

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Об интерпретации закона сохранения энергии при движении точечного заряда в однородном электрическом поле

Г.Н. Гайдуков, А.А. Абрамов

При обычной интерпретации закона сохранения энергии в электромагнетизме утверждается, что изменение энергии поля в некотором объеме равно сумме приращения энергии в данном объеме за счет потока вектора Пойнтинга и количества энергии, рассеянной в виде тепла при взаимодействии носителей заряда с материальной средой, в которой происходит движение этих носителей. Показано, что при движении точечного заряда во внешнем электрическом поле работа поля над зарядом совершается благодаря двум источникам: потоку энергии к заряду за счет потока вектора Пойнтинга и за счет своеобразного канала доставки энергии к заряду, обусловленного взаимодействием собственного поля заряда с внешним полем. Интересно, что при нерелятивистских скоростях заряда ($v \ll c$) $2/3$ энергии поставляется потоком вектора Пойнтинга, а $1/3$ — за счет второго канала. В ультрарелятивистском случае ($v \lesssim c$) вся энергия поставляется потоком вектора Пойнтинга.

PACS numbers: 03.50.De, 41.20. – q

DOI: 10.3367/UFNr.0178.200802d.0171

Содержание

1. Вводные замечания (171).
 2. Полевая интерпретация работы электрического поля над движущимся зарядом (172).
 3. Предельные случаи (173).
 4. Заключительные замечания (174).
- Список литературы (174).

1. Вводные замечания

В физике есть ряд на первый взгляд неожиданных закономерностей, которые отражают удивительную гармонию окружающего нас мира. В качестве примера можно привести интерференционное гашение вторичных боковых волн, дающее возможность лучевого распространения света. Более простой пример — это медленная зарядка конденсатора от источника тока, когда практически всегда ровно половина от общей работы источника расходуется на энергию электрического поля конденсатора, а другая половина расходуется на выделение тепла. Неожиданной здесь кажется независимость этого ре-

зультата от величины сопротивления цепи (если это сопротивление стремится к нулю, то следует учитывать возникающие колебания и излучение). На наш взгляд, обсуждаемая ниже закономерность также несколько неожиданна.

Закон сохранения энергии для электромагнитного поля, являющийся следствием уравнений Максвелла [1], можно записать в виде

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\mathbf{j}\mathbf{E} - \nabla\mathbf{S}, \quad (1)$$

где

$$w = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}, \quad \mathbf{S} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}] \quad (2)$$

— плотность энергии поля и вектор плотности потока энергии (вектор Пойнтинга) соответственно, \mathbf{j} — вектор плотности тока. В интегральном виде этот закон можно представить следующим соотношением:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -Q - \oint_F \mathbf{S} d\mathbf{F}, \quad (3)$$

где $W = \int_V w dV$ — энергия поля в объеме V , Q — тепловая мощность, выделяемая в этом объеме, $\oint_F \mathbf{S} d\mathbf{F}$ — поток вектора Пойнтинга \mathbf{S} через поверхность F , ограничивающую этот объем. В некоторых ситуациях трактовка соотношения (1) достаточно очевидна. Например, при медленной зарядке плоского конденсатора, когда величина Q в зазоре конденсатора равна нулю, поток вектора Пойнтинга через боковую поверхность

Г.Н. Гайдуков, А.А. Абрамов. Московский государственный институт электронной техники (Технический университет)
проезд 4806, д. 5, г. Зеленоград, 124498 Москва,
Российская Федерация
Тел. (495) 532-98-58
E-mail: gaid@gf.miee.ru, abramov-miet@mail.ru

Статья поступила 27 июня 2007 г.

