

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Квантовые фазовые переходы "локализованные – делокализованные электроны"

В.Ф. Гантмахер, В.Т. Долгополов

На примерах переходов металл–изолятор и переходов между разными квантовыми холловскими жидкостями обсуждаются физические идеи, лежащие в основе описания квантовых фазовых переходов, а также способы применения теоретических результатов при обработке экспериментальных данных. Обсуждаются и сравниваются две теоретические схемы: общая теория квантовых фазовых переходов, построенная по типу теории термодинамических фазовых переходов и активно использующая понятие статистической суммы, и теория, базирующаяся на скейлинговой гипотезе и на понятии ренормгруппы, заимствованной из квантовой электродинамики, и формулирующая свои выводы на языке потоковых диаграмм.

PACS numbers: 71.30.+h, 72.15.Rn, 73.43.Nq

DOI: 10.3367/UFNr.0178.200801a.0003

Содержание

1. Введение (3).
 - 1.1. Флуктуации тепловые и квантовые.
 2. Квантовые фазовые переходы (6).
 - 2.1. Определение квантового фазового перехода. 2.2. Параллели и различия между классическим и квантовым фазовыми переходами. 2.3. Критическая окрестность квантового фазового перехода.
 3. Потоковые диаграммы для переходов металл–изолятор (10).
 4. Трехмерный электронный газ (11).
 5. Двумерный электронный газ (14).
 - 5.1. Газ невзаимодействующих электронов. 5.2. Спин-орбитальное взаимодействие. 5.3. Газ взаимодействующих электронов.
 6. Квантовые переходы между разными состояниями холловской жидкости (19).
 7. Заключение (23).
- Список литературы (23).

1. Введение

Квантовые фазовые переходы в электронном газе при наличии беспорядка, приводящие к локализации, — это область, находящаяся на главной дороге развития науки об электронах в твердых телах, дороги, которая направлена в сторону низких температур и учета взаимодействий. В этой области возник, как нам кажется, опасный разрыв между теорией и экспериментом. Построенные

теории настолько сложны, что экспериментаторы, как правило, пользуются готовыми рецептами и шаблонами, полученными "на выходе" теорий, не зная и поэтому не контролируя в эксперименте всех предположений и ограничений, сделанных "на входе".

Предлагаемый обзор направлен на преодоление этого разрыва. Обзор не содержит сколько-нибудь последовательного изложения математического аппарата, на основе которого сформулированы гипотезы и построены теории. Вместо этого излагается канва физических идей, понятий и предположений, которые часто остаются за кадром в теоретических работах и обзорах, особенно на той стадии, когда теория уже достаточно продвинута. Это должно сделать наш обзор интересным и полезным для экспериментаторов.

С другой стороны, мы не стремились собрать, классифицировать и оценить огромный экспериментальный материал, накопленный в этой области. Мы обращаемся к эксперименту для того, чтобы показать, как используется теория при его интерпретации и какие здесь возникают трудности и проблемы. Это должно сделать обзор полезным для теоретиков.

Мы начнем с обсуждения на качественном уровне тех идей, которые были положены в основу теории квантовых фазовых переходов. Затем рассмотрим, в какой мере в общую теоретическую схему укладываются известные данные о переходах металл–изолятор и о переходах между разными квантовыми холловскими жидкостями.

1.1. Флуктуации тепловые и квантовые

Прежде чем обсуждать квантовые фазовые переходы по существу, кратко напомним некоторые положения статистической физики. Будем предполагать, что мы имеем дело с макроскопической системой, состоящей из огромного числа частиц. Рассматриваемая система является

В.Ф. Гантмахер, В.Т. Долгополов. Институт физики твердого тела РАН, ул. Институтская 2, 142432 Черноголовка, Московская обл., Российская Федерация
Тел. (496) 522-29-42, (496) 522-29-46. Факс (496) 524-97-01
E-mail: gantm@issp.ac.ru, dolgop@issp.ac.ru

Статья поступила 8 октября 2007 г.

почти изолированной и во многих отношениях ведет себя как замкнутая, однако может обмениваться частицами и энергией с еще большей системой, служащей резервуаром, т.е. наша система является подсистемой резервуара.

Рассмотрим сначала классическую подсистему при конечной температуре T . Согласно формулам классической статистики вероятность p_i пребывания подсистемы в состоянии с энергией ε_i выражается в виде

$$p_i = \frac{\exp(-\varepsilon_i/T)}{Z}, \quad (1)$$

где коэффициент $1/Z$ определяется условием нормировки $\sum p_i = 1$,

$$Z = \sum_i \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{T}\right) \quad (2)$$

(температура везде в энергетических единицах). Величина Z , которая называется статистической суммой, играет решающую роль в описании термодинамических свойств классических объектов. То обстоятельство, что энергия подсистемы не фиксирована, а подчиняется распределению (1), означает наличие классических тепловых флуктуаций.

Появление квантовой механики привело к ревизии базиса, на котором строилась классическая термодинамика, и к изменению обоснования ее основных формул. При этом оказалось, что классические выражения имеют ограниченную область применения. Для построения квантовой статистики требуется более продвинутый аппарат квантовой механики. Прежде чем обратиться к нему, предположим, что подсистема полностью замкнута и не взаимодействует с большой системой. Это позволяет воспользоваться стандартным аппаратом квантовой механики и применить для описания подсистемы стационарное уравнение Шрёдингера. Получившийся набор стационарных значений энергии ε_i и соответствующий набор волновых функций $\varphi_i(q)$ системы можно считать атрибутами подсистемы в нулевом приближении. В выражении (2) фигурируют именно эти энергии ε_i . Набор функций $\varphi_i(q)$ удобен тем, что он имеет отношение к рассматриваемой подсистеме и в то же время является полным, так что по нему удобно производить разложения.

Наличие огромного числа частиц в подсистеме означает, что подсистема обладает исключительно плотным распределением квантовых уровней по энергии. Вследствие слабого взаимодействия с резервуаром рассматриваемая подсистема находится в так называемом смешанном состоянии, в котором никакое измерение и никакой набор измерений не приводят к однозначно предсказуемым результатам. По определению смешанного состояния повторные измерения любой физической величины дают результат более или менее близкий к среднему, но отличающийся от предыдущего. Разброс результатов измерения физических величин интерпретируется как следствие флуктуаций.

Ввиду наличия взаимодействия с внешним окружением подсистема не может быть описана волновой функцией. Вместо волновой функции для описания подсистемы вводится матрица плотности

$$\rho(q', q) = \int \psi^*(q', X) \psi(q, X) dX, \quad (3)$$

где q соответствует совокупности координат подсистемы, X — оставшиеся координаты системы, $\psi(q, X)$ — волновая функция замкнутой системы.

Средние значения любой физической величины $\langle s \rangle$ вычисляются теперь с помощью не волновой функции, а матрицы плотности:

$$\langle s \rangle = \frac{1}{A} \int \left\{ \hat{s}[\rho(q', q)] \right\}_{q'=q} dq, \quad A = \int \rho(q, q) dq. \quad (4)$$

В выражении (4) сначала следует применить оператор \hat{s} , действующий на функции от переменной q , к матрице плотности $\rho(q', q)$, затем положить $q' = q$ и проинтегрировать. Оператор, который формально входит в выражение для нормировочной константы A , тождественно равен единице; поэтому в подынтегральном выражении сразу учтено, что $q' = q$.

В соответствии с общим правилом (4) среднее значение координаты $\langle q \rangle$, например, имеет вид

$$\langle q \rangle = \frac{1}{A} \iint \psi^*(q, X) q \psi(q, X) dq dX = \frac{\int q \rho(q, q) dq}{\int \rho(q, q) dq}. \quad (5)$$

Физический смысл матрицы плотности можно прояснить, выписав ее в явном виде для подсистемы, находящейся в статистическом равновесии при конечной температуре T :

$$\rho(q', q) = \sum_i \varphi_i^*(q') \varphi_i(q) \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{T}\right). \quad (6)$$

Из формул (5) и (6) для подсистемы, находящейся в статистическом равновесии, получим

$$\begin{aligned} \langle q \rangle &= \frac{1}{A} \sum_i \int \varphi_i^*(q) \varphi_i(q) \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{T}\right) q dq = \\ &= \frac{1}{A} \sum_i \langle q \rangle_i \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{T}\right), \\ \langle q \rangle_i &= \int \varphi_i^*(q) \varphi_i(q) q dq. \end{aligned} \quad (7)$$

Проведенное в (7) усреднение с помощью матрицы плотности включает в себя как результат вероятностного описания в квантовой механике в виде $\langle q \rangle_i$, так и неполную информацию о системе (статистическое усреднение).

Пользуясь функциями $\varphi_i(q)$, запишем в матричном виде функцию $\rho(q', q)$:

$$\rho(q', q) = \|\rho_{ij}\| = \left\| \int \varphi_j^*(q) \rho(q', q) \varphi_i(q) dq \right\|, \quad (8)$$

и уравнение (4):

$$\langle s \rangle = \frac{\sum_{ij} s_{ij} \rho_{ji}}{\sum_i \rho_{ii}} = \sum_{ij} s_{ij} w_{ji}, \quad w_{ij} = \frac{\rho_{ij}}{\sum_i \rho_{ii}}. \quad (9)$$

Матрица w_{ij} , построенная на наборе функций $\varphi_i(q)$, называется статистической матрицей и по сути является нормированной матрицей плотности.

Подставив в уравнение (4) вместо \hat{s} оператор энергии \hat{H} , получим

$$\langle \varepsilon \rangle = \sum_i w_{ii} \varepsilon_i. \quad (10)$$

Это означает, что вероятность p_i обнаружить у нашей подсистемы энергию ε_i равна диагональному элементу матрицы w_{ii} :

$$p_i = w_{ii}. \quad (11)$$

Выражение (11) является квантовым аналогом соотношения (1).

Имеется несколько универсальных свойств статистической матрицы. Как следует из определения, эта матрица нормирована:

$$\sum_i w_{ii} = 1. \quad (12)$$

Из уравнения (6) следует, что в статистически равновесном состоянии статистическая матрица диагональна. Ее диагональные элементы являются функциями только энергии соответствующего состояния подсистемы ε_i . До тех пор, пока хотя бы один из w_{ii} при $i \neq 0$ имеет конечную величину, состояние подсистемы остается смешанным и всякая измеряемая величина испытывает флуктуации.

Макроскопическая система оказывается в смешанном состоянии прежде всего вследствие конечности температуры. Из сравнения уравнений (1) и (11) следует, что в пределе высоких температур статистическая матрица с хорошей точностью подчиняется распределению Гиббса:

$$w_{ii} = \frac{\exp(-\varepsilon_i/T)}{Z}. \quad (13)$$

Поскольку интеграл от квадрата волновой функции $\varphi_i(q)$ по всему координационному пространству

$$\int \varphi_i^*(q) \varphi_i(q) dq \equiv 1,$$

то статистическая сумма Z может быть представлена как сумма диагональных матричных элементов оператора $\exp(-\hat{H}/T)$ на полном наборе собственных функций φ_i :

$$\begin{aligned} Z &= \sum_i \int \varphi_i^*(q) \varphi_i(q) \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{T}\right) dq = \\ &= \sum_i \left\langle \varphi_i \left| \exp\left(-\frac{\hat{H}}{T}\right) \right| \varphi_i \right\rangle. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь использовано то, что φ_i — собственные функции гамильтониана \hat{H} , так что

$$\exp\left(-\frac{\hat{H}}{T}\right) \varphi_i = \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{T}\right) \varphi_i.$$

Из сравнения уравнений (4)–(7) с уравнением (13) следует еще одна форма представления статистической суммы:

$$Z = \int \rho(q, q) dq \equiv \text{Sp} [\rho(q', q)]. \quad (15)$$

Если рассматривать Z как нормировочный коэффициент, то из уравнений (4) и (9) видно, что представление (15) справедливо не только в классическом пределе, но и в общем случае.

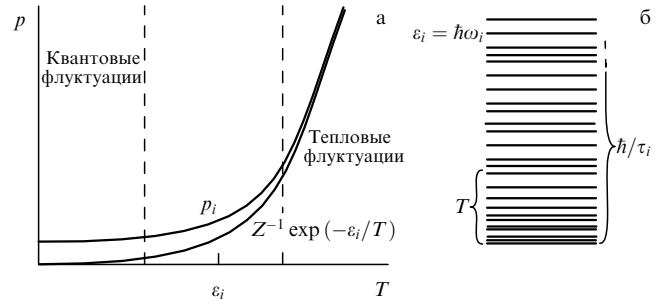


Рис. 1. (а) Низкотемпературное поведение диагональных элементов w_{ii} статистической матрицы, соответствующих малым значениям энергии. (б) Одновременное возбуждение тепловых и квантовых флуктуаций.

Как мы уже знаем, открытость подсистемы означает ее взаимодействие с окружением. Каким бы слабым ни было это взаимодействие, благодаря чрезвычайно большой густоте энергетических уровней макроскопической системы в некоторой малой области энергий произойдет смешивание состояний. Поэтому даже при нулевой температуре незамкнутая подсистема остается в смешанном состоянии. Это означает, что по мере понижения температуры каждый из элементов w_{ii} ($i \neq 0$) не стремится экспоненциально к нулю, а приближается к константе, не зависящей от температуры, а зависящей от ε_i , размеров и свойств подсистемы. Происходит переход от тепловых флуктуаций к квантовым. Последнее утверждение иллюстрируется на рис. 1а, где качественно показана температурная зависимость вероятности обнаружения у подсистемы некоторой энергии ε_i . Штриховыми прямыми отделены области преимущественно квантовых и преимущественно тепловых флуктуаций. Предельное значение $p_i(0)$ определяется энергией ε_i , размерами и свойствами подсистемы.

В данной подсистеме $p_i(0)$ заведомо уменьшается с увеличением ε_i . Полагая эту зависимость степенной, $p_i(0) \propto 1/\varepsilon_i^\alpha$, можно получить оценку снизу для показателя степени α . Энергия тепловых флуктуаций берется из резервуара. Конечная, причем не экспоненциально малая, вероятность обнаружения подсистемы в состоянии $\varepsilon_i \gg T$ означает нарушение закона сохранения энергии. Такое нарушение возможно, но только в рамках, допускаемых соотношением неопределенности

$$\varepsilon_i \tau_i \sim \hbar, \quad (16)$$

где τ_i — время жизни состояния ε_i . Поэтому даже если бы переходы во все состояния ε_i были равновероятными, то в соответствии с (16) величина $p_i(0)$ убывала бы по закону $p_i(0) \propto \varepsilon_i^{-1}$. Следовательно,

$$\alpha \geq 1. \quad (17)$$

Существенно, что интервал энергий, в котором происходят квантовые флуктуации, не зависит от температуры. Это следует из соотношения неопределенности (16).

Относительную роль тепловых и квантовых флуктуаций поясняет рис. 1б, на котором изображен спектр возбуждений подсистемы в одной из фаз, т.е. вдали от точки $x = x_c$ фазового перехода. Фигурной скобкой в

левой части рисунка показан масштаб, связанный с температурой. Классически возбужденными являются только моды с частотами $\omega_i \lesssim T/\hbar$. Диапазон тепловых мод ограничен сверху температурой, но зато у этих мод большие числа заполнения. Моды $\omega_i > T/\hbar$ возбуждаются в основном в результате квантовых процессов и имеют малые числа заполнения. Однако чем ниже температура, тем больше роль квантовых возбуждений.

2. Квантовые фазовые переходы

2.1. Определение квантового фазового перехода

Квантовыми называются фазовые переходы, которые могут происходить при абсолютном нуле температуры $T = 0$, и заключаются в изменении *основного состояния* исследуемой системы в случае, когда некоторый управляющий параметр x принимает критическое значение x_c . (Под основным состоянием здесь мы понимаем нижайшее из возможных смешанных состояний.) Управляющим параметром может быть магнитное поле или концентрация электронов. Квантовые фазовые переходы относятся к классу непрерывных переходов, при которых ни одна из физических функций состояния не имеет разрывов в точке перехода.

