

## МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

## Динамический хаос. Системы классической механики

А.Ю. Лоскутов

Статья представляет собой методическое руководство для тех, кто интересуется хаотической динамикой. Изложены начала теории детерминированного хаоса, возникающего в системах классической механики. Представлены базовые результаты, полученные в этой области: элементы теории нелинейного резонанса и теории Колмогорова–Арнольда–Мозера, теорема Пуанкаре–Биркгофа о неподвижной точке, метод Мельникова. Особое внимание уделено анализу явлений, лежащих в основе самоподобия и природы хаоса: расщеплению сепаратрис, гомо- и гетероклиническим сплетениям. Описаны важные свойства, присущие хаотическим системам: непредсказуемость, необратимость, расщепление временных корреляций. Рассмотрены популярные в последнее время модели классической статистической механики с хаотическими свойствами — бильярды с осциллирующими границами. Показано, что когда бильярд обладает свойством развитого хаоса, следствием возмущения его границ является ускорение Ферми. Однако для бильярдных систем, близких к интегрируемым, возмущения границ приводят ансамбль частиц к новому явлению — разделению их по скоростям. Если начальная скорость частиц превышает некоторую критическую величину, характерную для данной геометрии бильярда, то частицы ускоряются, в противном случае происходит их замедление.

PACS numbers: 05.45.-a, 05.45.Ac

## Содержание

1. Введение (989).
2. Общие положения (991).
3. Гамильтонова механика (992).
  - 3.1. Интегрируемые системы. 3.2. Возмущенное движение.
4. Нелинейный резонанс (993).
  - 4.1. Малые знаменатели. 4.2. Универсальный гамильтониан.
  - 4.3. Ширина сепаратрисы. 4.4. Внутренние резонансы. 4.5. Перекрывание резонансов. 4.6. Резонансы высших порядков.
5. Элементы теории Колмогорова–Арнольда–Мозера (998).
  - 5.1. Теорема Колмогорова. 5.2. Диффузия Арнольда.
6. Природа хаоса (1000).
  - 6.1. Отображение поворота. 6.2. Теорема о неподвижной точке.
  - 6.3. Эллиптические и гиперболические точки. 6.4. Расщепление сепаратрис. Гомоклинические сплетения.
7. Метод Мельникова (1004).
  - 7.1. Функция Мельникова. 7.2. Осциллятор Дуффинга и нелинейный маятник.
8. Основные свойства хаотических систем (1006).
  - 8.1. Эргodicность и перемешивание. 8.2. Непредсказуемость и необратимость. 8.3. Расщепление корреляций.

## 9. Бильярды (1007).

9.1. Газ Лоренца. 9.2. Рассеивающие бильярды с осциллирующими границами. Ускорение Ферми. 9.3. Фокусирующие бильярды с осциллирующими границами. Замедление частиц.

## 10. Заключение (1012).

## Список литературы (1013).

## 1. Введение

В течение долгого времени представление о хаосе ассоциировалось с допущением, что в системе необходимо, по крайней мере, возбуждение чрезвычайно большого числа степеней свободы. Эта концепция, по видимому, сформировалась под влиянием понятий, сложившихся в статистической механике: движение каждой отдельной частицы в газе в принципе предсказуемо, но поведение системы из очень большого числа частиц чрезвычайно сложно, и поэтому детализированный динамический подход теряет смысл. Отсюда — потребность в статистическом анализе. Однако, как показали многочисленные исследования, действие статистических законов, а вместе с тем и справедливость применения статистического описания не ограничиваются только очень сложными системами с большим числом степеней свободы. Случайное поведение может быть присуще и полностью детерминированным системам с небольшим числом степеней свободы. Дело здесь не в сложности исследуемой системы и не во внешних шумах, а в появлении при некоторых значениях параметров экспоненциальной неустойчивости движения. Динамика систем, вызванная такого рода неустойчивостью, и называется динамической стохастичностью

А.Ю. Лоскутов, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет, 119992 Москва, Воробьевы горы, Российская Федерация  
Тел. (495) 939-51-56. Факс (495) 939-29-88  
E-mail: Loskutov@chaos.phys.msu.ru

Статья поступила 31 января 2007 г.,  
после доработки 25 апреля 2007 г.

или детерминированным (динамическим) хаосом. Фундаментальное значение исследований в этой области состоит в том, что они вскрывают природу случайного, дополняя гипотезу молекулярного хаоса гипотезой динамической стохастичности.

Впервые на связь между статистикой и неустойчивостью обратил внимание А. Пуанкаре [1]. Между тем статистический подход к описанию систем со многими степенями свободы был предложен еще Л. Больцманом [2], который выдвинул предположение о том, что движение частиц в разреженной газе следует рассматривать как случайное и каждой частице доступна вся энергетически разрешенная область фазового пространства. Такое представление о системах многих частиц, известное как эргодическая гипотеза [2–4], стало основой классической статистической механики. Вместе с тем ее строгого обоснования долгое время найти не удавалось. Некоторое продвижение в этом направлении было достигнуто благодаря исследованиям П. Эренфеста [5, 6] (см. также [7, 8]), которые позволили, в том числе, установить рамки применимости законов статистической механики. Однако известная работа Э. Ферми, Дж. Паста и С. Улама [9] (более подробно см. [10, 11]), в которой впервые была предпринята попытка проверки эргодической гипотезы, вновь выдвинула проблему обоснования статистической физики на первый план.

Частичное разрешение этой проблемы можно получить, опираясь на работы А. Пуанкаре (см. [12]), в которых он пришел к выводу, что в окрестности неустойчивых неподвижных точек фазового пространства движение системы имеет чрезвычайно сложный характер. Это явилось первым указанием на то, что нелинейные динамические системы могут проявлять хаотические свойства. Впоследствии Д. Биркгоф [13] показал, что при рациональном отношении частот (т.е. резонансе) в фазовом пространстве появляются устойчивые и неустойчивые неподвижные точки. Резонансы более высоких порядков изменяют топологию фазовых траекторий и приводят к образованию цепи "островов". Обычная теория возмущений, как оказалось, не описывает такие резонансы, поскольку решения вблизи них сильно возмущены, что приводит к появлению в разложении малых знаменателей и расходимости рядов.

Первое глубокое исследование природы статистических законов было проведено Н.С. Крыловым [14], который показал, что в ее основе лежит свойство перемешивания и связанная с ним локальная неустойчивость почти всех траекторий соответствующих динамических систем. В связи с этим М. Борн [15] (см. также [16]) выдвинул предположение о непредсказуемости поведения систем классической механики. Позднее динамика систем, вызванная такого рода неустойчивостью, стала называться динамической стохастичностью или детерминированным (динамическим) хаосом. Слово "хаос" в этом его понимании было введено, по-видимому, Дж. Йорком [17] (см. [18, с. 338]). Однако, как указывает Я.Г. Синай [19], словосочетание "детерминированный хаос" впервые появилось в 1960-х годах в работах Б. Чирикова и Дж. Форда.

Физически начальное состояние системы ввиду неизбежных флуктуаций (т.е. малых возмущений начальных условий) должно задаваться некоторым распределением. Задача состоит в том, чтобы, используя такое начальное распределение, предсказать эволюцию сис-

темы. Если система устойчива, так что с течением времени малые возмущения не возрастают экспоненциально, то ее поведение предсказуемо. Напротив, если системе присуща экспоненциальная неустойчивость (т.е., как говорят, она обладает чувствительной зависимостью от начальных условий), то процесс может быть описан только вероятностным образом. По существу, именно эти соображения легли в основу современного представления о динамическом хаосе. Неожиданным явилось обнаружение факта, что именно хаос определяет основное поведение системы, а не внешние шумы (см. обзор [20]).

Огромное влияние на развитие теории динамического хаоса оказали школы А.Н. Колмогорова и А.А. Андроннова, к которым принадлежит блестящая плеяда выдающихся математиков современности. Так, теорема А.Н. Колмогорова о сохранении условно периодического движения при малых возмущениях гамильтоновых систем, доказанная В.И. Арнольдом и Ю. Мозером, называемая теоремой Колмогорова–Арнольда–Мозера (КАМ) (см. [21–25]), стала краеугольным камнем в объяснении происхождения хаотичности. Ранние работы Д.В. Аносова [26] и Я.Г. Синай [27, 28] показали, насколько широким явлением оказывается динамический хаос.

Пионерские исследования Л.П. Шильникова бифуркаций петли сепаратрисы седло-фокуса [29, 30], в которых, в том числе, была разработана специальная техника, предназначенная для анализа динамики систем вблизи траекторий седлового типа, раскрыли всю бесконечную сложность структур, возникающих при появлении гомоклинических траекторий. При этом было показано, что сложное поведение систем должно наблюдаться в полной окрестности параметрических значений, для которых существует гомоклиническая орбита. В более поздних работах Л.П. Шильникова, Л.М. Лермана, Н.К. Гаврилова, И.М. Овсянникова, Д.В. Тураева и других были разработаны новые методы, позволяющие описать конечное число бифуркаций, приводящих к хаотической динамике (см. [31, 32] и цитируемую там литературу).

Новый этап в объяснении хаотичности и ее зарождения в детерминированных системах начался после появления работ А.Н. Колмогорова и Я.Г. Синай [33–35], в которых было введено понятие энтропии для динамических систем. Эти работы положили начало созданию последовательной теории хаотических динамических систем.

Большую роль в развитии теории детерминированного хаоса сыграли разного рода абстрактные математические конструкции. Так, С. Смейл [36], для того чтобы опровергнуть гипотезу о плотности систем, обладающих только периодическим типом поведения, построил замечательный пример, который сейчас называется "подкова Смейла". Из этого примера следует, что существуют системы, имеющие как бесконечное число периодических орбит с различным периодом, так и бесконечное число аperiodических траекторий [18, 36, 37]. Вслед за "подковой Смейла" появились  $u$ -системы Аносова [26, 38], которые характеризуются наиболее четко выраженными свойствами перемешивания. Обобщения таких систем — введение "аксиомы А" Смейла [37] (см. также [39–41] и цитируемую там литературу) и гиперболических множеств [18, 37, 40–42] — выделили важный класс

динамических систем, обладающих свойством экспоненциальной неустойчивости траекторий (см. обзор [43]).

Примерно в то же время стали появляться математические работы, в которых на основе изучения бильярдных систем предпринимались попытки обосновать статистическую механику [27, 28]. Бильярды впервые появились как упрощенные модели, на которых можно изучать ряд задач статистической физики [13] (см. также ссылки в [44, 45]). Бильярд на плоскости — это динамическая система, описывающая движение по инерции материальных тел (шаров) внутри ограниченной области по закону "угол падения равен углу отражения". По существу, математический плоский бильярд представляет собой обычный бильярд без трения, только с произвольной конфигурацией стола и без луз.

С использованием бильярдных систем впервые была решена задача Н.С. Крылова о перемешивании в системе упругих шариков [14]. Более того, было показано, что системы, соответствующие бильярдам с рассеивающими границами, имеют много общего с геодезическими потоками в пространствах отрицательной кривизны, т.е. потоками Аносова. Немного позднее класс бильярдных систем, способных проявлять хаотические свойства, был значительно расширен (см. [45–47], а также цитируемую там литературу). На основе обобщения таких систем — модификации двумерного газа Лоренца — было доказано, что движение в чисто детерминированных системах может быть подобным броуновскому [44, 45]. Этот результат стал первым строгим подтверждением проявления хаотичности динамическими (т.е. без какого-либо случайного механизма) системами.

Дальнейшие как теоретические, так и экспериментальные исследования нелинейных систем показали, насколько типичным и всеобщим явлением оказывается хаотическое поведение систем с небольшим числом степеней свободы. Стало очевидным, что хаотические свойства могут проявлять самые разнообразные нелинейные системы и если хаос не обнаруживается, то, возможно, лишь потому, что он возникает либо в очень малых областях параметрического пространства, либо при значениях параметров, соответствующих физически нереализуемым областям.

Как возникает хаотическое движение? В чем состоит природа хаоса? Казалось бы, путей его возникновения должно быть достаточно много. Однако выяснилось, что число сценариев процесса хаотизации совсем невелико. Более того, некоторые из них подчиняются универсальным закономерностям и не зависят от природы системы. Одни и те же пути развития хаоса присущи самым разнообразным объектам. Универсальное поведение напоминает обычные фазовые переходы второго рода, а введение ренормгрупповых и скейлинговых методов, известных в статистической механике, открывает новые перспективы в изучении хаотической динамики.

Настоящая статья посвящена основам теории динамического хаоса. Описаны основные результаты, полученные в области, относящейся к классической механике: элементы теории нелинейного резонанса и теории КАМ, теорема Пуанкаре–Биркгофа о неподвижной точке, имеющая важное значение для понимания причин хаотичности, метод Мельникова, позволяющий в некоторых случаях аналитически получить критерий рождения хаоса. Особое внимание уделено природе хаоса: подробно рассмотрены факторы, приводящие возмущен-

ные системы к проявлению свойства самоподобия, расщеплению сепаратрис, гомо- и гетероклиническим сплетениям. Показано, что в системах, где наблюдаются такие явления, имеет место непредсказуемость, необратимость и расщепление временных корреляций.

В разделе 9 описаны весьма популярные сейчас модели неравновесной классической статистической механики, которым присущи хаотические свойства, — бильярды с осциллирующими границами. Подробно рассмотрены газ Лоренца и бильярд типа "стадион". Представлен один из интересных результатов — аналитический закон ускорения бильярдной частицы, т.е. доказательство наличия ускорения Ферми в бильярдах с развитым хаосом. Однако если бильярдная система близка к интегрируемой системе, так что кривизна границ бильярда небольшая, то малые колебания границ приводят к новому явлению. Возникает своеобразный "бильярдный" демон Максвелла: в зависимости от начальных условий бильярдная частица будет либо ускоряться, либо замедляться. Иными словами, возмущение границ таких бильярдов приводит ансамбль частиц к расслоению по скоростям.

Современный математический аппарат, используемый для анализа хаотических свойств динамических систем, достаточно сложен. Однако основная цель настоящей статьи — дать общее представление о причинах развития такого явления, как детерминированный хаос, и раскрыть основные идеи, лежащие в основе подхода к изучению хаотической динамики. Поэтому в своем изложении я опирался главным образом на геометрические методы и использовал качественный подход. Хотя большинство из описанных результатов достаточно давно известны, здесь они представлены в форме, позволяющей неспециалисту разобраться в причинах хаотичности. Вследствие этого статья имеет, в том числе, и методологический характер.

## 2. Общие положения

Предметом нашего анализа будут являться системы, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, a), \quad (1)$$

где  $\mathbf{v} = \{v_1, v_2, \dots, v_l\}$  — векторная функция, обычно полагаемая гладкой,  $a$  символизирует совокупность параметров,  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_l\}$  —  $l$ -мерный вектор с компонентами  $x_1, x_2, \dots, x_l$ , характеризующий состояние динамической системы. Функция  $\mathbf{F}(t, c_i)$ ,  $c_i = \text{const}$ , которая при подстановке в уравнения (1) обращает их в тождества, называется решением. Задание начальных условий  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  однозначно определяет решение в любой момент времени  $t$ :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}_0). \quad (2)$$

Всякое решение  $\mathbf{x}(t)$  системы уравнений (1) геометрически можно представить как линию в  $l$ -мерном пространстве, образованном переменными  $x_1, \dots, x_l$ . Это  $l$ -мерное пространство называется фазовым пространством системы (обозначим его  $M$ ). Каждому состоянию динамической системы соответствует точка в пространстве  $M$ , а каждой точке из пространства  $M$  — единственное состояние системы. Изменение состояния системы можно интерпретировать как движение некоторой точки

(называемой изображающей) в фазовом пространстве. Траектория такой изображающей точки, т.е. ее последовательные положения в фазовом пространстве  $M$ , называется фазовой траекторией.

Предположим, что в момент времени  $t_0$  система (1) с фазовым пространством  $M$  находилась в состоянии  $\mathbf{x}_0$ . Тогда в момент времени  $t \neq t_0$  ее состояние, вообще говоря, будет иным. Обозначим это новое состояние как  $\mathbf{F}'\mathbf{x}_0$ . Таким образом, для каждого  $t$  мы определили оператор эволюции, или отображение сдвига,  $\mathbf{F}' : M \rightarrow M$  фазового пространства  $M$  в себя. Отображение  $\mathbf{F}'$  переводит систему из состояния, в котором она находилась в момент времени  $t_0$ , в состояние в момент  $t$ . Другими словами, решение (2) уравнений (1) ставит в соответствие точке  $x_i(t_0)$ ,  $i = 1, 2, \dots, l$ , фазового пространства  $M$  в момент времени  $t_0$  определенную точку  $x_i(t)$  фазового пространства в момент  $t$ :

$$\mathbf{F}'\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t). \quad (3)$$

Следовательно, в общем случае любая область  $\Omega_0$  фазового пространства под действием отображения  $\mathbf{F}'$  перейдет через время  $t$  в некоторую другую область  $\Omega_t = \mathbf{F}'\Omega_0$ . Отображение  $\mathbf{F}' : M \rightarrow M$  называют также фазовым потоком, а функцию  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  — векторным полем данной динамической системы с фазовым пространством  $M$ .

Если фазовый поток  $\mathbf{F}'$  имеет секущую  $S$ , т.е. некоторую гиперповерхность коразмерности 1, которая пересекается фазовыми кривыми без касания, то на  $S$  можно определить отображение  $\Phi$ , которое любой точке  $p$  гиперповерхности  $S$  ставит в соответствие ближайшую, следующую за  $p$  точку  $p'$  пересечения фазовой кривой с этой же гиперповерхностью  $S$ . Тогда анализ динамики исходной системы сведется к исследованию свойств отображения  $\Phi$ , которое называется функцией последования или отображением Пуанкаре (или иногда отображением последования Пуанкаре).

Если  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ , то такие системы называют консервативными. К ним относятся большинство объектов, изучаемых в классической механике. Исследование эволюции консервативных систем имеет фундаментальный характер, поскольку касается таких вопросов, как обоснование эргодической гипотезы Больцмана, движение планет и задача  $N$  тел, динамика заряженных частиц и нагрев плазмы и т.п.

Наш анализ мы начнем с гамильтонова подхода, преимущество которого заключается не в его формальной стороне, а в более глубокой интерпретации физической сути рассматриваемого явления. По существу, гамильтонов подход — это геометрический метод исследования. Он имеет ряд преимуществ и позволяет получить решения задач, которые не поддаются анализу иными средствами.

### 3. Гамильтонова механика

В основу гамильтонова формализма положены хорошо известные уравнения Гамильтона, представляющие собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (4)$$

где  $i = 1, 2, \dots, n$ , для которых при  $t = t_0$  выполняются начальные условия  $q_i(t_0) = q_i^0$ ,  $p_i(t_0) = p_i^0$ . Такие системы обладают большим разнообразием движений — от полностью интегрируемой динамики до квазипериодичности и хаоса.