зазора в точности равен приращению энергии электрического поля в зазоре. Другой пример — известная задача: показать, что диссипируемая в единицу времени в прямом цилиндрическом проводнике с током энергия ($Q = IU$) подводится через боковую поверхность проводника благодаря потоку вектора Пойнтинга. В стационарных условиях левая часть формулы (1) равна нулю. Считая поле \mathbf{E} в проводнике постоянным и равным внешнему полю $E_0 = U/l$, а напряженность магнитного поля на боковой поверхности провода $H = I/2\pi r$, где l и r — длина и радиус провода соответственно, получим для потока вектора Пойнтинга \mathbf{S} через боковую поверхность проводника величину $\Phi = 2\pi r l S = IU$. В то же время мощность IU можно представить в другой форме:

$$IU = j\pi r^2 E_0 l = e n \pi r^2 E_0 l = N e u E_0 = N Q_1 = - \oint_F \mathbf{S} \, d\mathbf{F}, \quad (4)$$

где $N = n\pi r^2 l$ — полное число подвижных носителей заряда (электронов с зарядом e), а $Q_1 = A_1 = e u E_0$ — мощность, рассеиваемая одним зарядом, численно равная работе, совершаемой полем над электроном в единицу времени; n и u — концентрация и дрейфовая скорость электронов соответственно.

В связи с соотношением (4) можно поставить следующий вопрос: если аддитивной по числу зарядов является величина IU , то будет ли равна сумма потоков энергии за счет вектора Пойнтинга, получаемых отдельными зарядами, интегралу, стоящему в правой части соотношения (4), или соотношение (4) выполняется за счет некоторых "интерференционных" эффектов. Оказывается, что на самом деле реализуется именно эта вторая ситуация, причем весьма своеобразным образом.

2. Полевая интерпретация работы электрического поля над движущимся зарядом

Рассмотрим следующую модельную задачу. Точечный заряд q движется со скоростью \mathbf{v} вдоль силовой линии внешнего, однородного электрического поля \mathbf{E}_0 . Поле совершает над зарядом в единицу времени работу $A_1 = qE_0 v$. Соотношение (3) в рассматриваемом случае запишем в виде

$$qE_0 v = - \frac{\partial W}{\partial t} - \oint_F \mathbf{S} \, d\mathbf{F}. \quad (5)$$

Вычислим теперь по отдельности оба слагаемых в правой части формулы (5). В качестве объема возьмем шар радиуса R с центром в точке O , в которой находится заряд q в данный момент времени. Начнем со второго слагаемого в правой части (5), представляющего собой поток вектора \mathbf{S} через поверхность сферы, ограничивающей данный шар. Введем сферическую систему координат r, ϑ, φ так, что заряд будет находиться в начале координат, ϑ — это угол между осью z , направленной вдоль $\mathbf{v} \parallel \mathbf{E}_0$, и радиусом-вектором \mathbf{r} . Тогда

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_q, \quad d\mathbf{F} = dF \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (6)$$

где \mathbf{E}_q — электрическое поле движущегося заряда:

$$\mathbf{E}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\gamma^2(1-\beta^2\sin^2\vartheta)^{3/2}} \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (7)$$

Соответственно

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_q = \epsilon_0[\mathbf{v}, \mathbf{E}_q] \quad (8)$$

— напряженность магнитного поля движущегося заряда, $\beta = v/c$, $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$.

Подставляя (6) и (8) в исследуемое выражение, получим

$$\begin{aligned} \oint_F \mathbf{S} \, d\mathbf{F} &= \oint_F [\mathbf{E}, \mathbf{H}] \, d\mathbf{F} = \\ &= \epsilon_0 \oint_F [\mathbf{E}_0[\mathbf{v}, \mathbf{E}_q]] \, d\mathbf{F} + \epsilon_0 \oint_F [\mathbf{E}_q[\mathbf{v}, \mathbf{E}_q]] \, d\mathbf{F}. \end{aligned}$$