Единственной причиной, способной привести к изменению основного состояния системы при нулевой температуре, является квантовая флуктуация. С этим и связано наименование рассматриваемых фазовых переходов. Как и для термодинамических переходов, в теории квантовых фазовых переходов вводится понятие корреляционной длины ξ , имеющей смысл среднего размера квантовых флуктуаций. При абсолютном нуле ξ заведомо определяется только отклонением δx управляющего параметра от критического значения. Предполагается, что зависимость ξ от δx степенная:

$$\xi \propto |x - x_c|^{-\nu}. \quad (18)$$

Реальные эксперименты всегда выполняются при конечных температурах, когда помимо квантовых флуктуаций существуют тепловые. Задача теории — предсказать, как может проявиться переход, реализующийся исключительно при нулевой температуре, в свойствах системы, находящейся при конечной температуре.

Теория квантовых фазовых переходов (см., например, монографию [1] или обзоры [2, 3]) построена по типу теории термодинамических фазовых переходов. На плоскости (x, T) , т.е. на плоскости (управляющий параметр — температура), точка квантового перехода может быть конечной точкой линии термодинамических переходов: $x_c(T) \rightarrow x_c(0)$ при $T \rightarrow 0$. Например, обычно так себя ведут магнитные переходы с магнитным полем в качестве управляющего параметра. Однако существуют квантовые переходы другого типа, которые изображаются изолированной точкой x_c на оси абсцисс плоскости (x, T) . Переход металл — изолятор является примером такого перехода. В этом обзоре мы ограничимся именно случаем переходов типа изолированной точки.

2.2. Параллели и различия между классическим и квантовым фазовыми переходами

Как уже упоминалось, квантовые фазовые переходы относятся к классу непрерывных переходов, в которых

нет сосуществования двух конкурирующих фаз и, следовательно, нет стационарной границы между фазами. К этому же классу относятся термодинамические фазовые переходы второго рода. В точке термодинамического фазового перехода система как целое в результате тепловых флуктуаций переходит в другую фазу. Флуктуации существуют по обе стороны от перехода; их характерный размер ξ называется корреляционной длиной. Величина ξ расходитсся при приближении к переходу с обеих сторон [5, 6].

Естественно ожидать, что нечто подобное реализуется и в окрестности квантового перехода, причем с участием квантовых флуктуаций. Аналогия между классическим и квантовым переходами действительно существует, причем весьма неожиданная. Оказывается, что *поведение квантовой системы в окрестности точки перехода при конечной температуре в пространстве размерностью d аналогично поведению классической системы в пространстве с большей размерностью $D > d$* . Последнее утверждение требует пространственных пояснений, которые, в частности, должны включать в себя алгоритм введения такой воображаемой системы и определение ее размерности.

Во-первых, следует четко различать размерность d геометрического пространства, в котором находится система, и размерность пространства обобщенных координат, зависящую от числа частиц N в системе. Если ϱ — плотность частиц в пространстве, то $N = \iiint \varrho d^d X$, где размерность d определяет кратность интеграла. Обычно предполагается, что d -мерное пространство бесконечно во всех измерениях, однако область изменения одной или нескольких координат X_i может быть и ограниченной.

Во-вторых, обратим внимание на сходство между оператором $\exp(-\hat{H}/kT)$, с помощью которого записано выражение (14), и оператором \hat{S} , описывающим эволюцию замкнутой квантовой системы во времени в соответствии с уравнением Шрёдингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi, \quad \hat{S} = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}t\right). \quad (19)$$

Сходство станет очевидным, если сделать замену переменных

$$\frac{it}{\hbar} = \frac{1}{T}. \quad (20)$$

Подстановка (20) позволяет по-новому интерпретировать матричные элементы в выражении (14). Элемент $\langle i | \exp(-\hat{H}/T) | i \rangle$ можно рассматривать как амплитуду вероятности того, что подсистема, стартовавшая из состояния $\langle i |$, эволюционируя под действием оператора \hat{S} , вернется в исходное состояние $|i\rangle$ через мнимое время \tilde{t} , равное $-i\hbar/T$. Мнимое время \tilde{t} часто называют мацубаровским. Положим для определенности, что число шагов фиксировано и равно $N + 1$, $N \gg 1$, и будем считать, что подсистема побывала за время $i\hbar/T$ в N виртуальных состояниях, оставаясь в каждом из них в течение времени $(\delta\tilde{t})_j$, так что

$$\sum_{j=0}^N (\delta\tilde{t})_j = \frac{i\hbar}{T}. \quad (21)$$

Амплитуда "вероятности вернуться в исходное состояние" означает сумму амплитуд вероятностей вер-

нуться по всем возможным траекториям в пространстве состояний. Рассмотрим множество траекторий, состоящих из N шагов. Оператор, входящий в каждый из матричных элементов в уравнении (14), представим в виде

$$\exp\left(-\frac{\hat{H}}{T}\right) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \hat{H} \sum_{j=0}^N (\delta\tilde{t})_j\right). \quad (22)$$

Возьмем полный набор волновых функций $|m_j\rangle$ произвольного оператора, не коммутирующего с гамильтонианом, и будем считать, что траектории реализуются именно на этих состояниях. Тогда вместо соотношения (14) получим

$$\begin{aligned}
Z = & \sum_i \sum_{m_1, m_2, \dots, m_N} \left\langle i \left| \exp \left(-\frac{i\hat{H}(\delta\tilde{t})_1}{\hbar} \right) \right| m_1 \right\rangle \times \\
& \times \left\langle m_1 \left| \exp \left(-\frac{i\hat{H}(\delta\tilde{t})_2}{\hbar} \right) \right| m_2 \right\rangle \dots \\
& \dots \left\langle m_N \left| \exp \left(-\frac{i\hat{H}(\delta\tilde{t})_N}{\hbar} \right) \right| i \right\rangle. \tag{23}
\end{aligned}$$

Произведение матричных элементов, стоящее под знаками сумм, соответствует цепочке последовательных виртуальных переходов. Суммирование по всем комбинациям $\{m_j\}$ означает, что учтены все возможные замкнутые цепочки из N звеньев. Произведенная модернизация выражения для Z — замена формулы (14) формулой (23) — означает, что мы учли квантовые свойства системы, добавив к реальным переходам виртуальные.

Схематически поясним включение виртуальных переходов на рис. 2, где ось абсцисс изображает исходное d -мерное пространство $\{^dX\}$ и все возможные классические состояния системы располагаются вдоль этой оси в порядке возрастания их энергии. Все другие горизонтальные линии являются повторениями этого пространства. Эти повторения составляют множество из N элементов на отрезке $[0, \hbar/T]$. Черный кружок на оси абсцисс изображает начальное состояние системы с энергией ε_i . Второй черный кружок на верхней горизонтальной прямой соответствует "конечному" состоянию системы с той же энергией ε_i при максимально возможном значении мнимого времени $|\tilde{t}| = \hbar/T$. Стрелками изображена цепочка виртуальных переходов через набор виртуальных состояний $|m_j\rangle$, обозначенных полыми кружками. Это — смешанные состояния, не имеющие определенной энергии и, следовательно, не

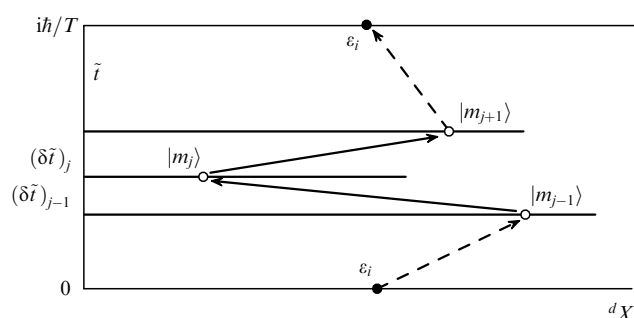


Рис. 2. Множество квантовых статистических d -мерных систем, расположенных в одномерной полосе шириной \hbar/T , и виртуальные переходы между ними.

являющиеся собственными состояниями оператора \hat{H} . Виртуальные переходы, отражающие квантовые свойства рассматриваемой статистической системы, показаны стрелками. Изображенная на рис. 2 цепочка виртуальных переходов соответствует одному члену в сумме (23). Суммирование по всем комбинациям $\{m_j\}$ означает, что учтены все возможные цепочки между фиксированными начальной и конечной точками ε_i .

Теперь наша задача состоит в том, чтобы построить классическую систему, для которой статистической суммой можно было бы считать выражение (23). В исходном выражении (14) суммирование по i означало суммирование по всем состояниям, реализующимся в системе размерностью d . Теперь число членов суммы увеличилось и такого числа разных состояний в нашей реальной системе нет. Однако построим воображаемую классическую систему с большей размерностью. Путь к такому построению указывает рис. 2.

Добавим к d осям исходного пространства дополнительную ось, вдоль которой отложим мнимое время. В графических образах рис. 2 это означает, что к оси абсцисс добавлена ось ординат. Из формулы (21) видно, что координата вдоль этой оси изменяется в интервале

$$0 \leq |\tilde{t}| \leq \frac{\hbar}{T}. \quad (24)$$

Полоса (24) на рис. 2, в которой находится изображающая точка, тем шире, чем ниже температура. При $T = 0$ полоса превращается в полуплоскость, а возрастание температуры, наоборот, сужает полосу и уменьшает ее вклад в статистические свойства квантовой системы.

Повторим d -мерную классическую систему N раз, расположив реплики вдоль оси мнимого времени \tilde{t} на расстояниях $(\delta\tilde{t})_j$ друг от друга. В получившемся ансамбле состояния у всех реплик могут быть различны. Обозначим эти состояния как m_j . Зафиксируем некоторое "исходное" состояние "нижней" подсистемы ε_i . Энергия получившейся классической D -мерной системы равна сумме энергий всех слоев с учетом взаимодействия между ними. Каждому значению $\varepsilon_{i,\{m\}}$ соответствует определенная энергия ε_i исходной d -мерной классической системы и определенная цепочка состояний, фигурирующая в выражении (23). Поэтому число членов в сумме $\sum_{\{m\}} s_{i,m}$, входящей в выражение (23), равно числу разных значений энергии $\varepsilon_{i,\{m\}}$. К этому следует добавить, что каждый член $s_{i,m}$ суммы (23) имеет типичный для статистических сумм вид, потому что произведение входящих в него матричных элементов в конце концов сводится к произведению экспонент $\exp(-i\varepsilon_j(\delta\tilde{t})_j/\hbar)$. Единственным различием будет то, что для классической системы каждый из членов суммы Z является действительным положительным числом, а в выражении (23) действительным положительным числом является сумма $s_i = \sum_{\{m\}} s_{i,m}$ по $\{m\}$ всех произведений $s_{i,m}$. Пренебрегая этим различием, можно рассматривать выражение (23) как статистическую сумму Z воображаемой D -мерной классической системы.

Конечно, в общем виде получившаяся математическая конструкция абсолютно непрактична. Однако, как это обычно бывает при обосновании скейлинговых соотношений, для нас важно не вычисление конкретной суммы (23), а выяснение ее некоторых принципиальных свойств. Как мы увидим в разделе 2.3, таким свойством

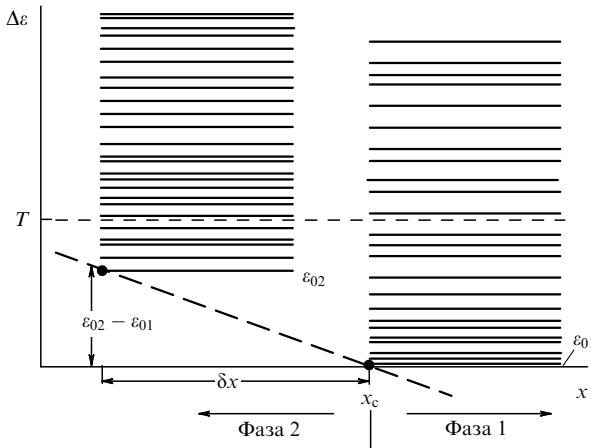


Рис. 3. Зависимость разности наинизших возможных значений энергии двух фаз $\Delta\varepsilon = \varepsilon_{02} - \varepsilon_{01}$ от управляющего параметра (штриховая прямая). При значении управляющего параметра $x = x_c - \delta x$ происходит флуктуационное возбуждение фазы 1 внутри равновесной фазы 2. Благодаря тому, что $|\Delta\varepsilon| < T$, основную роль в этом возбуждении играют тепловые флуктуации.

является анизотропия, т.е. неравноценность осей, D -мерного пространства.

В точке термодинамического фазового перехода статистическая сумма Z имеет особенность. Чувствительность функции (14) к наличию фазового перехода обусловлена тем, что при приближении к переходу в энергетический интервал T , определяющий существенные члены суммы (14), попадают не только уровни φ_i из набора, соответствующего равновесной фазе, но и уровни φ'_i неравновесной фазы (рис. 3). Это обуславливает возможность флуктуационных переходов между уровнями $|i\rangle$ и $|i'\rangle$ из разных наборов. После замены формулы (14) формулой (23) появились дополнительные возможности. Если температура низкая, так что $|\Delta\varepsilon| > T$, то флуктуационное появление другой фазы все равно возможно, но только за счет квантовых флуктуаций.

2.3. Критическая окрестность квантового фазового перехода

На фазовой плоскости вблизи классического фазового перехода всегда существует окрестность, в которой все физические величины зависят только от корреляционной длины ξ . Эту окрестность называют критической или скейлинговой областью. Вблизи квантового фазового перехода, при $T = 0$, также существует область значений управляющего параметра δx , в которой физические величины выражаются через длину ξ , определяемую уравнением (18). В разделе 4 мы убедимся в этом на конкретном примере перехода металл–изолятор в трехмерной системе невзаимодействующих электронов и выясним границы этой окрестности. При конечной температуре $T \neq 0$, однако, скейлинговая область квантового фазового перехода выглядит сложнее.

Пространство $\{^d X, \tilde{t}\}$ имеет размерность $d + 1$ из-за наличия дополнительной оси мнимого времени. Введем в пространстве $\{^d X, \tilde{t}\}$ корреляционные длины. Сохранив традиционное обозначение ξ для корреляционной длины в обычном d -мерном подпространстве, корреляционную длину вдоль дополнительной оси обозначим как ξ_φ . Индекс φ призван напоминать, что величина ξ_φ связана с квантовым аспектом задачи и со спецификой волновых

функций. Величина ξ_φ имеет размерность не длины, а \hbar/T , т.е. измеряется не в сантиметрах, а в секундах.

Обе корреляционные длины при $x \rightarrow x_c$ и $T \rightarrow 0$ будут расходиться на переходе. Согласно теории термодинамических непрерывных переходов расходимость описывается степенными функциями, но показатели степени у двух корреляционных длин могут быть, вообще говоря, разными. Обычно это записывается в таком виде:

$$\xi \propto \delta x^{-\nu}, \quad \delta x = |x - x_c|, \quad (25)$$

$$\xi_\varphi \propto \xi^z. \quad (26)$$

Показатели степени ν и z называются критическими индексами, причем к названию индекса z добавляют слово "динамический". И названия, и обозначения происходят из теории термодинамических переходов. В частности, динамический критический индекс в теории термодинамических переходов входит в соотношение, связывающее время жизни тепловых флуктуаций с их размером: $\tau \propto \xi^z$. В квантовой задаче при $T = 0$ все выглядит очень похожим: длина ξ характеризует пространственные корреляции, т.е. характерный размер квантовых флуктуаций, а время ξ_φ — временные корреляции.

Формула (26) сразу задает размерность пространства, в котором должна находиться воображаемая классическая система. Вдоль всех осей этого пространства должна быть отложена настоящая длина, т.е. из оси, по которой отложено \tilde{t} , нужно сделать оси, вдоль которых отложена длина. По соображениям размерности из соотношения (26) следует, что длина, эквивалентная "корреляционной псевдодлине" ξ_φ , пропорциональна $\xi_\varphi^{1/z}$,

$$\xi \propto \xi_\varphi^{1/z}, \quad (27)$$

так что элемент объема в интересующем нас пространстве

$$(d\xi)^d d\xi_\varphi \propto (d\xi)^d (d\xi_\varphi)^z, \quad (28)$$

и вместо одномерной оси мнимого времени получается z -мерное подпространство с обычными "пространственными" координатами. Отсюда

$$D = d + z. \quad (29)$$

Следствия уравнений (25) и (26) удобно обсуждать, используя плоскость (x, T) (рис. 4). При $T = 0$ на оси абсцисс плоскости (x, T) управляющий параметр x влияет только на одну независимую корреляционную длину ξ ; величину ξ_φ (и длину ξ) можно формально получить из ξ с помощью соотношения (26). На некотором отрезке $[x_1, x_2]$, включающем в себя точку x_c , все физические величины выражаются только через ξ .

