

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Генерация собственных мод заданным током
в анизотропных и гиротропных средах

И.Н. Топтыгин, Г.Д. Флейшман

Развита теория генерации собственных мод однородной прозрачной анизотропной и гиротропной среды с временной и пространственной дисперсией заданным током. Используются разные подходы к нахождению дисперсионных зависимостей и векторов поляризации собственных мод. Прослежена тесная связь между главными значениями и собственными векторами максвелловского тензора и свойствами линейных собственных мод данной среды. Вычислена спектральная плотность энергии, излучаемой в среде в заданном направлении, для различных мод среды с разными фазовыми скоростями и поляризациями. Получены анизотропные факторы, изменяющие интенсивность излучения собственной моды по сравнению с таковой в случае изотропной среды с таким же показателем преломления. Рассмотрено несколько типичных примеров.

PACS numbers: 03.50.De, 41.20.Jb, 41.60. – m

DOI: 10.3367/UFNr.0178.200804c.0385

Содержание

1. Введение (385).
 2. Вычисление электрического поля (386).
 3. Дисперсионные соотношения для собственных мод анизотропной и гиротропной среды (387).
 4. Потери энергии тока на излучение (387).
 5. Главные значения и собственные векторы максвелловского тензора, их связь с модами среды (389).
 6. Спектральная плотность энергии генерируемых мод (391).
 7. Частные случаи (393).
 8. Заключение (395).
- Список литературы (396).

1. Введение

Задача об излучении электромагнитной энергии заданным током в анизотропной и гиротропной среде с дисперсией нетривиальна даже в упрощающих предположениях (однородная среда, пренебрежение диссипацией). Сложность проблемы по сравнению с аналогич-

ной задачей для вакуума либо изотропной среды вызвана наличием в общем случае в анизотропной среде с дисперсией большого числа собственных мод, для которых дисперсионные соотношения и геометрия векторов поляризации могут сильно различаться. Поэтому анализ собственных мод представляет собой необходимую составную часть общей проблемы излучения. Важные частные случаи рассматривались в литературе начиная с пионерских работ (см., например, [1–5]). Ряд полезных результатов и общих соотношений применительно к плазме и кристаллическим средам содержится в монографиях и обзорных статьях [6–19]. Однако общее решение задачи и подробное освещение вопроса о генерации собственных мод в анизотропных и гиротропных средах в известной нам общедоступной литературе (включая учебные пособия [20–24]) отсутствуют, хотя их важность для многих практических целей очевидна.

В настоящей статье для решения поставленной задачи мы используем как тензор диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k})$, так и более общий максвелловский тензор $T_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k})$ (см. формулу (7) в разделе 2), возникающий при записи уравнений Максвелла в представлении Фурье. Установлена связь собственных мод среды с главными значениями и собственными векторами максвелловского тензора. Хотя собственных векторов максвелловского тензора всего три, они описывают всю совокупность векторов поляризации собственных мод, число которых, вообще говоря, неограниченно. Показано, что собственные векторы $\mathbf{b}(\omega, \mathbf{k})$ превращаются в векторы поляризации $\mathbf{e}(\omega^\sigma(\mathbf{k}), \mathbf{k})$ путем присвоения их аргументам ω и $\mathbf{k}$ значений, удовлетворяющих дисперсионной зависимости $\omega = \omega^\sigma(\mathbf{k})$ соответствующей собственной моды. В известной нам литературе, в том числе цитированной выше, эти важные соотношения отсутствуют.

Получены общие выражения для спектральной плотности энергии, излучаемой в заданном направлении.

И.Н. Топтыгин. Санкт-Петербургский государственный политехнический университет,
ул. Политехническая 29, 195251 Санкт-Петербург,
Российская Федерация
Тел. (812) 552-65-01, (812) 742-95-38. Факс (812) 534-33-14
E-mail: cosmos@IT10242.spb.edu

Г.Д. Флейшман. Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,
ул. Политехническая 26, 194021 Санкт-Петербург,
Российская Федерация
Тел. (812) 292-73-68. Факс (812) 297-10-17
E-mail: gregory@sun.ioffe.rssi.ru
New Jersey Institute of Technology, Newark 07102, USA

Статья поступила 8 октября 2007 г.,
после доработки 21 декабря 2007 г.

Сформулированы правила интегрирования сингулярных выражений, удовлетворяющие принципу излучения. Общие выражения конкретизированы и применены к частным случаям среды без пространственной дисперсии, одноосной анизотропной среды, одноосной гиротропной среды в разных диапазонах частот и др.

Итак, вычислим спектральную плотность энергии, излучаемой некоторым заданным током $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ в определенном направлении в однородной анизотропной среде с исчезающе малым поглощением, но с учетом временной и пространственной дисперсии. Следует отметить, что в принципе в диспергирующей среде всегда имеется поглощение, пропорциональное антиэрмитовой части комплексного диэлектрического тензора. Этот факт явно следует из дисперсионных соотношений Крамерса – Кронига. Но в определенных частотных диапазонах поглощение может быть очень слабым. Именно такие "окна прозрачности" мы и будем ниже иметь в виду. Поле излучения будет рассматриваться на расстояниях от источника колебаний, которые меньше длины поглощения волн в данной среде, но больше зоны формирования излучения.

Исходим из баланса энергии в диспергирующей прозрачной среде:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \mathbf{S} = -\mathbf{j} \mathbf{E}, \quad (1)$$

где w , $\mathbf{S}$ — плотности энергии и потока энергии электромагнитного поля соответственно. Выражения для этих величин, которые нам далее не потребуются, можно найти в [24]. Правую часть уравнения (1) можно рассматривать как источник энергии поля, обусловленный сторонним током, если поле $\mathbf{E}$ генерируется этим же током. Проинтегрировав обе части уравнения (1) по всему пространству и по времени, найдем приращение W энергии поля за все время существования стороннего тока:

$$\begin{aligned} W &= - \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) d^3 r = \\ &= - \frac{2}{(2\pi)^4} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} d\omega \int \mathbf{j}^*(\omega, \mathbf{k}) \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}) d^3 k. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь мы перешли к представлению Фурье и использовали свойства компонент Фурье произвольной действительной функции $f^*(\omega, \mathbf{k}) = f(-\omega, -\mathbf{k})$. Равенство (2) можно переписать в форме

$$W = \int W_{\mathbf{k}\omega} d\omega d\Omega, \quad (3)$$

где $d\Omega$ — телесный угол вектора $\mathbf{k}$, $W_{\mathbf{k}\omega}$ — энергия, излучаемая сторонним током в направлении $\mathbf{k} = \mathbf{k}/k$ на частоте ω ,

$$W_{\mathbf{k}\omega} = - \frac{2}{(2\pi)^4} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \mathbf{j}^*(\omega, \mathbf{k}) \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}) k^2 dk. \quad (4)$$

Множитель 2 и знак выделения вещественной части в (2) и (4) появились из-за того, что в (2) интегрирование проводится только по положительным частотам.

2. Вычисление электрического поля

Вычислим теперь электрическое поле, создаваемое сторонним током $\mathbf{j}$ в анизотропной среде. Рассмотрим

однородную среду, электромагнитные свойства которой при действительных значениях $\mathbf{k}$, ω характеризуются эрмитовым тензором диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{\beta\alpha}^*(\omega, \mathbf{k})$ и магнитной проницаемостью $\mu = 1$. Электрические векторы связаны соотношением

$$D_{\alpha}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) E_{\beta}(\omega, \mathbf{k}). \quad (5)$$

Из векторных уравнений Максвелла следует, что вектор $\mathbf{E}$ макроскопического электрического поля удовлетворяет в представлении Фурье уравнению

$$T_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) E_{\beta}(\omega, \mathbf{k}) = -i \frac{4\pi}{\omega} j_{\alpha}(\omega, \mathbf{k}), \quad (6)$$

где тензор

$$T_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_{\alpha} k_{\beta}}{k^2} \right) \quad (7)$$

для краткости мы будем называть максвелловским [25].

Запишем решение системы (6) через обратный тензор $\hat{T}^{-1}$, удовлетворяющий условию $T_{\alpha\beta}(\hat{T}^{-1})_{\beta\nu} = \delta_{\alpha\nu}$:

$$E_{\beta} = -i \frac{4\pi}{\omega} (\hat{T}^{-1})_{\beta\nu} j_{\nu}. \quad (8)$$

Как известно из линейной алгебры [26–29], при $\Delta \neq 0$

$$(\hat{T}^{-1})_{\beta\nu} = \frac{\Delta_{\nu\beta}}{\Delta}. \quad (9)$$

Здесь $\Delta = |T_{\alpha\beta}|$ — определитель тензора $T_{\alpha\beta}$, $\Delta_{\beta\nu}$ — его алгебраические дополнения. Явный вид обратного тензора может оказаться довольно сложным; его различные частные случаи для холодной и горячей магнитоактивной плазмы приведены в [25]. С помощью (8), (9) записываем электрическое поле в виде

$$E_{\alpha} = -i \frac{4\pi}{\omega \Delta} j_{\nu} \Delta_{\nu\alpha}. \quad (10)$$

Этот вектор в анизотропной и гиротропной среде в общем случае не является поперечным относительно $\mathbf{k}$. Поперечное направление имеют векторы индукций $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$.

С учетом (10) потерю энергии заданного тока $\mathbf{j}$ в среде согласно (4) можно представить интегралом

$$W_{\mathbf{k}\omega} = \frac{1}{2\pi^3} \operatorname{Re} i \int_0^{\infty} \frac{j_{\nu} \Delta_{\nu\alpha} j_{\alpha}^*}{\omega \Delta(\omega, \mathbf{k})} k^2 dk. \quad (11)$$

Необходимое и достаточное условие существования обратного тензора (9) — отличие определителя Δ от нуля, $\Delta \neq 0$. Поскольку при интегрировании по вещественным значениям $\mathbf{k}$, ω на пути интегрирования имеются точки, в которых $\Delta = 0$, необходимо ввести правила обхода этих точек в комплексной плоскости таким образом, чтобы генерированные сторонним током возмущения асимптотически (на больших расстояниях) представляли собой расходящиеся сферические волны. Аналогичное правило обхода вводится и в случае вакуума. В среде для получения нужного результата достаточно учесть малое затухание, т.е. малую антиэрмитову часть тензора диэлектрической проницаемости. К этому вопросу мы вернемся при выполнении интегрирований, но прежде получим более наглядное выражение для излучаемой энергии и установим его связь с собственными модами среды.

