, $\mathbf{V}'_{\text{refr}}$, то окажется, что $\mathbf{k}'_{\text{refr}} \neq \mathbf{k}_i$ и $\mathbf{V}'_{\text{refr}} \neq \mathbf{V}_i$.

10. Заключение

На основе анализа свойств различных изочастотных зависимостей (часто называемых также сечениями поверхности волновых векторов), описанных в ряде экспериментальных и теоретических работ, изложены законы геометрической оптики для двумерных геометрий анизотропных сред. Рассмотрено, как влияют на распространение, отражение и преломление волн такие геометрические и математические свойства изочастотных зависимостей, как наличие у них асимптот, точек перегиба и центральной симметрии, количество осей симметрии, однозначность или многозначность зависимости, наличие и количество точек экстремума в системе координат, связанной с нормалью к границе раздела сред. Показано, что в зависимости от наличия у изочастотной зависимости перечисленных свойств при распространении, отражении и преломлении волн в анизотропных средах могут возникать такие явления, как невозможность распространения волны в некоторых направлениях или в некотором секторе углов, невязное распространение (когда параметры противоположно направленных лучей различны), однонаправленное распространение (когда для данного луча не существует противоположно направленного луча, вплоть до случая, когда перенос энергии в среде может происходить вблизи одного-единственного направления), отрицательное отражение и преломление (когда отраженный, преломленный и падающий лучи располагаются с одной стороны от нормали к границе раздела), появление двух (или нескольких) отраженных или преломленных лучей, отсутствие отражения вообще, необратимость хода лучей при отражении и преломлении. В частности, если изочастотная зависимость не является центрально-симметричной фигурой, то в структуре возникают невязное распространение волн и необратимость хода лучей при отражении и преломлении. Если изочастотная зависимость является функцией в некоторой системе координат (когда каждому значению абсциссы соответствует одно значение ординаты), то возникает однонаправленное распространение волн и, когда граница параллельна оси абсцисс этой системы координат, отсутствует отражение. Наличие хотя бы на одной кривой изочастотной зависимости точек перегиба при определенной ориентации границы всегда приводит к возникновению двух отраженных лучей. При определенных ориентации границы и поляризации падающего луча два отраженных луча возникают также в случае, когда изочастотная зависимость состоит не менее чем из двух кривых, одна из которых является замкнутой. Показано, что при заданном расположении границы раздела сред по отношению к выделенным направлениям анизотропной среды характер отражения и преломления волны (положительный или отрицательный) при различных углах падения можно установить на основе исследования изочастотной зависимости на экстремум и наличие особых точек в системе координат, связанной с нормалью к границе.

Автор благодарит А.В. Вашковского и В.Г. Веселаго за полезные замечания, сделанные ими при обсуждении данной работы, а также В.Б. Волошинова за помощь в подготовке литературы по акустическим кристаллам.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 07-02-00233) и гранта РНП № 2.1.1.4639.