Пусть теперь температура $T \neq 0$. Будем передвигаться по плоскости (x, T) вдоль горизонтальной линии $T \neq 0$ (линия aa на рис. 4) в направлении $x \rightarrow x_c$. При некотором значении δx величина ξ_φ , изменяющаяся в соответствии с соотношениями (25), (26), достигает своего максимально возможного значения \hbar/T , определяемого неравенством (24). При меньших значениях δx на линии aa соотношение (26) уже не выполняется, потому что ξ возрастает согласно соотношению (25), а ξ_φ остается равной своему максимально возможному

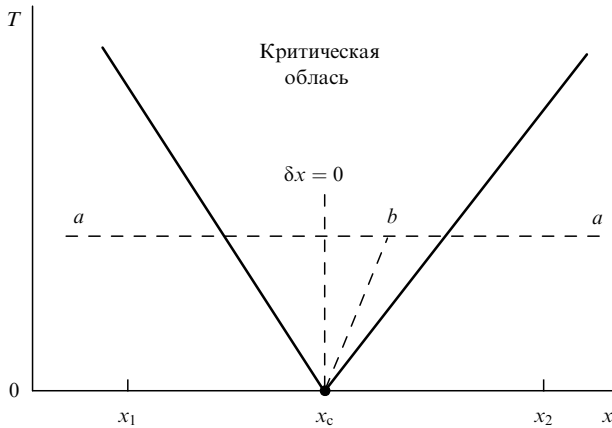


Рис. 4. Форма критической области квантового фазового перехода, изображаемого изолированной точкой на плоскости (x, T) .

значению \hbar/T . Параметры ξ и ξ_ϕ становятся *взаимно независимыми*. Область, в которой имеет место эта независимость, называется критической. Если теперь продвигаться к переходу, оставаясь внутри критической области (например вдоль линии bx_c), то на переходе по-прежнему будут расходиться оба параметра, но расходимость одного контролируется величиной δx : $\xi \propto \delta x^{-\nu}$, а расходимость другого — температурой: $\xi_\phi = \hbar/T$.

Название области определяется тем, что при квантовом переходе критической следует считать ту область, в которой существенную роль в перемешивании состояний двух фаз играют квантовые флуктуации. Как видно из рис. 3, это происходит только при выполнении условия

$$|\varepsilon_{02} - \varepsilon_{01}| > T. \quad (30)$$

При понижении температуры интервал значений управляющего параметра δx , в котором выполняется условие (30), уменьшается. Отсюда следует необычная форма критической области, ее расширение при удалении от перехода.

Величине $\xi_\phi = \hbar/T$ внутри критической области можно поставить в соответствие настоящую длину. Нужными свойствами обладает величина

$$L_\phi \propto \left(\frac{\hbar}{T}\right)^{1/z}, \quad (31)$$

которая является эквивалентной параметру $\xi_\phi = \hbar/T$ и в то же время согласно соотношению (26) имеет размерность длины. Физический смысл величины L_ϕ можно понять из следующих рассуждений. Конечная температура привносит в квантовую задачу характерную энергию T , которая, согласно рис. 1б, разграничивает классические и квантовые флуктуации. Квантовыми являются флуктуации с энергиями $\hbar\omega_\phi > T$. Пространственный размер этих флуктуаций $l_\phi \propto 1/\omega_\phi$ ограничен сверху, так как частота $\omega_\phi > T/\hbar$ ограничена снизу. Длина L_ϕ как раз и является верхней границей размера квантовых флуктуаций. Поэтому L_ϕ часто называют длиной расфазировки, т.е. длиной, начиная с которой нарушается когерентность в системе электронов.

Появление двух независимых параметров в критической области квантового фазового перехода обусло-

влено неравенством (24). Поэтому скейлинговое описание в критической окрестности квантового фазового перехода называется "скейлинг в слое конечной толщины" ("finite-size scaling"). Имеется в виду, что воображаемая термодинамическая система существует в гиперплоскости в D -мерном пространстве с d переменными, изменяющимися от 0 до ∞ , и z переменными, изменяющимися от 0 до $(\hbar/T)^{1/z}$.

Внутри критической области $L_\phi < \xi$, а на границе

$$L_\phi = \xi. \quad (32)$$

Длины L_ϕ и ξ определены соотношениями (25) и (26) лишь с точностью до постоянного множителя, но соотношения (25), (26) жестко фиксируют степенную связь между этими переменными. Поэтому уравнение границ критической области имеет вид

$$T = C(\delta x)^\nu, \quad (33)$$

где константа C может быть, вообще говоря, разной по обе стороны от перехода.

Построенная картина критической области исходит из соотношений (25) и (26). Однако использование (25) при всех температурах, по сути, предполагает, что длина ξ зависит только от δx и не зависит от температуры. К переходам, о которых идет речь в данном обзоре, обычно применялась именно такая упрощенная схема. Ниже станет ясно, что это упрощение не всегда справедливо.

Поскольку в критической области имеются два независимых параметра, скейлинговые выражения для физических величин усложняются. Мы приведем и прокомментируем только выражения для удельной проводимости и сопротивления

$$\sigma = \xi^{2-d} F\left(\frac{L_\phi}{\xi}\right), \quad \rho = \xi^{d-2} F_1\left(\frac{L_\phi}{\xi}\right), \quad F_1(u) = \frac{1}{F(u)}, \quad (34)$$

где $F(u)$ — произвольная функция. Показатель степени первого сомножителя в соотношениях (34) определяется тем, как длина входит в выражения для проводимости при разных размерностях d . Как видно из рис. 4, этот сомножитель определяется x -компонентой расстояния до перехода. Отношение L_ϕ/ξ — безразмерное. Именно поэтому правила скейлинга позволяют рассматривать L_ϕ/ξ в качестве аргумента произвольной функции. Это отношение зависит и от T , т.е. от y -компоненты расстояния на фазовой плоскости от изображающей точки до перехода, и от расстояния между этой точкой и границей критической области вдоль оси x .

В качестве аргумента можно также взять любую степень отношения L_ϕ/ξ , что позволяет записать аргумент в разных формах, например:

$$\frac{L_\phi}{\xi}, \quad \frac{\hbar/T}{\xi_\phi}, \quad \frac{\hbar/T}{\xi^\nu}, \quad \frac{\hbar(\delta x)^{z\nu}}{T} \quad \text{или} \quad \frac{\delta x}{(T/\hbar)^{1/z\nu}}. \quad (35)$$

Разные формы записи проясняют различные аспекты физического смысла этого отношения. В двух последних формах записи аргумент является размерным и при этом размерность управляющего параметра заранее не задана; эти формы показывают, как температура входит в аргумент скейлинговой функции.

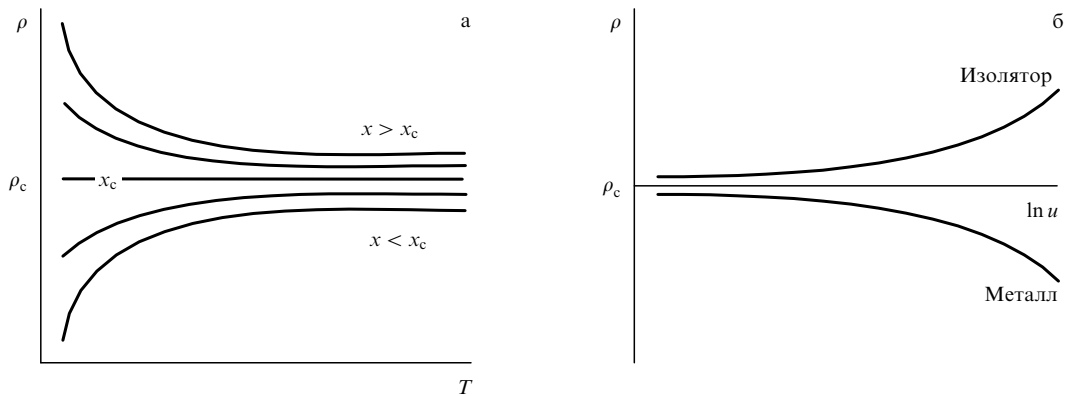


Рис. 5. (а) Температурные зависимости сопротивления $\rho(T)$ при разных значениях x с горизонтальной сепаратрисой $x = x_c$. (б) Сведение всего массива данных $\rho(x, T)$ к двум кривым (34) зависимости сопротивления ρ от скейлинговой переменной (35).

В заключение этого раздела приведем в качестве примера следствие, вытекающее из уравнений (34) для сопротивления двумерных систем. Если в двумерной системе реализуется квантовый фазовый переход, обусловленный локализацией электронов и проявляющийся в транспортных свойствах этой системы, то

$$\rho(x = x_c) \equiv \frac{1}{F(0)}, \quad \text{т.е. } \rho(x_c, T) = \text{const} = \rho_c, \quad \text{при } d = 2. \quad (36)$$

Это следствие (горизонтальная сепаратриса в наборе температурных зависимостей при разных значениях x) схематически изображено на рис. 5а. Подчеркнем, что оно справедливо только при допущении (25), что корреляционная длина ξ не зависит от температуры (ср. с рис. 13). При произвольном значении x получается кривая $\rho(u) = \rho(\delta x / T^{1/z\nu})$ с конечным наклоном в точке $x = x_c$.

Обычно, заменяя δx модулем $|\delta x|$, кривую $\rho(u)$ представляют в виде двух ветвей как функцию от $\ln u$ (рис. 5б). Подбирая значение $z\nu$, на эти кривые стараются уложить все экспериментальные точки, полученные при различных температурах.

3. Потокосые диаграммы для переходов металл–изолятор

До сих пор мы не конкретизировали вид квантового фазового перехода. В дальнейшем мы будем говорить о переходах, связанных с изменением локализации электронов, которая, в свою очередь, обусловлена степенью беспорядка в системе. Исходно в общей теории квантовых фазовых переходов считается, что управляющий параметр влияет на взаимодействие между частицами, а беспорядок является в исходной схеме квантовых фазовых переходов скорее возмущающим фактором. Поэтому применимость этой схемы к переходам металл–изолятор, в которых уровень беспорядка является основным фактором, а взаимодействие — второстепенным, заранее не очевидна.

Фундаментальное различие между изолятором и металлом заключается в том, что в изоляторе электронные состояния на ферми-уровне локализованы, а в металле делокализованы. Если последовательным изменением какого-то параметра перевести изолятор в металлическое состояние, то произойдет изменение свойств

волновых функций на ферми-уровне. Основное физическое свойство, принципиально различное в материалах этих двух типов, — это величина проводимости, т.е. возможность проводить ток при сколь угодно слабом электрическом поле. Это представляет собой признак типа "да–нет": проводимость либо равна нулю, $\sigma = 0$, либо сколь угодно мала, но отлична от нуля. Однако при конечной температуре $T \neq 0$ изолятор тоже проводит ток благодаря прыжковой проводимости. Поэтому сформулированное определение изолятора относится только к температуре $T = 0$, и только при $T = 0$ имеет смысл само понятие перехода металл–изолятор.

То, что проводимость σ не является функцией состояния, поскольку реализуется только в неравновесных условиях, служит дополнительным источником сомнений в применимости общей теории. Однако, как обратил внимание Таулесс [4], с помощью транспортных свойств можно охарактеризовать уменьшение волновой функции электрона, находящегося в центре куба L^d в d -мерном пространстве, к краям этого куба. Поэтому, анализируя поведение кондактанса или проводимости вблизи перехода, мы фактически следим за эволюцией волновых функций.

Таким образом, имеются веские основания попытаться применить к переходам металл–изолятор общую теорию квантовых фазовых переходов. Однако первая успешная версия [7] теоретического описания квантовых переходов металл–изолятор была основана на теории ренормгруппы [8], заимствованной из квантовой теории поля. Суть ее выводов, относящихся к системам невзаимодействующих электронов в случайном потенциале, отражена на рис. 6, где представлена логарифмическая производная кондактанса образца

$$\beta = \frac{d \ln y}{d \ln L} = \frac{L}{y} \frac{dy}{dL}$$

по размеру L при температуре $T = 0$ как функция самого кондактанса y :

$$\frac{d \ln y}{d \ln L} = \beta_d(\ln y). \quad (37)$$

Кривые $\beta_d(\ln y)$ описывают универсальные закономерности изменения кондактанса системы при изменении ее размеров. Поведение системы невзаимодействующих электронов в любом материале описывается частью кривой для соответствующей размерности. Интерпрета-

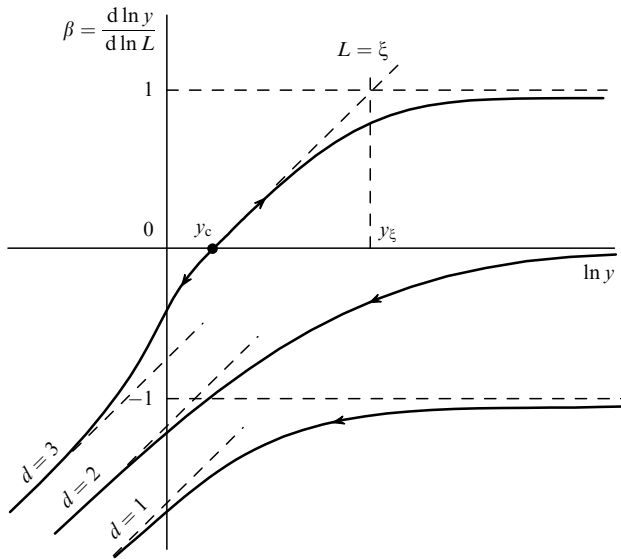


Рис. 6. Универсальные функции $\beta(\ln y)$ для различных размерностей [7].

ция и способ использования этих кривых подробно обсуждаются в обзоре в [9], а также в книге [10].

В отношении квантовых фазовых переходов металл – изолятор теория [7] играет роль теоремы существования. Из формы кривых $\beta_d(\ln y)$ и их расположения на плоскости (y, β) следует, что в одно- и двумерных системах невзаимодействующих электронов этих переходов вообще не может быть, а в трехмерном материале переход при изменении параметров материала может происходить, причем проводимость на переходе изменяется непрерывно. Это означает, что одномерные и двумерные образцы достаточно большого размера при абсолютном нуле всегда являются изоляторами, а трехмерный материал может быть как изолятором, так и

проводником. Ниже мы обсудим это более подробно. Здесь лишь отметим, что кривые $\beta = \beta_d(\ln y)$ называют дифференциальными диаграммами потока или кривыми Гелл-Мана – Лоу.

С одной стороны, теория [1–3], поскольку она описывает только окрестность квантового перехода, является в каком-то смысле более специализированной, чем теория [7]. С другой стороны, теория [1–3] более универсальна, поскольку ее применимость не ограничивается ни взаимодействием, ни сильным магнитным полем. Поэтому представляет большой интерес сравнить выводы этих теорий для тех систем, к которым они обе могут быть применены.

4. Трехмерный электронный газ

Возможность фазового перехода в трехмерном материале следует из того, что кривая $\beta_3(\ln y)$ пересекает ось абсцисс $\beta = 0$. Транспортным свойствам образца размером L из конкретного материала соответствует некоторая точка на кривой $\beta_3(\ln y)$ (рис. 7а). Если эта точка находится на нижней полуплоскости $\beta < 0$, то материал является изолятором и при увеличении L изображающая точка смещается влево, так что кондактанс y образца становится экспоненциально малым. Если же точка находится на верхней полуплоскости $\beta > 0$, то изображающая точка смещается вправо; следовательно, материал является металлом, кондактанс которого y возрастает с увеличением размера L .