3. Дисперсионные соотношения для собственных мод анизотропной и гиротропной среды

Дисперсионные зависимости и векторы поляризации $e_\beta(\omega, \mathbf{k})$ собственных мод должны вычисляться из системы однородных уравнений

$$T_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) e_\beta(\omega, \mathbf{k}) = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (12)$$

Условием существования нетривиального решения этой системы является равенство нулю ее определителя

$$\Delta(\omega, \mathbf{k}) = |T_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k})| = 0. \quad (13)$$

Эрмитов тензор $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon'_{\alpha\beta} + i\varepsilon''_{\alpha\beta}$ имеет симметричную, $\varepsilon'_{\alpha\beta} = \varepsilon'_{\beta\alpha}$, действительную часть и антисимметричную, $\varepsilon''_{\alpha\beta} = -\varepsilon''_{\beta\alpha}$, мнимую часть. Последнюю можно записать через псевдовектор гирации g_α :

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon'_{\alpha\beta} + i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} g_\gamma. \quad (14)$$

Примем во внимание инвариантность определителя тензора относительно пространственных поворотов и выберем координатные оси вдоль взаимно перпендикулярных главных осей симметричного тензора $\varepsilon'_{\alpha\beta}$, обозначив его главные значения через $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. В указанных осях тензор $T_{\alpha\beta}$ принимает вид

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 - n^2(1 - \kappa_1^2) & ig_3 + n^2\kappa_1\kappa_2 & -ig_2 + n^2\kappa_1\kappa_3 \\ -ig_3 + n^2\kappa_1\kappa_2 & \varepsilon_2 - n^2(1 - \kappa_2^2) & ig_1 + n^2\kappa_2\kappa_3 \\ ig_2 + n^2\kappa_1\kappa_3 & -ig_1 + n^2\kappa_2\kappa_3 & \varepsilon_3 - n^2(1 - \kappa_3^2) \end{pmatrix}, \quad (15)$$

где $\mathbf{k} = \mathbf{k}/k$ — единичный вектор в направлении распространения волны, $n = ck/\omega$ — коэффициент преломления.

Приравняв нулю определитель Δ , найдем значения показателей преломления собственных мод рассматриваемой среды. Раскрывая определитель, убеждаемся, что слагаемые, пропорциональные n^6 , взаимно сокращаются и уравнение относительно n^2 приобретает вид

$$an^4 - [\varepsilon_1(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)\kappa_1^2 + \varepsilon_2(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)\kappa_2^2 + \varepsilon_3(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\kappa_3^2 + (\mathbf{\kappa g})^2 - \mathbf{g}^2]n^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 - \varepsilon_1g_1^2 - \varepsilon_2g_2^2 - \varepsilon_3g_3^2 = 0, \quad (16)$$

$$a(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_1\kappa_1^2 + \varepsilon_2\kappa_2^2 + \varepsilon_3\kappa_3^2.$$

Уравнение (16) является обобщением для случая гиротропной среды хорошо известного в кристаллооптике уравнения Френеля (см. [30]). Величина $a(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{\alpha\beta}\kappa_\alpha\kappa_\beta$ представляет собой продольную относительно вектора $\mathbf{k}$ диэлектрическую проницаемость, $a = \varepsilon^1(\omega, \mathbf{k})$.

Если рассматривать (16) как квадратное уравнение относительно явно входящей в него величины n^2 , то можно легко найти два корня этого уравнения n_1^2, n_2^2 . Это позволяет записать определитель (13) максвелловского тензора в виде произведения трех сомножителей:

$$\Delta = a(n^2 - n_1^2)(n^2 - n_2^2), \quad (17)$$

причем обращение в нуль каждого из сомножителей приводит к правильной дисперсионной зависимости возможных собственных мод.

Удобство записи определителя в форме (17) проявляется в том случае, когда пространственная дисперсия отсутствует, т.е. величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, g$ зависят только от ω , но не от абсолютной величины $|\mathbf{k}|$. Тогда соотношения $n^2 = n_{1,2}^2$ оказываются *решениями* уравнения дисперсии, так что в каждом направлении (при заданном $\mathbf{k}$) в рассматриваемой среде могут распространяться две волны с разными, вообще говоря, фазовыми скоростями $v_{1,2} = c/n_{1,2}$, где $n_{1,2}(\omega, \mathbf{k})$ — положительные решения биквадратного уравнения (16), зависящие только от частоты и направления распространения соответствующей волны. Корни n_i^2 в некоторых диапазонах частот могут быть отрицательными. При эрмитовом тензоре диэлектрической проницаемости это означает затухание без диссипации, т.е. отсутствие соответствующей моды. Соотношение $a = 0$ соответствует в этом случае колебательным модам среды, свойства которых не зависят от величины волнового вектора, причем вектор электрического поля в этих модах направлен вдоль вектора $\mathbf{k}$, т.е. колебания являются продольными.

При наличии пространственной дисперсии соотношения $a = 0$ и $n^2 = n_{1,2}^2$ представляют собой *уравнения*, из которых нужно определить показатели преломления, а не решения уравнения дисперсии, поскольку a и $n_{1,2}$ сами являются функциями n . Поэтому, в принципе, число собственных мод, являющихся решениями этих уравнений, ничем не ограничено. Для нахождения коэффициентов преломления в этом случае необходимо задаться явной зависимостью диэлектрического тензора от ω и $\mathbf{k}$.

4. Потери энергии тока на излучение

Рассмотрим в этом разделе случай, когда величины $n_{1,2}(\omega, \mathbf{k})$ известны и представляют собой коэффициенты преломления. Воспользуемся формулой (11) для излучаемой в данном направлении спектральной плотности энергии. Используя (17), запишем знаменатель подынтегрального выражения в (11) в виде

$$\frac{1}{\omega\Delta} = \frac{\omega}{ac^2(n_1^2 - n_2^2)} \left(\frac{1}{k^2 - \omega^2 n_1^2/c^2} - \frac{1}{k^2 - \omega^2 n_2^2/c^2} \right). \quad (18)$$

В итоге запись потерь на излучение (11) принимает форму

$$W_{\kappa\omega} = \frac{1}{2\pi^3} \operatorname{Re} i \int_0^\infty \frac{\omega j_x \Delta_{\alpha\beta} j_\beta^*}{ac^2(n_1^2 - n_2^2)} \times \left(\frac{1}{k^2 - \omega^2 n_1^2/c^2} - \frac{1}{k^2 - \omega^2 n_2^2/c^2} \right) k^2 dk. \quad (19)$$

При интегрировании учтем малое затухание собственных мод, приводящее к наличию малых положительных мнимых частей коэффициентов преломления: $\operatorname{Im} n_\sigma^2 > 0$ при $\omega > 0$. Эти условия и дают правила интегрирования в окрестностях особых точек, так как

$$\operatorname{Re} \frac{i}{k^2 - \omega^2 n_\sigma^2/c^2} \Big|_{\operatorname{Im} n_\sigma^2 \rightarrow +0} \rightarrow -\frac{\pi}{2k} \delta\left(k - \frac{\omega n_\sigma}{c}\right), \quad \sigma = 1, 2. \quad (20)$$

Следует также учесть, что тензор $\Delta_{\mu\nu}$ эрмитов, $\Delta_{\mu\nu} = \Delta_{\nu\mu}^*$. Поэтому свертка $j_\mu \Delta_{\mu\nu} j_\nu^*$ действительна при действи-

тельных ω , $\mathbf{k}$. После интегрирования (19) с помощью (20) получим

$$W_{\kappa\omega} = -\frac{\omega^2}{4\pi^2 a c^3 (n_1^2 - n_2^2)} (n_1 (j_x A_{\alpha\beta} j_\beta^*) - n_2 (j_x A_{\alpha\beta} j_\beta^*)_2). \quad (21)$$

Представим теперь алгебраические дополнения, входящие в (21), через векторы поляризации собственных мод среды. Убедимся в том, что вектор поляризации можно записать в виде

$$e_\beta^{(i)} = A^i \Delta_{\mu\beta}^{(i)}, \quad (22)$$

где i — номер корня, A^i — постоянная нормировки, индекс μ имеет произвольное значение. При подстановке значения $n = n_i$ и решения (22) в систему (12) она превращается в систему тождеств, причем два равенства (с $\mu \neq \alpha$) выполняются независимо от значения n , а третье (с $\mu = \alpha$) при $n = n_i$ выполняется вследствие обращения в нуль определителя. Аналогичным образом, пользуясь эрмитовостью тензора $T_{\alpha\beta}$, убеждаемся в том, что первый индекс алгебраического дополнения нумерует компоненты комплексно сопряженного вектора поляризации e_μ^* . Это позволяет выразить алгебраические дополнения при $n = n_i$ через нормированные векторы поляризации:

$$\Delta_{\mu\nu}^{(i)} = C^{(i)} e_\mu^* e_\nu, \quad (23)$$

где $e_\mu^* e_\mu = 1$, $C^{(i)} = \Delta_{\mu\mu}^{(i)}$ — действительная постоянная нормировки, которая может иметь разные знаки. Подчеркнем, что алгебраические дополнения сводятся к векторам поляризации *только* при выполнении соответствующего дисперсионного соотношения; в произвольном случае соотношение (23) не имеет места.

С учетом последних соотношений спектральная плотность излучения запишется через векторы поляризации:

$$W_{\kappa\omega} = \frac{\omega^2}{4\pi^2 a(\omega, \mathbf{k}) c^3 (n_2^2 - n_1^2)} \times \\ \times (n_1 C^{(1)} |(e_\mu^{(1)*} j_\mu)|^2 - n_2 C^{(2)} |(e_\mu^{(2)*} j_\mu)|^2). \quad (24)$$

Формула (24) описывает преобразование энергии стороннего тока в энергию электромагнитного излучения и при переходе к вакуумному случаю ($\varepsilon_{\alpha\beta} \rightarrow \delta_{\alpha\beta}$) должна давать излучение поперечных вакуумных мод. Но при указанном предельном переходе в выражении (24) возникает неопределенность 0/0; для раскрытия этой неопределенности целесообразно вернуться к предыдущим этапам вычислений.