Одним из основных свойств гамильтоновых систем является сохранение объема произвольной области фазового пространства, т.е. выполнение теоремы Лиувилля:

$$\int_{D_0} d\mathbf{q}_0 d\mathbf{p}_0 = \int_{D_t} d\mathbf{q} d\mathbf{p},$$

где  $D_0, D_t \subset M$ .

#### 3.1. Интегрируемые системы

Вопрос об интегрируемости гамильтоновых систем является довольно сложным. Существует ряд достаточно общих (но, естественно, не универсальных) методов, позволяющих в некоторых случаях построить решение уравнений (4) или их приближения. Имеются достаточно полные обзоры и монографии, в которых эти методы подробно описаны (см., например, [48–55] и приведенные там ссылки). Поэтому я не буду их здесь рассматривать, а представлю только геометрический анализ интегрируемых систем.

Гамильтонова система (4) является полностью интегрируемой (а гамильтониан  $H$  — интегрируемым), если существует такое каноническое преобразование, с помощью которого можно перейти к переменным действие–угол:  $\mathbf{q}, \mathbf{p} \rightarrow \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{J}$ . Другое определение основано на теореме Лиувилля об интегрируемых системах: гамильтонова система с  $n$  степенями свободы интегрируема, если для нее известны  $n$  независимых интегралов, находящихся в инволюции.

Системы с одной степенью свободы ( $n = 1$ ) интегрируемы всегда, поскольку их гамильтониан  $H(q, p) = E$  является интегралом движения. Весьма характерным примером такой системы является модель маятника. Его гамильтониан можно записать как

$$H = \frac{p^2}{2ml^2} - mgl \cos \varphi, \quad (5)$$

где  $\varphi$  — угол отклонения от вертикали,  $g$  — ускорение свободного падения. Уравнения движения маятника имеют вид  $\dot{p} = -mgl \sin \varphi$ ,  $\dot{\varphi} = p/ml^2$ , или

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0, \quad (6)$$

где  $\omega_0 = \sqrt{g/l}$  — частота колебаний. Гамильтониан подобного вида встречается во многих задачах и играет фундаментальную роль в классической механике.

Когда полная энергия  $H = E$  маятника превышает наибольшее значение потенциальной энергии,  $E = E_{\text{tot}} > mgl$ , импульс  $p$  всегда будет отличен от нуля, что приводит к неограниченному возрастанию угла  $\varphi$ , т.е. вращению маятника. Колебания маятника соответствует энергия  $E = E_{\text{osc}} < mgl$ . Если  $E \approx E_s \equiv mgl$ , то период колебаний стремится к бесконечности и движение происходит по сепаратрисе — линии, разделяющей два качественно различных типа движения: колебание и вращение (рис. 1а). Уравнение сепаратрисы записывается как  $p_s = \pm 2\omega_0 ml^2 \cos \varphi_s/2$ ,  $\varphi_s = 4 \arctan [\exp(\omega_0 t)] - \pi$ ,

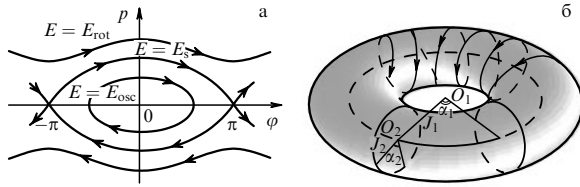


Рис. 1. (а) Фазовый портрет нелинейного маятника. (б) Наглядное представление интегрируемой гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в переменных действие – угол.

где знаки "+" и "-" отвечают верхней и нижней ветвям соответственно.

В окрестности точек с координатами  $(p, \varphi) = (0, 2\pi k)$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , семейство фазовых кривых имеет вид эллипсов. Поэтому такие точки называются эллиптическими. Семейство траекторий вблизи точек  $(p, \varphi) = (0, \pi + 2\pi k)$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , имеет вид гипербол, и такие точки называют гиперболическими.

Для автономной системы с двумя степенями свободы,  $n = 2$ , интегрируемая система в переменных действие – угол  $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\alpha})$  имеет топологию двумерного тора (рис. 1б). При этом для нелинейных систем частоты обращения по окружностям  $O_1$  и  $O_2$  в силу связей  $\omega_1 = \omega_1(J_1, J_2)$ ,  $\omega_2 = \omega_2(J_1, J_2)$  (когда они есть) могут изменяться от тора к тору. Также может изменяться и их отношение:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\omega_1(J_1, J_2)}{\omega_2(J_1, J_2)}. \tag{7}$$

Если отношение (7) рационально,  $\omega_1/\omega_2 = k/m$  (резонанс), то динамика системы является периодической: фазовая траектория замыкается, совершив  $k$  оборотов по окружности  $O_1$  и  $m$  оборотов по окружности  $O_2$ . Если отношение частот (7) иррационально,  $\omega_1/\omega_2 \neq k/m$ , то фазовая траектория образует всюду плотную обмотку тора и движение системы тогда называют квазипериодическим или условно периодическим.

Таким образом, в силу произвольности  $J_1$  и  $J_2$  фазовое пространство оказывается представленным двумерными торами, которые в обычном трехмерном пространстве можно изобразить как совокупность вложенных друг в друга торов, большой и малый радиусы которых задаются значениями  $J_1$  и  $J_2$  (рис. 2).

Для интегрируемых систем с  $n$  степенями свободы фазовое пространство является  $2n$ -мерным и в переменных действие – угол имеет топологию множества  $n$ -мер-

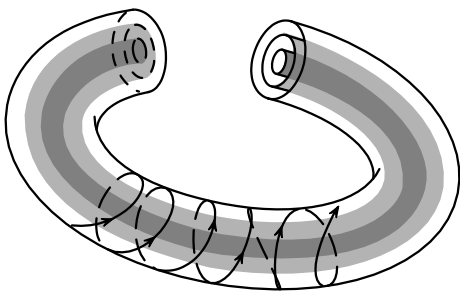


Рис. 2. Общая структура фазового пространства интегрируемой системы с двумя степенями свободы в переменных действие – угол.

ных торов. Любая возможная траектория располагается на одном из них. При этом некоторые траектории могут оказаться замкнутыми, а другие будут всюду плотно покрывать соответствующий тор.

Тор размерностью  $n \geq 2$  с заданными значениями  $J_1, J_2, \dots, J_n$  называется резонансным, если для набора частот  $\{\omega_i(J_1, J_2, \dots, J_n)\}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) выполняется соотношение

$$\sum_{i=1}^n k_i \omega_i(J_1, J_2, \dots, J_n) = 0,$$

где величины  $k_i$  — некоторые отличные от нуля целые числа.

### 3.2. Возмущенное движение

Подавляющее большинство уравнений Гамильтона (для систем с  $n$  степенями свободы) не является интегрируемым. Однако в ряде случаев гамильтониан  $H = H(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{J})$  можно разбить на интегрируемую часть  $H_0 = H_0(\mathbf{J})$  и неинтегрируемую, но представимую в виде малого возмущения  $H_1$  функции  $H_0$  часть:

$$H(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{J}) = H_0 + \varepsilon H_1, \tag{8}$$

где  $H_0 = H_0(\mathbf{J})$ ,  $H_1 = H_1(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{J})$ ,  $\varepsilon$  — некоторый малый параметр. Системы, гамильтониан которых можно записать в виде (8), называются системами, близкими к интегрируемым.

В выбранных переменных  $\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{J}$  канонические уравнения, согласно (4), (8), имеют вид

$$\dot{J}_i = -\varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_i}, \quad \dot{\alpha}_i = \frac{\partial H_0}{\partial J_i} + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial J_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{9}$$

где  $\varepsilon \ll 1$ . Если  $\varepsilon = 0$ , то система (9) является полностью интегрируемой и ее решения будут покрывать  $n$ -мерные торы. Пусть теперь  $\varepsilon \neq 0$ . Насколько сильно в этом случае изменится характер интегрируемой системы?

### 4. Нелинейный резонанс

Ответ на поставленный в разделе 3.2 вопрос существенным образом зависит от соотношения между частотой возмущающей силы и собственной частотой системы. Так, если собственная частота системы близка к частоте внешней силы, то это приведет к возрастанию амплитуды — резонансу. Но поскольку для нелинейных систем с возмущением (8) частота оказывается зависящей от амплитуды, через некоторое время система выйдет из резонанса. Это приведет к уменьшению амплитуды, что в свою очередь повлечет за собой изменение частоты. Поэтому вскоре система вновь возвратится в окрестность резонанса. Появятся так называемые фазовые колебания.

Резонансы могут возникать не только между системой и внешним воздействием, но и между разными степенями свободы самой системы, что соответствует автономности гамильтониана  $H_1$  в соотношении (8). В этом случае говорят о внутренних резонансах.

Если резонанс не является изолированным, то перекрытие резонансов приводит к появлению очень сложного движения в системе. Кроме того, резонансы пре-

пятствуют нахождению решений уравнений методом канонической теории возмущений. В теории возмущений исходная система аппроксимируется близкой к ней интегрируемой системой и налагаемым на нее малым возмущением, а решение задачи ищется в виде разложения по степеням  $\varepsilon$ . Наличие резонансов нарушает сходимость таких рядов. Это связано с тем, что при данном подходе неявно предполагается, что исходные уравнения являются интегрируемыми. Однако в большинстве случаев это не так. Даже очень простые системы могут быть неинтегрируемыми и обладать при некоторых начальных условиях очень сложной динамикой. Например, в поведении нелинейного маятника с внешним воздействием проявляются черты динамического хаоса [56, 57]. Теория возмущений не может описать такое сложное поведение, что формально выражается в расходимости рядов. Если начальные условия системы отвечают регулярным траекториям (квазипериодическому движению), то в окрестности резонансов под действием возмущения такие траектории претерпевают качественное изменение.

Теория нелинейного резонанса замечательна тем, что позволяет получить аналитический критерий возникновения нерегулярного движения в гамильтоновых системах. Этот критерий впервые был введен Б. Чириковым [58, 59]. Рассмотрим теорию нелинейного резонанса с общей точки зрения, следуя [60, 61] (см. также [54, 62]). Более полное изложение резонансной теории содержится в монографии [63].

**4.1. Малые знаменатели**

Остановимся сначала на внутреннем резонансе. Разложим функцию  $H_1(\mathbf{a}, \mathbf{J})$  (см. (8)) в ряд Фурье:  $H_1(\mathbf{a}, \mathbf{J}) = \sum_k H_1^k(\mathbf{J}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{a})$  и подставим разложение в уравнения Гамильтона (9). Это дает

$$\begin{aligned} \dot{J}_j &= -i\varepsilon \sum_k k_j H_1^k \exp(i\mathbf{k}\mathbf{a}), \\ \dot{\alpha}_j &= \omega_j(\mathbf{J}) + \varepsilon \sum_k \frac{\partial H_1^k}{\partial J_j} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{a}), \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь  $\mathbf{k}$  — вектор с целыми вещественными компонентами,  $H_1^k$  — коэффициенты Фурье,  $\omega_j(\mathbf{J}) = \partial H_0(\mathbf{J}) / \partial J_j$ .

Будем искать решение возмущенной системы (10) в виде рядов по степеням малого параметра  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} J_j &= J_j^{(0)} + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s J_j^{(s)}, \\ \alpha_j &= \alpha_j^{(0)} + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s \alpha_j^{(s)}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \tag{11}$$

Далее, используя разложение (11) и уравнения (10), отберем члены, стоящие при одинаковых степенях параметра  $\varepsilon$ . Тогда в нулевом приближении находим  $\dot{J}_j^{(0)} = 0$ ,  $\dot{\alpha}_j^{(0)} = \omega_j(\mathbf{J}^{(0)})$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ . Отсюда

$$J_j^{(0)} = \text{const}, \quad \alpha_j^{(0)} = \omega_j(\mathbf{J}^{(0)})t + \text{const}. \tag{12}$$

Учитывая, что

$$\omega_j(\mathbf{J}^{(0)} + \varepsilon\mathbf{J}^{(1)}) \approx \omega_j(\mathbf{J}^{(0)}) + \varepsilon \sum_m \frac{\partial \omega_j(\mathbf{J}^{(0)})}{\partial J_m^{(0)}} J_m^{(1)},$$

нетрудно найти уравнения первого приближения:

$$\begin{aligned} \dot{J}_j^{(1)} &= -i \sum_k k_j \tilde{H}_1^k(\mathbf{J}^{(0)}) \exp(i\mathbf{k}\omega(\mathbf{J}^{(0)})t), \\ \dot{\alpha}_j^{(1)} &= \sum_m \frac{\partial \omega_j(\mathbf{J}^{(0)})}{\partial J_m^{(0)}} J_m^{(1)} + \sum_k \frac{\partial \tilde{H}_1^k(\mathbf{J}^{(0)})}{\partial J_j} \exp(i\mathbf{k}\omega(\mathbf{J}^{(0)})t), \end{aligned} \tag{13}$$

где  $\tilde{H}_1^k$  — значения коэффициентов  $H_1^k$  с учетом константы. Уравнения (13) сразу интегрируются:

$$\begin{aligned} J_j^{(1)} &= - \sum_k \frac{k_j \tilde{H}_1^k(\mathbf{J}^{(0)})}{\mathbf{k}\omega} \exp(i\mathbf{k}\omega t) + \text{const}, \\ \alpha_j^{(1)} &= i \sum_m \frac{\partial \omega_j(\mathbf{J}^{(0)})}{\partial J_m^{(0)}} \sum_k \frac{k_m \tilde{H}_1^k(\mathbf{J}^{(0)})}{(\mathbf{k}\omega)^2} \exp(i\mathbf{k}\omega t) - \\ &\quad - i \sum_k \frac{\partial \tilde{H}_1^k(\mathbf{J}^{(0)})}{\partial J_j} \frac{\exp(i\mathbf{k}\omega t)}{\mathbf{k}\omega}. \end{aligned} \tag{14}$$

Легко видеть, что при выполнении условия

$$\mathbf{k}\omega = k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + \dots + k_n\omega_n \approx 0, \tag{15}$$

которое называют соотношением резонанса, в (14) появляются члены с нулевыми или близкими к нулю знаменателями. Это приводит к значительному возрастанию поправок  $\alpha_j^{(s)}, J_j^{(s)}$ , что явно нарушает сходимость рядов (11).

Если соотношение резонанса не выполняется в уравнениях первого приближения (13), то оно может иметь место для уравнений более высокого приближения  $s > 1$ . Резонанс, который проявляется в  $s$ -м порядке теории возмущений, называется резонансом порядка  $s$ .

Пусть теперь возмущение  $H_1$  периодически (с периодом  $T = 2\pi/\Omega$ ) зависит от времени, т.е.  $H_1(\mathbf{a}, \mathbf{J}, t) = H_1(\mathbf{a}, \mathbf{J}, t + T)$ . Поступая аналогично тому, как это делалось в предыдущем случае, получим

$$H_1(\mathbf{a}, \mathbf{J}, t) = \sum_{k,m} H_1^{km}(\mathbf{J}) \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{a} - m\Omega t)].$$

Уравнения Гамильтона при этом переходят в следующие:

$$\begin{aligned} \dot{J}_j &= -i\varepsilon \sum_{k,m} k_j H_1^{km} \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{a} - m\Omega t)], \\ \dot{\alpha}_j &= \omega_j(\mathbf{J}) + \varepsilon \sum_{k,m} \frac{\partial H_1^{km}}{\partial J_j} \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{a} - m\Omega t)], \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Как и ранее, решение в нулевом приближении имеет вид (12). Нетрудно получить уравнения первого приближения, которые легко интегрируются и дают

$$\begin{aligned} J_j^{(1)} &= - \sum_{k,m} \frac{k_j \tilde{H}_1^{km}(\mathbf{J}^{(0)})}{\mathbf{k}\omega - m\Omega} \exp[i(\mathbf{k}\omega - m\Omega)t] + \text{const}, \\ \alpha_j^{(1)} &= i \sum_l \frac{\partial \omega_j(\mathbf{J}^{(0)})}{\partial J_l^{(0)}} \sum_{k,m} \frac{k_l \tilde{H}_1^{km}(\mathbf{J}^{(0)})}{(\mathbf{k}\omega - m\Omega)^2} \exp[i(\mathbf{k}\omega - m\Omega)t] - \\ &\quad - i \sum_{k,m} \frac{\partial \tilde{H}_1^{km}(\mathbf{J}^{(0)})}{\partial J_j} \frac{\exp[i(\mathbf{k}\omega - m\Omega)t]}{\mathbf{k}\omega - m\Omega}. \end{aligned}$$

Здесь  $\tilde{H}_1^{km}$  — значения  $H_1^{km}$  с учетом константы, которая появляется в нулевом порядке. Таким образом, если выполняется соотношение резонанса  $k\omega - m\Omega \approx 0$ , то ряды теории возмущений (11) расходятся, в чем и заключается проблема малых знаменателей. Для преодоления этой трудности было предложено использовать каноническое преобразование для перехода к специальным (резонансным) переменным.

#### 4.2. Универсальный гамильтониан

Пусть возмущение  $H_1$  является периодической функцией времени с периодом  $T = 2\pi/\nu$  и движение описывается гамильтонианом

$$H = H_0(J) + \varepsilon H_1(\alpha, J, t), \quad (16)$$

где  $\varepsilon \ll 1$ . Разложим функцию  $H_1$  в ряд Фурье:

$$H_1(\alpha, J, t) = \sum_{k,m} H_1^{km}(J) \exp[i(k\alpha - mvt)]. \quad (17)$$

Тогда уравнения Гамильтона (9) примут вид

$$\dot{J} = -i\varepsilon \sum_{k,m} k H_1^{km}(J) \exp[i(k\alpha - mvt)], \quad (18)$$

$$\dot{\alpha} = \omega(J) + \varepsilon \sum_{k,m} \frac{dH_1^{km}(J)}{dJ} \exp[i(k\alpha - mvt)],$$

где  $H_1^{-k,-m} = \tilde{H}_1^{k,m}$ . Легко видеть, что если в уравнениях (18) выполняется условие

$$k\omega(J) - mv \approx 0, \quad (19)$$

то возникает резонанс.