Кривые на рис. 6 и 7а вследствие специфичности своих осей координат не годятся для непосредственного сравнения с экспериментальными данными. Этот недостаток можно частично исправить, проинтегрировав уравнение для трехмерных систем

$$\frac{d \ln y}{\beta_3(\ln y)} = d \ln L. \quad (38)$$

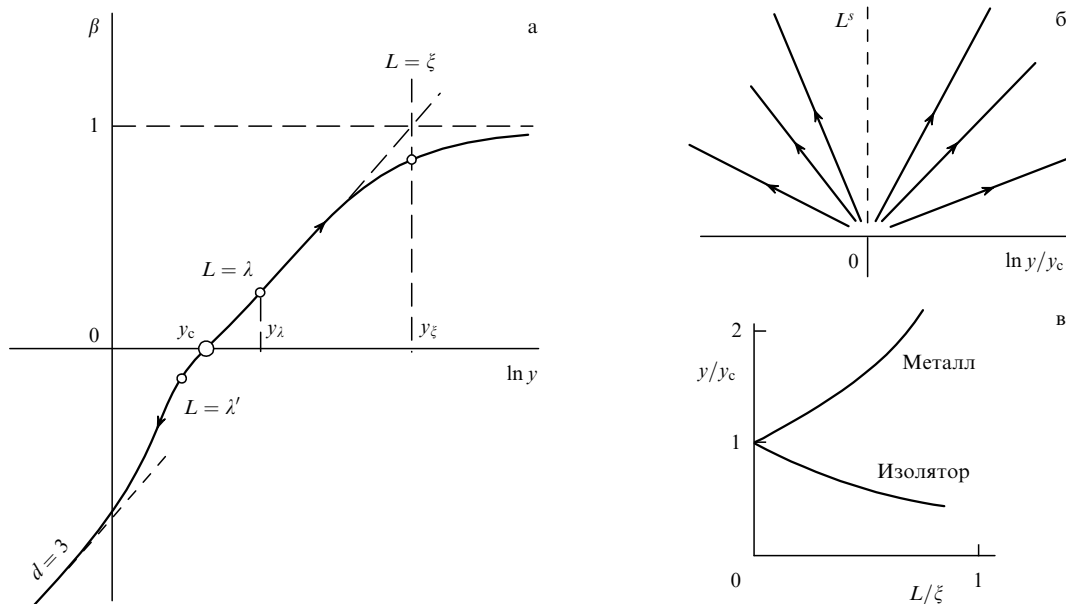


Рис. 7. Невзаимодействующий трехмерный электронный газ: (а) дифференциальная скейлинговая диаграмма из работы [7] (см. также рис. 6), пересечение кривой $\beta_3(\ln y)$ с осью абсцисс $\beta = 0$ означает наличие квантового фазового перехода; (б) диаграмма потока для невзаимодействующего трехмерного электронного газа в окрестности точки перехода; (в) две универсальные кривые зависимости кондактанса 3D-системы от ее размера L , полученные в результате процедуры масштабирования (скейлинга).

Поскольку левая часть дифференциального уравнения (38) обращается в бесконечность в точке $y = y_c$, кривые, получающиеся при различных постоянных интегрирования, распадаются на два семейства, одно из которых соответствует области изолятора, а другое — металлической области. Для того чтобы показать это самым простым способом, ограничимся непосредственной окрестностью точки y_c , в которой кривая $\beta_3(\ln y)$ может быть аппроксимирована прямой:

$$\frac{d \ln y}{d \ln L} = s \ln \frac{y}{y_c}, \quad (39)$$

где s — тангенс угла наклона прямой к оси абсцисс, и соответственно уравнение (38) может быть заменено линейным уравнением (39). Общее решение линейного дифференциального уравнения (39) имеет вид

$$\ln \frac{y}{y_c} = \left(\frac{L}{\lambda} \right)^s \ln \frac{y_\lambda}{y_c}. \quad (40)$$

Здесь λ играет роль начального условия, фиксирующего начальную точку на кривой $\beta_3(y)$, и может быть, например, длиной k_F^{-1} , определяемой концентрацией электронов; на металлической стороне k_F^{-1} равна минимально возможной длине свободного пробега l_{\min} . Точке λ соответствует кондактанс y_λ .

Частные решения уравнения (39) изображены на рис. 7б. Если $y_\lambda > y_c$, то $\ln y_\lambda/y_c > 0$, решение находится в правом квадранте и кондактанс y возрастает с увеличением L (металл). Если же $y_\lambda < y_c$, то $\ln y_\lambda/y_c < 0$, решение находится в левом квадранте и кондактанс y уменьшается при увеличении L (изолятор). Совокупность кривых на рис. 7б называется потоковой диаграммой. Стрелки на этой диаграмме показывают, куда движутся изображающие точки при увеличении размера системы. Линии потока, соответствующие частным решениям уравнения (39), заполняют оба верхних квадранта плоскости $(\ln y_\lambda/y_c, L^s)$. Граница между ними, ось $\ln y_\lambda/y_c = 0$, называется сепаратрисой; на рис. 7б она показана штриховой прямой.

Продолжим прямую (39) на рис. 7а до пересечения с асимптотой $\beta = 1$, тем самым аппроксимируя кривую $\beta_3(y)$ в верхней полуплоскости $\beta > 0$ ломаной, состоящей из отрезков двух прямых. Размер L , соответствующий точке пересечения, назовем корреляционной длиной ξ . Из уравнения (40) следует, что

$$\xi = \lambda \left(s \ln \frac{y_\lambda}{y_c} \right)^{-1/s}. \quad (41)$$

Выражение (41) позволяет переписать общее решение (40) в виде

$$\ln \frac{y}{y_c} = \left(\frac{L}{\xi} \right)^s \quad (42)$$

и с помощью нормировки размера L на длину ξ , свою для каждого конкретного материала, свести каждое из двух семейств на рис. 7б к одной скейлинговой кривой (рис. 7в).

Здесь следует сделать несколько замечаний.

Во-первых, в формулы (39)–(42) входит заранее неизвестный параметр s . Однако в интересующем нас случае невзаимодействующего 3D-газа этот параметр

равен единице либо очень близок к ней [9]. Поскольку во все формулы s входит только в виде сомножителя или показателя степени, то этот параметр можно опустить.

Во-вторых, следует отметить, что линии потока на рис. 7б оказались прямыми только потому, что мы проинтегрировали уравнение Гелл-Мана–Лоу лишь в малой окрестности точки перехода. Если бы мы проинтегрировали функцию $\beta_3(\ln y)$ в широком интервале значений ее аргумента $\ln y$, например, воспользовавшись каким-нибудь ее модельным представлением, то получили бы линии потока, которые, конечно, не являлись бы прямыми линиями.

Третье замечание касается роли температуры. Параметром, определяющим движение системы вдоль линий потока, отмеченных стрелками на рис. 7б, является *размер*. Если температура предполагается равной нулю, как это было до сих пор, то этим параметром является размер образца L . Можно, однако, изначально полагать систему большой, как это делается в теории квантовых фазовых переходов [1–3]. В этом случае ограничивающим размером следует считать длину расфазировки L_ϕ , т.е. размер, при котором реализуется квантовая когерентность в электронной системе. Тогда изображающая точка будет перемещаться вдоль линий потока в направлении, указанном стрелками, *при понижении температуры*. Поскольку L_ϕ зависит от температуры, обращаясь в бесконечность при $T \rightarrow 0$, такая процедура вводит температуру в число физических величин, так или иначе связанных с диаграммой потока. Однако мы не будем исследовать эту связь, а исходя из "теоремы существования" квантового перехода в 3D-пространстве сразу обратимся к фазовой плоскости (x, T) (рис. 8), на которой должна быть построена критическая область (ср. с рис. 4).

Пусть малые значения управляющего параметра x соответствуют металлическим состояниям. Тогда при малых x на оси абсцисс справедлива формула Друде $\sigma = \sigma_3 = ne^2 l / \hbar k_F$, а при малых x и конечных T к σ_3 добавляется квантовая поправка:

$$\sigma = \sigma_3 + \frac{e^2}{\hbar} L_{ee}^{-1}, \quad L_{ee} = \sqrt{\frac{\hbar D}{T}}, \quad (43)$$

где D — коэффициент диффузии. В качестве диффузионной длины в формуле (43) фигурирует длина L_{ee} , опреде-



Рис. 8. Окрестность перехода металл–изолятор в невзаимодействующем трехмерном электронном газе на фазовой плоскости (x, T) .

ляемая эффектом Аронова–Альтшулера [11], т.е. межэлектронным взаимодействием. Тем самым предполагается, что расфазировка происходит в результате внутренних процессов в электронном газе за время

$$\tau_{ee} = \frac{\hbar}{T} \quad (44)$$

без участия внешних взаимодействий, таких как, например, электрон-фоонное взаимодействие (см. аналогичное обсуждение физического смысла величины L_φ в обзоре [2, с. 324]).

Каким бы ни был управляющий параметр x , справа от точки перехода x_c существует еще одна выделенная точка x_m (предел Мотта), в которой

$$\sigma(x_m, T=0) = \sigma_{\text{Mott}} = \frac{e^2}{\hbar} k_F = \frac{e^2}{\hbar} \frac{1}{l}. \quad (45)$$

В интервале от x_c до x_m формула Друде не работает; для описания проводимости с помощью этой формулы пришлось бы ввести длину свободного пробега l , меньшую длины волны электрона. В этом интервале σ выражается при $T=0$ через корреляционную длину ξ ; как мы знаем, это укладывается в общую схему теории квантовых фазовых переходов. В итоге проводимость вдоль оси абсцисс определяется выражениями

$$\sigma(T=0) = \left(\frac{e^2}{\hbar}\right) \times \begin{cases} 0, & x \geq x_c, \\ \frac{1}{\xi}, & x_c \geq x \geq x_m, \\ \frac{(k_F l)^2}{l}, & x \leq x_m. \end{cases} \quad (46)$$

Для того чтобы сшить два последних выражения при $x = x_m$, достаточно положить $\xi(x_m) = l$.

Таким образом, для описания проводимости в металлической области были введены два параметра с размерностью длины, ξ и L_{ee} , обладающие нужными для критической области свойствами: они являются взаимно независимыми и оба расходятся в точке x_c . В критической области построим, следуя [12], интерполяционную функцию

$$\sigma = \frac{e^2}{\hbar} \left(\frac{1}{\xi} + \frac{1}{L_{ee}} \right) = \frac{e^2}{\hbar} \frac{1}{\xi} F\left(\frac{L_{ee}}{\xi}\right), \quad F(u) = 1 + \frac{1}{u}. \quad (47)$$

Выражение (47) сшивается с (43) на прямой $x = x_m$ и дает правильные значения проводимости на отрезке $x_c < x \leq x_m$ при $T=0$. Вторая форма записи показывает, что функция (47) удовлетворяет общему соотношению (34).

Будем двигаться справа налево вдоль линии $T = \text{const}$ (линия aa на рис. 4). До тех пор, пока квантовая поправка относительно мала, диффузия электронов происходит в результате рассеяния на примесях, т.е. контролируется первым членом уравнения (43). Поэтому входящий в L_{ee} коэффициент диффузии D не зависит от температуры. Но когда мы зайдем в критическую область, σ_3 превратится в $(e^2/\hbar)\xi^{-1}$ и начнет быстро уменьшаться. В этих условиях D перестанет быть константой: диффузия будет происходить как бы на тех самых флуктуациях электромагнитного поля, которые определяют L_{ee} , и поэтому станет температурозависимой. Тогда можно написать систему уравнений для функций $\sigma(T)$ и $D(T)$, используя в качестве второго уравнения соотношение

Эйнштейна:

$$\begin{cases} \sigma = \frac{e^2}{\hbar} \left(\frac{1}{\xi} + \sqrt{\frac{T}{\hbar D}} \right), \\ \sigma = e^2 g_F D, \end{cases} \quad (48)$$

где g_F — плотность состояний на ферми-уровне.

Исключим D из уравнений (48) и воспользуемся тем, что вблизи перехода $1/\xi \ll 1/L_{ee}$. Получим температурную зависимость проводимости в правой части критической области [12, 13]:

$$\sigma(T) = \frac{e^2}{\hbar} \left(\frac{1}{\xi} + (T g_F)^{1/3} \right) \equiv \alpha + \beta T^{1/3}. \quad (49)$$

Это означает, что внутри критической области L_{ee} уже не определяется выражением (43), а имеет вид

$$L_{ee} = (T g_F)^{-1/3}. \quad (50)$$

Точно на переходе $\xi = \infty$ и $\alpha = 0$.

Температурная зависимость (49) неоднократно наблюдалась в экспериментах на самых различных материалах [14–17]. На рисунке 9 приведены два примера, в первом из которых управляющим параметром является электронная концентрация, а во втором — величина магнитного поля.

Из условия (32) и выражения (49) следует соотношение для правой границы критической области:

$$T \propto (g_F \xi^3)^{-1}. \quad (51)$$

Если справедливо соотношение $\xi \propto (\delta x)^{-1}$, т.е. если $v = 1$, как предполагается на рис. 8, то границей критической области является кубическая парабола: $T \propto (\delta x)^3$. В общем случае $v \neq 1$ и

$$T \propto \frac{(\delta x)^{3v}}{g_F}. \quad (52)$$

Из сравнения с формулой (33) следует, что при переходе металл–изолятор в 3D-системе невзаимодействующих электронов динамический критический индекс

$$z = 3. \quad (53)$$

Ниже кривой (52) на отрезке $x_c > x > x_m$ проводимость формально тоже описывается формулой (47), однако величина L_{ee} входит в (47) в изначальной форме (43) с коэффициентом диффузии $D = \text{const}$. Поэтому температурная зависимость проводимости в этой области должна иметь вид $\sigma(T) = \alpha + \beta T^{1/2}$.

До сих пор мы говорили в основном о правой части фазовой диаграммы. В левой части фазовой диаграммы, в области изолятора, где реализуется прыжковая проводимость, тоже есть две характерные длины. Во-первых, это длина затухания ξ волновых функций локализованных состояний: $\psi \propto \exp(-r/\xi)$; вдали от перехода ξ уменьшается до боровского радиуса $a_B = \kappa \hbar^2 / (m^* e^2)$ (κ — диэлектрическая проницаемость, m^* — эффективная масса электрона), а на переходе расходится, потому что электроны становятся делокализованными. Во-вторых, это средняя длина прыжка \bar{r} . Если прыжковая проводимость описывается законом Мотта, то средняя длина прыжка [10]

$$\bar{r} = \left(\frac{\xi}{g_F T} \right)^{1/4}. \quad (54)$$

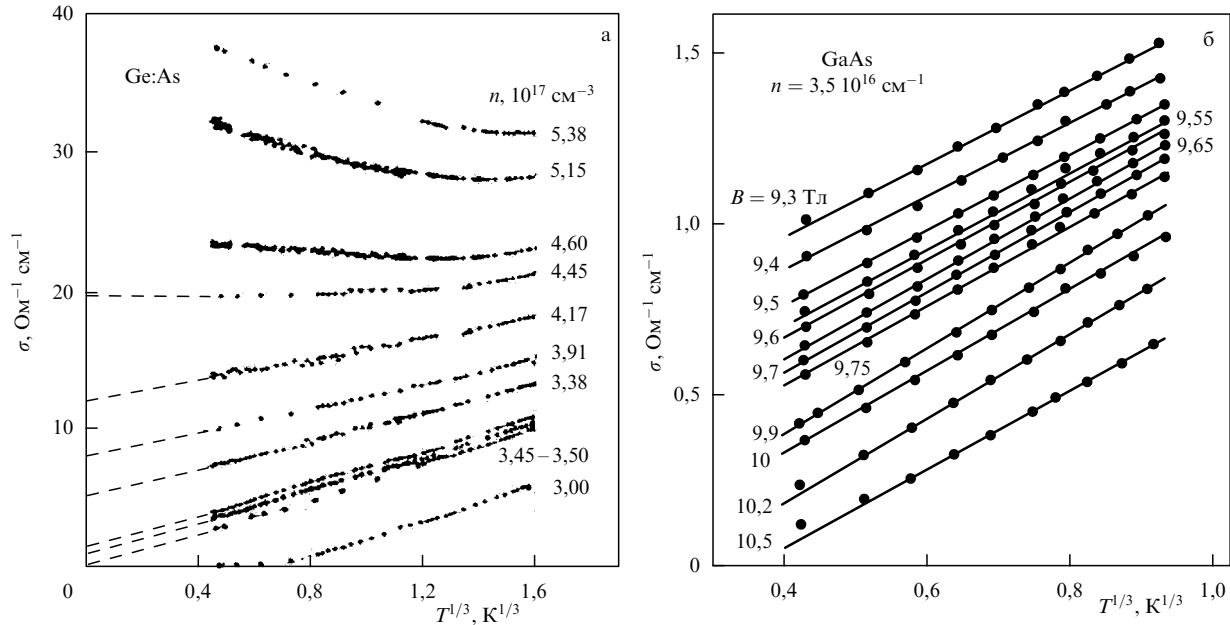


Рис. 9. (а) Температурная зависимость проводимости серии образцов Ge:As с разным уровнем легирования в области перехода металл–изолятор (из работы [18]); критическая концентрация определяется по экстраполяции экспериментальных кривых к $T = 0$. (б) Температурная зависимость проводимости образца GaAs в разных магнитных полях в области перехода металл–изолятор (из работы [16]); критическое значение поля, определенное посредством экстраполяции, равно 9,78 Тл.