При $\varepsilon_{\alpha\beta} \rightarrow \delta_{\alpha\beta}$, обращаясь к выражению (15), получаем соответствующие предельные представления для определителя и его алгебраических дополнений:

$$\Delta \rightarrow \Delta^0 = (1 - n^2)^2, \quad (25) \\ \Delta_{\alpha\beta} \rightarrow \Delta_{\alpha\beta}^0 = (1 - n^2)(\delta_{\alpha\beta} - n^2 \kappa_\alpha \kappa_\beta).$$

При подстановке соотношений (25) в формулу (10) общий множитель в числителе и знаменателе сокращается и мы получаем фурье-образ электрического

поля, созданного сторонним током в вакууме:

$$\mathbf{E} = -i \frac{4\pi}{\omega(1 - n^2)} (\mathbf{j} - n^2 (\mathbf{\kappa} \mathbf{j}) \mathbf{\kappa}) = \\ = -i \frac{4\pi\omega}{\omega^2 - c^2 k^2} \left(\mathbf{j} - \frac{c^2 (\mathbf{k} \mathbf{j}) \mathbf{k}}{\omega^2} \right). \quad (26)$$

Из формулы (4), подставляя в нее значение поля в вакууме (26), находим

$$W_{\kappa\omega} = \frac{\omega^3}{2\pi^3 c^4} \operatorname{Re}(-i) \int_0^\infty \frac{|\mathbf{j}_\perp(\omega, \mathbf{k})|^2 dk}{k^2 - \omega^2/c^2}. \quad (27)$$

Выбор запаздывающего решения осуществляется добавлением к частоте ω бесконечно малой положительной мнимой части, что приводит к известному выражению

$$W_{\kappa\omega} = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^3} |\mathbf{j}_\perp(\omega, \mathbf{k})|^2, \quad (28)$$

описывающему излучение двух вакуумных мод с поперечными поляризациями.

Рассмотренные выше волны в среде можно назвать квазипоперечными, так как они, выходя из среды, превращаются в чисто поперечные вакуумные моды и имеют отличный от нуля магнитный вектор, $\mathbf{B} \neq 0$. Последнее условие было использовано при получении уравнения (6). В средах могут существовать также моды с $\mathbf{B} = 0$ и чисто продольным (относительно направления распространения) электрическим полем, которые удовлетворяют в представлении Фурье уравнениям

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = 0, \quad k_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta} E_\beta = -i \frac{4\pi}{\omega} k_\alpha j_\alpha(\omega, \mathbf{k}). \quad (29)$$

Ищем поле в виде $\mathbf{E} = E_\parallel \mathbf{k}$ и из приведенных уравнений находим

$$E_\parallel = -i \frac{4\pi \mathbf{k} \mathbf{j}(\omega, \mathbf{k})}{\omega \varepsilon^1(\omega, \mathbf{k})}, \quad \varepsilon^1(\omega, \mathbf{k}) \equiv a(\omega, \mathbf{k}) = \kappa_\alpha \kappa_\beta \varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}). \quad (30)$$

Вычисление спектральной плотности генерированных продольных волн с помощью формулы (4) с учетом бесконечно малой мнимой части продольной диэлектрической проницаемости ε^1 приводит к результату

$$W_{\kappa\omega}^1 = \frac{1}{2\pi^2 \omega} \int_0^\infty dk |\mathbf{k} \mathbf{j}(\omega, \mathbf{k})|^2 \delta(\varepsilon^1(\omega, \mathbf{k})). \quad (31)$$

Здесь в отличие от формулы (24) должна быть учтена пространственная дисперсия. В ее отсутствие генерируемые током колебания не могут распространяться в виде волн и переносить энергию в пространстве. В пренебрежении пространственной дисперсией такие колебания могут существовать только при определенных дискретных частотах. Интегрирование в (31) можно выполнить, используя соотношения

$$\delta(\varepsilon^1(\omega, \mathbf{k})) = \sum_a \frac{\delta(k - k_a(\omega, \kappa))}{|\partial \varepsilon^1 / \partial k|}, \quad (32)$$

где суммирование проводится по всем корням уравнения $\varepsilon^1(\omega, \mathbf{k}) = 0$, определяющего законы дисперсии продольных волн в среде, т.е. по всем продольным волнам,

возможным в данной среде. Число таких мод может быть весьма велико.

5. Главные значения и собственные векторы максвелловского тензора, их связь с модами среды

Во многих случаях оказывается удобным рассматривать электромагнитные явления в той системе ортогональных базисных ортов, в которой максвелловский тензор имеет диагональный вид. В частности, это позволяет последовательно учитывать пространственную дисперсию при генерации квазипоперечных мод и исследовать поляризацию этих мод.

Примем во внимание, что если тензор диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k})$ эрмитов, то тензор $T_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k})$ также эрмитов. Как известно из линейной алгебры, главные значения $\lambda^{(m)}(\omega, \mathbf{k})$ ($m = 1, 2, 3$) эрмитова тензора действительны, а его собственные векторы $\mathbf{b}^{(m)}(\omega, \mathbf{k})$ в общем случае комплексны и взаимно ортогональны:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}^{(m)*}(\omega, \mathbf{k}) \mathbf{b}^{(m)}(\omega, \mathbf{k}) &= 1, \\ \mathbf{b}^{(m)*}(\omega, \mathbf{k}) \mathbf{b}^{(n)}(\omega, \mathbf{k}) &= 0 \quad \text{при } m \neq n. \end{aligned} \quad (33)$$

Те и другие должны вычисляться из системы алгебраических уравнений

$$T_{\alpha\beta} b_{\beta} = \lambda b_{\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (34)$$

Главные значения удовлетворяют алгебраическому уравнению третьей степени, которое получается при приравнении нулю определителя системы (34):

$$|T_{\alpha\beta} - \lambda \delta_{\alpha\beta}| = 0. \quad (35)$$

Решив уравнения (34), (35), тензор $T_{\alpha\beta}$, полученный из уравнений Максвелла, и обратный ему тензор можно записать через главные значения и комплексные собственные векторы:

$$T_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) = \sum_{m=1}^3 \lambda^{(m)}(\omega, \mathbf{k}) b_{\alpha}^{(m)}(\omega, \mathbf{k}) b_{\beta}^{(m)*}(\omega, \mathbf{k}), \quad (36)$$

$$(\hat{T}^{-1})_{\alpha\beta} = \sum_{m=1}^3 \frac{1}{\lambda^{(m)}(\omega, \mathbf{k})} b_{\alpha}^{(m)}(\omega, \mathbf{k}) b_{\beta}^{(m)*}(\omega, \mathbf{k}). \quad (37)$$

При перемножении этих тензоров будем иметь

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) (\hat{T}^{-1})_{\beta\gamma}(\omega, \mathbf{k}) &= \\ &= b_{\alpha}^{(1)} b_{\gamma}^{(1)*} + b_{\alpha}^{(2)} b_{\gamma}^{(2)*} + b_{\alpha}^{(3)} b_{\gamma}^{(3)*} = \delta_{\alpha\gamma}. \end{aligned}$$

Последнее равенство следует из свойства полноты собственных векторов эрмитова тензора.

Важно отметить, что в анизотропной среде собственные векторы $\mathbf{b}^{(m)}(\omega, \mathbf{k})$ существенно зависят от частоты и волнового вектора, что приводит к весьма значительному отличию данного случая от случая вакуума или изотропной среды. В изотропной среде имеет место поляризационное вырождение, позволяющее произвольным образом выбирать векторы поляризации электромагнитных волн в плоскости, перпендикулярной волновому вектору. Следствием этого вырождения является

возможность выбора одного и того же базиса собственных векторов для возмущений с любыми частотами при заданном направлении $\mathbf{k}$. В результате в изотропной среде взаимно ортогональными оказываются собственные векторы не только с одинаковыми, но и различными частотами и волновыми числами:

$$\mathbf{b}^{(m)}(\omega, k, \mathbf{k}) \mathbf{b}^{(n)*}(\omega', k', \mathbf{k}) = 0 \quad \text{при } m \neq n. \quad (38)$$

Поляризационное вырождение является следствием симметрии изотропной среды относительно поворотов на любые углы в плоскости, перпендикулярной вектору $\mathbf{k}$. В анизотропной среде такая симметрия в общем случае отсутствует (хотя и может существовать относительно выделенных направлений), поэтому ортогональность собственных векторов максвелловского тензора гарантирована лишь для совпадающих наборов ω и $\mathbf{k}$ (см. (33)).

Установим связь введенных выше величин с собственными электромагнитными модами анизотропной среды. Используя запись тензора через его главные значения (36), выразим через них определитель системы:

$$\Delta(\omega, \mathbf{k}) = \lambda^{(1)}(\omega, \mathbf{k}) \lambda^{(2)}(\omega, \mathbf{k}) \lambda^{(3)}(\omega, \mathbf{k}). \quad (39)$$

Условие (13) равенства нулю определителя означает, что как минимум одно из главных значений тензора должно обратиться в нуль:

$$\lambda^{(m)}(\omega, \mathbf{k}) = 0, \quad m = 1, 2, 3. \quad (40)$$

Уравнения (40) и дают дисперсионные зависимости $\omega^{\sigma}(\mathbf{k})$ собственных мод среды. Число таких мод в общем случае при наличии пространственной дисперсии ничем не ограничено.

Заметим, что обе формы записи определителя $\Delta(\omega, \mathbf{k})$, (17) и (39), представляют его в виде трех сомножителей. Это вызывает соблазн отождествить главные значения $\lambda^{(m)}$ максвелловского тензора с множителями a , $(n^2 - n_1^2)$, $(n^2 - n_2^2)$ [31]. Но такое отождествление было бы неверным, так как при этом нарушаются два других необходимых соотношения:

$$\begin{aligned} \lambda^{(1)} + \lambda^{(2)} + \lambda^{(3)} &= T_{11} + T_{22} + T_{33}, \\ \lambda^{(1)} \lambda^{(2)} + \lambda^{(1)} \lambda^{(3)} + \lambda^{(2)} \lambda^{(3)} &= A_{11} + A_{22} + A_{33}, \end{aligned} \quad (41)$$

которые становятся очевидными, если раскрыть определитель (35). К определению главных значений $\lambda^{(m)}$ мы вернемся в дальнейшем.