Для того чтобы изучить динамику в окрестности резонанса, выделим из разложения (17) резонансный член и рассмотрим поведение системы, обусловленное только этим членом. Зафиксируем тройку чисел  $k_0, m_0, J_0$ , чтобы условие резонанса выполнялось точно:

$$k_0\omega(J_0) = m_0\nu, \quad (20)$$

а в уравнениях (18) сохраним лишь резонансную гармонику. Тогда

$$\begin{aligned} \dot{J} &= -i\varepsilon k_0 H_1^{k_0 m_0}(J) \exp[i(k_0\alpha - m_0\nu t)] + \\ &+ i\varepsilon k_0 \tilde{H}_1^{k_0 m_0}(J) \exp[-i(k_0\alpha - m_0\nu t)] = \\ &= 2\varepsilon k_0 \frac{1}{2i} \left\{ |H_1^{k_0 m_0}(J)| \exp[i(\psi + k_0\alpha - m_0\nu t)] - \right. \\ &\left. - |H_1^{k_0 m_0}(J)| \exp[-i(\psi + k_0\alpha - m_0\nu t)] \right\} = \\ &= 2\varepsilon k_0 |H_1^{k_0 m_0}(J)| \sin(k_0\alpha - m_0\nu t + \psi), \\ \dot{\alpha} &= \omega(J) + \varepsilon \frac{d}{dJ} H_1^{k_0 m_0}(J) \exp[i(k_0\alpha - m_0\nu t)] + \\ &+ \varepsilon \frac{d}{dJ} \tilde{H}_1^{k_0 m_0}(J) \exp[-i(k_0\alpha - m_0\nu t)] = \\ &= \omega(J) + 2\varepsilon \frac{d}{dJ} |H_1^{k_0 m_0}(J)| \cos(k_0\alpha - m_0\nu t + \psi). \end{aligned}$$

Введем обозначения  $\varphi \equiv k_0\alpha - m_0\nu t + \psi$ ,  $H_1^0 \equiv 2|H_1^{k_0 m_0}|$ . Тогда уравнения (18) переписутся как

$$\dot{J} = \varepsilon k_0 H_1^0(J) \sin \varphi, \quad (21)$$

$$\dot{\varphi} = k_0\omega(J) - m_0\nu + \varepsilon k_0 \frac{dH_1^0(J)}{dJ} \cos \varphi.$$

Сохраняя в разложении (17) только резонансный член, находим выражение для гамильтониана (16):

$$H = H_0(J) + \varepsilon H_1^0 \cos \varphi. \quad (22)$$

Допустим теперь, что величина  $J$  достаточно близка к  $J_0$ , так что отклонение  $\Delta J \equiv J - J_0$  является малой величиной. В этом случае  $H_0(J)$  и  $\omega(J)$  можно разложить в ряд по  $\Delta J$ :

$$H_0(J) = H_0(J_0) + \frac{\partial H_0}{\partial J} \Delta J + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H_0}{\partial J^2} (\Delta J)^2 + \dots, \quad (23)$$

$$\omega(J) = \omega(J_0) + \frac{\partial \omega}{\partial J} \Delta J + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial J^2} (\Delta J)^2 + \dots \quad (24)$$

Отбросим в выражении (23) члены порядка малости выше второго, а в выражении (24) члены порядка малости выше первого. Кроме того,  $H_1^0(J)$  возьмем в точке  $J_0$ , учтем равенство (20) и во втором уравнении (21) пренебрежем членом  $\sim \varepsilon$ . Тогда система (21) и гамильтониан (22) преобразуются соответственно к виду

$$\frac{d}{dt} \Delta J = \varepsilon k_0 H_1^0 \sin \varphi, \quad (25)$$

$$\dot{\varphi} = k_0 \frac{d\omega(J_0)}{dJ} \Delta J,$$

$$H = H_0(J_0) + \omega(J_0) \Delta J + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega(J_0)}{\partial J^2} (\Delta J)^2 + \varepsilon H_1^0 \cos \varphi. \quad (26)$$

Здесь для удобства введено обозначение  $H_1^0 \equiv H_1^0(J_0)$ . Канонически сопряженными переменными для системы (25) являются переменные  $\Delta J, \varphi$ , а сама система (25), как нетрудно видеть, порождается гамильтонианом

$$\bar{H} = \frac{1}{2} k_0 \frac{d\omega(J_0)}{dJ} (\Delta J)^2 + \varepsilon k_0 H_1^0 \cos \varphi, \quad (27)$$

который называется универсальным гамильтонианом нелинейного резонанса [59].

Каноническое преобразование, позволяющее совершить переход от системы с гамильтонианом (26) к системе с универсальным гамильтонианом нелинейного резонанса, имеет вид

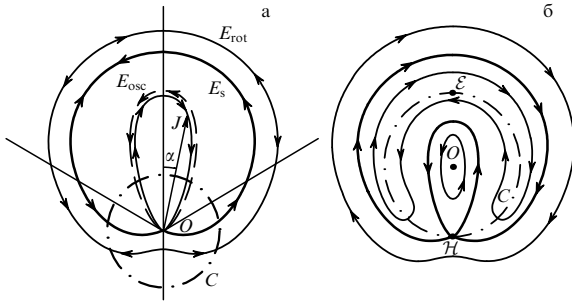
$$(\alpha, J) \rightarrow (k_0\alpha - m_0\nu t, \Delta J), \quad \nu = \omega(J_0), \quad (28)$$

$$\bar{H} = k_0 H - m_0\nu \Delta J - k_0 H_0(J_0).$$

#### 4.3. Ширина сепаратрисы

Проанализируем выражение (27) и уравнения (25). Сразу видно сходство  $\bar{H}$  с гамильтонианом нелинейного маятника (5), если в последнем положить  $l = 1$ . Действительно, роль импульса  $p$  играет переменная  $\Delta J$ , а эффективной массы — величина  $m = (k_0 d\omega(J_0)/dJ)^{-1}$ . Более того, систему (25) с помощью замены  $\Omega_0^2 = \varepsilon k_0^2 H_1^0 |d\omega(J_0)/dJ|$  можно записать как

$$\ddot{\varphi} - \Omega_0^2 \sin \varphi = 0. \quad (29)$$



**Рис. 3.** Нелинейный резонанс первого порядка в переменных  $\alpha, J$  (а) и в переменных, определяемых соотношением (28) (б). Тонкие линии — фазовые колебания, штрихпунктирная линия — невозмущенная траектория ( $J = J_0$ ), жирная кривая — сепаратриса [60].

Уравнение (29) с точностью до сдвига по фазе на  $\pi$  совпадает с уравнением (6).

Пусть  $k_0 = 1, m_0 = 1$  (резонанс первого порядка). В исходных переменных  $\alpha, J$  фазовый портрет будет иметь вид, показанный на рис. 3а. Локальным осцилляциям системы отвечает двойная каплеобразная кривая, соответствующая малой энергии  $E = E_{\text{osc}}$ . Если обратиться к аналогии с маятником, то это будет отвечать его колебаниям. Наружная кривая соответствует энергии  $E = E_{\text{rot}}$ , что для маятника означает вращение. Сепаратриса ( $E = E_s$ ) разделяет эти два качественно различных типа движения.

Перейдем теперь в систему координат, определяемую преобразованием (28). В результате фазовый портрет системы будет выглядеть, как показано на рис. 3б. Поясним этот рисунок, используя аналогию с маятником. Если маятник вращается в сторону, противоположную вращению системы координат, то такому движению отвечают линии, расположенные вокруг точки  $O$  внутри малой петли сепаратрисы. Если направление вращения маятника совпадает с направлением вращения системы координат, то этому соответствуют линии, находящиеся снаружи большой петли сепаратрисы. Подковообразные замкнутые кривые, расположенные между двумя петлями сепаратрисы, отвечают колебаниям маятника. Колебания происходят вокруг эллиптической точки, обозначенной на рис. 3б как  $\mathcal{E}$ . Через гиперболическую точку  $\mathcal{H}$  проходят обе (большая и малая) петли сепаратрисы. Окружности  $C$  отвечает нижнее состояние равновесия маятника. Для исходной системы окружности  $C$  соответствует невозмущенная траектория при  $J = J_0$ . Направления движения на рис. 3б указаны стрелками.

Максимальное расстояние между двумя (большой и малой) петлями сепаратрисы называют шириной нелинейного резонанса (а также шириной сепаратрисы). Нетрудно оценить эту величину. Из (27) имеем для ширины резонанса по действию

$$\max(\Delta J) = \sqrt{2\varepsilon H_1^0 \left| \frac{d\omega(J_0)}{dJ} \right|^{-1}} \quad (30)$$

и по частоте

$$\max(\Delta\omega) = \left| \frac{d\omega(J_0)}{dJ} \right| \max(\Delta J) = \sqrt{2\varepsilon H_1^0 \left| \frac{d\omega(J_0)}{dJ} \right|}. \quad (31)$$

Определим теперь, насколько оправданы приближения, сделанные выше, а также найдем порядки величин (30), (31). Из выражения (22) следует, что  $H_0 \sim H_1^0$ . Но поскольку  $H_0 \sim J_0\omega(J_0)$ , то

$$H_0 \sim H_1^0 \sim J_0\omega(J_0). \quad (32)$$

Поэтому, учитывая (30), (31), получим

$$\frac{\max(\Delta J)}{J_0} \sim \sqrt{\frac{\varepsilon}{\gamma}}, \quad \frac{\max(\Delta\omega)}{\omega(J_0)} \sim \sqrt{\varepsilon\gamma}, \quad (33)$$

где  $\gamma \equiv (d\omega(J_0)/dJ)(J_0/\omega(J_0))$  — так называемый параметр нелинейности. При выводе системы (25) мы отбросили член  $\sim \varepsilon$  в уравнении (21) для  $\dot{\phi}$ . Это возможно (см. (21), (25)), если выполняется  $(dH_1^0(J_0)/dJ_0)\varepsilon \ll \ll |d\omega(J_0)/dJ|\Delta J$ , или, с учетом оценки порядка величин,  $\varepsilon H_1^0/J_0 \ll |d\omega(J_0)/dJ|\Delta J$ . Отсюда согласно (32), (33) находим

$$\gamma \gg \varepsilon. \quad (34)$$

Кроме того,  $H_1^0(J)$  мы заменили величиной  $H_1^0(J_0)$ . Эта замена эквивалентна условию  $J - J_0 \ll 1$ , или  $\Delta J \ll J_0$ . Последнее соотношение, как легко видеть из (33), приводит к неравенству (34).

Сохранение только резонансного слагаемого и отбрасывание нерезонансных членов допустимо в случае, когда другие частоты в разложении (24) качественно не изменяют динамику, т.е. при  $\omega(J_0) \gg |d\omega(J_0)/dJ|\Delta J$ . Используя оценку (31), получаем условие  $\gamma\varepsilon \ll 1$ , которое выполняется при малых  $\gamma$  и  $\varepsilon$ . Отсюда, учитывая (34), находим

$$\varepsilon \ll \gamma \ll \frac{1}{\varepsilon}. \quad (35)$$

Неравенство (35) называется условием умеренной нелинейности [59, 60].

Таким образом, изложенная выше приближенная теория нелинейного резонанса справедлива при условии выполнения неравенства (35). Следовательно, предельного перехода к линейной задаче ( $\gamma \rightarrow 0$ ) не существует.

Условие резонанса (20) может выполняться, вообще говоря, при любом значении  $k_0$ . В этом случае все допущения и формулы остаются прежними. Однако, поскольку фаза определяется выражением  $\varphi = k_0\alpha - \nu t + \psi$ , это приводит к появлению гирлянды из петель сепаратрисы. Число таких петель равно  $k_0$ . Следовательно, число пар эллиптических и гиперболических точек также будет равно  $k_0$  (рис. 4).

#### 4.4. Внутренние резонансы

Приведенное описание нелинейного резонанса легко обобщается для систем со многими степенями свободы. Однако при  $n \geq 2$  возможно появление резонансов между степенями свободы самой системы, т.е. внутренних резонансов.

Рассмотрим для наглядности систему с двумя степенями свободы ( $n = 2$ ). Гамильтониан такой системы можно записать как

$$H = H_{01}(J_1) + H_{02}(J_2) + \varepsilon H_1(J_1, J_2, \alpha_1, \alpha_2),$$



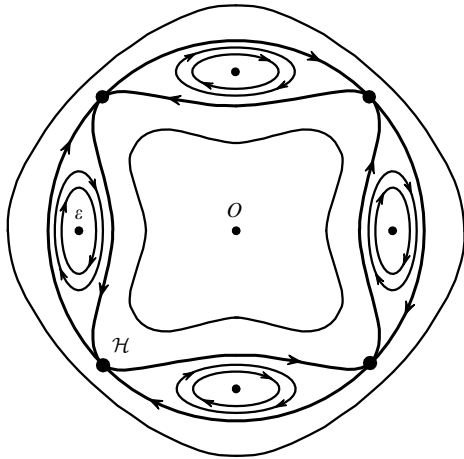


Рис. 4. Нелинейный резонанс при  $k_0 = 4, m_0 = 1$ .

а уравнения движения представляются в виде

$$\dot{J}_j = -\varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_j}, \quad \dot{\alpha}_j = \frac{\partial}{\partial J_j}(H_{01} + H_{02}) + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial J_j}, \quad j = 1, 2.$$

Согласно соотношению (15) внутренний резонанс возникает, если условие  $k\omega_1(J_{01}) - m\omega_2(J_{02}) = 0$  выполняется для некоторых целых чисел  $k, m$  и значений переменных действия  $J_{01}, J_{02}$ . Сохраняя в разложении

$$H_1 = \sum_{k,m} H_1^{km}(J_1, J_2) \exp [i(k\alpha_1 - m\alpha_2)]$$

только резонансную гармонику, разлагая функции  $H_{0j}$ ,  $\omega_j = dH_{0j}/dJ_j, j = 1, 2$ , в окрестности резонанса  $(J_{01}, J_{02})$  и используя приближения, описанные выше, находим уравнения движения

$$\dot{J}_1 = \varepsilon k H_1^0 \sin \varphi, \quad \dot{J}_2 = -\varepsilon m H_1^0 \sin \varphi, \tag{36}$$

$$\dot{\varphi} = k \frac{d\omega_1(J_{01})}{dJ_1} \Delta J_1 - m \frac{d\omega_2(J_{02})}{dJ_2} \Delta J_2$$

и универсальный гамильтониан

$$\bar{H} = \frac{1}{2} \frac{d\omega_1(J_{01})}{dJ_1} (\Delta J_1)^2 + \frac{1}{2} \frac{d\omega_2(J_{02})}{dJ_2} (\Delta J_2)^2 + \varepsilon H_1^0 \cos \varphi.$$

Здесь введены обозначения  $\Delta J_j = J_j - J_{0j}, j = 1, 2, H_1^0 \exp(i\psi) \equiv 2H_1^{km}(J_{01}, J_{02}) = 2|H_1^{km}(J_{01}, J_{02})| \exp(i\psi)$  и  $\varphi = k\alpha_1 - m\alpha_2 + \psi$ .

Легко видеть, что, умножив первое уравнение системы (36) на  $m$ , а второе на  $k$  и сложив их, получим дополнительный интеграл движения  $mJ_1 + kJ_2 = \text{const}$ . Следовательно, уравнения (36) являются интегрируемыми. Можно, однако, пойти иным путем. Действительно, продифференцировав уравнение для  $\dot{\varphi}$  по времени, приходим к выражению (29), в котором

$$\Omega^2 = \varepsilon H_1^0 \left| k^2 \frac{d\omega_1(J_{01})}{dJ_1} + m^2 \frac{d\omega_2(J_{02})}{dJ_2} \right|.$$

Если величины  $d\omega_1(J_{01})/dJ_1$  и  $d\omega_2(J_{02})/dJ_2$  имеют разные знаки, то выражение под знаком модуля может обратиться в нуль, т.е. в системе допустимо дополнительное выражение.

Для систем с более чем двумя степенями свободы ( $n \geq 3$ ) число дополнительных интегралов движения увеличивается, но вся динамика по-прежнему определяется уравнением типа (29).

Таким образом, при исследовании систем, близких к интегрируемым, существенную роль играет отношение частот: их несоизмеримость в типичном случае определяет квазипериодическую траекторию, плотно покрывающую тор. Однако рациональное отношение частот приводит к появлению резонансов и изменяет структуру инвариантных поверхностей.

#### 4.5. Перекрывание резонансов

Весь анализ нелинейного резонанса был проведен при допущении, что величина  $J$  (см. (20)) остается фиксированной. Иными словами, мы предполагали, что существует единственный изолированный первичный нелинейный резонанс. На самом деле согласно (19) резонансное соотношение может выполняться и для других значений  $J_m, m = 1, 2, \dots$ . Иначе говоря, первичных резонансов в системе может быть много, и соотношение (20) при  $k_0 = 1$  необходимо переписать как  $\omega(J_m) = m\nu$ . Следовательно, можно ввести в рассмотрение расстояния между резонансами по действию  $\delta J_m = J_{m+1} - J_m$  и по частоте  $\delta\omega_m = \omega(J_{m+1}) - \omega(J_m)$ . Если все значения  $J_m$  находятся достаточно далеко друг от друга, т.е.

$$\delta J_m \gg \Delta J_m, \tag{37}$$

где  $\Delta J_m$  определяется соотношением (30), то сепаратрисы резонансов не пересекаются и резонансы не взаимодействуют друг с другом. При попадании начальных условий системы в область одного из них описание динамики может быть проведено в приближении влияния только этого резонанса. Если начальная точка попадает в область между резонансами, то система может быть изучена в рамках нерезонансного приближения [54, 64].

Аналогично можно определить условие отсутствия перекрывания (взаимодействия) резонансов по частотам:

$$\delta\omega_m \gg \Delta\omega_m. \tag{38}$$

Допустим теперь, что соотношение (37) или (38) не выполняется, а резонансы близки друг к другу, так что соответствующие им сепаратрисы могут перекрываться. Что произойдет в этом случае, который называют сильным взаимодействием резонансов?

Введем параметр  $K$ , определяющий степень перекрывания резонансов:

$$K = \frac{\Delta\omega}{\delta\omega} \sim \frac{\Delta J}{\delta J}.$$

Параметр перекрывания резонансов  $K$  был введен Чириковым для характеристики динамики гамильтоновых систем [58] (см. также [59, 65, 66]). При условии малости взаимодействия, т.е. при  $K \ll 1$ , движение в системе должно быть регулярным и в общем случае фазовые траектории будут покрывать всюду плотно  $(n - m)$ -мерные торы. Однако при сильном перекрывании,  $K > 1$ , динамика системы оказывается очень сложной и отличной от динамики при периодическом и квазипериодическом режимах.

Справедливость критерия возникновения нерегулярного движения по степени перекрывания резонансов была

подтверждена результатами многих численных исследований (см. [54, 59, 62]). В частности, в работе [67] было обнаружено рождение хаоса при перекрытии всего лишь двух резонансов.

Особенность этого критерия состоит в том, что при изучении конкретных систем его относительно просто использовать. Действительно, достаточно применить описанную выше технику в окрестности только одного резонанса в приближении отсутствия всех остальных. Это делает критерий перекрытия резонансов очень удобным в практическом отношении. Вместе с тем он работает не всегда и в ряде случаев требует уточнения [54, 59, 66].

#### 4.6. Резонансы высших порядков

До сих пор мы рассматривали только первичные резонансы. Однако если возмущение  $\varepsilon$  достаточно велико, то могут появиться так называемые вторичные резонансы, которые изменяют или вообще разрушают интегралы первичных резонансов. Вторичный резонанс — это резонанс между основной частотой невозмущенных колебаний и частотами гармоник фазовых колебаний первичного резонанса. Особенность такого резонанса заключается в том, что вблизи эллиптической точки внутри первичного резонанса появляются гирлянды из петель сепаратрис.