Список литературы

1. Веселаго В Г *УФН* **92** 517 (1967) [Veselago V G *Sov. Phys. Usp.* **10** 509 (1968)]
2. Smith D R, Pendry J B, Wiltshire M C K *Science* **305** 788 (2004)
3. Блюх К Ю, Блюх Ю П *УФН* **174** 439 (2004) [Bliokh K Yu, Bliokh Yu P *Phys. Usp.* **47** 393 (2004)]
4. Born M, Wolf E *Principles of Optics* (Oxford: Pergamon Press, 1969) [Борн М, Вольф Э *Основы оптики* (М.: Наука, 1970)]
5. Ландсберг Г С *Оптика* (М.: Наука, 1976)
6. Агранович В М, Гинзбург В Л *Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов* (М.: Наука, 1965) [Translated into English: Agranovich V M, Ginzburg V L *Crystal Optics with Spatial Dispersion, and Excitons* (Berlin: Springer-Verlag, 1984)]
7. Auld B A *Acoustic Fields and Waves in Solids* 2nd ed. (Malabar, Fla.: R.E. Krieger, 1990)
8. Сиротин Ю И, Шаскольская М П *Основы кристаллофизики* 2-е изд. (М.: Наука, 1979) [Translated into English: Sirotnin Yu I, Shaskolskaya M P *Fundamentals of Crystal Physics* (Moscow: Mir Publ., 1982)]
9. Dieulesaint E, Royer D *Ondes Elastiques Dans les Solides* (Paris: Masson, 1974) [Дьелесан Э, Руайе Д *Упругие волны в твердых телах* (М.: Наука, 1982); Translated into English: *Elastic Waves in Solids* (Chichester: J. Wiley, 1980)]
10. Гинзбург В Л, Рухадзе А А *Волны в магнитоактивной плазме* 2-е изд. (М.: Наука, 1975)
11. Felsen L B, Marcuvitz N *Radiation and Scattering of Waves* (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1973) [Фелсен Л, Маркувиц Н *Излучение и рассеяние волн* Т. 2 (М.: Мир, 1978)]
12. Вашковский А В, Стальмахов В С, Шараевский Ю П *Магнитостатические волны в электронике сверхвысоких частот* (Саратов: Изд-во Саратовского университета, 1993)
13. Stancil D D *Theory of Magnetostatic Waves* (New York: Springer-Verlag, 1993)
14. Гуревич А Г, Мелков Г А *Магнитные колебания и волны* (М.: Наука, 1994); Gurevich A G, Melkov G A *Magnetization Oscillations and Waves* (Boca Raton: CRC Press, 1996)
15. Voloshinov V B, Polikarpova N V *Acust. — Acta Acust.* **89** 930 (2003)
16. Polikarpova N V, Voloshinov V B *Proc. SPIE* **5953** 5953OC-1 (2005)
17. Damon R W, Eshbach J R J. *Phys. Chem. Solids* **19** 308 (1961)
18. Вашковский А В, Шахназарян Д Г *Письма в ЖТФ* **12** 908 (1986)
19. Вашковский А В, Шахназарян Д Г *Радиотехника и электроника* **32** 719 (1987)
20. Вашковский А В, Зубков В И, Локк Э Г, Щеглов В И *Радиотехника и электроника* **36** 1959 (1991)
21. Вашковский А В, Зубков В И, Локк Э Г, Щеглов В И *Радиотехника и электроника* **36** 2345 (1991)
22. Силин Р А *Необычные законы преломления и отражения* (М.: Фазис, 1999)
23. Вашковский А В, Зубков В И *Радиотехника и электроника* **48** 149 (2003) [Vashkovskii A V, Zubkov V I *J. Commun. Technol. Electron.* **48** 131 (2003)]
24. Вашковский А В, Локк Э Г *УФН* **174** 657 (2004) [Vashkovskii A V, Lokk E G *Phys. Usp.* **47** 601 (2004)]
25. Вашковский А В, Локк Э Г *УФН* **176** 403 (2006) [Vashkovsky A V, Lokk E H *Phys. Usp.* **49** 389 (2006)]
26. Силин Р А *Периодические волноводы* (М.: Фазис, 2002)
27. Вашковский А В, Локк Э Г *УФН* **176** 557 (2006) [Vashkovsky A V, Lokk E H *Phys. Usp.* **49** 537 (2006)]
28. Прохоров А М (Гл. ред.) *Физическая энциклопедия* Т. 3 (М.: Большая российская энциклопедия, 1992)
29. Виноградова М Б, Руденко О В, Сухоруков А П *Теория волн* 2-е изд. (М.: Наука, 1990)
30. Бронштейн И Н, Семендяев К А *Справочник по математике* (М.: Наука, 1986) [Translated into English: Bronshtein I N, Semendyaev K A *A Guide Book to Mathematics* (New York: Springer-Verlag, 1973)]
31. Brillouin L, Parodi M *Propagation des ondes d'ans les Milieux Periodiques* (Paris: Masson—Dunod, 1956) [Бриллюэн Л, Пароди М *Распространение волн в периодических структурах* (М.: ИЛ, 1959)]
32. Силин Р А *Вопросы радиоэлектроники. Сер. 1. Электроника* (4) 3 (1959)
33. Auld B A *Bell Syst. Techn. J.* **XLIV** 495 (1965)
34. Лисовский Ф В *Радиотехника и электроника* **14** 1511 (1969)
35. Стальмахов А В, Дисс. ... канд. физ.-мат. наук (М.: ИРЭ АН СССР, 1985)
36. Vashkovsky A V, Zubkov V I, Lokk E H, Shcheglov V I *IEEE Trans. Magn.* **26** 1480 (1990)
37. Силин Р А *Радиотехника и электроника* **47** 186 (2002) [Silin R A *J. Commun. Technol. Electron.* **47** 169 (2002)]
38. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Электродинамика сплошных сред* (М.: Наука, 1982) [Translated into English: Landau L D, Lifshitz E M *Electrodynamics of Continuous Media* (Oxford: Pergamon Press, 1984)]
39. Локк Э Г *Радиотехника и электроника* **52** 202 (2007) [Lokk E G *J. Commun. Technol. Electron.* **52** 189 (2007)]
40. Вашковский А В, Локк Э Г *Радиотехника и электроника* **51** 605 (2006) [Vashkovskii A V, Lokk E G *J. Commun. Technol. Electron.* **51** 568 (2006)]
41. van de Vaart H *Electron. Lett.* **6** 601 (1970)
42. Bongianini W L *J. Appl. Phys.* **43** 2541 (1972)
43. Yukawa T et al. *Jpn. J. Appl. Phys.* **16** 2187 (1977)
44. Зубков В И, Локк Э Г, Щеглов В И *Радиотехника и электроника* **34** 1381 (1989)
45. Зубков В И, Щеглов В И *Радиотехника и электроника* **52** 701 (2007) [Zubkov V I, Shcheglov V I *J. Commun. Technol. Electron.* **52** 653 (2007)]
46. Локк Э Г, Дисс. ... канд. физ.-мат. наук (М.: ИРЭ РАН, 1992)
47. Зубков В И, Щеглов В И *Радиотехника и электроника* **42** 1114 (1997) [Zubkov V I, Shcheglov V I *J. Commun. Technol. Electron.* **42** 1036 (1997)]
48. Волошинов В Б, Макаров О Ю, Поликарпова Н В *Письма в ЖТФ* **31** (8) 79 (2005) [Voloshinov V B, Makarov O Yu, Polikarpova N V *Tech. Phys. Lett.* **31** 352 (2005)]
49. Кизель В А *Отражение света* (М.: Наука, 1973)
50. Федоров Ф И, Филиппов В В *Отражение и преломление света прозрачными кристаллами* (Минск: Наука и техника, 1976)
51. Алексеева Л В, Повх И В, Строганов В И *Письма в ЖТФ* **25** (1) 46 (1999) [Alekseeva L V, Povkh I V, Stroganov V I *Tech. Phys. Lett.* **25** 19 (1999)]