Выразим теперь компоненты собственных векторов через единичные вещественные орты декартовой системы координат, в которой записан максвелловский тензор (15). Рассмотрим для определенности собственный вектор, соответствующий первому главному числу $\lambda = \lambda^{(1)}$. Тогда, умножая (15) на $b_{\beta}^{(1)}$, с учетом (33) получим уравнение

$$T_{\alpha\beta} b_{\beta}^{(1)} = \lambda^{(1)} b_{\alpha}^{(1)}, \quad (42)$$

которое удобно переписать в виде

$$\tilde{T}_{\alpha\beta} b_{\beta}^{(1)} \equiv (T_{\alpha\beta} - \lambda^{(1)} \delta_{\alpha\beta}) b_{\beta}^{(1)} = 0. \quad (43)$$

Уравнение (43) всегда имеет решение, поскольку по определению главного числа определитель $\tilde{\Delta}$ тензора

$\tilde{T}_{\alpha\beta}$ всегда равен нулю. Раскрывая уравнение (43) в компонентах, получим

$$\tilde{T}_{11}b_1^{(1)} + \tilde{T}_{12}b_2^{(1)} + \tilde{T}_{13}b_3^{(1)} = 0, \quad (44)$$

$$\tilde{T}_{21}b_1^{(1)} + \tilde{T}_{22}b_2^{(1)} + \tilde{T}_{23}b_3^{(1)} = 0. \quad (45)$$

Третье уравнение мы не приводим, так как в силу равенства нулю определителя $\tilde{A}$ оно является линейной комбинацией двух выписанных уравнений. Выразив в этих уравнениях y - и z -компоненты вектора $\mathbf{b}^{(1)}$ через x -компоненту $b_1^{(1)}$, найдем

$$b_2^{(1)} = \frac{\tilde{T}_{21}\tilde{T}_{13} - \tilde{T}_{23}\tilde{T}_{11}}{\tilde{T}_{12}\tilde{T}_{23} - \tilde{T}_{13}\tilde{T}_{22}} b_1^{(1)}, \quad (46)$$

$$b_3^{(1)} = \frac{\tilde{T}_{12}\tilde{T}_{21} - \tilde{T}_{11}\tilde{T}_{22}}{\tilde{T}_{12}\tilde{T}_{23} - \tilde{T}_{13}\tilde{T}_{22}} b_1^{(1)}. \quad (47)$$

Замечая, что комбинации компонент тензора $\tilde{T}_{\alpha\beta}$ в числителе и знаменателе (46) и (47) представляют собой алгебраические дополнения элементов третьей строки тензора $\tilde{T}_{\alpha\beta}$: $\tilde{A}_{31} = \tilde{T}_{12}\tilde{T}_{23} - \tilde{T}_{13}\tilde{T}_{22}$, $\tilde{A}_{32} = \tilde{T}_{21}\tilde{T}_{13} - \tilde{T}_{23}\tilde{T}_{11}$, $\tilde{A}_{33} = \tilde{T}_{11}\tilde{T}_{22} - \tilde{T}_{12}\tilde{T}_{21}$, представим (46) и (47) в компактном виде:

$$b_2^{(1)} = \frac{\tilde{A}_{32}}{\tilde{A}_{31}} b_1^{(1)}, \quad b_3^{(1)} = \frac{-\tilde{A}_{33}}{\tilde{A}_{31}} b_1^{(1)}. \quad (48)$$

Это позволяет записать вектор $\mathbf{b}^{(1)}$ в форме разложения по единичным вещественным векторам исходной декартовой системы координат:

$$\mathbf{b}^{(1)} = C(\tilde{A}_{31}\mathbf{e}_x + \tilde{A}_{32}\mathbf{e}_y - \tilde{A}_{33}\mathbf{e}_z), \quad (49)$$

где постоянная C определяется из условия нормировки вектора $\mathbf{b}^{(1)}$ на единицу, так что

$$\mathbf{b}^{(1)} = \frac{\tilde{A}_{31}\mathbf{e}_x + \tilde{A}_{32}\mathbf{e}_y - \tilde{A}_{33}\mathbf{e}_z}{\sqrt{|\tilde{A}_{31}|^2 + |\tilde{A}_{32}|^2 + |\tilde{A}_{33}|^2}}. \quad (50)$$

Два других собственных вектора, $\mathbf{b}^{(2)}$ и $\mathbf{b}^{(3)}$, выражаются аналогичным образом, но тензор $\tilde{T}_{\alpha\beta}$ должен содержать вместо $\lambda^{(1)}$ главные значения $\lambda^{(2)}$ и $\lambda^{(3)}$ соответственно.

Теперь найдем связь между вектором поляризации данной собственной моды $\mathbf{e}^\sigma(\omega, \mathbf{k})$ и собственными векторами $\mathbf{b}^{(m)}(\omega, \mathbf{k})$ максвелловского тензора. Подставляя выражение (36) для $T_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k})$ в однородное уравнение (12), получим

$$\lambda^{(1)}b_x^{(1)}\mathbf{b}^{(1)}\mathbf{e}^\sigma + \lambda^{(2)}b_x^{(2)}\mathbf{b}^{(2)}\mathbf{e}^\sigma + \lambda^{(3)}b_x^{(3)}\mathbf{b}^{(3)}\mathbf{e}^\sigma = 0, \quad (51)$$

где для компактности опущены аргументы $(\omega, \mathbf{k})$ у переменных $\lambda^{(m)}$, $\mathbf{b}^{(m)}$, $\mathbf{e}^\sigma$.

Рассмотрим для определенности моду, которая соответствует условию $\lambda^{(1)}(\omega, \mathbf{k}) = 0$ (таких мод может быть несколько). При этом $\omega = \omega^\sigma(\mathbf{k})$, $\lambda^{(2)}(\omega^\sigma, \mathbf{k}) \neq 0$, $\lambda^{(3)}(\omega^\sigma, \mathbf{k}) \neq 0$. Тогда равенство (51) будет выполнено лишь при условии ортогональности вектора поляризации $\mathbf{e}^\sigma(\omega^\sigma, \mathbf{k})$ собственным векторам $\mathbf{b}^{(2)}(\omega^\sigma, \mathbf{k})$, $\mathbf{b}^{(3)}(\omega^\sigma, \mathbf{k})$. Это означает, что (при учете нормировки на единицу) вектор поляризации $\mathbf{e}^\sigma(\omega^\sigma, \mathbf{k})$ просто совпадает с собственным вектором $\mathbf{b}^{(1)}(\omega^\sigma, \mathbf{k})$ максвелловского тензора $T_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k})$. Обратим внимание на то, что два других собственных вектора, $\mathbf{b}^{(2)}(\omega^\sigma, \mathbf{k})$ и $\mathbf{b}^{(3)}(\omega^\sigma, \mathbf{k})$, не представляют собой векторов поляризации каких-либо собственных мод среды. Они превратятся в векторы

поляризации лишь при условиях соответственно $\lambda^{(2)}(\omega, \mathbf{k}) = 0$ и $\lambda^{(3)}(\omega, \mathbf{k}) = 0$, т.е. при выполнении закона дисперсии, характерного для собственной моды с тем же номером, а не в произвольном случае. В частности, *неортогональны* векторы поляризации обыкновенной и необыкновенной мод, распространяющихся в анизотропной среде в одном и том же направлении на одной и той же частоте, так как они будут различаться по абсолютной величине волнового вектора (вследствие различия показателей преломления).

В итоге мы показали, что векторы поляризации собственных мод среды конструируются из трех собственных векторов $\mathbf{b}^{(m)}(\omega^\sigma, \mathbf{k})$, $m = 1, 2, 3$, максвелловского тензора путем присвоения их аргументам ω и $\mathbf{k}$ значений, соответствующих дисперсионной зависимости $\omega = \omega^\sigma(\mathbf{k})$ соответствующей моды.

Наконец, получим выражения для векторов поляризации собственных электромагнитных мод данной анизотропной среды в явном виде. Для некоторой собственной моды, например, с номером 1, имеем $\lambda^{(1)} = 0$, поэтому тензор $\tilde{T}_{\alpha\beta}$ сводится просто к максвелловскому тензору $T_{\alpha\beta}$. Таким образом, вектор поляризации $\mathbf{e}^{(1)}$ выражается аналогично $\mathbf{b}^{(1)}$ через алгебраические дополнения максвелловского тензора (т.е. через величины A_{ab} без "тильды"):

$$\mathbf{e}^{(1)} = \frac{A_{31}\mathbf{e}_x + A_{32}\mathbf{e}_y - A_{33}\mathbf{e}_z}{\sqrt{|A_{31}|^2 + |A_{32}|^2 + |A_{33}|^2}}. \quad (52)$$

Разумеется, выражение (52) получается из (50) при подстановке в него $\lambda^{(1)} = 0$ и при учете в оставшихся членах соответствующего этому условию закона дисперсии. Вектор поляризации второй собственной моды $\mathbf{e}^{(2)}$ выражается аналогично (52), но при условии $\lambda^{(2)} = 0$ и соответствующем этому условию законе дисперсии. Может оказаться удобным разложить векторы поляризации по другим наборам алгебраических дополнений, например:

$$\mathbf{e}^{(1)} = \frac{-A_{11}\mathbf{e}_x + A_{12}\mathbf{e}_y + A_{13}\mathbf{e}_z}{\sqrt{|A_{11}|^2 + |A_{12}|^2 + |A_{13}|^2}} = \frac{A_{21}\mathbf{e}_x - A_{22}\mathbf{e}_y + A_{23}\mathbf{e}_z}{\sqrt{|A_{21}|^2 + |A_{22}|^2 + |A_{23}|^2}}. \quad (53)$$

Векторы поляризации различных собственных мод анизотропных сред, включая магнитоактивную плазму, приведены во многих монографиях и обзорных статьях (см., например, [6, 7, 19, 25]). Например, в монографии [6, с. 59] приведены компоненты векторов поляризации некоторых конкретных собственных мод магнитоактивной плазмы. В указанной монографии широко применяется квантово-механический язык, в частности вводится величина $N_k^\sigma(\mathbf{r}, t)$ — плотность числа плазменных данной моды σ с волновым вектором $\mathbf{k}$. Используется также понятие диэлектрической проницаемости $\epsilon_k^\sigma \equiv \epsilon^\sigma(\mathbf{k})$ для данной моды σ , уже учитывающее дисперсионную зависимость рассматриваемой волны. В настоящей статье мы ограничиваемся рамками классической электродинамики и не используем понятия плазменных. Но диэлектрическая проницаемость $\epsilon^\sigma(\mathbf{k})$ отдельных мод может быть введена, разумеется, и в нашем рассмотрении. Покажем, каким образом это можно сделать.

Из соотношений (36) и (33) выражаем для общего случая собственные значения максвелловского тензора

через его собственные векторы и тензор диэлектрической проницаемости:

$$\lambda^{(m)}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon^{(m)}(\omega, \mathbf{k}) - \frac{c^2 k^2}{\omega^2}, \quad (54)$$

где

$$\varepsilon^{(m)}(\omega, \mathbf{k}) = b_\alpha^{(m)*}(\omega, \mathbf{k}) \varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) b_\beta^{(m)}(\omega, \mathbf{k}) + \frac{c^2}{\omega^2} k_\alpha b_\alpha^{(m)*}(\omega, \mathbf{k}) k_\beta b_\beta^{(m)}(\omega, \mathbf{k}). \quad (55)$$

Обращение собственного числа (54) в нуль соответствует закону дисперсии, который при учете пространственной дисперсии может определять несколько собственных мод среды. Для каждой конкретной моды, как было показано выше, собственный вектор $\mathbf{b}$ превращается в вектор поляризации этой моды $\mathbf{e}$, а дисперсионное соотношение (40) при подстановке в него (54) принимает вид

$$\omega^2 \varepsilon^{(m)}(\omega, \mathbf{k}) - c^2 k^2 = 0. \quad (56)$$

Нумеруя индексом σ частоты собственных мод, порожденные собственным значением $\lambda^{(m)}(\omega, \mathbf{k})$, которые вычисляются из уравнения (56), мы получаем величины

$$\varepsilon_\sigma^{(m)}(\mathbf{k}) \equiv \varepsilon^{(m)}(\omega_m^\sigma(\mathbf{k}), \mathbf{k}) = e_\alpha^{(m)*}(\omega_m^\sigma(\mathbf{k}), \mathbf{k}) \varepsilon_{\alpha\beta}(\omega_m^\sigma(\mathbf{k}), \mathbf{k}) e_\beta^{(m)}(\omega_m^\sigma(\mathbf{k}), \mathbf{k}) + \frac{c^2}{k^2} |(\mathbf{k} \mathbf{e}^{(m)})|^2. \quad (57)$$

Здесь в правой части всюду частота ω заменяется частотой моды $\omega_m^\sigma(\mathbf{k})$, т.е. практически воспользоваться данными соотношениями можно только при уже известном законе дисперсии рассматриваемой моды. Величины (57), как следует из уравнения (56), представляют собой квадраты показателей преломления, относящихся к отдельным модам, поэтому они могут быть названы диэлектрическими проницаемостями по аналогии со случаем изотропной среды. Разумеется, два индекса, m и σ , можно объединить в один, как это сделано в монографии [6], и обозначать диэлектрическую проницаемость данной моды через $\varepsilon^\sigma(\mathbf{k})$.