Малые знаменатели вторичных резонансов можно устранить аналогично тому, как это было сделано для первичного резонанса (см. об этом подробно в [54]). Однако такой подход в применении ко вторичному резонансу обладает рядом особенностей. В частности, ширина вторичного резонанса зависит от  $\varepsilon$  значительно сильнее, чем для первичного резонанса ( $\sim \varepsilon^{1/2}$ , см. (30), (31)). Поэтому при малых  $\varepsilon$  (в случае малых колебаний на первичном резонансе) вторичные резонансы несущественны. Но при достаточно больших возмущениях вторичные резонансы могут оказаться столь же влияющими на динамику системы, как и первичные.

Кроме вторичных резонансов в системах возможны резонансы более высоких порядков, которые также могут существенно влиять на движение. Таким образом, в целом поведение системы оказывается чрезвычайно запутанным и представляет собой иерархию очень сложных структур. Мы подробно опишем такую структуру, когда будем рассматривать динамику вблизи сепаратрис резонансов. Наш анализ прояснит вопросы, связанные с происхождением и природой динамического хаоса.

Какова же структура резонансов вблизи эллиптических и гиперболических точек? Этот вопрос непосредственно связан с природой хаоса.

### 5. Элементы теории Колмогорова – Арнольда – Мозера

Нелинейный резонанс показывает, что даже небольшие возмущения могут весьма существенным образом влиять на динамику интегрируемой гамильтоновой системы. Резонансы изменяют топологию фазовых траекторий и приводят к образованию цепи островов в фазовом пространстве. Теория возмущений не описывает такие резонансы, поскольку регулярные решения вблизи них сильно возмущены, что влечет за собой появление малых знаменателей и расходимость рядов.

На эту проблему обратил внимание еще А. Пуанкаре, назвав ее фундаментальной проблемой классической механики. Она была решена только в начале 1960-х годов с появлением знаменитой теории Колмогорова – Арнольда – Мозера (теории КАМ) [21 – 25].

Для того чтобы подчеркнуть физическую значимость теории КАМ, рассмотрим задачу о движении планет вокруг Солнца по закону всемирного тяготения. Если не учитывать влияние планет друг на друга, то получим полностью интегрируемую систему: планеты движутся по эллипсам согласно законам Кеплера, так что в общем случае динамика системы квазипериодическая. При учете взаимодействия планет их орбиты представляют собой деформированные эллипсы с медленной прецессией. Максимальное значение прецессии демонстрирует Меркурий. Смещение его перигелия, обусловленное влиянием остальных планет <sup>1</sup>, оценивается величиной  $\sim 532''$  за 100 лет [68].

В принципе, влияние планет друг на друга должно учитываться с помощью методов теории возмущений. Однако при наличии резонансов такие методы приводят к расходящимся рядам и, как следствие, не дают информации о динамике системы на больших интервалах времени.

Эта планетарная задача, сводящаяся в общем случае к известной проблеме  $N$  тел, относится к одной из самых важных задач, появившихся в результате развития как математики, так и физики. В 1885 г. королем Швеции и Норвегии Оскаром II по предложению Г. Миттаг-Леффлера была даже учреждена премия за решение этой задачи: "*Дана система из произвольно большого числа материальных точек, взаимодействующих друг с другом по законам Ньютона. Попробуйте представить (при условии, что никакие две точки никогда не столкнутся) координаты каждой точки в виде рядов от переменной, которая является некоторой известной функцией времени и для всех значений которой ряд сходится равномерно*". (Подробнее об этом и других интересных вопросах, касающихся развития небесной механики и нелинейной динамики, см. [69].) Таким образом, основной задачей было не только найти формальное представление решений задачи  $N$  тел в виде рядов, но и доказать их сходимость. Последнее как раз и представляло основную трудность.

Не останавливаясь на истории вопроса, отметим только, что премию получил А. Пуанкаре за неоценимый вклад в развитие задачи  $N$  тел и связанных с ней фундаментальных задач динамики.

Понадобилось очень много времени, чтобы понять, что поставленная проблема не проста и для ее решения требуется использовать мощные методы, которые как раз и были развиты создателями КАМ-теории А.Н. Колмогоровым, В.И. Арнольдом и Ю. Мозером. КАМ-теория не только позволяет построить сходящуюся процедуру разложения, но и, самое главное, дает ключ к пониманию природы возникновения хаоса. Кроме того, эта теория и ее следствия оказались очень важными для многих разделов современной науки: чистой и прикладной математики, механики, физики и даже численного анализа (!).

<sup>1</sup> Подчеркнем, что мы рассматриваем только ньютоновское взаимодействие.

В последние годы в теории КАМ достигнут значительный прогресс и она остается весьма активной областью исследований (см. [53, 70, 71] и данные там ссылки). Изложению этой теории посвящено достаточно большое число обзоров и монографий (например [70, 72–76]). Поэтому в разделах 5.1 и 5.2 мы представим только некоторые качественные положения этой теории и опишем ряд ее важных следствий.

### 5.1. Теорема Колмогорова

В основе КАМ-теории лежит знаменитая теорема Колмогорова (иногда ее называют также теоремой КАМ), которая утверждает, что при достаточно малых возмущениях полностью интегрируемой системы большинство нерезонансных торов сохраняется и лишь немного деформируется. "Большинство" в данном случае означает, что все резонансные торы (отвечающие периодическому движению) и часть нерезонансных торов разрушатся, но это множество будет мало по сравнению с множеством сохранившихся в результате возмущения нерезонансных торов.

Условия применимости КАМ-теории следующие.

- Невозмущенный гамильтониан должен удовлетворять условию невырожденности:

$$\det \left| \frac{\partial \omega_i}{\partial J_k} \right| = \det \left| \frac{\partial^2 H_0}{\partial J_i \partial J_k} \right| \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

которое означает, что частоты невозмущенной системы функционально независимы.

- Возмущение должно быть гладким, т.е. необходимо, чтобы гамильтониан  $H_1$  имел достаточное число производных.

- Система должна находиться вне окрестности резонанса, т.е.

$$\left| \sum_j k_j \omega_j \right| > c |\mathbf{k}|^{-r}, \quad \mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n), \quad (39)$$

где  $r$  зависит от числа степеней свободы  $n$ , а постоянная  $c$  определяется величиной возмущения  $\varepsilon H_1$  и параметром нелинейности  $\gamma$ . Заметим, что из неравенства (39) можно получить условие умеренной нелинейности (35).

При выполнении приведенных требований смысл теории КАМ состоит в следующем. Для большинства начальных условий в системе, близкой к интегрируемой, квазипериодическая динамика сохранится. Однако имеются начальные условия, для которых существовавшие при  $\varepsilon = 0$  (главным образом резонансные) торы разрушатся и движение станет нерегулярным. Именно эти разрушающиеся под действием возмущения торы и приводят систему к хаосу. Вот почему теория нелинейного резонанса играет столь важную роль. Траектории, начавшиеся в области разрушенных торов, могут свободно блуждать по энергетической поверхности, что проявляется на поверхности сечения как множество случайно разбросанных точек. При этом такие траектории оказываются экспоненциально неустойчивыми к малым возмущениям.

Интересно, что при малых  $\varepsilon$  далекие от резонанса торы сохраняются при произвольных гладких возмущениях. Но с увеличением  $\varepsilon$  картина качественно меняется: торы начинают разрушаться, а область хаотичности — возрастать. В конце концов это приводит к перекрытию первичных резонансов и возникновению явления, кото-

рое в гамильтоновой динамике называется глобальным хаосом [54]. При глобальном хаосе в системе не остается ни одного из тех торов, которые были близки к торам невозмущенной задачи, хотя могут появиться и другие торы. Фазовая траектория в такой системе способна двигаться поперек хаотических слоев.

Однако при  $\varepsilon \ll 1$  резонансы не перекрываются и решения лежат на слегка деформированных инвариантных торах. Здесь имеется качественное различие в динамике систем с двумя степенями свободы и систем с большим числом ( $n > 2$ ) степеней свободы.

### 5.2. Диффузия Арнольда

В случае двух степеней свободы фазовое пространство является четырехмерным, энергетическая гиперповерхность (или пространство уровня энергии)  $H = E$  — трехмерной, а инвариантные торы являются двумерными. Это позволяет представить такие торы "погруженными" в трехмерное пространство уровня энергии  $H = E$  (см. рис. 2). Следовательно, торы будут разделять его на непересекающиеся области. Тем самым разрушенные торы оказываются зажатыми между сохранившимися после воздействия возмущения торами. Фазовая траектория, берущая начало на месте такого разрушенного тора (т.е. в щели между двумя инвариантными торами), останется запертой здесь навсегда. Это означает, что соответствующие переменные действия практически не изменяются и при движении остаются вблизи своих начальных значений. Поэтому для систем с двумя степенями свободы, удовлетворяющих условию теоремы Колмогорова, при всех начальных условиях эволюция отсутствует и сохраняется глобальная устойчивость [72].

При  $n > 2$  инвариантные торы уже не делят  $(2n - 1)$ -мерную энергетическую гиперповерхность на непересекающиеся части. В таких системах для большинства начальных условий динамика окажется квазипериодической. Однако существуют такие начальные условия, при которых переменные действия медленно отдаляются от своего первоначального значения. Это легко понять из того факта, что при  $n > 2$  области разрушенных торов сливаются, образуя единую сеть. Двигаясь по нитям этой сети, фазовая точка на гиперповерхности заданной энергии может сколь угодно близко подойти к любой точке этой гиперповерхности. Как показывают исследования, такая эволюция переменных действия имеет случайный характер. Это блуждание по резонансам вокруг инвариантных торов называется диффузией Арнольда [54, 60, 70, 72].

Таким образом, малые возмущения в системах с более чем двумя степенями свободы могут не только качественно преобразовать динамику системы, но и изменить топологию фазовых траекторий, превратив их в связанную сеть.

Характерной особенностью диффузии Арнольда является ее универсальность в том смысле, что не существует критического значения возмущения  $\varepsilon$ , необходимого для ее возникновения. Иными словами, диффузия имеет место всегда, даже при сколь угодно малых  $\varepsilon$ . При этом, очевидно, скорость диффузии стремится к нулю при уменьшении возмущения. Следовательно, для гамильтоновых систем с числом степеней свободы  $n > 2$  переменные действия могут медленно эволюционировать, что соответствует отсутствию глобальной устой-

чивости. Эта эволюция в общем случае происходит достаточно медленно и может быть различной в разных частях фазового пространства.

Еще одна особенность систем, которым свойственна диффузия Арнольда, состоит в том, что в их динамике не может наблюдаться резкого перехода к глобальному хаосу, возникающему вследствие перекрытия резонансов. Это объясняется тем, что в таких системах области с хаотическим поведением уже связаны между собой в единую сеть. Кроме того, диффузия Арнольда является очень медленной по сравнению с движением траекторий в области глобальной хаотичности.

Впервые наличие диффузионных траекторий было строго доказано для гамильтоновой нелинейной системы специального вида [77]. В общем случае доказательства слияния хаотических траекторий в единую сеть не существует, но известно достаточно много примеров, в которых наблюдается это явление (см. [54, 59, 78–81]). Строгая верхняя оценка скорости диффузии Арнольда получена в работе [82] (см. также [53] и приведенные там ссылки). Различные случаи диффузии, возникающие при этом физические явления и оценки ее скорости для различных систем приведены в монографиях [53, 54].

Рассмотрим подробнее, как происходит "разрушение" резонансных торов и рождается хаос.

### 6. Природа хаоса

Вопрос о природе хаотичности восходит к знаменитой проблеме пересечения сепаратрис в динамических системах. Это явление было открыто еще А. Пуанкаре при изучении задачи трех тел [83]. Однако для понимания причин рождения хаоса в системах классической механики необходимо привлечь также известную теорему о неподвижной точке Пуанкаре – Биркгофа [13, 84] (с математической стороны этого вопроса можно ознакомиться по монографии [85]).

#### 6.1. Отображение поворота

Будем рассматривать систему с двумя степенями свободы  $n = 2$  и гамильтонианом  $H(q_1, p_1, q_2, p_2)$ , хотя изложенные ниже результаты можно обобщить и для многомерного случая. В такой системе величина  $H$  является полной энергией. Следовательно, при данном значении  $H = E$  поток всегда будет трехмерным. Это дает возможность рассмотреть вместо непрерывной эволюции системы соответствующее отображение Пуанкаре. Такое отображение нетрудно построить аналитически.

Для интегрируемой системы в переменных действие – угол фазовое пространство представляет собой множество вложенных торов. Запишем поток на одном из них:

$$\alpha_1(t) = \omega_1 t + \alpha_1(0), \quad \alpha_2(t) = \omega_2 t + \alpha_2(0),$$

где  $\omega_1 = \omega_1(J_1, J_2) = \partial H / \partial J_1$ ,  $\omega_2 = \omega_2(J_1, J_2) = \partial H / \partial J_2$ . Очевидно, что полный оборот вдоль координаты  $\alpha_2$  происходит за время  $t_2 = 2\pi / \omega_2$ . В течение этого промежутка изменение переменной  $\alpha_1$  составит

$$\alpha_1(t + t_2) = \alpha_1(t) + \omega_1 t_2 = \alpha_1(t) + \frac{2\pi\omega_1}{\omega_2} = \alpha_1(t) + 2\pi\rho(J_1).$$

Введенная здесь величина  $\rho = \omega_1 / \omega_2$  называется числом вращения. Поскольку движение происходит в простран-

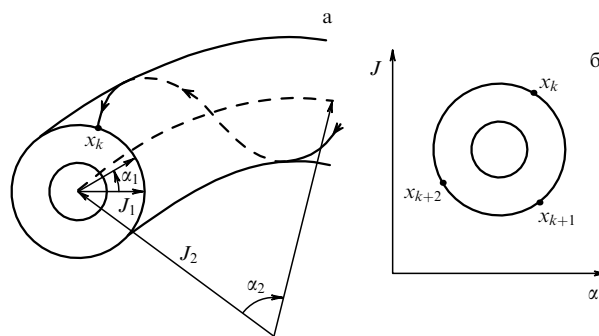


Рис. 5. Система с двумя степенями свободы (а) и ее отображение Пуанкаре (б).

стве уровня энергии, то  $J_2 = J_2(J_1, E)$ . Поэтому при заданном  $E$  число вращения  $\rho$  является функцией только переменной  $J_1$ .

Допустим теперь, что в качестве секущей поверхности выступает плоскость  $(\alpha_1, J_1)$ , т.е.  $\alpha_2 = \text{const}$ . Тогда точки  $x_k$  пересечений фазовой траектории с этой плоскостью (рис. 5а) можно записать как  $x_k = (\alpha_1(t + kt_2), J_1)$ . Таким образом, решения исходной системы на данном торе можно представить как преобразование  $P_0$ , которое переводит одну точку пересечения  $x_k$  в следующую за ней точку  $x_{k+1}$  по инвариантной окружности "радиуса"  $J_1$ . Вводя обозначение  $J_k \equiv J_1(t + kt_2)$ , такое перемещение точек можно записать как

$$P_0 : \begin{cases} \alpha_{k+1} = \alpha_k + 2\pi\rho(J_k), \\ J_{k+1} = J_k. \end{cases} \quad (40)$$

Как видно из соотношения (40), число вращения  $\rho$ , вообще говоря, зависит от радиуса окружности.

Когда  $\rho$  иррационально, то при  $k \rightarrow \infty$  точки  $x_k$  заполняют всю окружность. При рациональном  $\rho = l/m$  точки  $x_k$  через каждые  $m$  шагов будут последовательно переходить друг в друга (рис. 5б). Поэтому в таком представлении можно говорить о нерезонансных и резонансных окружностях.

При переходе от одной окружности к другой число вращения изменяется. Предположим для определенности, что  $\rho(J)$  возрастает с увеличением  $J$ . Тогда по мере удаления от начала координат угол, на который поворачивается окружность, в среднем будет возрастать. Это приводит к закручиванию радиальной линии точек под воздействием  $P_0$ . Поэтому преобразование (40) называется отображением поворота (или иногда закручивающим отображением). В общем виде его можно записать как

$$P_0(C) = C.$$

Важным свойством отображения  $P_0$  является его консервативность.

Рассмотрим теперь возмущенную систему (9) с гамильтонианом (8). На поверхности сечения учет возмущения соответствует введению в закручивающее отображение дополнительных слагаемых:

$$P_\varepsilon : \begin{cases} \alpha_{k+1} = \alpha_k + 2\pi\rho(J_k) + \varepsilon f(J_k, \alpha_k), \\ J_{k+1} = J_k + \varepsilon g(J_k, \alpha_k), \end{cases} \quad (41)$$

где  $f$  и  $g$  — периодические функции по  $\alpha$ . При этом преобразование  $P_\varepsilon$  должно по-прежнему сохранять площадь, в ином случае инвариантные окружности, как правило, не существуют. Согласно теории КАМ, под действием малого возмущения,  $\varepsilon \ll 1$ , большинство окружностей с иррациональным  $\rho$  сохраняется, лишь немного деформируясь. Рассмотрим, что происходит с окружностями в области рациональных значений  $\rho = l/m$ , т.е. резонанса, где соотношение (39) не выполняется. Именно в этой области, как уже отмечалось, рождается хаотическое движение.

**6.2. Теорема о неподвижной точке**

Вернемся пока к интегрируемому случаю. При  $\rho(J) = l/m$  любая точка на окружности через  $m$  шагов перейдет в свое первоначальное положение, т.е. будет периодической с периодом  $m$ . Обозначим эту резонансную окружность как  $C$  и рассмотрим две нерезонансные инвариантные окружности  $C^+$  и  $C^-$ , лежащие по обе стороны от нее (рис. 6а). Поскольку  $\rho(J)$  возрастает с увеличением  $J$  (см. раздел 6.1), то для таких окружностей их иррациональные числа вращения удовлетворяют соотношениям  $\rho > l/m$  и  $\rho < l/m$  соответственно. После  $m$ -кратного последовательного действия отображения  $P_0$  (обозначим такое отображение как  $P_0^m$ ) точки окружности  $C^+$  повернутся на угол, больший, чем  $2\pi$ , а точки окружности  $C^-$  — на угол, меньший, чем  $2\pi$ . Поэтому относительно  $C$  кажется, что отображение закручивает  $C^+$  против часовой стрелки, а  $C^-$  по часовой стрелке (рис. 6а).

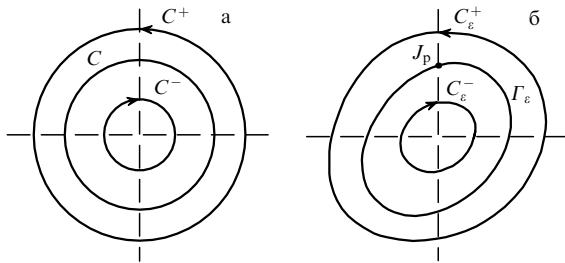


Рис. 6. (а) Инвариантные окружности  $C$ ,  $C^+$  и  $C^-$  невозмущенного закручивающего отображения  $P_0$  при  $\rho = l/m$ ,  $\rho > l/m$  и  $\rho < l/m$ , соответственно. (б) Результат действия возмущения  $P_\varepsilon$ .