Длины \bar{r} и ξ нельзя использовать как две независимые длины в критической области, потому что они связаны соотношением (54). Однако, воспользовавшись определением (50) длины L_{ee} , выражение (54) можно переписать в виде

$$\bar{r} = (\xi L_{ee}^3)^{1/4}. \quad (55)$$

Учитывая, что выражение (50) для длины L_{ee} не содержит кинетических характеристик электронного газа, можно считать L_{ee} длиной расфазировки во всей критической области, в том числе в ее левой части, над отрезком $x_i > x > x_c$ на оси абсцисс. Тогда уравнение (52) становится определением не только правой, но и левой границы критической области. Из уравнений (54) и (55) следует, что на левой границе $\bar{r} = \xi = L_{ee}$.

То, что величину L_{ee} можно считать длиной расфазировки во всей критической области, подтверждается в экспериментах: как видно из рис. 9, температурные зависимости $\sigma(T)$ спрямляются в осях $(T^{1/3}, \sigma)$ не только в правой части критической области, но и при тех значениях управляющего параметра x , при которых система находится в левой части критической области (например при электронной концентрации $n = 3 \times 10^{17} \text{ см}^{-3}$ на рис. 9а). Однако свободный член α в формуле (49) становится отрицательным. Это означает, что мы должны либо считать корреляционную длину ξ отрицательной в области изолятора, либо, что формально предпочтительнее, но по существу представляет собой то же самое, заменить в левой части критической области интерполяционную формулу (49) следующей формулой:

$$\sigma(T) = \frac{e^2}{h} \left(-\frac{1}{\xi} + \frac{1}{L_{ee}} \right). \quad (56)$$

Из формул (55) и (56) следует, что на левой границе критической области $\sigma = 0$. Это означает, что проводи-

мость на этой границе определена с точностью до экспоненциально малой прыжковой проводимости.

Ниже левой границы критической области над отрезком $x_i > x > x_c$ по-прежнему имеет место прыжковый механизм проводимости, но с длиной затухания волновых функций не a_B , а $\xi \gg a_B$ [19]. Поэтому a_B в выражение для прыжковой проводимости не входит и σ выражается через корреляционную длину ξ (см. рис. 8):

$$\sigma \propto \exp \left(-\frac{\bar{r}}{\xi} \right).$$

Фазовая (x, T) -диаграмма на рис. 8 аккумулировала в себе результаты многолетних экспериментальных исследований низкотемпературных транспортных свойств проводящих систем: квантовых поправок в проводимости металлов, эволюции электронных спектров при переходах металл–изолятор, температурных зависимостей проводимости в окрестности переходов, прыжковой проводимости. По сути, эта фазовая диаграмма была построена независимо от теории квантовых фазовых переходов [1–3] для выяснения степени совместимости всех экспериментальных данных. Тем не менее из изложенного выше следует, что диаграмма абсолютно адекватна представлениям, вытекающим из этой теории.

5. Двумерный электронный газ

5.1. Газ не взаимодействующих электронов

Перейдем теперь к 2D-системам. Согласно теории Абрагамса и др. [7] двумерная ($d = 2$) система не взаимодействующих электронов формально всегда оказывается изолятором в том смысле, что в образце достаточно большого размера $L > \xi$ при достаточно низкой температуре $T < T_\xi$ и сколь угодно малом беспорядке обязательно должна произойти локализация. Это следует из

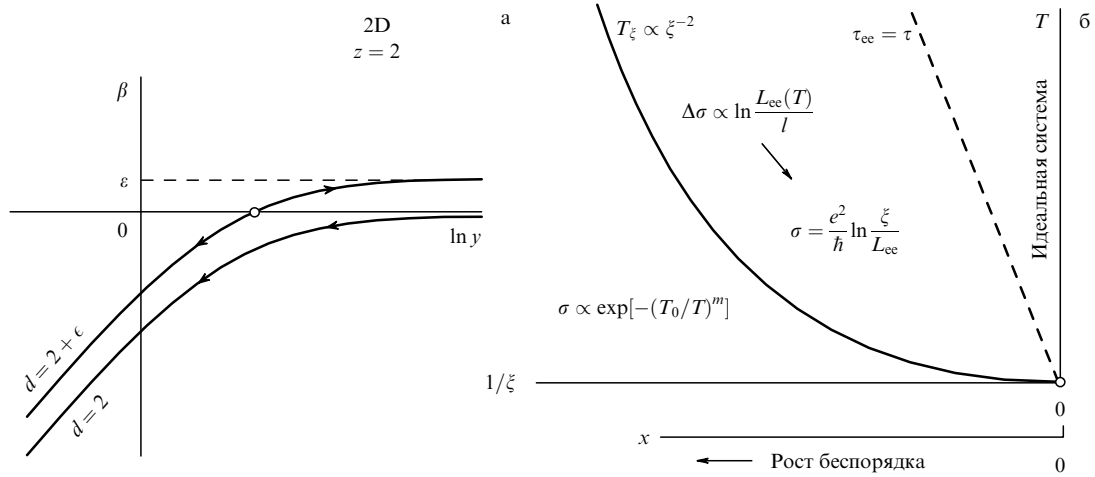


Рис. 10. Невзаимодействующий двумерный электронный газ: (а) дифференциальные линии потока для систем с размерностью $d = 2$ со скейлинговой диаграммы из работы [7] (см. также рис. 6) и $d = 2 + \epsilon$ (см. текст); (б) график линии кроссовера от логарифмической температурной зависимости проводимости к экспоненциальной, которую можно трактовать как границу критической окрестности виртуального квантового перехода (см. текст).

того, что линия потока $d = 2$ на рис. 6 асимптотически приближается к оси $\beta = 0$, но не пересекает ее — эта линия изображена на рис. 10а. Вместе с тем в слабонеупорядоченных пленках корреляционная длина ξ , ограничивающая размер L снизу, может оказаться нереально большой, а температура T_ξ кроссовера от области, в которой имеет место логарифмическая квантовая поправка к проводимости, к области, которая характеризуется экспоненциальной температурной зависимостью, наоборот, нереально низкой. Именно такие пленки и называются металлическими.

Оценки для ξ и T_ξ получаются из предположения [20], что в проводимости

$$\sigma = \sigma_2 + \Delta\sigma = \frac{e^2}{h} k_F l - \frac{e^2}{h} \ln \frac{L_{ee}}{l} \quad (57)$$

логарифмически расходящаяся квантовая поправка $\Delta\sigma$ становится одного порядка с классической проводимостью σ_2 , так что $\sigma \approx 0$ и

$$\ln \frac{L_{ee}}{l} \approx k_F l. \quad (58)$$

Диффузионная длина L_{ee} , на которой происходит электронная расфазировка, определяется формулой (43). Определяемое уравнением (58) значение L_{ee} назовем корреляционной длиной ξ :

$$\xi = l \exp(k_F l), \quad (59)$$

а температуру T_ξ ,

$$T_\xi = \frac{D\hbar}{\xi^2}, \quad (60)$$

определяемую из значения $L_{ee} = \xi$ по формуле (43), — температурой кроссовера. Конечно, при $T = T_\xi$ проводимость не обращается в нуль, но теория слабой локализации при этой температуре уже заведомо не работает, и при $T < T_\xi$ на образцах размером $L > \xi$ должно начаться экспоненциальное возрастание сопротивления с понижением температуры.

Нарисуем график функции (60), направив для удобства дальнейших рассуждений ось $1/\xi$ влево (рис. 10). Так получившуюся диаграмму будет удобнее сравнивать с диаграммой для 3D-систем, приведенной на рис. 8. Добавим дополнительную ось, вдоль которой отложим управляющий параметр x , являющийся некой характеристикой беспорядка, такой, что $x = 0$ соответствует идеальной системе, в которой вообще отсутствует беспорядок.

Нетрудно видеть, что график $T(1/\xi)$ на рис. 10 представляет собой левую часть фазовой диаграммы окрестности перехода металл–изолятор в трехмерном материале (ср. с рис. 8) с точкой фазового перехода, находящейся на краю диаграммы, в начале координат $T = x = 0$. Кривая (60) тогда оказывается левой границей критической области, а динамический критический индекс

$$z = 2. \quad (61)$$

Из уравнений (53) и (61) можно сделать вывод, что для переходов металл–изолятор в системах невзаимодействующих электронов динамический критический индекс равен размерности, $z = d$.

Системы с размерностью $d = 2$ оказались, таким образом, пограничными: квантовый переход на фазовой плоскости (x, T) еще присутствует, но сдвинулся в ее угол, в недостижимую точку $x = 0$. Пограничные свойства двумерных систем можно усмотреть и из диаграммы потока на рис. 6. Представим себе, что размерность d является непрерывным параметром и может принимать не только целочисленные значения. Асимптотикой линий потока при больших y являются прямые $\beta = d - 2$. Поэтому линии потока систем с размерностью $d = 2 + \epsilon > 2$ обязательно пересекают ось абсцисс $\beta = 0$ и такие системы имеют переход металл–изолятор (рис. 10а). При $\epsilon \rightarrow 0$ точка перехода смещается в сторону больших кондактансов и уходит на бесконечность.

Приведенная интерпретация графика на рис. 10 означает, что область над параболой $T \propto (1/\xi)^2$ является критической окрестностью квантового перехода. Для

2D-систем в формуле (34) для проводимости в критической области остается одна скейлинговая переменная u , равная отношению двух характерных длин:

$$\sigma = F(u) \equiv F\left(\frac{L_\varphi}{\xi}\right). \quad (62)$$

Между тем в этой области мы обычно используем выражение для проводимости в виде разности между классической проводимостью и квантовой поправкой:

$$\sigma = \sigma_2 - \Delta\sigma = \frac{e^2}{h} \left(k_F l - \ln \frac{L_{ee}}{l} \right). \quad (63)$$

Подставляя в аргумент логарифма в (63) вместо l выражение из (59), $l = \xi \exp(-k_F l)$, и вынося экспоненту из-под знака логарифма, получим

$$\sigma = \frac{e^2}{h} \ln \frac{\xi}{L_{ee}}. \quad (64)$$

Классическая проводимость σ_2 сокращается, и оставшаяся часть зависит только от скейлинговой переменной, как это и должно быть в критической области. Таким образом, и в этом отношении построенная нами (x, T) -диаграмма удовлетворяет требованиям теории квантовых фазовых переходов.

Выражение (64) справедливо не во всей "квазикритической" области $T > T_\xi$: оно вообще расходится на оси $x = 0$. Однако вблизи этой оси упругая длина пробега $l \rightarrow \infty$ и стандартное выражение для L_{ee} теряет смысл, поскольку нарушается неперенное условие $\tau_{ee} \gg \tau$. Граница той части области, в которой выражение (64) неприменимо, $\tau_{ee} = \tau$, показана на рис. 10 штриховой прямой, построенной в предположении, что $\tau \propto x^{-1}$.

Как мы увидим в разделе 5.3, включение взаимодействия может привести к появлению перехода металл–изолятор в 2D-системе. В терминах фазовой диаграммы, представленной на рис. 10, это означает, что по некоторой причине точка фазового перехода сместилась из начала координат в точку $x_c \neq 0$ на оси абсцисс и дополнительно появилась граница между критической и металлической областями. При этом обычное выражение (63) для проводимости металлической области, преобразованное к виду (64), уже использовано для описания проводимости критической области. Это означает, что выражение для проводимости металлической области должно быть принципиально другим и что следует ожидать появления вместо ферми-жидкости маргинального металла. Природа электронных состояний в этом гипотетическом металле должна быть весьма специфической, поскольку предполагается, что электроны локализуются при выключении взаимодействия [21].

5.2. Спин-орбитальное взаимодействие

Пограничное положение двумерных систем делает их чувствительными к различного рода воздействиям, например к включению спин-орбитального взаимодействия или межэлектронного взаимодействия, которые могут привести к появлению фазового перехода.

Рассмотрим сначала спин-орбитальное взаимодействие. Этот случай удобен тем, что диаграмму потока можно построить в тех же осях (y, β) , что и на исходной диаграмме, приведенной на рис. 6. Исходная линия

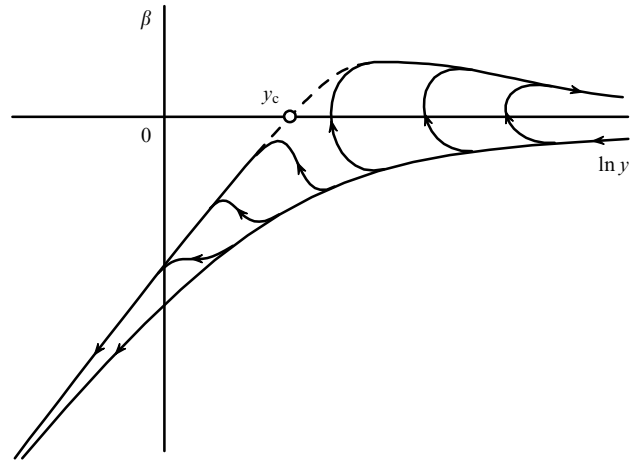


Рис. 11. Диаграмма потока для двумерного электронного газа со спин-орбитальным взаимодействием.

потока ($d = 2$) отклоняется вниз от своей правой асимптоты $\beta = 0$ при больших y (рис. 10а) из-за слабой локализации, приводящей к уменьшению проводимости. Однако спин-орбитальное взаимодействие меняет знак квантовой поправки, т.е. меняет слабую локализацию на антилокализацию. Поэтому должен измениться знак производной в правой части кривой $\beta_2(\ln y)$; кривая отклонится вверх от асимптоты $\beta = 0$, окажется в верхней полуплоскости $\beta > 0$ и поэтому для выхода на левую асимптоту где-то обязательно пересечет ось абсцисс $\beta = 0$.

Антилокализация подробно изучена как экспериментально [22], так и теоретически [23]. В двумерном случае ($d = 2$) квантовая поправка к проводимости имеет вид

$$\Delta\sigma_2 \approx -\frac{e^2}{h} \int_{\tau}^{\tau_{ee}} \frac{dt}{t} \left(\frac{3}{2} \exp\left(-\frac{t}{\tau_{so}}\right) - \frac{1}{2} \right). \quad (65)$$

Здесь τ — время между упругими соударениями, $\tau_{so} \geq \tau$ — время между соударениями с переворотом спина, $\tau_{ee} = \hbar/T$ — время расфазировки. Теперь движение изображающей точки на диаграмме потока зависит от двух параметров: кондактанса y и времени τ_{so} . На рисунке 11 изображено получившееся семейство линий потока для разных значений τ_{so} , которое расположено между двумя огибающими кривыми. Нижняя кривая взята из диаграмм, приведенных на рис. 6 и 10; ее правая часть строится на основе интеграла (65), в подынтегральном выражении которого предполагается $\tau_{so} = \infty$, так что содержащаяся в подынтегральном выражении скобка становится равной единице. Верхняя кривая имеет те же асимптоты, но при построении ее правой части предполагается, что $\tau_{so} = \tau$; тогда на большей части интервала интегрирования $t \gg \tau_{so}$ и скобку можно считать равной $-1/2$.

Возьмем образец размером L из материала с каким-то промежуточным значением τ_{so} :

$$\tau \ll \tau_{so} \ll \infty.$$

Размер L ограничивает время t диффузии электрона внутри двумерного образца до момента столкновения его с границей величиной τ_L , $t < \tau_L \sim \tau(L/l)^2$. Поэтому при описании слабой локализации в образце размером L верхний предел интегрирования в формуле (65) нужно

заменить величиной τ_L :

$$\tau_{ee} \rightarrow \tau_L \equiv \tau \left(\frac{L}{l} \right)^2.$$

Пусть сначала L очень мало: $L \gtrsim l$, а температура $T = 0$. Процессы диффузии не успевают развиваться, электронная интерференция практически отсутствует, проводимость равна своему классическому значению, а изображающая точка находится где-то справа на оси $\beta = 0$. При увеличении размера L вплоть до

$$L_{so} = l \sqrt{\frac{\tau_{so}}{\tau}} \quad (66)$$

столкновения с переворотом спина несущественны, а поправка (65) к проводимости отрицательна. Изображающая точка будет двигаться влево по нижней огибающей, как и на рис. 10 в отсутствие спин-орбитального взаимодействия. Когда размер L станет больше L_{so} , интеграл (65) и $\Delta\sigma_2$ поменяют знак и изображающая точка перейдет на верхнюю огибающую. Если это произойдет при $y < y_c$, то пленка все равно при $L \rightarrow \infty$ станет изолятором. Однако если спин-орбитальное взаимодействие сильное, то τ_{so} мало и изображающая точка достигнет верхней огибающей при $y > y_c$. Тогда движение точки продолжится вдоль верхней огибающей в сторону увеличения y и при $L \rightarrow \infty$ пленка сохранит металлические свойства. Таким образом, если можно было бы поставить эксперимент со спин-орбитальным взаимодействием в качестве управляющего параметра, то в принципе можно было бы наблюдать переход металл–изолятор. Пока на этом пути удалось только продемонстрировать превращение слабой локализации в антилокализацию [22].