6. Спектральная плотность энергии генерируемых мод

Вернемся к вычислению излученной энергии. С помощью формул (4), (8) и (37) получим

$$W_{\kappa\omega} = -\frac{1}{2\pi^3\omega} \operatorname{Im} \int_0^\infty k^2 dk \sum_{m=1}^3 \frac{|\mathbf{b}^{(m)*}(\omega, \mathbf{k}) \mathbf{j}(\omega, \mathbf{k})|^2}{\lambda^{(m)}(\omega, \mathbf{k})}. \quad (58)$$

Напомним, что в непоглощающей среде максвелловский тензор эрмитов, а его главные значения $\lambda^{(m)}(\omega, \mathbf{k})$ вещественны. Это означает, что для любых значений $\lambda^{(m)}(\omega, \mathbf{k}) \neq 0$ интеграл в (58) также вещественный, так что его мнимая часть (а следовательно, и излучаемая энергия) обращаются в нуль. Мнимый вклад возникает лишь при интегрировании в окрестностях тех точек, в которых величины $\lambda^{(m)}(\omega, \mathbf{k})$ обращаются в нуль. Но из условий $\lambda^{(m)}(\omega, \mathbf{k}) = 0$ и получаются законы дисперсии собственных мод, $\omega = \omega_m^\sigma(\mathbf{k})$. Таким образом, очевидно, что в непоглощающей среде потери энергии стороннего тока $\mathbf{j}(\omega, \mathbf{k})$ полностью обусловлены возбуждением собственных мод этой среды (включая распространяющиеся

и уходящие на бесконечность высокочастотные электромагнитные волны, а также всевозможные моды, исчезающие при переходе к вакууму).

Для того чтобы учесть мнимые вклады в интеграл (58), вводим слабое затухание мод в среде и придаем коэффициентам преломления малую положительную мнимую часть: $n \rightarrow n + i\epsilon$, $\epsilon \rightarrow +0$. Получаем

$$\lambda^{(m)}(\omega, \mathbf{k}) = \lambda^{(m)}\left(\frac{ck}{n + i\epsilon}, \mathbf{k}\right) \approx \lambda^{(m)}(\omega - i\gamma, \mathbf{k}) \approx \lambda^{(m)}(\omega, \mathbf{k}) - i\gamma \frac{\partial \lambda^{(m)}}{\partial \omega}.$$

Далее используем формулу Сохоцкого

$$\operatorname{Im} \frac{1}{\lambda^{(m)}(\omega - i\gamma, \mathbf{k})} \Big|_{\gamma \rightarrow 0} \rightarrow \rightarrow +\pi \operatorname{sign} \left(\frac{\partial \lambda^{(m)}}{\partial \omega} \Big|_{\omega = \omega_m^\sigma(\mathbf{k})} \right) \delta(\lambda^{(m)}(\omega, \mathbf{k})). \quad (59)$$

Учитывая, что при выполнении закона дисперсии $\lambda^{(m)}(\omega, \mathbf{k}) = 0$ собственные векторы $\mathbf{b}^{(m)}(\omega, \mathbf{k})$ совпадают с векторами поляризации соответствующей моды, получим энергию, затраченную сторонним током на генерацию собственных мод среды:

$$W_{\kappa\omega} = \sum_{m=1}^3 W_{\kappa\omega}^{(m)}, \quad (60)$$

где $W_{\kappa\omega}^{(m)}$ — энергия, испускаемая в форме собственной моды с индексом m :

$$W_{\kappa\omega}^{(m)} = -\frac{1}{2\pi^2\omega} \int_0^\infty k^2 dk |\mathbf{e}^{(m)*}(\omega, \mathbf{k}) \mathbf{j}(\omega, \mathbf{k})|^2 \times \times \operatorname{sign} \left(\frac{\partial \lambda^{(m)}}{\partial \omega} \Big|_{\omega = \omega_m^\sigma(\mathbf{k})} \right) \delta(\lambda^{(m)}(\omega, \mathbf{k})). \quad (61)$$

Таким образом, полученные выражения представляют собой разложение излучаемой энергии по собственным модам среды. Заметим, что каждое уравнение дисперсии может иметь несколько корней, поэтому число членов в сумме (60) может быть больше трех.

В принципе, выражение (61) позволяет найти энергию генерации моды m , так как все входящие в него величины могут быть вычислены путем выполнения алгебраических операций, а вычисление интегралов с дельта-функциями не вызывает принципиальных затруднений. Но такие расчеты для произвольной анизотропной среды довольно громоздки. Особенно сложны в общем случае формулы Кардано для решения кубического уравнения (35), определяющего главные значения максвелловского тензора. Упрощения возникают лишь при наличии некоторых дополнительных свойств симметрии в рассматриваемой среде.

Тем не менее проблему отыскания главных значений максвелловского тензора можно упростить (свести к решению квадратного уравнения) в том случае, когда одно из этих чисел стремится к нулю. В задаче об излучении этого оказывается достаточно, поскольку согласно условию (40), обращение главного значения в нуль и соответствует возбуждению мод среды.

Раскрыв уравнение (35) через компоненты максвелловского тензора и воспользовавшись представлением

(17) его определителя, получим характеристическое уравнение для определения главных значений λ :

$$\lambda^3 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - 2n^2)\lambda^2 + [n^4 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + a)n^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_3 - g^2]\lambda - a(n^2 - n_1^2)(n^2 - n_2^2) = 0. \quad (62)$$

Как уже было отмечено, в общем случае главные значения не сводятся к a , $(n^2 - n_1^2)$ и $(n^2 - n_2^2)$, а находятся из решения характеристического уравнения (62). Рассмотрим интересующий нас частный случай, когда выполняется закон дисперсии (40) одной из собственных мод среды, например, $n^2 = n_1^2$. Тогда свободный член в уравнении (62) обращается в нуль и λ можно вынести за скобки, так что кубическое уравнение сводится к квадратному:

$$\lambda \left\{ \lambda^2 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - 2n_1^2)\lambda + [n_1^4 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + a)n_1^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_3 - g^2] \right\} = 0, \quad (63)$$

решения которого легко находятся:

$$\lambda^{(1)} = 0, \quad (64)$$

$$\lambda^{(2,3)} = \frac{1}{2} \left[\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - 2n_1^2 \pm \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + 4g^2 - 2(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_3) + 4an_1^2} \right]. \quad (65)$$

Поскольку согласно (61) вклад в излучение дают лишь значения $\lambda = 0$, то нас в данном случае интересует корень $\lambda^{(1)}$, поведение которого при $n^2 \rightarrow n_1^2$ должно быть определено более точно. Для этого представим уравнение (62) в виде

$$\lambda \left\{ \lambda^2 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - 2n^2)\lambda + [n^4 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + a)n^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_3 - g^2] \right\} = a(n^2 - n_1^2)(n^2 - n_2^2). \quad (66)$$

Условие $\lambda \rightarrow 0$ позволяет положить $\lambda = 0$ в фигурных скобках (66), после чего стремящееся к нулю главное значение $\lambda^{(1)}$ примет вид

$$\lambda^{(1)} = \frac{a(n_1^2 - n_2^2)}{n_1^4 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + a)n_1^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_3 - g^2} \times (n^2 - n_1^2) = \frac{a(n_1^2 - n_2^2)}{\lambda^{(2)}\lambda^{(3)}}(n^2 - n_1^2), \quad (67)$$

т.е. главное значение $\lambda^{(1)}$ пропорционально разности $n^2 - n_1^2$ с коэффициентом, который в общем случае отличен от единицы; последнее равенство в (67) написано с использованием теоремы Виета, примененной к уравнению (63):

$$\lambda^{(2)}\lambda^{(3)} = n_1^4 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + a)n_1^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_3 - g^2, \quad (68)$$

т.е. нахождение собственного числа $\lambda^{(1)}$ не требует нахождения двух других собственных чисел порознь; требуется знать лишь их произведение (68). Заметим,

что, учитывая явный вид (65) и (67), легко проверить, что все необходимые соотношения (41) для главных значений максвелловского тензора выполняются.