Рассмотрим теперь возмущенное отображение (41). Согласно теории КАМ окружности  $C^+$  и  $C^-$  при действии возмущения сохраняются и только немного деформируются. Такие замкнутые кривые, которые обозначим как  $C_\varepsilon^+$  и  $C_\varepsilon^-$  соответственно, инвариантны относительно преобразования  $P_\varepsilon$ :

$$P_\varepsilon(C_\varepsilon^+) = C_\varepsilon^+, \quad P_\varepsilon(C_\varepsilon^-) = C_\varepsilon^-.$$

Допустим, что параметр  $\varepsilon$  достаточно мал для того, чтобы относительный поворот  $C_\varepsilon^+$  и  $C_\varepsilon^-$  сохранялся при действии  $P_\varepsilon^m$ . Тогда на каждом радиусе  $\alpha = \text{const}$  между кривыми  $C_\varepsilon^+$  и  $C_\varepsilon^-$  найдется точка  $J_p(\alpha, \varepsilon)$ , угловые координаты которой поворачиваются отображением  $P_\varepsilon^m$  ровно на  $2\pi$ . Следовательно, угловые координаты этой точки при действии  $P_\varepsilon^m$  сохраняются. На каждом из радиусов, проведенных из центра, лежит одна такая точка. Поскольку возмущение  $P_\varepsilon$  гладкое, то эти точки

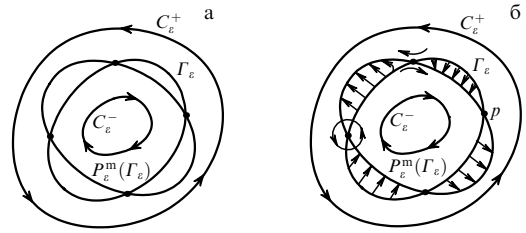


Рис. 7. Преобразование кривой  $\Gamma_\varepsilon$  в кривую  $P_\varepsilon(\Gamma_\varepsilon)$  при действии отображения  $P_\varepsilon$  (а) и возникающие при этом эллиптические и гиперболические точки (б).

$J_p(\alpha, \varepsilon)$  образуют некоторую замкнутую кривую  $\Gamma_\varepsilon$  (рис. 6б), которая стягивается к  $C$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Кривая  $\Gamma_\varepsilon$  не будет инвариантной относительно преобразования  $P_\varepsilon$ . Действие  $P_\varepsilon^m$  состоит в смещении каждой точки кривой  $\Gamma_\varepsilon$  в радиальном направлении. Значит, вместо  $\Gamma_\varepsilon$  образуется новая кривая  $P_\varepsilon^m(\Gamma_\varepsilon)$  (рис. 7а).

Далее, вспомним, что отображение  $P_\varepsilon$  консервативно. Значит, обе кривые,  $\Gamma_\varepsilon$  и  $P_\varepsilon^m(\Gamma_\varepsilon)$ , должны ограничивать одинаковые площади. Поэтому кривая  $P_\varepsilon^m(\Gamma_\varepsilon)$  не может находиться ни внутри, ни снаружи кривой  $\Gamma_\varepsilon$ . Следовательно, в общем случае эти кривые должны пересекаться<sup>2</sup> в четном числе точек (рис. 7а). В свою очередь, каждая из таких точек пересечения будет неподвижной для возмущенного преобразования  $P_\varepsilon^m$ .

В этом состоит основной смысл теоремы Пуанкаре – Биркгофа о неподвижной точке [13, 84], согласно которой возмущенное закручивающее отображение (41) с числом вращения  $\rho = l/m$  имеет  $2im$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , неподвижных точек. Таким образом, в результате возмущения резонансной окружности (для нее, напомним, каждая точка является неподвижной для преобразования  $P_0^m$ ) сохраняется лишь четное число  $2im$  неподвижных точек.

Рассмотрим одну из точек  $p$  пересечения кривых  $\Gamma_\varepsilon$  и  $P_\varepsilon^m(\Gamma_\varepsilon)$  (рис. 7а). Для отображения  $P_\varepsilon^m$  она будет неподвижной. Преобразование  $P_\varepsilon$ , действуя на  $p$ , порождает последовательность точек  $p, P_\varepsilon p, P_\varepsilon^2 p, \dots, P_\varepsilon^{m-1} p$ , т.е. после  $m$  итераций точка  $p$  возвратится в исходное положение. Но каждая из них будет неподвижной точкой для  $P_\varepsilon^m$ . Следовательно, имеется  $m$  неподвижных точек, которые связаны с исходной точкой  $p$ . В силу того, что пересечение кривых  $\Gamma_\varepsilon$  и  $P_\varepsilon^m(\Gamma_\varepsilon)$  происходит в четном числе точек, всего получается  $2im$  неподвижных точек.

**6.3. Эллиптические и гиперболические точки**

Если детально рассмотреть действие отображения  $P_\varepsilon$  в окрестности различных точек  $p$ , то можно заметить качественное различие. Вблизи одних соседние точки остаются рядом с  $p$ , как бы вращаясь вокруг них, вблизи других стремятся покинуть окрестность  $p$ . При этом такие точки чередуются (рис. 7б). Движение подобного рода наблюдается в фазовом пространстве нелинейного маятника (см. раздел 3.1). Поэтому такие точки называются соответственно эллиптическими и гиперболическими. Эллиптические точки окружены семейством замкнутых траекторий, которые являются инвариантными относительно  $P_\varepsilon^m$  и образуют некие "островки", тогда

<sup>2</sup> Мы не рассматриваем возможность касания, так как это исключительная ситуация.

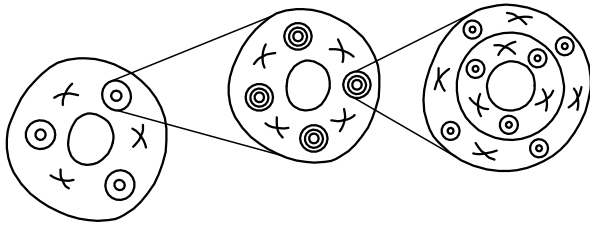


Рис. 8. Распад торов с рациональным отношением частот и возникновение самоподобной структуры.

как гиперболические соединяются посредством сепаратрис. Эта картина является типичной для нелинейных систем с малым возмущением и всегда возникает вблизи резонанса.

Каждый островок удовлетворяет КАМ-теории. Следовательно, большинство нерезонансных окружностей сохранится. Однако здесь существуют и резонансы. В окрестности каждого из них в соответствии с теоремой Пуанкаре–Биркгофа о неподвижной точке появится черед эллиптических и гиперболических точек, но в более мелком масштабе (рис. 8). В свою очередь островок вблизи каждой из этих эллиптических точек будет воспроизводить в миниатюре всю структуру в целом. Замкнутые кривые в окрестности эллиптических точек соответствуют меньшим тороам. Некоторые из этих малых торов будут, согласно КАМ-теории, сохраняться, другие вследствие резонансов более высоких порядков — разрушаться на меньшие. И так до бесконечности. Таким образом, резонанс приводит к очень сложной картине, которая при изменении масштаба повторяется, т.е. является в определенном смысле самоподобной.

Рассмотрим теперь, следуя [72, 86], что происходит в окрестности гиперболических точек. Каждая из них характеризуется четырьмя инвариантными направлениями (или ветвями сепаратрисы): двумя устойчивыми ( $w^s$ ), которые входят в гиперболическую точку  $\mathcal{H}$ , и двумя неустойчивыми ( $w^u$ ), которые выходят из  $\mathcal{H}$  (рис. 9). Поскольку мы рассматриваем отображение Пуанкаре, то в исходном фазовом пространстве эти кривые будут соответствовать поверхностям или инвариантным устойчивым ( $W^s$ ) и неустойчивым ( $W^u$ ) многообразиям.

На сепаратрисе период колебаний бесконечен. Поэтому, если некоторая точка  $q$  принадлежит устойчивой ветви  $w^s$ , то под действием отображения  $P$  она будет

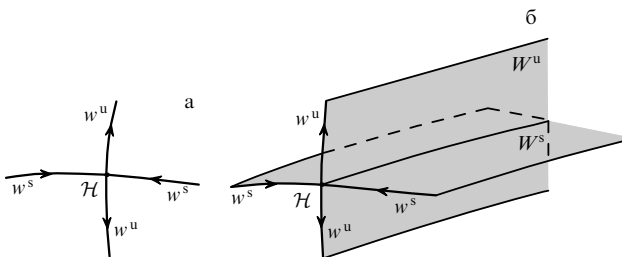


Рис. 9. Устойчивые  $w^s$  и неустойчивые  $w^u$  направления гиперболической точки  $\mathcal{H}$  в отображении Пуанкаре (а) и соответствующие многообразия  $W^s$  и  $W^u$  в фазовом пространстве (б).

экспоненциально медленно приближаться к  $\mathcal{H}$ , т.е.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P^k q \rightarrow \mathcal{H}.$$

Если же  $q \in w^u$ , то она будет экспоненциально медленно стремиться покинуть окрестность  $\mathcal{H}$ , т.е.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P^{-k} q \rightarrow \mathcal{H}.$$

### 6.4. Расщепление сепаратрис.

#### Гомоклинические сплетения

В случае интегрируемой системы устойчивые и неустойчивые многообразия гиперболических точек могут соединяться друг с другом, образуя гладкие структуры. В отображении Пуанкаре такое строение выглядит как плавный переход от неустойчивой ветви сепаратрисы к устойчивой. При этом ветви сепаратрисы могут замыкаться на одну гиперболическую точку (рис. 10а) или соединять несколько таких точек, образуя "гирлянды" (рис. 10б). В первом случае устойчивая ( $w^s$ ) и неустойчивая ( $w^u$ ) ветви сепаратрисы образуют петлю. Эта петля, называемая гомоклинической кривой, представляет собой двоякоасимптотическую траекторию, которая характеризуется тем, что любая точка  $q$ , находящаяся на такой петле, всегда стремится к  $\mathcal{H}$ , т.е.

$$\lim_{k \rightarrow \pm\infty} P^k q \rightarrow \mathcal{H}.$$

Внутри гомоклинической кривой существует эллиптическая точка.

Во втором случае кривые, состоящие из устойчивых и неустойчивых ветвей сепаратрисы, называются гетероклиническими траекториями. Двигаясь по таким траекториям, мы экспоненциально медленно удаляемся от одной гиперболической точки и приближаемся к другой.

В случае возмущения ветви сепаратрисы уже не образуют такие гладкие гомоклинические и гетероклинические соединения, а могут пересекаться. Точка пересечения устойчивой и неустойчивой ветвей сепаратрисы одного и того же резонанса называется гомоклинической точкой. Если же пересекаются устойчивая и неустойчивая ветви от разных гиперболических точек (резонансов), то образуется гетероклиническая точка. Рассмотрим, как эволюционируют такие точки при действии отображения  $P_\varepsilon$ .

Пусть  $q$  — гомоклиническая точка,  $q' \in w^s$  и  $q'' \in w^u$  — ее соседние точки (рис. 11а). В результате действия  $P_\varepsilon$  точки  $q'$  и  $q''$  должны отобразиться в точки  $P_\varepsilon q'$  и  $P_\varepsilon q''$ . Где должна находиться точка  $P_\varepsilon q$ , в которую перейдет  $q$  после действия  $P_\varepsilon$ ? Как видно из рис. 11а,  $q$  расположена, с учетом направления движения по устойчивой и неустойчивой ветвям, перед точками  $q'$  и  $q''$ . Поэтому

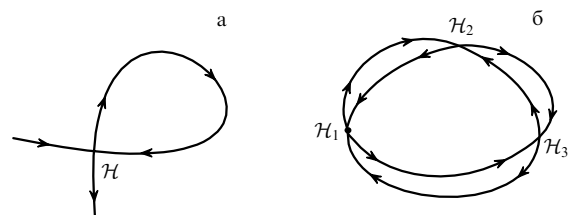


Рис. 10. Гомоклиническая (а) и гетероклиническая (б) траектории, образованные ветвями сепаратрисы.

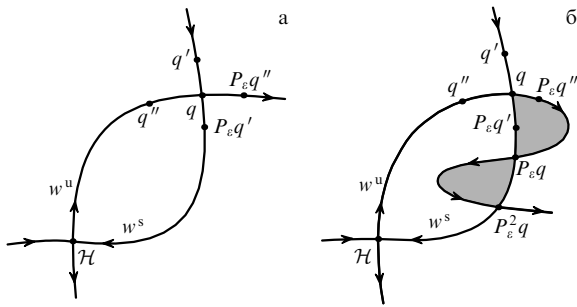


Рис. 11. Отображение соседних точек  $q'$  и  $q''$  и образование петель из сепаратрис.

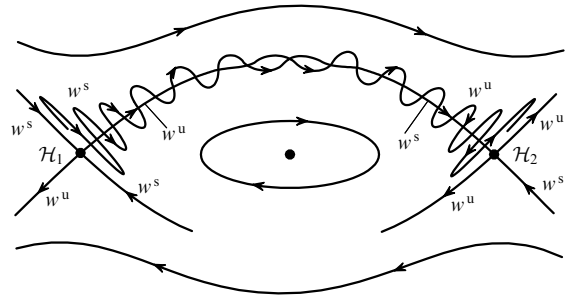


Рис. 13. Образование гетероклинических сплетений.

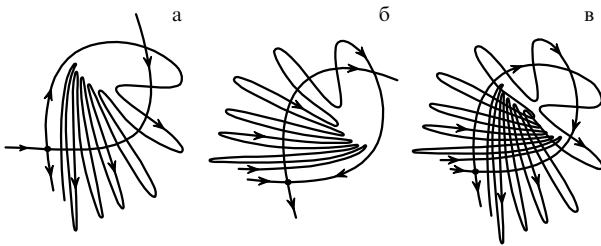


Рис. 12. Гомоклинические сплетения в окрестности гиперболической точки.

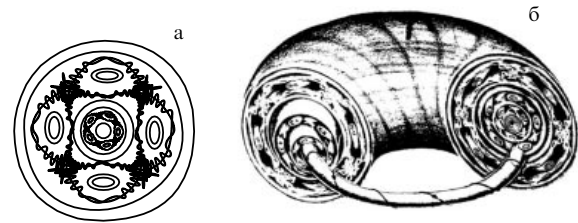


Рис. 14. Структура фазового пространства возмущенных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы в сечении Пуанкаре (а) и в фазовом пространстве (б) [87].

вследствие непрерывности отображения  $P_e$  она должна перейти в точку, которая также будет расположена одновременно перед точками  $P_e q'$  и  $P_e q''$ . Значит, должно образоваться новое пересечение, т.е. новая гомоклиническая точка  $P_e q$  (рис. 11б).

Иными словами, поскольку ветви  $w^s$  и  $w^u$  являются инвариантными, то после действия отображения мы должны остаться как на одной, так и на другой ветвях сепаратрисы. Следовательно, появляется новая точка пересечения  $P_e q$ , при этом между точками  $q$  и  $P_e q$  образуется петля.

Рассуждая аналогичным образом, легко увидеть, что точка  $P_e q$  отобразится в точку  $P_e^2 q$ , формируя другую петлю (рис. 11б). Поскольку новая точка  $P_e^2 q$  оказывается расположенной ближе к гиперболической точке  $\mathcal{H}$ , то расстояние между  $P_e^2 q$  и  $P_e q$  будет меньше, чем расстояние между  $P_e q$  и  $q$ . Вспомним, что одним из свойств отображения  $P_e$  является сохранение фазового объема. Это означает, что площади, ограниченные петлями между  $q$ ,  $P_e q$  и  $P_e q$ ,  $P_e^2 q$ , должны быть равны. Следовательно, вторая петля будет более вытянутой и изогнутой, чем первая.

Продолжая рассуждение, мы приходим к выводу, что в результате появляется бесконечное множество пересечений ветвей сепаратрисы, которые все более и более сближаются, а сами петли становятся все длиннее и тоньше (рис. 12а). Подобным образом ведет себя и устойчивая ветвь сепаратрисы  $w^s$  (рис. 12б). Это не трудно понять, если двигаться по  $w^s$  в противоположном направлении. Таким образом, в целом картина в окрестности гиперболических точек оказывается чрезвычайно сложной (рис. 12в).

Для гетероклинических траекторий в результате пересечения сепаратрис образуются несколько иные структуры. Неустойчивая ветвь  $w^u$ , выходящая из гиперболической точки  $\mathcal{H}_1$ , осциллирует, приближаясь к

гиперболической точке  $\mathcal{H}_2$ , расположенной справа. Напротив, устойчивая ветвь  $w^s$  осциллирует, когда удаляется от  $\mathcal{H}_1$  (рис. 13). То же самое происходит с устойчивой и неустойчивой ветвями, расположенными в нижней части рисунка (они показаны не полностью).

Таким образом, возмущение, вносимое в интегрируемую систему, приводит к тому, что сепаратрисы оказываются уже не гладкими, как на рис. 10, а расщепляются сложным образом. Поэтому такое явление называется расщеплением сепаратрис. Структуры, образованные ветвями сепаратрисы в области гиперболических точек, называются гомоклиническими и гетероклиническими сплетениями. Именно такое сложное поведение сепаратрис является причиной возникновения хаоса в детерминированных системах. В области гомоклинических сплетений не могут существовать инвариантные торы. Здесь системы являются неинтегрируемыми, обладают свойством экспоненциальной неустойчивости траекторий к малым возмущениям и, как следствие, ведут себя хаотически. Однако при других начальных условиях из окрестности сохранившихся торов динамика систем будет регулярной.

Теперь можно представить в целом всю картину, возникающую в фазовом пространстве и на поверхности сечения множества инвариантных торов. Разрушение резонансных окружностей вследствие возмущения сопровождается появлением  $2im$  гиперболических и эллиптических точек. В окрестности каждой эллиптической точки имеется семейство замкнутых инвариантных кривых, часть которых тоже разрушается вследствие возмущения. Это приводит к появлению более мелкой цепи из эллиптических и гиперболических точек. В области каждой из гиперболических точек сепаратрисы расщепляются, возникают их сплетения и т.д. (рис. 14а).

Однако это происходит не на поверхности сечения, а в фазовом пространстве, образованном совокупностью

торов. Таким образом, общая картина движения фазовых траекторий получается очень сложной (рис. 14б). Такая структура повторяется на все меньшем и меньшем масштабе и является характерной для систем, близких к интегрируемым.

С увеличением возмущения разрушаются также некоторые нерезонансные окружности. Но если возмущение  $H_1$  мало, то хаотические траектории будут существовать только в ограниченной инвариантными кривыми области фазового пространства.

Элементарное изложение основ теории, вопросов, касающихся физических аспектов пересечения сепаратрис, а также история предмета даны в монографии [69]. Строгое изложение близки тем приводится в работе [53, 72, 86, 88]. Теорему о неподвижной точке, ее качественное изложение и некоторые приложения можно найти в книге [13]. Математические подходы к проблеме пересечения сепаратрис представлены в работах [32, 63, 71, 88–90].

### 7. Метод Мельникова

Аналитически оценить расстояние между сепаратрисами и получить условие возникновения гомо- и гетероклинического хаоса дает возможность теория Мельникова [91] (см. также [54, 63, 88, 89]).