Второе слагаемое в правой части этого выражения равно нулю, а после раскрытия двойного векторного произведения в первом слагаемом с учетом (6) и (7) после некоторых преобразований получим

$$\oint_F [\mathbf{E}, \mathbf{H}] \, d\mathbf{F} = J_1 + J_2, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} J_1 &= \epsilon_0 \oint_F (\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_q)(\mathbf{v}, d\mathbf{F}) = \frac{qvE_0}{2\gamma^2} \int_0^\pi \frac{\cos^2\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta}{(1-\beta^2\sin^2\vartheta)^{3/2}} = \\ &= - \frac{qvE_0(1-\beta^2)}{\beta^2} \left[1 - \frac{1}{2\beta} \ln \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right) \right], \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} J_2 &= -\epsilon_0 v E_0 \oint_F (\mathbf{E}_q, d\mathbf{F}) = \\ &= - \frac{qvE_0}{2\gamma^2} \int_0^\pi \frac{\sin\vartheta \, d\vartheta}{(1-\beta^2\sin^2\vartheta)^{3/2}} = -qvE_0. \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, окончательно

$$\oint_F \mathbf{S} \, d\mathbf{F} = - \frac{qvE_0}{\beta^2} \left[1 - \frac{1-\beta^2}{2\beta} \ln \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right) \right]. \quad (12)$$

Если подставить выражения (9) и (11) в формулу (5), то получим следующий результат:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -J_1. \quad (13)$$

Прямое вычисление интеграла

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_V \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2} \right) dV \right] \quad (14)$$

подтверждает справедливость соотношения (13). Действительно, подставляя в (14) формулы (6) и (8), получим

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \left[\epsilon_0 \int E_q^2 dV + \mu_0 \int H_q^2 dV + \right. \\ &\quad \left. + \epsilon_0 \int E_0^2 dV + 2\epsilon_0 \int (\mathbf{E}_q \mathbf{E}_0) dV \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

При анализе интегралов, фигурирующих в правой части (15), используем некоторые соображения, которые позволяют избавиться от расходимостей, связанных с бесконечной энергией поля точечного заряда. Производная по времени от первых трех слагаемых в правой части (15) равна нулю. Для третьего слагаемого это очевидно. Для первых же двух следует принять во внимание то, что когда заряд приближается к центру рассматриваемого шара, собственная энергия заряда внутри этого шара

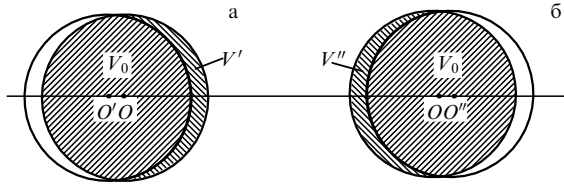


Рис. 1.

растет, а когда заряд удаляется от центра шара, эта энергия уменьшается. Значит, в момент прохождения зарядом центра шара эта энергия достигает максимума. Остается исследовать выражение

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial I}{\partial t}, \quad I = \int (\mathbf{E}_q \mathbf{E}_0) dV. \quad (16)$$

Заметим, что нас интересует значение производной в записанном выражении в момент времени $t = 0$, когда заряд проходит через центр рассматриваемого шара (точка O на рис. 1). Величину $\partial I / \partial t$ тогда можно представить как

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{I'' - I'}{dt}, \quad (17)$$

где I' и I'' — значения интеграла I в моменты времени $t' = -dt/2$ и $t'' = +dt/2$.

На рисунке 1 изображены сферы радиуса R с центром в точке O , а также сферы такого же радиуса с центрами в точках O' (рис. 1а) и O'' (рис. 1б), в которых заряд находился в моменты времени t' и t'' . Ясно, что поле \mathbf{E}_q , даваемое формулой (7) и фигурирующее в интегралах I' и I'' , описывает электрическое поле движущегося заряда в эти моменты времени, только когда координаты r, ϑ будут отнесены к сферическим системам координат с центрами в точках O' и O'' соответственно. В то же время интегрирование в I' и I'' производится по объему шара с центром в точке O . Этот объем, как видно из рис. 1а, б, состоит из объемов V_0 и V' на рис. 1а и из объемов V_0 и V'' на рис. 1б. Поскольку интегрирование по объему V_0 входит в оба интеграла I' и I'' , то при вычитании в формуле (17) интегралы по этой области взаимно уничтожаются. Тогда

$$I'' - I' = I(V'') - I(V'). \quad (18)$$

Так как расстояние $O'O''$ заряд проходит за бесконечно малое время dt , области V' и V'' имеют бесконечно малую толщину. При этом элементы объемов в интегралах I' и I'' могут быть записаны в виде

$$dV = 2\pi R^2 \sin \vartheta d\vartheta v \frac{dt}{2} \cos \vartheta$$

и

$$dV = -2\pi R^2 \sin \vartheta d\vartheta v \frac{dt}{2} \cos \vartheta$$

(во втором выражении поставлен знак минус, поскольку в объеме $V'' \cos \vartheta < 0$). Интегрирование по углу ϑ в интегралах I' и I'' производится в пределах от 0 до $\pi/2$ и от $\pi/2$ до π соответственно. Скалярное произведение