Второе главное значение, которое определяется аналогичным образом, имеет вид

$$\lambda^{(2)} = \frac{a(n_2^2 - n_1^2)}{\lambda^{(1)}\lambda^{(3)}}(n^2 - n_2^2), \quad (69)$$

$$\lambda^{(1)}\lambda^{(3)} = n_2^4 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + a)n_2^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_3 - g^2.$$

Наконец, третье главное значение получается при условии $a = 0$ и соответствует испусканию продольных собственных мод среды, рассмотренных нами в конце раздела 4. Как было указано, для корректного описания генерации продольных мод необходим учет пространственной дисперсии. В отсутствие пространственной дисперсии, как было показано в разделе 4, могут генерироваться лишь две квазипоперечные моды. Тогда с помощью (67), (69), учитывая малые мнимые части коэффициентов преломления n_1 , n_2 , находим

$$\begin{aligned} \text{Im} \frac{1}{\lambda^{(1)}} &= \frac{\pi\omega\lambda^{(2)}\lambda^{(3)}}{2acn_1(n_1^2 - n_2^2)} \delta\left(k - \frac{\omega n_1}{c}\right), \\ \text{Im} \frac{1}{\lambda^{(2)}} &= \frac{\pi\omega\lambda^{(1)}\lambda^{(3)}}{2acn_2(n_2^2 - n_1^2)} \delta\left(k - \frac{\omega n_2}{c}\right). \end{aligned} \quad (70)$$

По формуле (58) вычисляем полную энергию излучения квазипоперечных мод:

$$\begin{aligned} W_{\kappa\omega} &= \frac{\omega^2}{4\pi^2 a(\omega, \mathbf{\kappa}) c^3 (n_2^2 - n_1^2)} \times \\ &\times \left(n_2 \lambda^{(1)} \lambda^{(3)} \Big|_{n=n_2} |(e_\mu^{(2)*} j_\mu)|^2 - n_1 \lambda^{(2)} \lambda^{(3)} \Big|_{n=n_1} |(e_\mu^{(1)*} j_\mu)|^2 \right). \end{aligned} \quad (71)$$

Выражение (71) находится в соответствии с ранее полученной формулой (24), если учесть связь между постоянными: $C^{(1)} = \lambda^{(2)}\lambda^{(3)}|_{n=n_1}$, $C^{(2)} = \lambda^{(1)}\lambda^{(3)}|_{n=n_2}$. Обратим внимание на то, что если показатели преломления анизотропной среды близки к единице (случай, рассмотренный в книге [31]), то множители

$$F_1 = \frac{\lambda^{(2)}\lambda^{(3)}|_{n=n_1}}{a(n_2^2 - n_1^2)}, \quad F_2 = \frac{\lambda^{(1)}\lambda^{(3)}|_{n=n_2}}{a(n_1^2 - n_2^2)} \quad (72)$$

стремятся к единице. Такое же обращение этих множителей в единицу имеет место в вакууме и изотропной среде. Однако в общем случае анизотропной и гиротропной среды отличие этих множителей от единицы может быть весьма значительным, что приводит к резкому отличию интенсивности и поляризации излучения от таковых в изотропной среде. В заключение представим интенсивность излучения (71) в более компактном виде, непосредственно через введенные нами анизотропные факторы (72):

$$W_{\kappa\omega} = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^3} \left(n_1 F_1 |(e_\mu^{(1)*} j_\mu)|^2 + n_2 F_2 |(e_\mu^{(2)*} j_\mu)|^2 \right). \quad (73)$$

Обратим внимание на то, что хотя в изотропной среде анизотропные факторы обращаются в единицу и интенсивности излучения двух ортогональных собственных мод такой среды определяются соответственно двумя

слагаемыми в (73) с одинаковыми показателями преломления, это отнюдь не означает, что испускаемое излучение окажется неполяризованным. Наоборот, поляризация излучения в выделенном направлении может быть очень высокой (и даже стопроцентной, как в случае излучения Вавилова–Черенкова), в зависимости от взаимных направлений вектора электрического тока, волнового вектора излучения и других векторов, существующих в рассматриваемой задаче.

7. Частные случаи

1. Излучение в анизотропной одноосной (негиротропной) среде под углом θ к оптической оси ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_\perp$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_\parallel$, $\mathbf{g} = 0$, $a(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_\parallel \cos^2 \theta + \varepsilon_\perp \sin^2 \theta$). Из уравнений (16), (67), (69) находим

$$\begin{aligned} n_1^2 &= \varepsilon_\perp > 0, \quad n_2^2 = \frac{\varepsilon_\perp \varepsilon_\parallel}{a(\omega, \theta)} > 0; \\ a(\omega, \theta) &= \varepsilon_\parallel + (\varepsilon_\perp - \varepsilon_\parallel) \sin^2 \theta, \\ C^{(1)} &= \varepsilon_\perp (\varepsilon_\parallel - \varepsilon_\perp) \sin^2 \theta, \\ C^{(2)} &= \varepsilon_\perp (\varepsilon_\parallel + \varepsilon_\perp) - \frac{\varepsilon_\perp \varepsilon_\parallel (2\varepsilon_\perp + \varepsilon_\parallel)}{a(\omega, \theta)} + \frac{(\varepsilon_\perp \varepsilon_\parallel)^2}{a^2(\omega, \theta)}. \end{aligned} \quad (74)$$

Здесь и всюду ниже мы рассматриваем действительные положительные коэффициенты преломления. Если $n_2^2 < 0$, то соответствующая мода не может излучаться и не вносит вклада в спектральную плотность излучения. Величины $C^{(1)}$, $C^{(2)}$ при $0 < \theta < \pi$ являются отличными от нуля, имеют противоположные знаки и обращаются в нуль при $\theta = 0, \pi$. Поэтому спектральная плотность (71), как и должно быть, положительна при $0 < \theta < \pi$ независимо от соотношения между $\varepsilon_\perp$ и $\varepsilon_\parallel$. На рисунках 1, 2 представлены зависимости "анизотропных факторов" (72) $F_{1,2}$ для излучения обыкновенной и необыкновенной волн под углом к оптической оси одноосного кристалла как функции $\varepsilon_\perp$ и $\varepsilon_\parallel$. Видно сильное отличие анизотропных факторов от единицы и друг от друга в общем случае, что может привести к генерации сильно поляри-

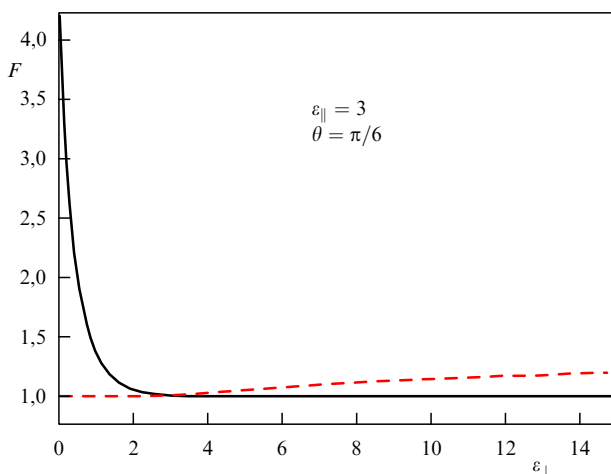


Рис. 1. Зависимость анизотропных факторов (72) для обыкновенной (сплошная кривая) и необыкновенной (штриховая кривая) волн от величины поперечной диэлектрической проницаемости. Значение продольной диэлектрической проницаемости и угла излучения даны на рисунке.

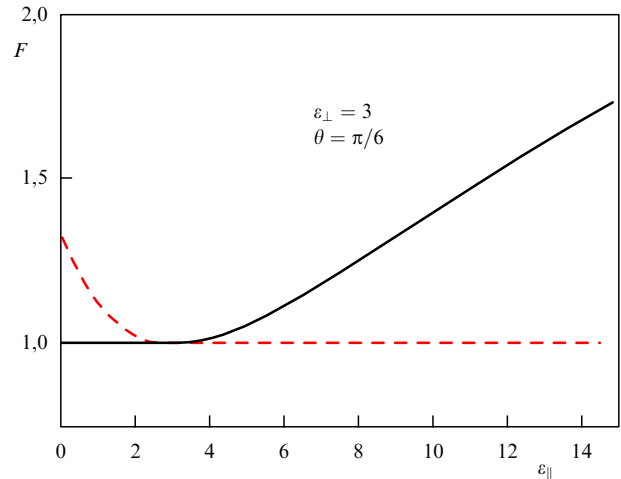


Рис. 2. Зависимость анизотропных факторов (72) для обыкновенной (сплошная кривая) и необыкновенной (штриховая кривая) волн от величины продольной диэлектрической проницаемости. Значение поперечной диэлектрической проницаемости и угла излучения даны на рисунке.

зованного излучения в анизотропной среде. Интересно, что при $\varepsilon_\perp > \varepsilon_\parallel$ анизотропный фактор F_1 обыкновенной волны близок к единице, а при $\varepsilon_\perp < \varepsilon_\parallel$ к единице стремится анизотропный фактор F_2 необыкновенной волны. Разумеется, оба фактора близки к единице, когда $\varepsilon_\perp \sim \varepsilon_\parallel$, что соответствует изотропной среде.

При излучении вдоль оптической оси ($\theta = 0, \pi$) имеем $n_1 = n_2 = n = \sqrt{\varepsilon_\perp}$, формула (71) дает неопределенность $0/0$. В этом случае нужно вернуться к формуле (11). Находим $\Delta_{11} = \Delta_{22} = \varepsilon_\parallel (\varepsilon_\perp - n^2)$, $\Delta_{33} = (\varepsilon_\perp - n^2)^2$, $\Delta_{\mu\nu} = 0$ при $\mu \neq \nu$. После сокращения общего множителя и интегрирования находим

$$W_{\kappa\omega} = \frac{\omega^2 \sqrt{\varepsilon_\perp}}{4\pi^2 c^3} |\mathbf{j}_\perp(\omega, \mathbf{k})|^2. \quad (75)$$

Формула снова дает излучение с двумя возможными поляризациями, поперечными относительно оптической оси. Само излучение может быть поляризованным — это зависит от возбуждающего излучения тока; при этом интенсивность излучения двух взаимно ортогональных мод описывается двумя слагаемыми (73) при учете обращения анизотропных факторов $F_{1,2}$ в единицу.

При распространении поперек оптической оси ($\theta = \pi/2$) получаем спектральную плотность излучения

$$W_{\kappa\omega} = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^3} (\sqrt{\varepsilon_\perp} |e_\mu^{(1)*} j_\mu|^2 + \sqrt{\varepsilon_\parallel} |e_\mu^{(2)*} j_\mu|^2), \quad (76)$$

вектор поляризации $\mathbf{e}^{(2)}$ находим по формуле (52):

$$\mathbf{e}^{(2)} = \frac{\varepsilon_\parallel - \varepsilon_\perp}{|\varepsilon_\parallel - \varepsilon_\perp|} \mathbf{e}_z.$$

Но для вектора поляризации $\mathbf{e}^{(1)}$ формула (52) дает неопределенность $0/0$, и для него нужно использовать другое эквивалентное представление (53) без неопределенности, которое при условии $\lambda^{(1)} = 0$ дает правильный результат $\mathbf{e}^{(1)} = \pm(\mathbf{e}_x \sin \varphi - \mathbf{e}_y \cos \varphi)$, где $\cos \varphi$, $\sin \varphi$ — проекции вектора $\mathbf{k}$ на оси 1, 2.

Рассмотрим, к каким изменениям может привести наличие пространственной дисперсии диэлектрической

проницаемости. В качестве иллюстрации мы проанализируем упрощенную модель, в которой только поперечная компонента тензора диэлектрической проницаемости зависит от волнового числа. Пусть

$$\varepsilon_{\perp} = \varepsilon_0(\omega) + \frac{\alpha(\omega)}{\sigma(\omega) + \gamma(\omega)k^2} \equiv \varepsilon_0(\omega) + \frac{\alpha(\omega)}{\sigma(\omega) + \beta(\omega)n^2}, \quad (77)$$

где $\varepsilon_0(\omega)$, $\alpha(\omega)$, $\beta(\omega)$, $\sigma(\omega)$ — некоторые функции частоты. Хотя мы не ставим задачу моделирования какой-либо конкретной ситуации, заметим, что такая структура диэлектрической проницаемости возникает, в частности, при учете вклада экситонов [7, 32]. Кроме того, в терминах пространственной дисперсии могут быть описаны и электромагнитные свойства магнетиков, в которых также существуют специфические собственные моды (магноны, спиновые волны).