Для упрощения изложения рассмотрим двумерную автономную систему с внешним периодическим возмущением

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_0(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{f}_1(\mathbf{x}, t), \tag{42}$$

где  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ ,  $\mathbf{f}_0 = (f_{01}, f_{02})$ ,  $\mathbf{f}_1 = (f_{11}, f_{12})$  и  $\mathbf{f}_1(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}, t + T)$ , имеющую единственную гиперболическую точку  $\mathcal{H}_0$ . Допустим, что невозмущенная система ( $\varepsilon = 0$ ) имеет гомоклиническую петлю  $w_0(t)$  (рис. 10а):

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} w_0(t) = \mathcal{H}_0.$$

Возмущение приводит к ее расщеплению, так что входящая ( $w_0^s$ ) и выходящая ( $w_0^u$ ) ветви уже не образуют единую кривую.

Чтобы найти условие существования хаотичности, необходимо с помощью метода теории возмущений вычислить расстояние  $D(t, t_0)$  между ветвями сепаратрисы в некоторый момент времени  $t_0$ . Тогда если  $D(t, t_0)$  не меняет знак, то ветви  $w_0^s$  и  $w_0^u$  не пересекаются. Однако если при каком-либо  $t_0$  знак функции  $D(t, t_0)$  изменяется, то возникают гомоклинические сплетения (рис. 12в) и хаотическое движение. Формально этот вопрос рассмотрен в разделе 7.1.

#### 7.1. Функция Мельникова

Предложенный в работе [91] метод основан на сравнении членов первого порядка в разложении сепаратрисных решений в ряды по параметру возмущения  $\varepsilon$ . Иными словами, для вычисления  $D(t, t_0)$  достаточно найти в первом приближении устойчивую ветвь  $w^s$  и неустойчивую ветвь  $w^u$ .

Пусть  $w^{s,u}(t, t_0) = w_0(t - t_0) + \varepsilon w_1^{s,u}(t, t_0)$ . Тогда, используя (42), в первом порядке по  $\varepsilon$  получим

$$\frac{dw_1^{s,u}}{dt} = \hat{M}(w_0)w_1^{s,u} + \varepsilon \mathbf{f}_1(w_0(t - t_0), t), \tag{43}$$

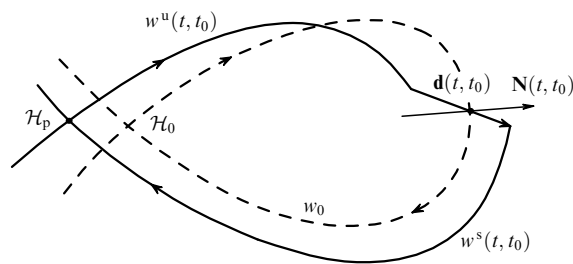


Рис. 15. Определение расстояния  $D(t, t_0) = \mathbf{N} \mathbf{d}$  между ветвями сепаратрисы [54].

где  $\hat{M}(w_0)$  — матрица Якоби,

$$\hat{M}(w_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{01}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{01}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_{02}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{02}}{\partial x_2} \end{pmatrix},$$

взятая на невозмущенной гомоклинической траектории  $w_0(t - t_0)$ .

При внесении возмущения в интегрируемую систему исходная гиперболическая точка  $\mathcal{H}_0$  сместится в точку  $\mathcal{H}_p$ . При этом очевидно, что устойчивая и неустойчивые ветви будут удовлетворять соотношению

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w^s = \lim_{t \rightarrow -\infty} w^u = \mathcal{H}_p.$$

Введем вектор

$$\mathbf{d}(t, t_0) = w^s(t, t_0) - w^u(t, t_0).$$

В первом приближении  $\mathbf{d}(t, t_0) = w_1^s(t, t_0) - w_1^u(t, t_0)$ . Согласно работе [91] расстояние  $D(t, t_0)$  между устойчивой и неустойчивой ветвями сепаратрисы определяется как проекция  $\mathbf{d}$  на нормаль  $\mathbf{N}$  к невозмущенной петле  $w_0$  в момент времени  $t$  (рис. 15):

$$D(t, t_0) = \mathbf{N} \mathbf{d}. \tag{44}$$

При  $\varepsilon = 0$  из (42) можно определить вектор  $\mathbf{N}$  как

$$\mathbf{N}(t, t_0) = \begin{pmatrix} -f_{02}(w_0) \\ f_{01}(w_0) \end{pmatrix}.$$

Если ввести оператор  $\wedge: \mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = x_1 y_2 - x_2 y_1$ , то соотношение (44) можно представить в более простом виде:  $D(t, t_0) = \mathbf{f}_0 \wedge \mathbf{d}$ . Перепишем последнее выражение как

$$D = D^s - D^u, \tag{45}$$

где  $D^{s,u}(t, t_0) = \mathbf{f}_0 \wedge w_1^{s,u}$ . Теперь, дифференцируя по времени, для  $D^s$  найдем  $\dot{D}^s = \dot{\mathbf{f}}_0 \wedge w_1^s + \mathbf{f}_0 \wedge \dot{w}_1^s = (\hat{M}(w_0) \dot{w}_0) \wedge w_1^s + \mathbf{f}_0 \wedge \dot{w}_1^s$ . Поэтому из (43), учитывая, что  $\dot{w}_0 = \mathbf{f}_0$ , получим

$$\dot{D}^s = \dot{\mathbf{f}}_0 \wedge w_1^s + \mathbf{f}_0 \wedge \dot{w}_1^s = (\hat{M}(w_0) \mathbf{f}_0) \wedge w_1^s + \mathbf{f}_0 \wedge (\hat{M}(w_0) w_1^s) + \mathbf{f}_0 \wedge \mathbf{f}_1$$

либо

$$\dot{D}^s = \text{Sp } \hat{M}(w_0) \mathbf{f}_0 \wedge w_1^s + \mathbf{f}_0 \wedge \mathbf{f}_1 = \text{Sp } \hat{M}(w_0) D^s + \mathbf{f}_0 \wedge \mathbf{f}_1. \tag{46}$$



Асимптотически расстояние

$$D^s(t, t_0) \Big|_{t \rightarrow \infty} = \mathbf{f}_0(\mathcal{H}_0) \wedge w_1^s = 0.$$

Если невозмущенная система является слабодиссипативной, то  $\text{Sp } \dot{M} \approx 0$ . Отсюда, интегрируя уравнение (46) на полуинтервале  $[t_0, \infty)$ , получим

$$D^s(t_0, t_0) = - \int_{t_0}^{+\infty} \mathbf{f}_0 \wedge \mathbf{f}_1 dt.$$

Аналогично для  $D^u$  находим, что

$$D^u(t_0, t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} \mathbf{f}_0 \wedge \mathbf{f}_1 dt.$$

Таким образом, учитывая, что искомая функция  $D$  определяется выражением (45), приходим к окончательному соотношению:

$$D = - \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}_0 \wedge \mathbf{f}_1 dt. \quad (47)$$

Полученная функция (которая иногда называется функцией Мельникова) описывает расщепление сепаратрисы гиперболической точки при внесении в интегрируемую систему малого возмущения. Если функция (47) знакопеременна, то устойчивая и неустойчивая ветви пересекаются, образуя гомоклинические сплетения, что влечет за собой появление хаотической динамики.

Несмотря на свою относительную простоту, метод Мельникова хорошо зарекомендовал себя в приложениях, в том числе и для слабодиссипативных систем. Более того, для некоторых задач удается аналитически вычислить интеграл (47) и рассчитать границу возникновения хаоса.

## 7.2. Осциллятор Дуффинга и нелинейный маятник

В качестве примера использования представленного аналитического подхода и оценки его точности кратко рассмотрим две модели, на примере которых исследуются всевозможные приложения методов аналитического анализа нелинейных систем, — осциллятор Дуффинга [92] и нелинейный маятник с диссипацией и периодическим возбуждением.

Осциллятор Дуффинга представляет собой систему с двумя устойчивыми равновесными состояниями, которые разделяет единая сепаратриса, и возбуждением. Уравнение, описывающее такую систему, называется уравнением Дуффинга:

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} - x + x^3 = \gamma \cos \omega t. \quad (48)$$

Уравнение (48) весьма обстоятельно изучено как численно и аналитически, так и экспериментально (см., например, [88, 93–95] и приведенные там ссылки).

При  $\delta = 0$  уравнение (48) всегда имеет хаотические решения вблизи сепаратрисы, которые ограничены инвариантными кривыми. Для диссипативного случая таких кривых не существует, так что хаотическая траектория с течением времени попадает в область притяжения устойчивого фокуса или предельного цикла. В этом случае в системе наблюдается переходной хаос.

Нетрудно оценить (см. [96]) функцию Мельникова для уравнения (48). Перепишем уравнение (48) в иной форме:  $\dot{x} = y$ ,  $\dot{y} = x - x^3 - \delta y + \gamma \cos \omega t$ . При этом невозмущен-

ный гамильтониан  $H_0 = y^2/2 - x^2/2 + x^4/4$ . Уравнения движения на сепаратрисе определяются как [96]

$$x_0(t) = \frac{\sqrt{2}}{\cosh t}, \quad y_0(t) = -\sqrt{2} \frac{\sinh t}{\cosh^2 t}.$$

Далее, используя последние соотношения, найдем:  $\mathbf{f}_0 \wedge \mathbf{f}_1 = y_0[\gamma \cos \omega t - \delta y_0]$ . Интеграл от данной функции вычисляется аналитически:

$$D(t_0) = \sqrt{2} \pi \gamma \omega \frac{\sin \omega t_0}{\cosh(\pi \omega / 2)} + \frac{4}{3} \delta.$$

Таким образом, условие пересечения сепаратрис можно записать как

$$\delta < \delta_c = \frac{3\sqrt{2} \pi \gamma \omega}{4 \cosh(\pi \omega / 2)}. \quad (49)$$

Часто также рассматривается обобщенное уравнение Дуффинга — уравнение для осциллятора с параметрическим возмущением кубического члена:

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} - x + \beta(1 + \eta \cos \Omega t)x^3 = \gamma \cos \omega t, \quad (50)$$

где  $\eta \ll 1$  — амплитуда,  $\Omega$  — частота параметрического возмущения. Это уравнение интересно тем, что в нем имеется две частоты возмущения:  $\omega$  и  $\Omega$ .

Функцию Мельникова для уравнения (50) можно записать (см. [97]) как

$$D(t_0) = -A \sin \omega t_0 + B \sin \Omega t_0 + C,$$

где

$$A = \pi \kappa \gamma \omega \operatorname{sech} \frac{\pi \omega}{2},$$

$$B = \frac{1}{24} \pi \beta \eta \kappa^4 \Omega^2 (4 + \Omega^2) \operatorname{cosech} \frac{\pi \Omega}{2},$$

$$C = \frac{2}{3} \kappa^2 \delta, \quad \kappa = \sqrt{\frac{2}{\beta}}.$$

Если  $\omega = \Omega$ , то значения  $\delta$ , при которых  $D$  может менять знак, выписываются явно:

$$\delta < \delta_c \equiv \frac{3}{2\kappa^2} |B - A|. \quad (51)$$

При  $\omega \neq \Omega$  необходимо дополнительно рассмотреть, когда частоты  $\omega$  и  $\Omega$  будут соизмеримыми, а когда несоизмеримыми. В первом случае

$$\delta < \delta_c \equiv \frac{3(A + B)}{2\kappa^2}.$$

Для соизмеримых частот (см. [98])

$$\frac{3}{2\kappa^2} |A - B| < \delta_c < \frac{3}{2\kappa^2} (A + B).$$

Для нелинейного маятника, который описывается уравнением  $\ddot{x} + \alpha x + \sin x = \gamma \cos \omega t$ , функция Мельникова также вычисляется аналитически [56, 57]:

$$D(t_0) = -4\alpha B \left( \frac{1}{2}, 1 \right) \pm \frac{2\pi \gamma \cos \omega t_0}{\cosh \pi \omega / 2},$$

где  $B(r, s)$  —  $\beta$ -функция Эйлера. Отсюда также можно найти границу возникновения хаотического движения.

Как установлено в работах [56, 96, 98], полученные аналитические результаты очень хорошо согласуются с численными оценками, основанными на расчетах старшего ляпуновского показателя. Например, при  $\beta = 8$ ,  $\gamma = 0,114$ ,  $\eta = 0,03$  и  $\omega = \Omega = 1,1$  (см. (50)) из (51) находим  $\delta_c = 0,3798$ . Численный анализ дает границу возникновения хаоса  $\delta_c = 0,378$ .

Таким образом, метод Мельникова позволяет в ряде случаев аналитически определять границу возникновения хаоса, в том числе, для многомерных систем [99]. Подчеркнем, однако, что это локальный критерий, который можно использовать в окрестности невозмущенных сепаратрисных петель.

## 8. Основные свойства хаотических систем

Опишем важные свойства, которые присущи хаотическим системам: непредсказуемость, необратимость, расщепление корреляций. Однако сначала введем понятие перемешивания.

### 8.1. Эргодичность и перемешивание

Предположим, что траектории динамической системы сосредоточены в некоторой ограниченной области  $D$  фазового пространства. Движение динамической системы называется эргодическим (или динамическая система называется эргодической), если для произвольной интегрируемой функции  $h(\mathbf{x})$  почти при всех начальных условиях  $\mathbf{x}_0$  имеет место равенство временных и фазовых средних функции  $h(\mathbf{x})$ :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T h(\mathbf{F}^t \mathbf{x}_0) dt = \int_{(D)} h(\mathbf{x}) d\mu, \quad (52)$$

$$\mu(D) = \int_{(D)} d\mu = 1.$$

Таким образом, если движение консервативной системы эргодично, то с течением времени фазовая траектория будет равномерно и плотно покрывать определяемую всеми интегралами движения гиперповерхность в  $n$ -мерном фазовом пространстве. Характерной особенностью эргодического движения гамильтоновой системы является неизменность формы малой области. С течением времени такая область просто блуждает по тору, пересекая каждый его участок бесконечное число раз.

Однако очевидно, что эргодичность еще не означает хаотичность. Хаотическая система должна обладать, кроме того, локальной неустойчивостью движения, отвечающей наличию гомо- и гетероклинических сплетений. Наличие такой неустойчивости приводит к тому, что с течением времени начальный элементарный объем, перемещаясь по всей энергетически доступной гиперповерхности (как для эргодических потоков), сильно деформируется. Такие системы называют системами с перемешиванием.

По существу понятие перемешивания является очень простым. Для иллюстрации приведем классический пример Гиббса. Предположим, что в сосуде содержится 30 % чернил и 70 % воды, причем в начальный момент жидкости не перемешаны. Теперь хорошо взболтаем

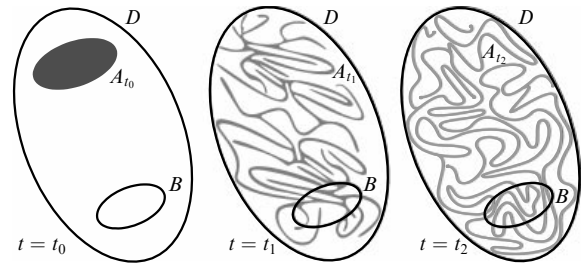


Рис. 16. Эволюция малой области при перемешивании.

содержимое сосуда. Естественно ожидать, что через некоторое время (время перемешивания) любая часть получившейся смеси будет состоять из 30 % чернил и 70 % воды. Формализация подобного процесса и приводит к понятию перемешивания.

Рассмотрим в области  $D \subset M$  две произвольные малые области  $A$  и  $B$  с мерами  $\mu(A)$  и  $\mu(B)$  соответственно. Будем считать, что область  $B$  остается неподвижной, а область  $A$  эволюционирует под действием преобразования  $\mathbf{F}^t$ , т.е.  $A_t = \mathbf{F}^t A$  (рис. 16). Пусть  $A_t \cap B$  представляет собой совокупность всех частей  $A_t$ , оказавшихся в момент времени  $t$  внутри неподвижной области  $B$ . Динамическая система (1) называется перемешивающей (соответственно фазовый поток  $\mathbf{F}^t$  — перемешивающим), если существует предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu(A_t \cap B)}{\mu(B)} = \mu(A). \quad (53)$$

Поясним смысл введенного определения. Прежде всего напомним, что, поскольку рассматриваемое движение консервативно, мера области  $A$  при движении сохраняется, т.е.  $\mu(A_t) = \mu(A)$ . Более того, величина  $\mu(A) = \mu(A_t)/\mu(D)$  представляет собой относительную долю объема, занимаемую областью  $A$  в  $D$ . Но отношение  $\mu(A_t \cap B)/\mu(B)$  является относительной долей объема, занимаемой в области  $B$  попавшими внутрь нее в момент времени  $t$  кусочками области  $A_t$ . Из определения (53) следует, что при  $t \rightarrow \infty$  эти два отношения совпадают независимо от того, какими были размеры, форма и взаиморасположение областей  $A$  и  $B$ .

Перемешивающий поток возникает тогда, когда в фазовом пространстве близкие в начальный момент времени точки будут двигаться по экспоненциально расходящимся траекториям. Эту особенность отметил еще Э. Хопф в работе [100], посвященной анализу движения на многообразии отрицательной кривизны. Нетрудно понять, что именно перемешивание свойственно динамическим системам в области гомо- и гетероклинических сплетений.

Перемешивание влечет за собой эргодичность. Однако обратное утверждение неверно: из эргодичности не следует перемешивание. Таким образом, перемешивание — это гораздо более сильное свойство, чем эргодичность. Если система обладает перемешиванием, то ее поведение естественно считать хаотическим. Более того, из перемешивания вытекают три очень важных следствия, наблюдающиеся в естественных системах: непредсказуемость, необратимость и расщепление временных корреляций.

## 8.2. Непредсказуемость и необратимость

Непредсказуемость и необратимость временной эволюции систем, описываемых обратимыми динамическими уравнениями движения (например уравнениями Гамильтона), можно объяснить, используя понятия перемешивания и открытости.

Как известно, состояние любой физической системы вследствие неизбежных флуктуаций и внешних возмущений может быть известно только с конечной точностью. Это можно интерпретировать как распределение начальных условий  $\mathbf{x}_0$  в некоторой области  $\Omega_\varepsilon \subset D$  с характерным размером  $\varepsilon$ . Тогда если система обладает свойством перемешивания, то такое начальное распределение при  $t \rightarrow \infty$  будет расплываться по всей области  $D$ . Иными словами, если в начальный момент времени положение фазовой точки известно с конечной точностью, т.е. при  $t = 0$  мы знали только, что эта точка принадлежит некоторой области  $\Omega_\varepsilon$ , то сказать, где именно она окажется через достаточно длительный промежуток времени, невозможно. Так возникает непредсказуемость в системах с перемешиванием. Определяющую роль здесь играет чувствительность системы к начальным условиям (малым возмущениям).