5.3. Газ взаимодействующих электронов

Нужно уточнить, что имеется в виду под отсутствием или наличием взаимодействия между электронами. В свойствах электронных систем взаимодействие проявляется различным образом, например, оно определяет вероятность рассеяния электрона электронами. В классической теории металлов считается, что рассеяние электрона на электроне не вносит вклада в проводимость, так как полный импульс электронной системы и дрейфовая скорость сохраняются. При учете квантовых эффектов это утверждение становится неверным: кондактанс зависит от длины сбоя фазы, а электрон-электронное рассеяние изменяет эту длину. Тем не менее, если электрон-электронное взаимодействие влияет на кондактанс только через рассеяние, мы будем считать электронную систему невзаимодействующей, потому что в этом случае взаимодействие сказывается на кондактансе так же, как внешние воздействия, например, как рассеяние на фононах.

Рассеяние электронов друг на друге — не единственный канал влияния взаимодействия на кондактанс. Под взаимодействием мы понимаем не затравочное кулоновское взаимодействие, а взаимодействие между "одеждами" квазичастицами, т.е. экранированное взаимодействие, зависящее как от электронной плотности, так и от коэффициента диффузии электронов, а в определенных условиях также от размера образца или длины фазовой когерентности [24].

Взаимодействие определяет структуру квантовых уровней и энергию основного состояния, приводя к изменению условий соревнования между фазами в окрестности точки фазового перехода. Рассеяние электронов происходит в основном на экранированном примесном потенциале, свойства которого определяются эффективным электрон-электронным взаимодействием. Последнее, в свою очередь, зависит от коэффициента диффузии и длины сбоя фазы, что и приводит к сложной зависимости эффективного взаимодействия от всех внешних параметров.

Рассмотренный в разделе 5.2 случай спин-орбитального взаимодействия представляет собой пример перенормировки взаимодействия с изменением размера образца L : фактически спин-орбитальное взаимодействие включается лишь тогда, когда L становится больше значения, определяемого формулой (66).

В качестве другого примера рассмотрим картину возможных состояний в модели с многодолинным электронным спектром, построенной Пуннозе и Финкельштейном [25]. В этой модели при изменении L изменяется не только кондактанс y , но и взаимодействие Θ . Поэтому к (37) добавляется еще одно уравнение — уравнение для Θ . Диаграмма потока возникает в результате решения системы этих двух уравнений. На рисунке 12 показана часть этой диаграммы, которая была рассчитана авторами работы [25] в нескольких иных координатных осях. Сделанная здесь замена переменных призвана облегчить сравнение этой диаграммы с приведенными на рис. 6 и 10, хотя при такой замене утрачивается количественная информация, содержащаяся в исходной диаграмме [25]. По оси абсцисс на диаграмме потока, приведенной на рис. 12, отложен кондактанс. Таким образом, на всех диаграммах рис. 6–12 ось абсцисс одна и та же. Величина Θ , отложенная по оси ординат, отражает эффективное взаимодействие. Невзаимодействующий электронный газ, о котором говорилось в разделе 5.1, соответствует прямой $\Theta = 0$. Параметром, определяющим движение системы вдоль линий потока, отмеченных стрелками, как и на всех

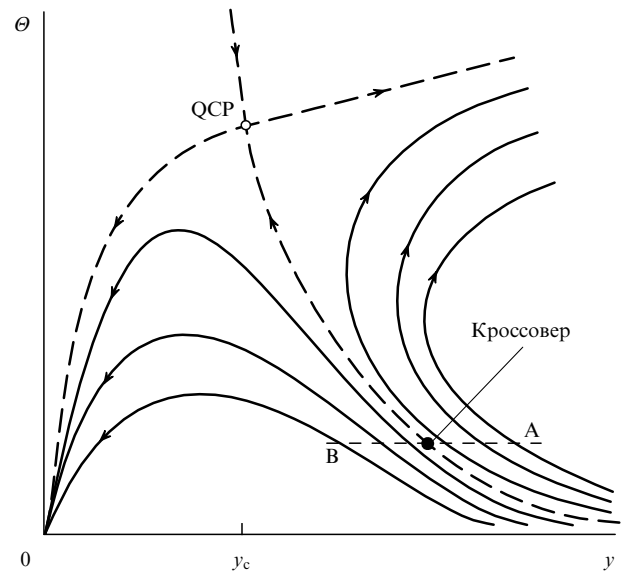


Рис. 12. Часть построенной в работе [25] потоковой диаграммы для двумерного электронного газа со взаимодействием.

предыдущих диаграммах (рис. 6–11) является размер. Это или размер образца L в предположении, что $T = 0$, или длина расфазировки L_ϕ (или L_{ee}), т.е. максимальный размер, на котором сохраняется квантовая когерентность в электронной системе.

Из конфигурации линий потока на рис. 12 ясно видна особенность взаимодействия Θ , о которой говорилось в начале этого раздела: *взаимодействие в системе изменяется (перенормируется) при изменении размера L или L_ϕ* , причем на разных линиях потока по-разному. Диаграмма на рис. 12 является двухпараметрической: для того чтобы задать, на какой линии потока окажется изображающая точка, нужно два параметра. Поточковые линии (траектории) на этой диаграмме заполняют целую плоскость.

Предположим, что положение точки на линии потока определяется размером L_ϕ , т.е. температурой. Пусть мы находимся в точке А на линии потока, которая является металлической, так как уходит в область большой проводимости при $T \rightarrow 0$. Зафиксировав взаимодействие Θ , будем изменять кондактанс y , т.е. изменять беспорядок. Этот процесс показан на диаграмме горизонтальной штриховой прямой. Двигаясь вдоль нее, можно пересечь сепаратрису и оказаться в точке В на линии потока, которая описывает изолятор, так как стремится к точке $y = 0$ при $T \rightarrow 0$. Для задания положения точки на линии АВ достаточно одного параметра — именно его мы называем управляющим. При другом управляющем параметре угол пересечения сепаратрисы может быть иным. Например, инициировать кроссовер с металлической на неметаллическую потоковую траекторию можно, изменяя электронную концентрацию и тем самым одновременно изменяя эффективное взаимодействие Θ и кондактанс.

Изменение управляющего параметра позволяет переходить с одной потоковой траектории на другую, а изменение температуры (размера) — передвигаться вдоль потоковой траектории. Однако поскольку взаимодействие Θ может меняться при обоих изменениях, то нет факторизации, т.е. нельзя считать, что длина ξ зависит только от δx , а длина L_ϕ — только от температуры. Следствие этого "перепутывания" переменных можно увидеть непосредственно из потоковой диаграммы на рис. 12. При движении вдоль сепаратрисы к квантовой критической точке (quantum critical point, QCP) кондактанс будет уменьшаться, стремясь к значению y_c . Отсюда следует важный вывод, представленный в качественном виде на рис. 13: сепаратриса в наборе температурных зависимостей уже не является горизонтальной, как на рис. 5.

Указание на существование перехода металл–изолятор в двумерном газе впервые было получено в инверсном слое полевого транзистора на поверхности Si [26]. Наличие перехода долго подвергалось сомнению, поскольку противоречило представлениям, сформулированным в работе [7], и переход не удавалось воспроизвести на других материалах. Оказалось, однако, что уникальность кремния связана с высокой подвижностью электронов, которая позволяет проводить эксперименты в области очень малых электронных плотностей, где межэлектронное взаимодействие особенно существенно. Это позволило интерпретировать эксперимент не с помощью теории [7], построенной для невзаимодействующих электронов, а согласно модели [25]. При этом

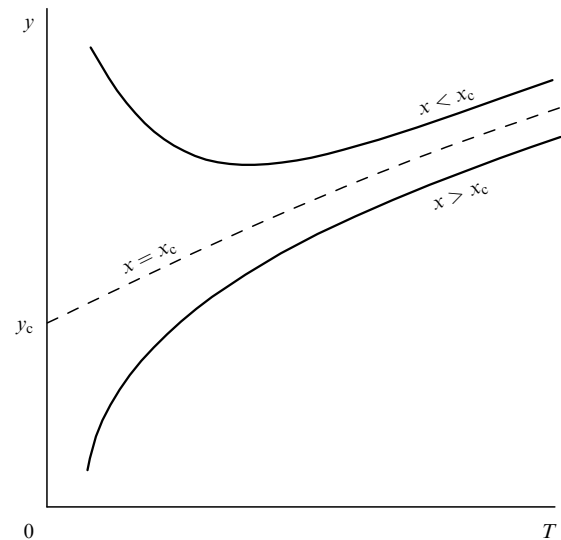


Рис. 13. Качественная схема эволюции кривых кондактанса $y(T)$ в модели, изученной в работе [25], при изменении управляющего параметра.

было подтверждено наличие перехода металл–изолятор и получен предсказанный в работе [25] конечный наклон сепаратрисы (см. рис. 14а, взятый из работы [27]).

Из диаграммы потока на рис. 12 нетрудно заметить, что конечный наклон сепаратрисы в наборе температурных зависимостей σ или R системы *двумерных электронов* определяется углом, под которым сепаратриса на потоковой диаграмме подходит к квантовой критической точке. Если по какой-то специальной причине касательная к сепаратрисе в QCP перпендикулярна оси абсцисс, то сепаратриса в наборе температурных зависимостей будет иметь нулевую производную при $T = 0$. Таким образом, горизонтальность сепаратрисы в наборе температурных зависимостей проводимости в окрестности квантового фазового перехода не есть непременно свойство всех двумерных систем, а является следствием симметрии потоковой диаграммы конкретной системы. И наоборот, конечный наклон сепаратрисы не является непременно следствием двухпараметрической потоковой диаграммы.

Наклонная сепаратриса осложняет скейлинг, т.е. приведение измерений, произведенных вдоль разных потоковых линий, к одной универсальной кривой с помощью изменения масштабов. Однако скейлинг данных по сопротивлению $R(T)$ все-таки возможен. На рисунке 14б показан скейлинг, произведенный в металлической области перехода, продемонстрированного на рис. 14а. Три нижние кривые на рис. 14а, перестроенные в координатах ρ/ρ_{\max} (вместо ρ) и $\rho_{\max} \ln(T/T_{\max})$ (вместо T ; здесь ρ_{\max} в безразмерных единицах) со значениями ρ_{\max} и T_{\max} , соответствующими положению максимума на каждой из экспериментальных кривых, сливаются в одну и совпадают с теоретической кривой. Последняя построена на основании расчетов [25] с использованием параметра взаимодействия Θ , полученного на том же образце из данных по магнетосопротивлению в поле, лежащем в 2D-плоскости.

Аналогичная проблема наклонной сепаратрисы часто встречается и при экспериментальной обработке температурных зависимостей $R_x(T)$ (x — управляю-

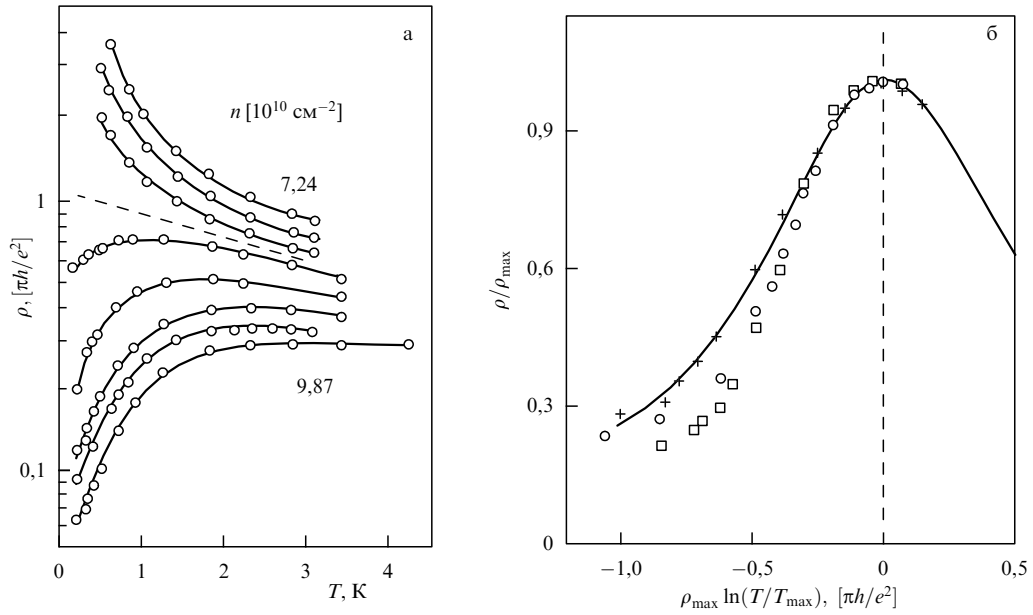


Рис. 14. (а) Температурные зависимости сопротивления $\rho(T)$ двумерного газа в кремниевом полевом транзисторе в интервале концентраций, содержащем переход металл – изолятор [27]. (б) Скейлинг трех нижних кривых, представленных на рис. а, соответствующих концентрациям $9,87$ (\square), $9,58$ (\circ) и $9,14 \times 10^{10} \text{ см}^{-2}$ ($+$) [27]; теоретические результаты показаны сплошной кривой.

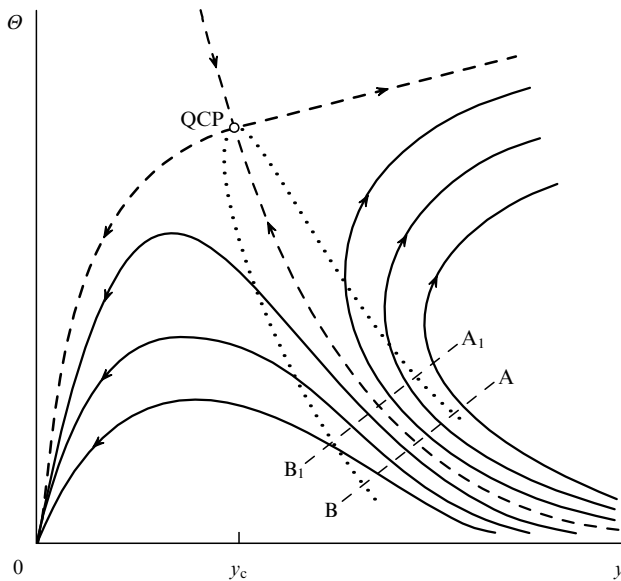


Рис. 15. Критическая область на потоковой диаграмме для двумерного электронного газа со взаимодействием (выделена пунктирной кривой).

щий параметр) в окрестности квантовых фазовых переходов сверхпроводник – изолятор. В работе [28] была предложена процедура "коррекции" кривых путем введения в каждую из них дополнительного линейного слагаемого:

$$R_x(T) \rightarrow R_x(T) - \alpha T, \quad \alpha = \left. \frac{\partial R_{xc}(T)}{\partial T} \right|_{T=0}, \quad (67)$$

делающего сепаратрису горизонтальной, и последующего проведения стандартного скейлинга для двумерных систем с использованием скейлинговой переменной (35). Смысл этой процедуры состоит в том, чтобы

компенсировать наклон сепаратрисы на потоковой диаграмме. Однако корректность такой процедуры теоретически не доказана.

Формально фазовая плоскость (x, T) имеет смысл и при двухпараметрической потоковой диаграмме. Однако критическую окрестность перехода можно построить и непосредственно на самой диаграмме. Это сделано на рис. 15. Следует отметить, что в области, примыкающей к сепаратрисе внутри критической окрестности, где потоковые траектории параллельны, двухпараметрический скейлинг становится однопараметрическим. Действительно, как мы уже отмечали выше, для задания положения точки на линии АВ достаточно одного параметра, а благодаря параллельности линий потока этот параметр не изменяется при параллельном сдвиге линии АВ вдоль сепаратрисы, например, в положение $A_1 B_1$. При движении по сепаратрисе в сторону квантовой критической точки близкие к сепаратрисе траектории поочередно сворачивают в сторону и полоса, в которой потоковые траектории параллельны, сужается, как и критическая область.