$(\mathbf{E}_q \mathbf{E}_0)$ с учетом формулы (7) может быть записано в виде

$$(\mathbf{E}_q \mathbf{E}_0) = \frac{qE_0 \cos \vartheta}{4\pi\epsilon_0 \gamma^2 R^2 (1 - \beta^2 \sin^2 \vartheta)^{3/2}}. \quad (19)$$

Подстановка выражений для dV и $(\mathbf{E}_q \mathbf{E}_0)$ в (18), последующая подстановка полученного выражения для разности $I'' - I'$ в формулу (17), а затем в (16) действительно доказывают, что $\partial W / \partial t = -J_1$.

Выполненный анализ показывает, что величина потока энергии за счет вектора Пойнтинга оказывается меньше величины полной работы, совершаемой полем над зарядом. Часть энергии заряд при своем движении получает в результате изменения энергии взаимодействия собственного поля заряда с внешним полем. Как видно из рис. 1, "интерференционный" член $(\mathbf{E}_q \mathbf{E}_0)$, описывающий энергию этого взаимодействия, имеет разные знаки в объемах V' и V'' , что и приводит к полученному результату $\partial W / \partial t = -J_1$.

3. Предельные случаи

Интересно рассмотреть следующие предельные случаи: а) нерелятивистская скорость движения заряда ($v \ll c$) и б) ультрарелятивистский случай ($v \lesssim c$). Из полученных выше формул для случая (а) можно получить

$$\oint_F \mathbf{S} d\mathbf{F} \simeq -\frac{2}{3} qvE_0, \quad \frac{\partial W}{\partial t} \simeq -\frac{1}{3} qvE_0. \quad (20)$$

Соответственно для случая (б)

$$\oint_F \mathbf{S} d\mathbf{F} \simeq -qvE_0, \quad \frac{\partial W}{\partial t} \simeq 0. \quad (21)$$

На рисунке 2 приведены зависимости отношений

$$X(\beta) = \frac{1}{qvE_0} \left| \oint_F \mathbf{S} d\mathbf{F} \right|, \quad Y(\beta) = \frac{1}{qvE_0} \left| \frac{\partial W}{\partial t} \right|$$

от безразмерной скорости движения заряда $\beta = v/c$, рассчитанные с помощью полученных выше формул (10), (12) и (13).

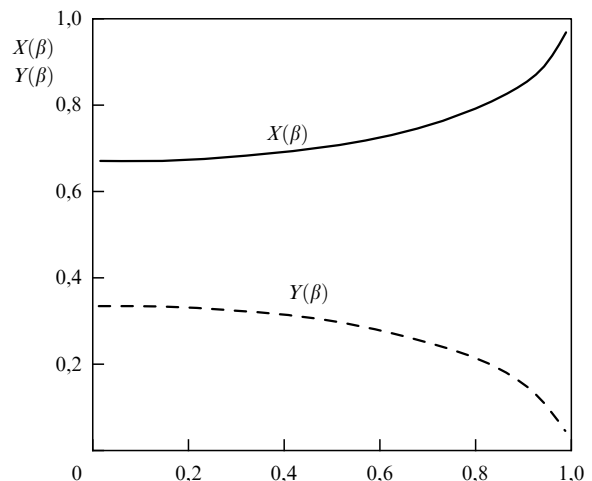


Рис. 2.