Если изолированная гамильтонова система эргодична, то с течением времени она побывает во всех энергетически возможных состояниях и ее фазовая траектория посетит все доступные области фазового пространства. При этом время пребывания в конкретной области пропорционально объему этой области. При  $t \rightarrow \infty$  любое из таких состояний будет наблюдаемо. Если число степеней свободы системы достаточно велико, то время, в течение которого система перейдет в некоторое выделенное (принимаемое за начальное) состояние, может оказаться очень большим. Отсюда очевидным образом вытекает необратимость замкнутых систем с большим числом степеней свободы. Такое объяснение необратимости сейчас является общепринятым (см. также по этому поводу [101, 102]).

Для открытых систем с небольшой размерностью важную роль в появлении необратимости играют внешние флуктуации. Если система обладает перемешиванием, то внутри любой доступной части области  $D$  фазового пространства  $M$  по прошествии достаточно большого времени окажутся части самых различных начальных областей  $A \subset D$  (см. рис. 16). Следовательно, зная лишь то, что в конечный момент времени частица находится в пределах малой области с размерами порядка  $\varepsilon$ , мы не сможем сказать, где она находилась в начальный момент времени. Иными словами, важную роль здесь играет открытость и, как следствие, неизбежная неточность в определении текущего состояния системы.

Легко видеть, что нет никакого противоречия с тем, что существуют обратимые уравнения движения, описывающие движение с перемешиванием (т.е. в определенном смысле случайное движение). Дело в том, что необратимость связана с округлением или усреднением некоторых величин. При этом часть информации, которая содержится в точном решении, уже с самого начала оказывается утраченной. При движении таких систем неопределенность их состояния может только возрастать. Поэтому, описывая хаотические системы, мы с самого начала сталкиваемся с необходимостью округленного анализа.

Таким образом, понятие перемешивания соответствует нашему интуитивному представлению о том, какими должны быть системы со сложными и нерегулярными режимами движения. Однако не всякое хаотическое движение обязано быть перемешивающим. Определение (53) накладывает ряд жестких ограничений, не всегда выполняющихся в действительности.

## 8.3. Расщепление корреляций

Следствием перемешивания в системе является очень важное свойство, которое часто используется как критерий хаотичности — расщепление временных корреляций.

Рассмотрим произвольные интегрируемые функции  $f$  и  $g$  в области  $D$  фазового пространства  $M$  динамической системы. Запишем их фазовые средние как

$$\langle f \rangle = \frac{1}{V_D} \int_{(D)} f(\mathbf{x}) dx_1 \dots dx_n,$$

$$\langle g \rangle = \frac{1}{V_D} \int_{(D)} g(\mathbf{x}) dx_1 \dots dx_n.$$

Пусть в начальный момент состояние системы задается начальными условиями  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ . Тогда через некоторое время система перейдет в состояние  $\mathbf{x}(t)$ , которое в силу единственности решения зависит от  $\mathbf{x}(0)$ :  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$ . Определим коррелятор функций  $f$  и  $g$  как

$$\langle f(\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)) g(\mathbf{x}_0) \rangle = \frac{1}{V_D} \int_{(D)} f(\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)) g(\mathbf{x}_0) dx_0.$$

Это соотношение можно переписать в виде

$$\langle f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}_0(\mathbf{x}, t)) \rangle = \frac{1}{V_D} \int_{(D)} f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}_0(\mathbf{x}, t)) dx.$$

Нетрудно показать (см., например, [103]), что если система обладает перемешиванием, то при  $t \rightarrow \infty$  для любых функций  $f$  и  $g$

$$\langle f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}_0) \rangle = \langle f \rangle \langle g \rangle. \quad (54)$$

Свойство (54) называется расщеплением временных корреляций. Иными словами, система с перемешиванием с течением времени словно "забывает" о своих начальных условиях.

Расщепление корреляций является одним из очень важных следствий хаотичности, которое состоит в том, что спустя промежуток времени, равный времени расщепления корреляций, значения фазовых переменных оказываются статистически независимыми.

## 9. Бильярды

Впервые концепция динамического хаоса получила строгое обоснование в 1970-х годах на достаточно простой модели статистической физики — бильярде (см. раздел 1). Рассмотрение бильярдных моделей восходит к работам Ж. Адамара [104], в которых изучалось движение на закрученной поверхности отрицательной кривизны. Позднее бильярды как динамические системы исследовались Д. Биркгофом [13]. Более полное рассмотрение вопросов, касающихся динамики материальных точек в ограниченной области, проведено Н.С. Крыловым [14].

Вопросы, возникающие при изучении бильярдных задач, тесно связаны с эргодической гипотезой Больцмана, и поэтому бильярдные модели до сих пор вызывают большой интерес. Сейчас получены достаточно общие условия возникновения хаоса в бильярдах и описаны их замечательные свойства (см. [45–47, 60, 105–107] и приведенные там ссылки).

В этом разделе мы рассмотрим простое физическое обобщение бильярдных систем — бильярды с осциллирующими стенками. Как будет показано далее, такое обобщение приводит к неожиданным и весьма интересным явлениям.

Пусть  $M$  — евклидова плоскость. Бильярдным столом  $Q$  является некоторая область  $Q \subset M$  с кусочно-гладкой границей  $\partial Q$ . Бильярдная динамическая система в  $Q$  порождается свободным движением материальной точки (бильярдного шара) при условии упругого отражения от границы по закону "угол падения равен углу отражения". Если шар попадает в угол, то его дальнейшее движение определено неоднозначно или не определено совсем.

Как правило, граница каждого бильярда состоит из  $m$  компонент  $\partial Q_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . Если для каждой компоненты  $\partial Q_i$  рассмотреть единичные нормали  $\mathbf{n}(q)$  в каждой точке  $q \in \partial Q_i$ , направленные внутрь области  $Q$ , то они будут определять кривизну  $\kappa(q)$  кривой  $\partial Q_i$  во всех регулярных точках  $q$ . Компонента  $\partial Q_i$  является рассеивающей, если  $\kappa(q) > 0$ . При  $\kappa(q) = 0$  и  $\kappa(q) < 0$  получим соответственно нейтральную и фокусирующую компоненты границы бильярда. Объединение всех рассеивающих, нейтральных и фокусирующих компонент обозначим соответственно как  $\partial Q^+$ ,  $\partial Q^0$  и  $\partial Q^-$ .

Если граница бильярда состоит только из достаточно гладких выпуклых внутрь  $Q$  кривых,  $\partial Q = \partial Q^+$ , то он называется рассеивающим (или бильярдом Синая). Именно для рассеивающих бильярдов впервые было доказано свойство перемешивания [108]. Бильярд, граница которого состоит из фокусирующих компонент  $\partial Q = \partial Q^-$  или нейтральных и фокусирующих компонент  $\partial Q = \partial Q^0 \cup \partial Q^-$ , называется фокусирующим. При некоторых условиях такой бильярд тоже может обладать свойством перемешивания [45, 107, 109].

При произвольных соотношениях между параметрами границы бильярда динамика частицы определяется соотношением времен, которые она проводит в окрестностях  $\partial Q^+$  и  $\partial Q^-$ . Точный смысл этого утверждения дан в работах [45, 106, 109].

### 9.1. Газ Лоренца

Одной из разновидностей рассеивающих бильярдов является система, заданная в неограниченной области  $D$ , состоящая из множества круглых бесконечно тяжелых рассеивателей  $B_i$  с границей  $\partial Q_i$  и радиусом  $R$ , расположенных в узлах бесконечной периодической треугольной решетки с шагом  $a$  (рис. 17). Бильярд в области  $Q = D \setminus \bigcup_{i=1}^r B_i$  называется газом Лоренца. Для  $\partial Q = \text{const}$  такой бильярд достаточно подробно изучен (см., например, [44, 45, 47] и приведенные там ссылки).

В зависимости от радиуса рассеивателей и параметра  $a$  данная модель обладает качественно различными свойствами. Если  $R \leq a/2$ , то говорят, что бильярд имеет бесконечный горизонт. При  $R \geq a/\sqrt{3}$  движение частицы ограничено одной ячейкой, так что система имеет ограниченный горизонт. Если  $a/2 < R < a/\sqrt{3}$ , то

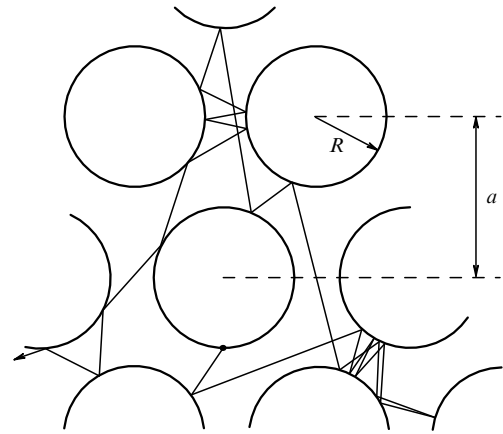


Рис. 17. Двумерная модель газа Лоренца. Рассеиватели радиуса  $R$  расположены в узлах треугольной решетки периода  $a$ .

свободный пробег частицы ограничен, но она может свободно перемещаться по пространству. В этом случае газ Лоренца имеет открытый горизонт.

Для газа Лоренца с ограниченным и открытым горизонтами было доказано, что в плоском двумерном случае движение частицы обладает свойством перемешивания и, более того, сводится к броуновскому. В такой системе существует положительный коэффициент диффузии [44], который выражается через корреляционную функцию скорости частицы. Таким образом, броуновская динамика может следовать из чисто детерминированного поведения.

Для бесконечного горизонта из-за увеличения вероятности длинных пролетов изменяются статистические свойства газа Лоренца. В частности, замедляется скорость убывания корреляций и не сходится среднее значение длины свободного пробега [44, 45, 110–112]. В то же время для газа Лоренца с ограниченным и открытым горизонтом наблюдается экспоненциальный спад корреляций.

### 9.2. Рассеивающие бильярды с осциллирующими границами. Ускорение Ферми

Газ Лоренца — это система, относящаяся к неравновесной статистической механике. Одной из его разновидностей является предложенная впервые в связи с проблемой ускорения Ферми в работах [113, 114] модель, в которой рассеиватели осциллируют с небольшой амплитудой. В общем случае развитие этой задачи означает, что физически более естественным будет анализ бильярдов, границы которых возмущаются по некоторому закону. К чему приведут осцилляции границ бильярда? Дело в том, что в таком бильярде частица испытывает как встречные, так и сопутствующие столкновения с границей. В первом случае отражение от границы происходит, когда частица и граница движутся навстречу друг другу. Во втором случае столкновения происходят, когда частица и граница движутся в одном направлении. При встречных столкновениях частица "нагревается", т.е. ее скорость возрастает. Сопутствующие столкновения, наоборот, ведут к "остыванию" частицы, и она замедляется.

Впервые механизм ускорения частиц вследствие их столкновения с движущимися массивными рассеивате-

лями был предложен Э. Ферми [115] для объяснения происхождения космических частиц высоких энергий (см. обзор [116]). Идея состояла в том, что заряженные частицы при столкновениях с беспорядочно движущимися магнитными облаками в межзвездном пространстве должны в среднем ускоряться. Рассматривая облако как тело с большой массой, нетрудно понять причину ускорения. Если скорости облаков, с которыми сталкивается частица, распределены случайно, то можно сказать, что число облаков, движущихся в одном направлении, равно числу облаков, движущихся в обратном направлении. Поэтому частица будет преимущественно сталкиваться с теми из них, которым она движется навстречу. Отсюда следует, что частица чаще будет приобретать энергию, чем отдавать ее. Так возникает эффективное ускорение, называемое ускорением Ферми. Позднее были разработаны модель Ферми–Улама и другие модели (см. [54, 117–125]), в той или иной степени объясняющие происхождение этого явления.

Бильярды с возмущаемыми границами можно рассматривать как обобщение модели Ферми–Улама. Так, в работах [126–128] было проведено исследование бильярдов в форме эллипса и окружности и показано, что, как и в модели Ферми–Улама, рост скорости ограничен. В работе [129] рассмотрен бильярд в области, образованной прямоугольником, углы которого заменены четвертями окружности радиусом  $R$ , а одна из сторон периодически осциллирует. Столкновение с границей не является абсолютно упругим: частица теряет часть скорости, пропорциональную некоторой постоянной  $\delta$  ( $\delta \ll 1$ ). Эта модель близка к модели Ферми–Улама, но наличие скругленных углов вносит элемент случайности в динамику частицы. Исследовался процесс релаксации системы к равновесному состоянию. Аналогичные исследования были проведены ранее в работах [130, 131] на модели Ферми–Улама. Как было показано, в модели Ферми–Улама величина  $\Pi(t) = E(t) - E(\infty)$ , представляющая собой отклонение средней энергии системы от ее равновесного значения, убывает экспоненциально, т.е.  $\Pi(t) \sim \exp(-t/\tau)$ , что, вообще говоря, естественно для большинства физических систем. Исследование этой величины, проведенное на бильярдной модели [129], показало, что релаксация системы к равновесию происходит медленнее, а  $\Pi(t)$  убывает по закону  $\Pi(t) \sim \exp(-(t/\tau)^\beta)$ , где  $\beta < 1$ , причем значение  $\beta$  уменьшается с возрастанием  $R$ .

Результаты работ [113, 114] прояснили причину уменьшения скорости релаксации системы. С увеличением радиусов дуг возрастает степень хаотичности, что приводит к ускорению частиц. Поэтому релаксация системы к равновесному состоянию, связанная с наличием диссипации энергии частиц, будет происходить медленнее. Такой подход дает возможность определить величину  $\beta$  и соответственно скорость релаксации к равновесию систем, в которых хаотическая динамика является доминирующей.

В общем случае ситуация оказывается значительно сложнее: не всякому хаотическому бильярду при возмущении границ присуще ускорение Ферми [114]. Дело в том, что в фокусирующих бильярдах, в зависимости от начальной скорости частицы, наблюдается также замедление частиц [132]. Если начальная скорость (которая, вообще говоря, зависит от геометрии бильярда) больше некоторой критической величины, то частица в среднем

будет ускоряться. Напротив, если начальная скорость меньше критической, то наблюдается замедление бильярдных частиц. Таким образом, становится возможным, возмущая границы, разделять ансамбль частиц по скоростям и замедлять частицы. Этот эффект "бильярдного" демона Максвелла впервые был обнаружен и описан в работах [114, 132] на примере бильярда типа "стадион" (т.е. бильярда, область  $Q$  которого по форме напоминает обычный стадион (см. рис. 18)).

Динамика рассеивающих бильярдов с возмущаемыми границами подробно описана в [113, 114, 133]. Поэтому я не буду их здесь рассматривать, а остановлюсь на фокусирующих бильярдах. Отмечу только, что полученные результаты дают основание полагать, что в хаотических бильярдах с осциллирующими границами всегда должно наблюдаться ускорение частиц. Более того, на основании проведенных исследований авторами работ [113, 114] была выдвинута гипотеза о том, что *детерминированная случайность — это достаточное условие возникновения ускорения Ферми*. Данное предположение было поддержано рядом исследователей и недавно получило частичное обоснование в работах [125, 134, 135].

### 9.3. Фокусирующие бильярды с осциллирующими границами. Замедление частиц

Механизмы возникновения хаоса в рассеивающих и фокусирующих бильярдах различны [45, 47]. В первом случае параллельный пучок, попав на рассеивающую компоненту, сразу начинает расходиться. Во втором случае после отражения от фокусирующей компоненты пучок сходится в точке фокусировки. Хаос в таком бильярде возникает, если время, в течение которого пучки сходятся, меньше времени расхождения (т.е. происходит расфокусирование пучка траекторий).

Рассмотрим сначала бильярд с невозмущенными границами [132]. Допустим, что кривизна его фокусирующих компонент мала:

$$l \gg a \gg b. \tag{55}$$

Пусть эти компоненты представлены дугами окружности радиусом  $R$  с угловой мерой  $2\Phi$  (рис. 18а), симметричными относительно вертикальной оси бильярда. Из геометрических соображений следуют соотношения:  $R = (a^2 + 4b^2)/8b$ ,  $\Phi = \arcsin(a/2R)$ . Условие хаотичности для такого бильярда выполняется, если, в частности, дуга, дополняющая фокусирующую компоненту до полной окружности, принадлежит области  $Q$  (см. [45]). При  $b \ll a$  это дает  $l/2R \approx 4bl/a^2 > 1$ .

Введем динамические переменные, как показано на рис. 18а. Положительным направлением для углов  $\varphi_n$  и

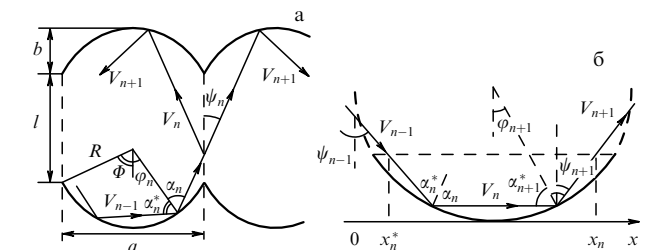


Рис. 18. К построению отображения для бильярда типа стадион.

$\alpha_n^*$  примем направление против часовой стрелки, а для угла  $\alpha_n$  — по часовой стрелке. Если граница бильярда неподвижна, то угол падения  $\alpha_n^*$  равен углу отражения  $\alpha_n$ . Пусть  $V_n$  — скорость частицы, а  $t_n$  — время  $n$ -го столкновения с границей. Для построения отображения, описывающего динамику частицы в таком бильярде, необходимо рассмотреть два случая: 1) после очередного столкновения с фокусирующей компонентой частица сталкивается с ней же (парные столкновения), 2) следующее столкновение происходит с другой фокусирующей компонентой.

В случае парных столкновений геометрический анализ [132] приводит к отображению вида (рис. 18б):

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1}^* &= \alpha_n, \\ \alpha_{n+1} &= \alpha_{n+1}^*, \\ \varphi_{n+1} &= \varphi_n + \pi - 2\alpha_n \pmod{2\pi}, \\ t_{n+1} &= t_n + \frac{2R \cos \alpha_n}{V_n}. \end{aligned} \quad (56)$$

Если  $|\varphi_{n+1}| < \Phi$ , то частица продолжает каскад столкновений с одной компонентой. В противном случае  $(n+1)$ -е столкновение произойдет с другой фокусирующей компонентой. При переходе от одной фокусирующей компоненты к другой отображение запишется как

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1}^* &= \arcsin \left[ \sin(\psi_n + \Phi) - \frac{x_{n+1}^*}{R} \cos \psi_n \right], \\ \alpha_{n+1} &= \alpha_{n+1}^*, \\ \varphi_{n+1} &= \psi_n - \alpha_{n+1}^*, \\ t_{n+1} &= t_n + \frac{R(\cos \varphi_n + \cos \varphi_{n+1} - 2 \cos \Phi) + l}{V_n \cos \psi_n}, \end{aligned} \quad (57)$$

где  $\psi_n = \alpha_n - \varphi_n$ ,  $x_n = (R/\cos \psi_n)[\sin \alpha_n + \sin(\Phi - \psi_n)]$ ,  $x_{n+1}^* = x_n + l \tan \psi_n \pmod{a}$ .