6. Квантовые переходы между разными состояниями холловской жидкости

Состояния на плато квантового эффекта Холла являются особыми фазовыми состояниями двумерного электронного газа со специфическими транспортными свойствами, описываемыми продольной σ_{xx} и поперечной σ_{xy} проводимостями

$$\sigma_{xx} \rightarrow 0 \text{ при } T \rightarrow 0, \quad \sigma_{xy} = i \frac{e^2}{2\pi\hbar}, \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (68)$$

Такие фазовые состояния двумерного газа называют квантовыми холловскими жидкостями с разными квантовыми холловскими числами i , определяемыми значе-

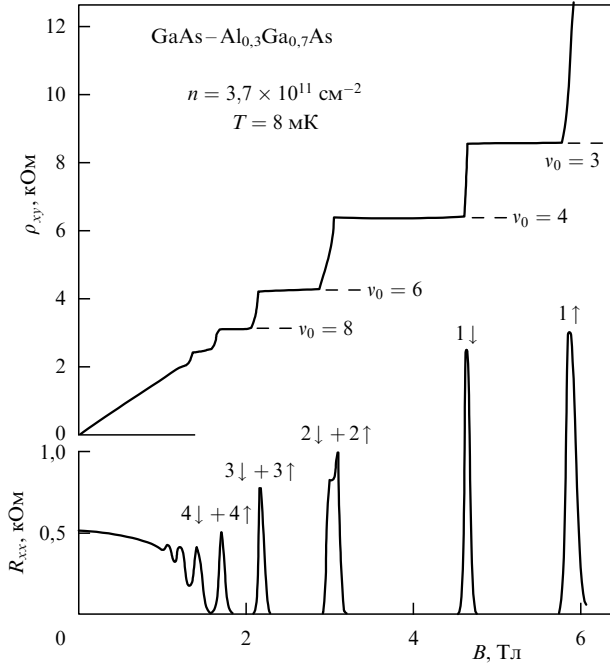


Рис. 16. Магнетосопротивление R_{xx} и холловское сопротивление R_{xy} в зависимости от магнитного поля B в гетероструктуре GaAs–Al_{0.3}Ga_{0.7}As [29]. Температура $T = 8$ мК. Электронная плотность в 2D-слое $3,7 \times 10^{11} \text{ см}^{-2}$, подвижность $\mu = 4,1 \times 10^4 \text{ см}^2 (\text{В с})^{-1}$.

ниями (68) холловской проводимости σ_{xy} на плато:

$$i = \frac{\sigma_{xy}}{e^2/2\pi\hbar}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (69)$$

Переходы с одного плато на другое при изменении магнитного поля или электронной концентрации четко видны на экспериментальных кривых. Как видно из рис. 16, скачки в σ_{xy} сопровождаются узкими всплесками в σ_{xx} . Эти скачки являются квантовыми фазовыми переходами и к ним также применимы обе версии теоретического описания, которые мы сравнивали в разделе 5.

На рисунке 16 представлены только плато целочисленного квантового эффекта Холла, которым будет ограничено дальнейшее обсуждение. Целочисленный квантовый эффект Холла может быть реализован и в невзаимодействующем электронном газе; поэтому его можно описать, не учитывая взаимодействие.

Для построения потоковой диаграммы двумерной системы *невзаимодействующих* электронов в сильном магнитном поле необходимо использовать две компоненты кондактанса, эквивалентные компонентам проводимости σ_{xx} и σ_{xy} . Соответственно, одно уравнение (37) превращается в систему из двух уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d \ln \sigma_{xx}}{d \ln L} &= f_1(\sigma_{xx}, \sigma_{xy}), \\ \frac{d \ln \sigma_{xy}}{d \ln L} &= f_2(\sigma_{xx}, \sigma_{xy}). \end{aligned} \quad (70)$$

Исключив переменную L из уравнений (70), получим связь между σ_{xx} и σ_{xy} , которую можно изобразить в виде кривых на плоскости $(\sigma_{xy}, \sigma_{xx})$ [30]. Это и есть диаграмма потока для 2D-системы невзаимодействующих электронов в сильном магнитном поле (рис. 17). Линии потока на

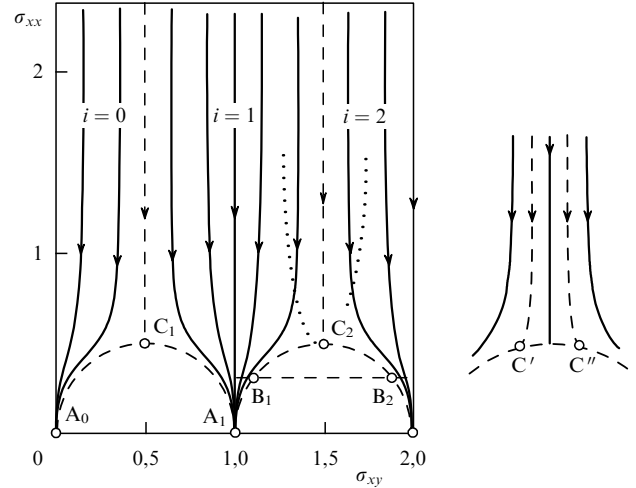


Рис. 17. Диаграмма потока для двумерного электронного газа в сильном магнитном поле [30]. Координатами являются компоненты тензора проводимости σ_{xy} и σ_{xx} в безразмерных единицах $e^2/2\pi\hbar$. Сепаратрисы показаны штриховыми линиями, A_i — стационарные особые точки, C_i — неустойчивые особые точки, которые являются точками квантового перехода, аналогичными QCP на рис. 12. Пунктирной кривой выделена критическая область вблизи точки C_2 . Горизонтальная штриховая линия B_1 – B_2 показывает перескок изображающей точки при изменении управляющего параметра. В правой части рисунка изображена гипотетическая потоковая диаграмма, соответствующая расщеплению фазового перехода и появлению металлической фазы.

этой диаграмме разделены сепаратрисами, периодически повторяющимися вдоль оси σ_{xy} . Диаграмма снова является двухпараметрической, но на этот раз не из-за взаимодействия, а вследствие наличия сильного магнитного поля. Как и на предыдущих потоковых диаграммах, передвигаться по стрелкам вдоль потоковых траекторий можно, либо увеличивая размер образца L , либо уменьшая температуру при большом L , т.е. увеличивая $L\varphi$.

В области, лежащей ниже точек C_i , сепаратриса расщепляется, так что на ней появляются две эквивалентные точки, расположенные на одной высоте, B_1 и B_2 . Линии потока внутри полукругов на рис. 17 опущены, поскольку они существуют как бы отдельно от линий потока снаружи: движение при изменении управляющего параметра в области, лежащей ниже точек C_i , приводит к перескоку между точками B_1 и B_2 и скачку в значении σ_{xy} . Строго говоря, перескок должен происходить по линии, расположенной вне полукруга и обходящей точку C_i сверху. Однако, для того чтобы не загромождать рисунок, перескок показан горизонтальной штриховой кривой.

Управляющими параметрами в режиме квантового эффекта Холла обычно являются электронная концентрация или величина магнитного поля. Их влияние на состояние реальной системы зависит от случайного поля примесей и иных дефектов, которое превращает дискретные уровни Ландау в минизоны и определяет в них энергетическую структуру и характер волновых функций. Поскольку магнитное поле задает в качестве характерного масштаба магнитную длину $r_B = (\hbar c/e|B|)^{1/2}$, можно говорить о двух предельных типах случайного потенциала: потенциал с крупномасштабными флуктуациями с характерными размерами $\zeta \gg r_B$ и короткодействующий потенциал, для которого $\zeta \ll r_B$. В модели

длиннопериодного потенциала вблизи центра каждой минизоны Ландау существует одно значение энергии ε_c , которому соответствуют делокализованная волновая функция электронов. Если волновая функция делокализована только строго при $\varepsilon_F = \varepsilon_c$, а случайное поле снимает вырождение уровней, то изменение электронной концентрации скачком переводит систему из одного фазового состояния в другое через изолированное на энергетической шкале состояние с делокализованной волновой функцией на ферми-уровне. Именно это подразумевает потоковая диаграмма на рис. 17, где каждому изолированному металлическому состоянию соответствует своя сепаратриса.

Фактическая ширина $\delta\varepsilon$ интервала энергий с делокализованными волновыми функциями зависит от более тонких процессов, например от туннелирования между двумя квазиклассическими траекториями, близко подходящими друг к другу в окрестности седловой точки (магнитный пробой). По сути величина $\delta\varepsilon$ представляет собой неопределенность энергии любого из делокализованных состояний. Другим источником увеличения интервала $\delta\varepsilon$ является конечность длин L или L_φ . Конечность интервала $\delta\varepsilon$ означала бы расщепление сепаратрисы на две параллельные линии и расщепление фазового перехода на два перехода: между двумя состояниями холловской жидкости с индексами i , различающимися на единицу, появилось бы металлическое состояние, при котором на уровне Ферми находится частично заполненный слой протяженных состояний. Соответствующая гипотетическая потоковая диаграмма изображена в правой части рис. 17.

На первый взгляд кажется, что эксперимент может дать обоснование для четкого выбора одной из этих двух гипотетических возможностей. Предположим для определенности, что в эксперименте изменяется электронная концентрация n (при изменении магнитного поля рассуждения аналогичны). При изменении концентрации уровень Ферми движется по энергетической шкале. Когда состояния на уровне Ферми делокализованы, то имеется конечная проводимость σ_{xx} , а проводимость σ_{xy} находится в переходной области между двумя плато. Поэтому экстраполяция к $T = 0$ температурной зависимости ширины интервала значений концентрации, ограничивающих переходную область (ширину пика σ_{xx} или величину производной $\partial\sigma_{xy}/\partial n$ в середине переходной области и т.п.), должна определять интервал энергий делокализованных состояний $\delta\varepsilon$.

Однако результаты экспериментов оказались неоднозначными. С одной стороны, ряд тщательно проведенных опытов [31, 32] дает конечную ширину $\delta\varepsilon$. Для примера на рис. 18 приведена ширина перехода, измеренная по ширине пика в сопротивлении ρ_{xx} двумерного газа на гетеропереходе GaAs/AlGaAs. Видно, что измеренная функция довольно надежно экстраполируется к значению $\Delta B_0 \approx 0,35$ Тл при $T \rightarrow 0$. Однако, как мы увидим ниже, во многих экспериментах получается противоположный результат: при понижении температуры ширина перехода стремится к нулю (см., например, рис. 20). До сих пор не удается выявить фактор, который определяет величину $\delta\varepsilon$. Во всяком случае нет однозначной связи между $\delta\varepsilon$ и подвижностью. По-видимому, существенную роль играет такой плохо контролируемый фактор, как статистические характеристики случайного потенциала.

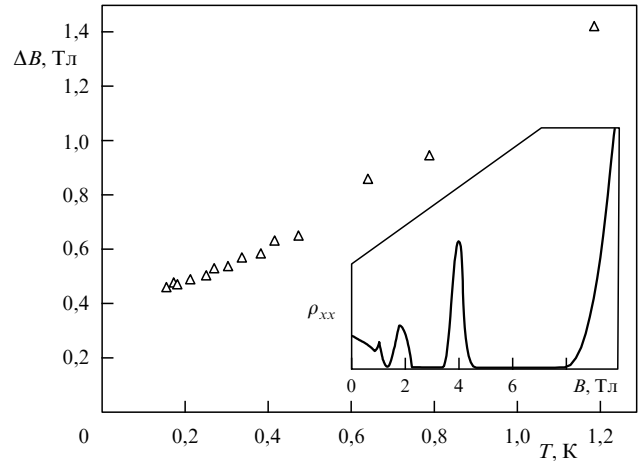


Рис. 18. Температурная зависимость ширины пика продольного сопротивления ρ_{xx} двумерного электронного газа на гетеропереходе GaAs/AlGaAs при переходе $2 \rightarrow 1$ в магнитном поле величины около 4 Тл [32]. Подвижность и концентрация носителей при $T = 1,5$ К равны соответственно $\mu = 34000$ см^2 $(\text{В} \cdot \text{с})^{-1}$ и $n = 1,4 \times 10^{11}$ см^{-2} . На вставке: кривая $\rho_{xx}(B)$, снятая при 150 мК.

Обратимся теперь к экспериментам, в которых не наблюдается конечного слоя энергий с делокализованными состояниями. Хотя потоковая диаграмма переходов $i \rightarrow i+1$ между разными состояниями холловской жидкости является двухпараметрической (см. рис. 18), она симметрична относительно осей $\sigma_{xy} = (i + 1/2)(e^2/2\pi\hbar)$, так и осей $\sigma_{xy} = i(e^2/2\pi\hbar)$. Это дает основание использовать вариант общей теории квантовых фазовых переходов, основанный на соотношениях (25), (26), который предполагает, что справедливы скейлинговые формулы типа (34). Поскольку речь идет исключительно о двумерных электронных системах, то все сопротивления имеют одинаковую размерность, [Ом], и в окрестности перехода должны иметь вид

$$R_{uv} = F_{uv} \left(\frac{L_\varphi}{\xi} \right) = F_{uv} \left(\frac{\delta x}{T^{1/zv}} \right), \quad (71)$$

где под индексами u и v подразумеваются координаты x или y , F_{uv} — какие-то неизвестные функции, и где использована последняя из форм (35) записи аргумента произвольной функции F .

В отличие от случая переходов металл – изолятор, мы не будем здесь вычислять или предсказывать значения v и z , а посмотрим, что можно извлечь из эксперимента. На рисунке 19 в качестве примера приведены записи зависимостей от магнитного поля продольного R_{xx} и поперечного R_{xy} сопротивлений холловского мостика в гетероструктуре на основе GaAs [33], полученные при разных температурах.

Согласно формуле (71) в случае, когда управляющий параметр принимает критическое значение, скейлинговая переменная

$$u = \frac{\delta x}{T^{1/zv}} \quad (72)$$

тождественно равна нулю при всех температурах и

$$R_{uv}(x_c, T) = \text{const}. \quad (73)$$

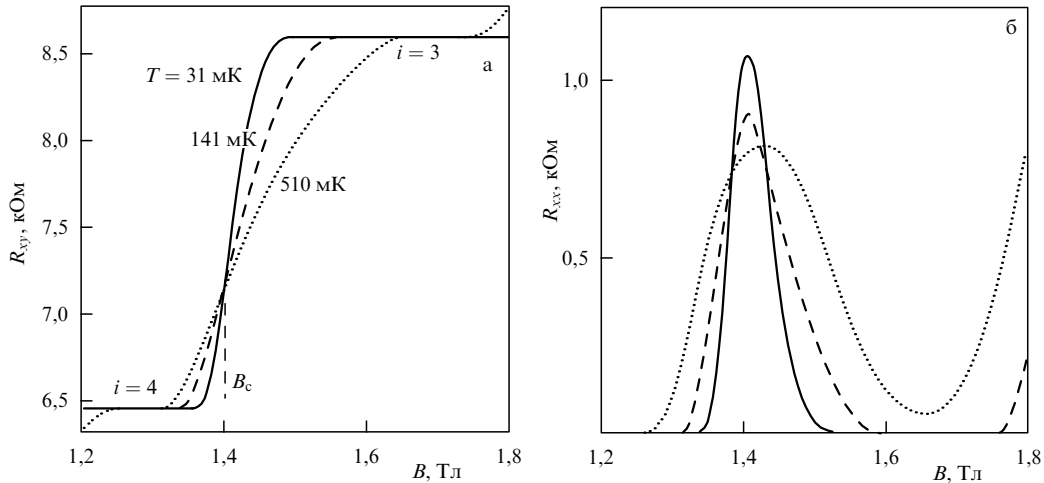


Рис. 19. Поперечное R_{xy} и продольное R_{xx} сопротивления при разных температурах на гетероструктуре $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}-\text{Al}_{0,33}\text{Ga}_{0,67}\text{As}$, $x = 0,85\%$. Критическое магнитное поле перехода 4–3, определенное по точке пересечения кривых $R_{xy}(T)$, составляет $B_c = 1,40$ Тл [33].