Из рисунка 2 видно, что с увеличением β , когда происходит переход от нерелятивистского случая к ультрарелятивистскому, все бóльшая доля энергии, необходимой для работы поля над зарядом, поставляется за счет потока вектора Пойнтинга. В ультрарелятивистском случае эта доля становится равной единице. В то же время доля энергии, получаемой движущимся зарядом за счет взаимодействия внешнего поля с собственным полем заряда, с ростом β падает в ультрарелятивистском случае до нуля. Этот результат объясняется деформацией картины силовых линий электрического поля движущегося заряда, происходящей при переходе от нерелятивистского случая к ультрарелятивистскому. Действительно, как следует из формулы (7), при $v \rightarrow c$ поле $E_q \rightarrow 0$ везде за исключением плоскости, проходящей через рассматриваемый заряд и перпендикулярной вектору скорости его движения \mathbf{v} . Поэтому в формуле (16) скалярное произведение $(\mathbf{E}_q \mathbf{E}_0) \rightarrow 0$, а следовательно, стремится к нулю и величина $\partial W / \partial t$.

4. Заключительные замечания

Возвращаясь к вопросу, поставленному в связи с подводом энергии к проводнику с током, следует отметить следующее. Собственное поле электронов, создающих ток в проводнике, гасится за счет полей положительных ионов. В результате нескомпенсированным оказывается только внешнее поле, приложенное к проводнику. Поэтому механизм взаимодействия собственных полей носителей заряда с внешним полем оказывается в случае проводника подавленным, а суперпозиция магнитных

полей макроскопической совокупности движущихся зарядов создает характерную картину линий результирующего магнитного поля, как раз и обеспечивающих выполнение равенства

$$\mathcal{Q} = - \oint_F \mathbf{S} d\mathbf{F} \quad (22)$$

для тока в проводнике.

В предыдущем рассмотрении (раздел 2) игнорировались эффекты, связанные с ускорением, приобретаемым зарядом, над которым внешнее поле совершает работу. Можно показать, что эффекты излучения ускоренно движущегося заряда в большинстве практических случаев весьма малы. Кроме того, в случае заряда, движущегося с ускорением, к электрическому полю, определяемому формулой (7), следует добавить слагаемое $\sim 1/r$, которое преобладает над слагаемым $\sim 1/r^2$ в волновой зоне, т.е. при больших r . Как видно из нашего предыдущего рассмотрения, полученные выше результаты (формулы (9)–(12)) не зависят от радиуса выбранной сферы, в центре которой находился движущийся заряд. Поэтому, выбрав этот радиус достаточно малым, можно вообще пренебречь слагаемым $\sim 1/r$, обусловленным ускорением, в выражениях для \mathbf{E} и \mathbf{H} .

Список литературы

1. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Физматлит, 2001) [Translated into English: Landau L D, Lifshitz E M *The Classical Theory of Fields* (Oxford: Pergamon Press, 1983)]

On the interpretation of the energy conservation law for a point charge moving in a uniform electric field

G.N. Gaidukov, A.A. Abramov

Moscow State Institute of Electronic Technology (Technical University),
proezd 4806, d. 5, 124498 Zelenograd Moscow, Russian Federation
Tel. (7-495) 532-98 58
E-mail: gaid@gf.miee.ru, abramov-miet@mail.ru

The electromagnetic energy conservation law is usually interpreted as meaning that a change in field energy in a certain volume consists of two terms, an energy increment due to the Poynting vector flux into the volume and an amount of energy dissipated to heat due to charge carriers interacting with the material medium they move through. It is shown that the work by the field on a point charge moving in it is implemented via two mechanisms: the Poynting vector energy flux to the charge and a peculiar energy supply channel due to the interaction of the charge's self-field with the external field. Interestingly enough, for nonrelativistic velocities of the charge ($v \ll c$), the former and the latter energy supplies relate as two thirds to one third. In the ultrarelativistic case ($v \lesssim c$), the Poynting vector alone supplies the whole of energy.

PACS numbers: 03.50.De, **41.20.-q**

DOI: 10.3367/UFNr.0178.200802d.0171

Bibliography — 1 reference

Received 27 June 2007

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **178** (2) 171–174 (2008)

Physics – Uspekhi **51** (2) (2008)