Уравнение для показателя дисперсии первой моды теперь принимает вид

$$n^2 = \varepsilon_{\perp} = \varepsilon_0(\omega) + \frac{\alpha(\omega)}{\delta(\omega) + \beta(\omega)n^2}.$$

Это уравнение стало биквадратным,

$$\beta n^4 + (\delta - \beta\varepsilon_0)n^2 - (\delta\varepsilon_0 + \alpha) = 0, \quad (78)$$

и в общем случае может иметь уже не один, а два положительных корня n_1^2 , n_2^2 , т.е. наличие пространственной дисперсии приводит к появлению новых *квазиперечных* собственных мод среды, на испускание которых может расходоваться энергия стороннего тока.

2. В среде имеется одно выделенное направление, вдоль которого ориентирован вектор гирации $\mathbf{g}$. Именно такой случай реализуется в однородной магнитоактивной плазме. Выражения для произвольного угла θ громоздки, поэтому ниже подробнее рассмотрено излучение вдоль направления *вектора* $\mathbf{g}$ и перпендикулярно ему. Для общего случая излучения под некоторым углом к направлению внешнего магнитного поля в плазме, зависимость анизотропных факторов от частоты представлена на рис. 3. Эти факторы близки к единице почти везде, за исключением окрестностей плазменной частоты и гирочастоты, в которых отличие этих факторов от единицы может быть очень существенным, особенно для необыкновенных волн, что следует учитывать, в частности, при вычислении переходного излучения в магнитоактивной плазме [31, 33].

2а. Продольный случай, $\theta = 0$, $n_1^2 = \varepsilon_{\perp} + g > 0$, $n_2^2 = \varepsilon_{\perp} - g > 0$, $C^{(1)} = -C^{(2)} = -2g\varepsilon_{\parallel}$, $a(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{\parallel}$. С помощью формулы (71) находим

$$W_{\mathbf{k}\omega} = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^3} \left(\sqrt{\varepsilon_{\perp} + g} |\mathbf{e}_{\mu}^{(1)*} \mathbf{j}_{\mu}(\omega, \mathbf{k})|^2 + \sqrt{\varepsilon_{\perp} - g} |\mathbf{e}_{\mu}^{(2)*} \mathbf{j}_{\mu}(\omega, \mathbf{k})|^2 \right). \quad (79)$$

Векторы поляризации мод $\mathbf{e}_{\mu}^{(1,2)}$ легко определяются по формуле (53):

$$\mathbf{e}^{(1,2)} = \mp \frac{\varepsilon_{\parallel} g}{\sqrt{2} |\varepsilon_{\parallel} g|} (\mathbf{e}_x \mp i \mathbf{e}_y), \quad (80)$$

что соответствует волнам, поляризованным по кругу. Если один из n^2 или оба отрицательны, то такая мода

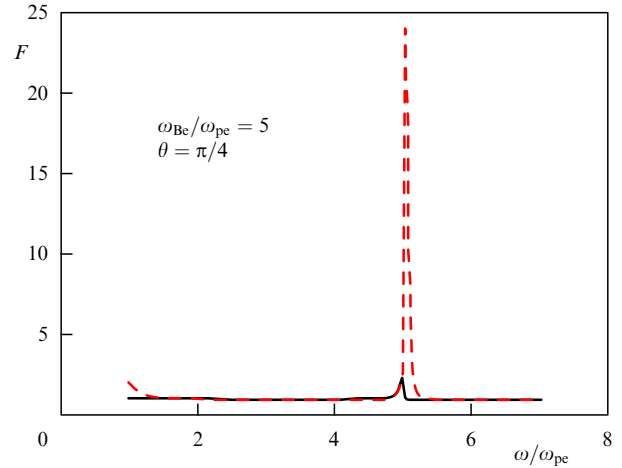


Рис. 3. Зависимость анизотропных факторов (72) для наклонного излучения обыкновенной (сплошная кривая) и необыкновенной (штриховая кривая) волн от частоты излучения в магнитоактивной плазме. Анизотропный фактор для необыкновенной волны резко возрастает в окрестности гирочастоты, которая в данном примере в пять раз больше, чем плазменная частота электронов.

не возбуждается и соответствующее слагаемое надо удалить из формулы (79).

2б. Поперечный случай, волны распространяются вдоль оси 1, $\theta = \pi/2$,

$$n_1^2 = \varepsilon_{\parallel} > 0, \quad n_2^2 = \varepsilon_{\perp} - \frac{g^2}{\varepsilon_{\perp}} > 0, \\ C^{(1)} = -\varepsilon_{\perp}(\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}) - g^2, \\ C^{(2)} = \varepsilon_{\perp}(\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}) + \frac{g^2 \varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}} + \frac{g^4}{\varepsilon_{\perp}^2}.$$

Вычисляя алгебраические дополнения в формулах (52), (53), находим, что первая (обыкновенная) волна поперечна и поляризована вдоль оси 3, $\mathbf{e}^{(1)} = \pm \mathbf{e}_z$. Вторая волна (необыкновенная) является непоперечной и имеет вектор поляризации

$$\mathbf{e}^{(2)} = \pm \left(\frac{g}{\sqrt{\varepsilon_{\perp}^2 + g^2}} \mathbf{e}_x + \frac{i\varepsilon_{\perp}}{\sqrt{\varepsilon_{\perp}^2 + g^2}} \mathbf{e}_y \right). \quad (81)$$

Энергия излучения, которая дается формулой (71), положительна для обеих мод, если $n_i^2 > 0$. Как и в предыдущем случае, собственные моды, у которых $n^2 < 0$, отсутствуют.

3. Низкочастотные магнитогидродинамические волны в холодной магнитоактивной плазме ($\omega \ll \omega_{i,e}$, $c_s \ll v_A$), где $\omega_{i,e}$ — циклотронные частоты ионов и электронов, c_s и v_A — звуковая и альвеновская скорости. Диэлектрический тензор в пренебрежении затуханием имеет компоненты (см., например, [19, с. 191])

$$\varepsilon_{\perp} \approx \frac{c^2}{v_A^2}, \quad \varepsilon_{\parallel} \approx -\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}, \quad |\varepsilon_{\parallel}| \gg \varepsilon_{\perp}, \quad (82)$$

$$g \approx \frac{c^2 \omega}{v_A^2 \omega_i} \ll \varepsilon_{\perp}, \quad \omega_{pe}^2 = \frac{4\pi n e^2}{m_e}.$$

Пренебрегая слагаемыми $g^2/\varepsilon_{\perp}^2 \ll 1$ в уравнении (16), находим

$$\Delta = (\varepsilon_{\perp} - n^2) [\varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel} - n^2 (\varepsilon_{\parallel} \cos^2 \theta - \varepsilon_{\perp} \sin^2 \theta)] = 0,$$

откуда получаем два значения показателя преломления:

$$n_1^2 = \varepsilon_{\perp}, \quad n_2^2 \approx \frac{\varepsilon_{\perp}}{\cos^2 \theta} > 0. \quad (83)$$

Первый из них соответствует быстрой магнитозвуковой, а второй — альвеновской моде. Формула (83) сохраняет силу только при углах $\pi/2 - \theta \gg (\varepsilon_{\perp}/|\varepsilon_{\parallel}|)^{1/2}$. При поперечном распространении ($\theta \rightarrow \pi/2$) альвеновская волна невозможна.

Нормировочные постоянные имеют значения

$$C^{(1)} = \varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp} \sin^2 \theta \leq 0, \quad C^{(2)} = -\varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp} \tan^2 \theta \geq 0.$$

Спектральная плотность (71) является положительной и после подстановки всех найденных величин принимает вид

$$W_{\kappa\omega} = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2 v_A} \left(|e_{\mu}^{(1)*} j_{\mu}(\omega, \mathbf{k})|^2 + |\cos \theta|^{-3} |e_{\mu}^{(2)*} j_{\mu}(\omega, \mathbf{k})|^2 \right), \quad (84)$$

$$\cos^2 \theta \gg \frac{\varepsilon_{\perp}}{|\varepsilon_{\parallel}|}.$$

Векторы поляризации при $\theta > 0$ легко вычисляются из алгебраических дополнений: $\mathbf{e}^{(1)} = (0, 1, 0)$; $\mathbf{e}^{(2)} = (1, 0, 0)$. Электрические поля двух мод взаимно ортогональны, но перпендикулярны относительно направления распространения $\mathbf{k}$. Магнитные векторы обеих мод перпендикулярны относительно $\mathbf{k}$, но поле магнитозвуковой волны перпендикулярно относительно фонового однородного поля. Если волны распространяются строго вдоль поля, то коэффициенты преломления в приближении (83) вырождаются и для определения поляризации волн требуется учесть слагаемые с вектором гирации, как делалось в примере 2. Поляризация в этом случае циркулярная, что следует из формулы (80).

8. Заключение

В настоящей статье мы применили стандартные методы линейной алгебры для решения неоднородной системы уравнений Максвелла в задаче об излучении и потерях энергии заданным током в произвольной безграничной анизотропной и гиротропной среде с учетом временной и пространственной дисперсии. Обратим внимание на то, что рассматриваемый нами "заданный" ток не обязательно является "сторонним" по отношению к среде. Наоборот, такими токами могут быть нелинейные токи плазмы, приводящие, в частности, к генерации переходного или поляризационного тормозного излучений [31, 33–37]. Важно также и то, что развитый подход позволяет последовательно учитывать пространственную дисперсию среды даже в тех случаях, когда ее эффект совсем не мал. В частности, он позволяет вычислять интенсивность излучения тех мод, которые возникают лишь благодаря пространственной дисперсии, а в ее отсутствие исчезают.

Важной составной частью этого рассмотрения является приведение эрмитовых максвелловского и обратного ему тензоров к диагональному вещественному виду на ортонормированном базисе комплексных собственных векторов максвелловского тензора. Предложенный анализ представляет собой обобщение хорошо известного метода собственных мод [6, 19], широко применяемого в различных областях физики, включая кристал-

лоптику [7] и физику плазмы [6, 19, 25]. В частности, метод собственных мод оказался весьма плодотворным при рассмотрении нелинейных явлений в плазме [25], включая теорию турбулентной плазмы [6].