Следовательно, сепаратриса (73) должна быть горизонтальна, а все изотермы $R_{uv}(x, T = \text{const})$ должны пересекаться в одной точке $x = x_c$. Это является первой проверкой применимости формулы (71).

Сосредоточимся сначала на кривых $R_{xy}(T)$. Как видно из рис. 19, изотермы $R_{xy}(T)$, полученные на гетероструктуре $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}-\text{Al}_{0,33}\text{Ga}_{0,67}\text{As}$ с $x = 0,85\%$ [33], действительно пересекаются в одной точке $B_c = 1,40$ Тл. Вблизи точки пересечения все кривые $R_{xy}(T)$ можно, разложив в ряд, заменить прямыми $(\partial R_{xy}/\partial B)_{B_c}(B - B_c)$. При изменении наклона прямых от $(\partial R_{xy}/\partial B)_{B_c}$ до $(\partial R_{xy}/\partial B)_{B_c}/T^\kappa$, где $\kappa = 1/z\nu$, все прямые должны слиться в одну. Выбор значения κ , при котором бы выполнялось соотношение

$$\frac{(\partial R_{xy}/\partial B)_{B_c}(T)}{T^\kappa} = \text{const}, \quad (74)$$

представляет собой второй шаг в применении процедуры скейлинга, а возможность сделать такой выбор — это второе условие применимости теории. Выбор κ осуществляется посредством построения графика $(\partial R_{xy}/\partial B)$ от T в двойном логарифмическом масштабе (рис. 20).

Формально уравнение (71) в той же мере применимо к продольному сопротивлению R_{xx} , что и к поперечному сопротивлению R_{xy} . Однако высота пиков зависит от температуры, т.е. точка максимума заведомо не удовлетворяет условию (73). Не вдаваясь в причины этого, можно использовать для скейлингового анализа данные по продольному сопротивлению, учитывая интегральное свойство функций $R_{xx}(B)$ в окрестности перехода — полуширину ΔB пика, определенную по некоторому алгоритму. На рисунке 20 величина ΔB определена как расстояние между двумя максимумами производной $(\partial R_{xx}/\partial B)$.

Как видно из рис. 20, анализ обоих семейств функций дал одинаковые значения критического индекса $\kappa = 0,42$. Это является дополнительным аргументом в пользу проделанной скейлинговой процедуры.

Значение критического индекса $\kappa = 0,42$ было получено неоднократно на гетероструктурах из различных материалов. Однако вопреки ожиданиям это значение оказалось не универсальным: в ряде экспериментов на

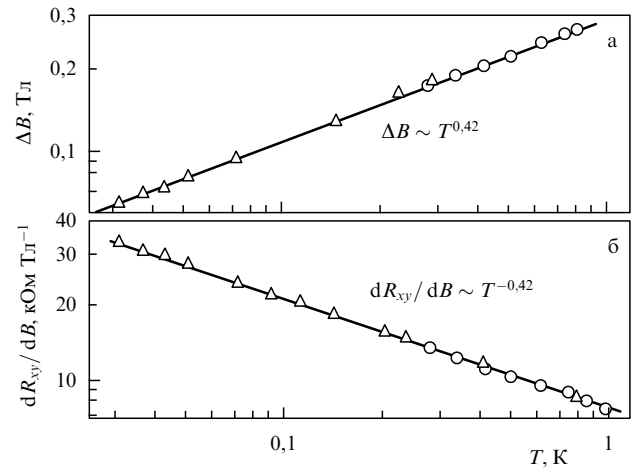


Рис. 20. Определение критического индекса $\kappa = 1/z\nu$ для перехода 4–3 по ширине пика $R_{xx}(T)$ (а) и по совмещению пересекающихся кривых $R_{xy}(T)$ (б). Данные получены на том же образце, что и в случае рис. 19, в криостате растворения (треугольники) и в криостате с жидким ^3He (кружки) [33].

разных гетероструктурах наблюдались и другие значения κ , в интервале от 0,2 до 0,8. Поскольку скейлинговые соотношения и критические индексы обычно являются универсальными, наблюдаемый разброс требует объяснений.

Переходы при $T = 0$ происходят при выполнении условия $\epsilon_F = \epsilon_c$, так что разность $\delta\epsilon = |\epsilon_F - \epsilon_c|$ является естественным "внутренним" управляющим параметром системы, от которого степенным образом зависит корреляционная длина ξ :

$$\xi \propto (\delta\epsilon)^{\nu_1}. \quad (75)$$

Магнитное поле B или концентрация двумерных электронов n , зависящая от напряжения на затворе V_g , являются с этой точки зрения "внешними" управляющими параметрами x :

$$\delta x \equiv |B_c - B| \propto (\delta\epsilon)^{\nu_2} \quad \text{или} \quad (76)$$

$$\delta x \equiv |n_c - n| \propto |V_{gc} - V_g| \propto (\delta\epsilon)^{\nu_2}.$$

Степень ν_2 в обоих случаях одна и та же. Это подтверждается тем, что экспериментальные кривые $R_{xx}(B)$ и $R_{xx}(V_g)$, записанные на одном образце в эквивалентных условиях, различаются только масштабом по оси абсцисс. Окончательно имеем формулу (25)

$$\xi \propto (\delta x)^\nu, \quad \nu = \nu_1 \nu_2, \quad (77)$$

где связь между управляющим параметром δx и корреляционной длиной ξ представлена состоящей из двух звеньев: ξ зависит от положения уровня Ферми ε_F относительно делокализованного уровня ε_c , а разность $\varepsilon_F - \varepsilon_c$, в свою очередь, зависит от δx . Соответственно индекс ν согласно формуле (77) оказался произведением индексов ν_1 и ν_2 . Связь между ξ и $\delta \varepsilon$ и определяющий ее индекс ν_1 , по-видимому, универсальны и одинаковы для всех переходов между разными квантовыми холловскими жидкостями. Тогда как индекс ν_2 определяется плотностью состояний $g(\varepsilon)$ в окрестности энергии ε_c , и потому заведомо зависит от особенностей случайного потенциала: потенциал может быть длинно- или короткопериодным, статистически симметричным или не симметричным относительно среднего значения и т.п. Работа [33], графики из которой приведены в этом разделе, как раз была посвящена выяснению влияния характера случайного потенциала на κ .

График $\Delta B(T)$ на рис. 20 принципиально отличается от приведенного на рис. 18; там при аппроксимации экспериментальных данных степенной функцией присутствовал свободный член ΔB_0 . Однако скейлинговый анализ экспериментальных данных можно произвести и в этом случае, исходя из второго, гипотетического варианта потоковой диаграммы, приведенной на рис. 17. Наличие члена ΔB_0 при такой трактовке означает, что в интервале значений $2\Delta B_0$ управляющего параметра B изображающая точка на потоковой диаграмме движется поперек коридора металлической фазы, попадая на сепаратрису не при значении B_0 , соответствующем максимуму $\sigma_{xx}(B)$ и производной $\partial \sigma_{xy} / \partial B$, а при $B_0 + \Delta B_0$. Этот вопрос подробно обсуждается в обзоре [34]. Здесь мы только отметим, что рис. 18 фактически уже содержит такой скейлинговый анализ. Экстраполировав зависимость $\Delta B(T)$ к $T = 0$, можно определить ширину слоя делокализованных состояний в единицах магнитного поля $2\Delta B_0$; после этого выясняется, что $\Delta B(T) - \Delta B_0$ линейно зависит от T . Это означает, что в данном эксперименте величина $\kappa = 1$. Такое же значение κ было получено ранее в работе [31].

7. Заключение

Все рассмотренные случаи переходов металл–изолятор адекватно описываются потоковыми диаграммами. Список теоретических работ, успешно использовавших эту технику, открывается работой [7], в которой была построена теоретическая модель для невзаимодействующих электронов в нулевом магнитном поле. Последнее достижение — построение диаграммы потока для модельной системы двумерных взаимодействующих электронов и доказательство возможности перехода металл–изолятор в такой системе, сделанные в работе [25].

Что касается общей теории квантовых фазовых переходов, то, как видно на примере перехода в трехмерной системе невзаимодействующих электронов, эта теория в принципе может быть использована для описа-

ния переходов типа "локализованные–делокализованные электроны": ни использование кондактанса как физической величины, задающей состояние системы, ни беспорядок как главный управляющий параметр, не являются для этого принципиальными препятствиями. Однако, как всегда, различные конкретные случаи требуют вариантов теории разной степени сложности. Тот вариант, который обсуждается в данном обзоре, не может быть применен, например, к модели Пуннозе и Финкельштейна [25].

Относительная роль и возможности обоих теоретических подходов видна на примере описания целочисленного квантового эффекта Холла. Потоковая диаграмма, приведенная на рис. 17, очень удобна для обсуждения того, *какие* переходы возможны в системе, и формулировки вопросов, подлежащих экспериментальной проверке. Ответов на многие из этих вопросов до сих пор нет. Например, неясно, какой из вариантов потоковой диаграммы на рис. 17 реализуется на практике и является ли переход между состояниями с квантовыми индексами i и $i \pm 1$,

$$i \rightleftharpoons i \pm 1, \quad (78)$$

расщепленным или нет (i определено формулой (69)). Существуют также проблемы, связанные с топологией потоковой диаграммы. Согласно рис. 17 переходы с изменением квантового числа i более чем на единицу невозможны [35, 36]. Однако при интерпретации многих экспериментов утверждается, что такие переходы имеют место (см., например, обзор [34] и имеющиеся там ссылки).

Общая теория квантовых фазовых переходов не рассматривает вопроса о взаимном расположении на фазовой плоскости разных переходов. Эта теория описывает критическую окрестность *одного* конкретного перехода. Если предположить, что а) переход существует и б) в его критической области имеет место факторизация: $\xi = \xi(\delta x)$, $L_\varphi = L_\varphi(T)$, вследствие чего сопротивление может быть описано формулами (34)–(36) (см. разделы 2.3 и 5.3), то обработкой кривых $R(x, T)$ можно определить точку перехода $x = x_c$ и критические индексы. Именно такая программа была выполнена в работе [33], обсуждавшейся в разделе 6. Абсолютная ценность полученных в работе [33] результатов станет ясна после получения ответов на сформулированные выше вопросы, вытекающие из потоковых диаграмм.

Авторы благодарны А. Финкельштейну и Д. Хмельницкому за многочисленные разъяснения и критику. Работа выполнена при финансовой поддержке грантом НШ-5930.2006.2 для ведущих научных школ и грантами РФФИ.

Список литературы

1. Sachdev S *Quantum Phase Transitions* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999)
2. Sondhi S L et al. "Continuous quantum phase transitions" *Rev. Mod. Phys.* **69** 315 (1997)
3. Vojta T "Quantum phase transitions", in *Computational Statistical Physics* (Eds K H Hoffmann, M Schreiber) (Berlin: Springer, 2002); arXiv:cond-mat/0010285
4. Thouless D J *Phys. Rep.* **13** 93 (1974)
5. Паташинский А З, Покровский В Л *Флуктуационная теория фазовых переходов* 2-е изд. (М.: Наука, 1982) [Translated into English: Patashinskiĭ A Z, Pokrovskii V L *Fluctuation Theory of Phase Transitions* (Oxford: Pergamon Press, 1979)]

6. Goldenfeld N *Lectures on Phase Transitions and the Renormalization Group* (Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1992)
7. Abrahams E et al. *Phys. Rev. Lett.* **42** 673 (1979)
8. Fisher M E "Renormalization group theory: its basis and formulation in statistical physics" *Rev. Mod. Phys.* **70** 653 (1998)
9. Lee P A, Ramakrishnan T V "Disordered electronic systems" *Rev. Mod. Phys.* **57** 287 (1985)
10. Гантмахер В Ф *Электронны в неупорядоченных средах* 2-е изд. (М.: Физматлит, 2005)
11. Altshuler B I, Aronov A G "Electron–electron interaction in disordered conductors", in *Electron–Electron Interactions in Disordered Systems* (Modern Problems in Condensed Matter Sciences, Vol. 10, Eds A L Efros, M Pollak) (Amsterdam: North-Holland, 1985)
12. Imry Y J. *Appl. Phys.* **52** 1817 (1981)
13. Альтшулер Б Л, Аронов А Г *Письма в ЖЭТФ* **37** 349 (1983) [Altshuler B L, Aronov A G *JETP Lett.* **37** 410 (1983)]
14. Dodson B W et al. *Phys. Rev. Lett.* **46** 46 (1981)
15. Imry Y, Ovadyahu Z J. *Phys. C: Solid State Phys.* **15** L327 (1982)
16. Maliepaard M C et al. *Phys. Rev. Lett.* **61** 369 (1988)
17. Теплинский В М, Гантмахер В Ф, Баркалов О И *ЖЭТФ* **101** 1698 (1992) [Teplinskii V M, Gantmakher V F, Barkalov O I *Sov. Phys. JETP* **74** 905 (1992)]
18. Shlimak I et al. *Phys. Rev. Lett.* **77** 1103 (1996); *J. Phys.: Condens. Matter* **9** 9873 (1997)
19. Castner T G "Hopping conduction in the critical regime approaching the metal–insulator transition", in *Hopping Transport in Solids* (Modern Problems in Condensed Matter Sciences, Vol. 28, Eds M Pollak, B Shklovskii) (Amsterdam: North-Holland, 1991)
20. Ларкин А И, Хмельницкий Д Е *ЖЭТФ* **83** 1140 (1982) [Larkin A I, Khmel'nitskii D E *Sov. Phys. JETP* **56** 647 (1982)]
21. Dobrosavljević V et al. *Phys. Rev. Lett.* **79** 455 (1997)
22. Bergmann G *Phys. Rep.* **107** 1 (1984)
23. Hikami S, Larkin A I, Nagaoka Y *Prog. Theor. Phys.* **63** 707 (1980)
24. McMillan W L *Phys. Rev. B* **24** 2739 (1981)
25. Punnoose A, Finkel'stein A M *Science* **310** 289 (2005)
26. Kravchenko S V et al. *Phys. Rev. B* **50** 8039 (1994)
27. Anissimova S et al. *Nature Phys.* **3** 707 (2007); arXiv:cond-mat/0609181
28. Gantmakher V F et al. *Письма в ЖЭТФ* **71** 231 (2000) [*JETP Lett.* **71** 160 (2000)]
29. Ebert G et al. *Solid State Commun.* **44** 95 (1982)
30. Хмельницкий Д Е *Письма в ЖЭТФ* **38** 454 (1983) [Khmel'nitskii D E *JETP Lett.* **38** 552 (1983)]
31. Shashkin A A, Dolgoplov V T, Kravchenko G V *Phys. Rev. B* **49** 14486 (1994)
32. Balaban N Q, Meirav U, Bar-Joseph I *Phys. Rev. Lett.* **81** 4967 (1998)
33. Wanli Li et al. *Phys. Rev. Lett.* **94** 206807 (2005)
34. Шашкин А А *УФН* **175** 139 (2005) [Shashkin A A *Phys. Usp.* **48** 129 (2005)]
35. Kivelson S, Lee D-H, Zhang S-C *Phys. Rev. B* **46** 2223 (1992)
36. Huckestein B *Rev. Mod. Phys.* **67** 357 (1995)

Quantum phase transitions of the electron localization – delocalization type

V.F. Gantmakher, V.T. Dolgoplov

*Institute of Solid State, Russian Academy of Sciences,
ul. Institutskaya 2, 142432 Chernogolovka, Moscow region, Russian Federation
Tel. (7-496) 522-29 42, (7-496) 522-29 46. Fax (7-496) 524-97 01
E-mail: gantm@issp.ac.ru, dolgop@issp.ac.ru*

Metal–insulator transitions and those between different quantum Hall liquids are used as examples to discuss, first, the physical ideas underlying the description of quantum phase transitions and, second, how theoretical results can be used for data processing purposes. Two theoretical schemes are discussed and compared. These are (1) a general theory of quantum phase transitions patterned after the theory of thermodynamic phase transitions and actively exploiting the concept of the partition function and (2) a scaling-theoretical approach using the quantum electrodynamics concept of renormalization group and relying on the flow diagram language to formulate conclusions.

PACS numbers: **71.30.+h**, **72.15.Rn**, **73.43.Nq**

DOI: 10.3367/UFNr.0178.200801a.0003

Bibliography — 36 references

Received 8 October 2007

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **178** (1) 3–24 (2008)

Physics – Uspekhi **51** (1) (2008)