The properties of isofrequency dependences and the laws of geometrical optics

E.H. Lock

Fryazino Branch of Institute of Radioengineering and Electronics, Russian Academy of Sciences, pl. akad. Vvedenskogo 1, 141190 Fryazino, Moscow region, Russian Federation
Tel. (7-496) 565-25 62. Fax (7-495) 702-95 72. E-mail: edwin@ms.ire.rssi.ru

The laws of geometrical optics for 2-D geometries of anisotropic media and structures are discussed by analyzing the geometric and mathematic properties of isofrequency dependences (also known as wave vector surface cross sections). Analysis is given of how these properties (including asymptotes, inflection points, central or axial symmetry, single- or multivaluedness) relate to phenomena such as nonreciprocal and unidirectional propagation, two (or several) reflective or refractive beams, absence of reflection, and irreversible reflective or refractive beam paths. It is shown how simple rules based on the extremum search for isofrequency dependences in a certain geometry allow one to establish which incident angles lead to positive and which to negative reflection and refraction.

PACS numbers: **42.15. -i**, 42.25.Gy, 78.20.Ci

DOI: 10.3367/UFNr.0178.200804d.0397

Bibliography — 51 references

Received 6 September 2007, revised 9 November 2007

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **178** (4) 397–417 (2008)

Physics—Uspekhi **51** (4) (2008)