В рамках нашего подхода мы используем разложение электромагнитного поля не по распространяющимся модам данной среды (т.е. решениям однородной системы уравнений Максвелла), а по собственным векторам и главным значениям максвелловского тензора, являющихся решениями неоднородных уравнений Максвелла (34). Собственные моды данной среды являются частными случаями этих общих решений при условии обращения в нуль соответствующего главного значения λ максвелловского тензора.

Наш подход является более общим и последовательным, поскольку учитывает возможность существования в среде возмущений, частота и волновой вектор которых не связаны между собой законом дисперсии какой-либо из собственных мод данной среды. В частности, этот метод позволяет легко прояснить происхождение кажущегося противоречия между ортогональностью собственных векторов любого эрмитовского тензора при заданных ω и $\mathbf{k}$ и неортогональностью собственных мод анизотропной среды, распространяющихся в одном и том же направлении и имеющих одинаковую частоту ω (см. раздел 5).

Кроме того, развитый метод позволил в явном виде вычислить анизотропные факторы $F_{1,2}$ (72), наличие которых крайне важно как с методической, так и с практической точек зрения. Действительно, при отличии указанных факторов от единицы, излучение некоторой моды с заданной поляризацией и показателем преломления $n(\omega)$ будет происходить с различной интенсивностью в анизотропной и изотропной средах. Заметим, что мы всегда можем выбрать изотропную среду таким образом, чтобы ее показатель преломления совпадал с одним из показателей преломления анизотропной среды. Второй показатель преломления анизотропной среды будет, разумеется, другим. Это означает, что интенсивность излучения данной собственной моды в общем случае определяется не только ее собственным показателем преломления и вектором поляризации, но и свойствами анизотропии среды в целом, поскольку анизотропные факторы каждой из мод зависят от разностей квадратов показателей преломления обеих мод. С практической точки зрения этот эффект можно использовать для создания источников сильнополяризованного некогерентного излучения.

Таким образом, изложенный подход позволяет описать с единых позиций широкий круг явлений в анизотропных средах, многие из которых давно и широко известны, а некоторые описаны здесь впервые. Повидимому, изложенный нами материал может оказаться полезным при преподавании темы излучения студентам физических специальностей, поскольку содержит общее решение задачи об излучении электромагнитной энергии в среде в весьма элегантном и компактном виде, что позволяет легко получить все практически интересные результаты в виде частных случаев наших общих выражений.

Авторы признательны своим коллегам Л. Голубу, Е.Л. Ивченко и К.Ю. Платонову за плодотворное обсуждение вопросов, рассматриваемых в статье. Один из авторов (Г.Д.Ф.) выполнял работу при частичной

финансовой поддержке РФФИ, гранты № 06-02-16295, 06-02-16859, 06-02-39029 и гранта Национального научного фонда США № АТМ-0707319, предоставленного Технологическому институту Нью Джерси.

Список литературы

1. Гинзбург В Л *ЖЭТФ* **10** 601 (1940)
2. Гинзбург В Л *ЖЭТФ* **10** 608 (1940)
3. Коломенский А А *ЖЭТФ* **24** 167 (1953)
4. Коломенский А А *ДАН СССР* **106** 982 (1956) [Kolomenskii A A *Sov. Phys. Dokl.* **1** 133 (1956)]
5. Эйдем В Я *ЖЭТФ* **34** 131 (1958); **36** 1335 (1959) [Eidman V Ya *Sov. Phys. JETP* **7** 91 (1958); **9** 947 (1959)]
6. Цытович В Н *Теория турбулентной плазмы* (М.: Атомиздат, 1971) [Translated into English: Tsytovich V N *Theory of Turbulent Plasma* (New York: Consultants Bureau, 1977)]
7. Агранович В М, Гинзбург В Л *Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов* 2-е изд. (М.: Наука, 1979) [Translated into English: Agranovich V M, Ginzburg V L *Crystal Optics with Spatial Dispersion, and Excitons* (Berlin: Springer-Verlag, 1984)]
8. Тер-Микаелян М Л *Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях* (Ереван: Изд-во АН Арм. ССР, 1969) [Translated into English: Ter-Mikaelian M L *High-Energy Electromagnetic Processes in Condensed Media* (New York: Wiley, 1972)]
9. Тер-Микаелян М Л *УФН* **171** 597 (2001) [Ter-Mikhaelyan M L *Phys. Usp.* **44** 571 (2001)]
10. Тер-Микаелян М Л *УФН* **173** 1265 (2003) [Ter-Mikhaelyan M L *Phys. Usp.* **46** 1231 (2003)]
11. Болотовский Б М, Галстян Е А *УФН* **170** 809 (2000) [Bolotovskii B M, Galst'yan E A *Phys. Usp.* **43** 755 (2000)]
12. Ахиезер А И, Шульга Н Ф *УФН* **137** 561 (1982) [Akhiezer A I, Shul'ga N F *Sov. Phys. Usp.* **25** 541 (1982)]
13. Базылев В А, Жеваго Н К *Излучение быстрых частиц в веществе и во внешних полях* (М.: Наука, 1987)
14. Барышевский В Г *Каналирование, излучение и реакции в кристаллах при высоких энергиях* (Минск: Изд-во БГУ, 1982)
15. Ахиезер А И, Шульга Н Ф *Электродинамика высоких энергий в веществе* (М.: Наука, 1993) [Translated into English: Akhiezer A I, Shul'ga N F *High-Energy Electrodynamics in Matter* (Luxembourg: Gordon and Breach, 1996)]
16. Калашников Н П *Когерентные взаимодействия заряженных частиц в монокристаллах* (М.: Атомиздат, 1981) [Translated into English: Kalashnikov N P *Coherent Interactions of Charged Particles in Single Crystals* (Chur: Harwood Acad. Publ., 1988)]
17. Bekefi G *Radiation Processes in Plasmas* (New York: Wiley, 1966) [Бекефи Дж *Радиационные процессы в плазме* (М.: Мир, 1971)]
18. Байер В Н, Катков В М, Фадин В С *Излучение релятивистских электронов* (М.: Атомиздат, 1973)
19. Ахиезер А И и др. *Электродинамика плазмы* (Под ред. А И Ахиезера) (М.: Наука, 1974)
20. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Электродинамика сплошных сред* (М.: Наука, 1982) [Translated into English: Landau L D, Lifshitz E M *Electrodynamics of Continuous Media* (Oxford: Pergamon Press, 1984)]
21. Гинзбург В Л *Теоретическая физика и астрофизика. Дополнительные главы* 3-е изд. (М.: Наука, 1987) [Translated into English: Ginzburg V L *Applications of Electrodynamics in Theoretical Physics and Astrophysics* 2nd ed. (New York: Gordon and Breach Sci. Publ., 1989)]
22. Jackson J D *Classical Electrodynamics* 3rd ed. (New York: Wiley, 1999)
23. Бредов М М, Румянцев В В, Топтыгин И Н *Классическая электродинамика* (М.: Наука, 1985)
24. Топтыгин И Н *Современная электродинамика Ч. 2 Теория электромагнитных явлений в веществе* (М. – Ижевск: РХД, 2005)
25. Пустовалов В В, Силин В П *Тр. ФИАН СССР* **61** 42 (1972)
26. Кочин Н Е *Векторное исчисление и начала тензорного исчисления* (М.: Изд-во АН СССР, 1961)
27. Курош А Г *Курс высшей алгебры* (М.: Наука, 1968) [Translated into English: Kurosh A G *Higher Algebra* (Moscow: Mir Publ., 1972)]
28. Беклемишев Д В *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры* (М.: Наука, 1974)
29. Гантмахер Ф Р *Теория матриц* (М.: Наука, 1988); Gantmacher F R *Applications of the Theory of Matrices* (Mineola, NY: Dover Publ., 2005)
30. Born M, Wolf E *Principles of Optics* (Oxford: Pergamon Press, 1969) [Борн М, Вольф Э *Основы оптики* (М.: Наука, 1970)]
31. Флейшман Г Д *Стохастическая теория излучения* (М. – Ижевск: Инст. компьют. исслед., 2007)
32. Ivchenko E L "Spatial dispersion effects in the exciton resonance region", in *Excitons* (Modern Problems in Condensed Matter Sciences, Vol. 2, Eds E I Rashba, M D Sturge) (Amsterdam: North-Holland, 1982)
33. Платонов К Ю, Флейшман Г Д *УФН* **172** 241 (2002) [Platonov K Yu, Fleishman G D *Phys. Usp.* **45** 235 (2002)]
34. Гинзбург В Л, Цытович В Н *Переходное излучение и переходное рассеяние* (М.: Наука, 1984) [Translated into English: Ginzburg V L, Tsytovich V N *Transition Radiation and Transition Scattering* (Bristol: A. Hilger, 1990)]
35. Амусья М Я и др. *Поляризационное тормозное излучение частиц и атомов* (Отв. ред. В Н Цытович, И М Ойрингель) (М.: Наука, 1987)
36. Амусья М Я *Тормозное излучение* (М.: Энергоатомиздат, 1990)
37. Король А В, Лялин А Г, Соловьев А В *Поляризационное тормозное излучение* (СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2004)

Eigenmode generation by a given current in anisotropic and gyrotropic media

I.N. Toptygin

Saint-Petersburg State Polytechnical University,
ul. Politehnicheskaya 29, 195251 St. Petersburg, Russian Federation
Tel. (7-812) 552-65 01, (7-812) 742-95 38. Fax (7-812) 534-33 14. E-mail: cosmos@IT10242.spb.edu

G.D. Fleishman

Ioffe Physico-Technical Institute, Russian Academy of Sciences,
ul. Politehnicheskaya 26, 194021 St. Petersburg, Russian Federation
Tel. (7-812) 292-73 68. Fax (7-812) 297-10 17. E-mail: gregory@sun.ioffe.rssi.ru
New Jersey Institute of Technology, Newark 07102, USA

A theory of generation of eigenmodes by an electric current in a uniform, transparent, spatiotemporally dispersive, anisotropic and gyrotropic medium is developed. Various methods of finding the dispersion relations and polarization vectors are used. A close relation is shown to exist between the eigenvalues and eigenvectors of the Maxwellian tensor on one hand and properties of the medium's linear eigenmodes on the other. The spectral radiation energy density is calculated for a given direction for a given medium mode with given phase velocities and polarizations. Anisotropy factors causing the eigenmode radiation intensity to change its value from that for an isotropic medium with the same refraction coefficient are calculated. A few illustrative examples are considered in more detail.

PACS numbers: 03.50.De, 41.20.Jb, **41.60. – m**

DOI: 10.3367/UFNr.0178.200804c.0385

Bibliography — 37 references

Received 8 October 2007, revised 21 December 2007

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **178** (4) 385 – 396 (2008)

Physics – Uspekhi **51** (4) (2008)