На рисунке 19а представлен полученный численно фазовый портрет бильярда типа "стадион", задаваемый отображениями (56), (57). В качестве координаты выбиралась величина  $\xi_n = 1/2 + (R \sin \varphi_n)/a$ , равная нормированной на ширину бильярда проекции точки столкновения частицы с фокусирующей компонентой на ось  $0x$ . Интенсивность темного цвета на рисунке пропорциональна числу точек, попавших в ту или иную область фазового пространства. Для построения графика использовались четыре траектории. Одна из них начиналась в стохастической области и включала в себя  $5 \times 10^8$  итераций. Три другие начинались в регулярной области и содержали по  $10^7$  итераций. Начальные условия отмечены на графике крестиками.

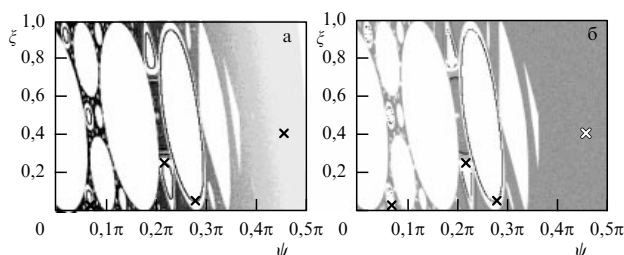


Рис. 19. Фазовый портрет бильярда типа стадион с границей в виде дуги окружности (а) и параболы (б) при  $a = 0,5$ ,  $b = 0,01$ ,  $l = 1$  [132].

Из рисунка 19 видно, что в системе существуют устойчивые неподвижные точки, окруженные инвариантными кривыми. Динамика частиц в окрестностях этих точек является регулярной, отвечающей движению вдоль таких инвариантных кривых. Области, соответствующие различным резонансам, разделены сепаратрисами, окруженными стохастическим слоем. Ширина этого слоя определяется степенью нелинейности системы. Частица, начав движение в таком слое, посещает все доступные ей области хаотическим образом. С возрастанием нелинейности неподвижные точки теряют устойчивость, в результате чего образуется область глобальной стохастичности, в которой частице доступно уже все фазовое пространство.

Для аналитического анализа отображения (56), (57) сделаем упрощения. Аппроксимируем фокусирующую компоненту бильярда частью параболы,  $\chi(x) = 4bx(x-a)/a^2$ , а в качестве координат выберем угол  $\psi$  между вектором скорости и вертикалью,  $\psi \in [-\pi/2, \pi/2]$ , а также величину  $x$  — проекцию на ось  $0x$  точки столкновения частицы с границей,  $x \in [0, a)$ . Тогда, принимая во внимание приближение (55), найдем

$$x_{n+1} = x_n + l \tan \psi_{n+1} \pmod{a}, \quad (58)$$

$$\psi_{n+1} = \psi_n - 2\beta(x_{n+1}),$$

где  $\beta(x) = \arctan(\chi'(x))$  — угол наклона касательной в точке столкновения. В этом случае очевидно, что  $\beta \approx 4b(2x-a)/a^2$ . Теперь сделаем замену:  $\xi = x/a$ ,  $\xi \in [0, 1)$ . В этих переменных отображение примет вид

$$\xi_{n+1} = \xi_n + \frac{l}{a} \tan \psi_n \pmod{1}, \quad (59)$$

$$\psi_{n+1} = \psi_n - \frac{8b}{a}(2\xi_{n+1} - 1).$$

Очевидно, что одно из семейств неподвижных точек бильярда можно записать в виде  $\{\xi = 1/2, \psi_s = \arctan(ma/l)\}$ ,  $m = 1, 2, \dots$ . В конфигурационном пространстве эти точки соответствуют столкновениям частицы с центром фокусирующей компоненты. Исследуем устойчивость таких точек. Для этого линеаризуем отображение, сделав замену  $\xi_n = \Delta\xi_n + 1/2$ ,  $\psi_n = \Delta\psi_n + \arctan(ma/l)$ . Тогда, разлагая в ряд по  $\Delta\psi$ , найдем

$$\Delta\xi_{n+1} = \Delta\xi_n + \frac{l}{a \cos^2 \psi_s} \Delta\psi_n + O(\Delta\psi_n^2),$$

$$\Delta\psi_{n+1} = \Delta\psi_n - \frac{16b}{a} \Delta\xi_{n+1},$$

где  $\psi_s = \arctan(ma/l)$ . Матрица преобразования при этом имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{l}{a \cos^2 \psi_s} \\ -\frac{16b}{a} & 1 - \frac{16bl}{a^2 \cos^2 \psi_s} \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что  $\det A = 1$ . Следовательно, полученное отображение сохраняет меру. Отсюда условие устойчивости неподвижных точек определяется как  $\cos^2 \psi_s \geq 4bl/a^2$  или  $m^2 \leq l/(4b) - l^2/a^2$ .

Разрушение всех резонансов и переход к хаосу произойдет, если  $4bl/a^2 > 1$ . Нетрудно понять [132], что в фазовом пространстве динамика рассматриваемой бильярдной системы вблизи устойчивой точки описывается отображением поворота с числом вращения  $\rho = \arccos [1 - 8bl/(a \cos \psi_s)^2]$ . При этом время между последовательными столкновениями частицы с границей  $\tau \approx l/(V \cos \psi_s)$ , где  $V$  — скорость частицы. Поэтому период вращения

$$T_{\text{rot}} = \frac{2\pi}{\rho} \tau = \frac{2\pi l}{\arccos [1 - 8bl/(a \cos \psi_s)^2] \cos \psi_s} \frac{1}{V}. \quad (60)$$

На рисунке 19б представлен фазовый портрет бильярда с фокусирующими компонентами в форме параболы, задаваемого приближенным отображением (59). Сравнивая его с рис. 19а, построенным на основе точного отображения (56), (57), мы видим, что в данном случае траектория оказывается равномерно распределенной по всей стохастической области. В первом случае большая плотность соответствует области  $\psi \geq 0$ , а область  $\psi \leq \pi/2$  практически пуста. Разница объясняется тем, что при выводе отображения (59) было принято допущение о малой глубине фокусирующей компоненты  $b$ . В результате такой аппроксимации для точного отображения при большом  $\psi$  с большей вероятностью соударения будет происходить с правой (см. рис. 18) частью дуги, так что угол  $\psi$  будет уменьшаться. Таким образом, частицы выталкиваются в область малых  $\psi$  и их движение проходит преимущественно в окрестности регулярных областей.

Если граница бильярда возмущается, то частица может переходить из хаотической области в регулярную и обратно. Когда скорость частиц намного больше скорости движения границ, можно показать [132], что траектория изображающей точки в окрестности устойчивых неподвижных точек фазового пространства имеет форму, близкую к спирали. При этом частота вращения остается такой же, как и в невозмущенной системе. Кроме того, нетрудно понять, что при определенной скорости частиц наступает резонанс между таким вращением и возмущением границ. Существование резонанса в исследуемой системе приводит к неожиданному результату — разделению бильярдных частиц по скоростям [132]. В зависимости от начальной скорости частицы будут либо ускоряться, либо замедляться. Рассмотрим это явление подробнее.

Пусть фокусирующие компоненты бильярда возмущаются таким образом, что скорость их движения в каждой точке одинакова по модулю и направлена по нормали к ним. Предположим, что при этом граница осциллирует по периодическому закону (рис. 18а):  $R = R_0 + r_0 f(\omega t + \eta)$ , где  $\omega$  — частота колебаний, а  $\eta$  — фаза. Тогда скорость границы определится как  $U(t) = \dot{R}$ . Будем также считать, что смещение границы мало, т.е.  $r_0 \ll l$ . Тогда отображение, соответствующее такой бильярдной системе, имеет вид [114, 132]

$$V_n = \sqrt{V_{n-1}^2 + 4V_{n-1} \cos \alpha_n^* U_n + 4U_n^2}, \quad (61)$$

$$\alpha_n = \arcsin \left( \frac{V_{n-1}}{V_n} \sin \alpha_n^* \right),$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{n+1}^* &= \alpha_n, \\ \varphi_{n+1} &= \varphi_n + \pi - 2\alpha_n \pmod{2\pi}, \\ t_{n+1} &= t_n + \frac{2R \cos \alpha_n}{V_n} \end{aligned} \right\} \text{ при } |\varphi_{n+1}| \leq \Phi \quad (62)$$

и при  $|\varphi_n + \pi - 2\alpha_n| > \Phi$

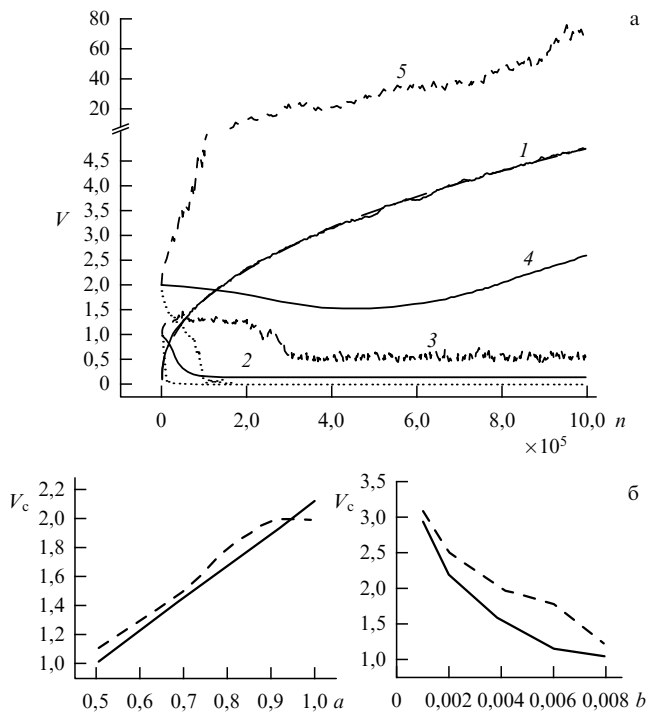
$$\left. \begin{aligned} \psi_n &= \alpha_n - \varphi_n, \\ x_n &= \frac{R}{\cos \psi_n} [\sin \alpha_n + \sin (\Phi - \psi_n)], \\ x_{n+1}^* &= x_n + l \tan \psi_n \pmod{a}, \\ \alpha_{n+1}^* &= \arcsin \left[ \sin (\psi_n + \Phi) - \frac{x_{n+1}^*}{R} \cos \psi_n \right], \\ \varphi_{n+1} &= \psi_n - \alpha_{n+1}^*, \\ t_{n+1} &= t_n + \frac{R(\cos \varphi_n + \cos \varphi_{n+1} - 2 \cos \Phi) + l}{V_n \cos \psi_n}. \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

Отметим, что при его выводе не использовалось соотношение (55). Единственное приближение, которое было сделано, — это малость смещения границ бильярда (т.е. учитывались только основные члены). Выражения (62) соответствуют серии последовательных столкновений частицы с одной фокусирующей компонентой, а (63) — переходу от одной компоненты границы к другой.

Исследуем отображение (61)–(63) в двух случаях: для полностью хаотического и близкого к интегрируемому бильярдов. В первом случае бильярд — классический стадион, т.е.  $\Phi = \pi/2$  (см. рис. 18), и его граница состоит из двух полуокружностей и двух параллельных прямых, касательных к ним. Для такого бильярда были выбраны следующие параметры:  $a = 0,5$ ,  $b = 0,25$ ,  $l = 1$ ,  $r_0 = 0,01$ ,  $\omega = 1$  и  $V_0 = 0,1$ . Скорость частицы вычислялась как среднее значение для ансамбля из 5000 траекторий с различными начальными условиями. Начальные условия выбирались случайным образом на фокусирующей компоненте так, чтобы вектор скорости частицы был направлен внутрь бильярдного стола  $\mathcal{Q}$ . Как следует из численного анализа (кривая  $l$  на рис. 20а), полученная зависимость имеет вид  $V(n) \sim \sqrt{n}$ . Интересно отметить, что такая же зависимость наблюдается в газе Лоренца [113, 114].

В близком к интегрируемому случае параметр  $b$  достаточно мал и кривизна фокусирующей компоненты дает лишь слабую нелинейность в системе, так что выполняется соотношение (55). В такой конфигурации фазовое пространство имеет области с регулярной и хаотической динамикой (см. рис. 19).

В достаточно малой окрестности неподвижных точек исследуемая бильярдная система имеет определенный период вращения  $T_{\text{rot}}$  (см. соотношение (60)). В то же время период осцилляций границы  $T = 2\pi/\omega$ . Таким образом, при некоторой скорости  $V_r$  в системе будет наблюдаться резонанс. Как следует из анализа [132], зависимости скорости частицы от числа столкновений по разные стороны резонанса различны. Если начальная скорость  $V_0 < V_r$ , то скорость частицы уменьшается до конечной величины  $V_{\text{fin}} < V_r$  и распределение частиц по скоростям в интервале  $(0, V_{\text{fin}})$  стремится к стационарному. Однако если  $V_0 > V_r$ , то скорости частиц могут достигать высоких значений. В этом случае распределение частиц является нестационарным и неограниченно возрастает.



**Рис. 20.** (а) Зависимость средней скорости частицы от числа соударений  $n$  с границей в бильярде типа "стадион" с осциллирующими стенками [114, 132]. Две кривые 1 соответствуют бильярду с развитыми хаотическими свойствами ( $b = 0,25$ ). Кривые 2–5 отвечают близкому к интегрируемому бильярду ( $b = 0,01$ ):  $V_0 = 1$  (кривые 2, 3) и  $V_0 = 2$  (кривые 4 и 5). (б) Зависимость критической скорости  $V_c$  частицы от параметров  $a$  и  $b$  (см. рис. 18) в близком к интегрируемому бильярду типа стадион с осциллирующими границами. Штриховые линии — численный расчет, сплошные линии — аппроксимация (64) [136].

На рисунке 20а (кривые 2–5) показана зависимость скорости частицы от числа столкновений. На основании 5000 реализаций для каждой начальной скорости было построено три кривых: средняя, минимальная и максимальная скорости, достигнутые к  $n$ -му столкновению с границей. Таким образом, можно определить интервал изменения скорости. Как следует из рисунка, при  $V_0 < V_T$  средняя скорость частиц (кривая 2) постепенно уменьшается и стремится к константе. Максимальная скорость частиц (кривая 3) уменьшается до величины  $V_{\text{fin}}$  и флуктуирует около этого значения. В случае  $V > V_T$  минимальная скорость частиц также уменьшается. Это означает, что в ансамбле существуют частицы, попавшие в область малых скоростей. По результатам численного анализа доля таких частиц составляет примерно 75%. В то же время существуют частицы с достаточно большой скоростью (кривая 5), соответствующей максимальной скорости в ансамбле. В результате средняя скорость (кривая 4) частиц будет возрастать.

Следовательно, в данной бильярдной системе существует некоторое критическое значение скорости: частицы, скорость которых ниже критической, будут замедляться, а скорость которых выше критической, — ускоряться. Эту критическую скорость можно выразить как

$$V_c = \frac{\omega l}{\cos \psi_s \arccos [1 - 8bl / (a \cos \psi_s)^2]} \quad (64)$$

На рисунке 20б показана зависимость скорости (64) от характерных параметров бильярда: ширины  $a$  и глубины фокусирующей компоненты  $b$  (рис. 18а). Штриховыми линиями показаны численно найденные зависимости, сплошными — аппроксимация на основе соотношения (64). Видно, что с ростом  $b$  критическая скорость стремится к нулю, т.е. в соответствующем бильярде замедление частиц наблюдаться не может. То же имеет место при уменьшении параметра  $a$ . Это связано с тем, что при таком изменении параметров в системе возрастает нелинейность и, как следствие, степень хаотичности динамики бильярда.

Таким образом, в данной бильярдной системе наблюдается разделение частиц в ансамбле по скоростям: одни из них будут испытывать ускорение, а другие — замедляться.

## 10. Заключение

Теоретический анализ нелинейных систем со сложным, в том числе хаотическим, поведением — один из важнейших разделов современной физики. Это объясняется тем, что хаотические процессы присущи очень широкому кругу явлений. Кроме того, нелинейная динамика, в рамках которой разрабатывается концепция детерминированного хаоса, объединяет самые разнообразные приложения, возникающие в естественных науках: от теории возбудимых сред до проблемы обработки и хранения информации [137]. При этом одним из самых сложных вопросов остается вопрос о природе хаотичности и ее следствиях.

Сейчас в исследовании систем классической механики достигнут значительный прогресс. Так, для резонансов и возмущенного движения вблизи сепаратрисы обнаружена возможность перенормировки [138, 139]. В КАМ-теории достигнуты замечательные продвижения (см. [53, 70]): найдены ее обобщения для бесконечномерных систем [140, 141], получены результаты о существовании диффузии в системах, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных [142, 143], и следствия из КАМ-теории для обратимых систем [144], разработаны квантовые версии КАМ-теории. Для диффузионных траекторий обнаружена структура, которая получила название "стохастическая паутина" [60, 62, 145].

Поскольку наиболее близкими мне областями, в которых представленная в данной статье теория находит непосредственное приложение, являются задача  $N$  тел, небесная механика и системы классической статистической механики, здесь я кратко очерчу круг вопросов, относящихся именно к этим разделам. Описание приложений к другим областям можно найти в работах из списка литературы настоящей статьи.

В свое время А. Пуанкаре назвал задачу  $N$  тел фундаментальной нерешенной проблемой классической механики. Большой вклад в ее развитие и исследование внес В.М. Алексеев [146]. КАМ-теория непосредственно не может быть использована для анализа планетарных задач, поскольку здесь имеется собственное вырождение. Существуют, однако, обобщения [23, 147], позволяющие применять результаты КАМ-теории к некоторым, принадлежащим к сравнительно узкому классу системам.

За последние 25 лет в небесной механике получен ряд исключительно важных результатов: доказана гипотеза Пенлеве о бесстолкновительных сингулярностях [148–



150], найдены новые замечательные решения (хореографии) в задаче  $N$  тел (см. [151]), доказано, что резонансы играют ключевую роль в динамике небесных тел [152]. Кроме того, обнаружен крупномасштабный хаос в Солнечной системе, который, по-видимому, является одной из основных причин образования пояса астероидов и диффузии комет из внешних областей Солнечной системы [153–155] (астрономические следствия этого явления описаны в [156, 157]). Установлено также, что хаос наблюдается в системе спутников Сатурна [158]. Следует отметить замечательный результат о существовании диффузии Арнольда в задаче трех тел [159, 160] (обсуждение диффузии в задаче  $N$  тел см. в [161]). В работе [162] приведено доказательство наличия диффузии Арнольда в задаче Ж.Л. Д'Аламбера о вращении сплюсненной у полюсов планеты вокруг неподвижной звезды. Ряд некоторых последних результатов, относящихся к развитию хаоса в небесной механике и проблеме  $N$  тел, представлен в недавно опубликованном сборнике [163].

К нерешенным полностью вопросам небесной механики, тесно связанным с неустойчивостью и хаосом, относится проблема миграции малых тел в Солнечной системе (см. [53, 154, 164, 165] и цитируемую там литературу), в частности, формирование люков Кирквуда [166] (т.е. щелей в распределении астероидов вблизи резонансов со средним движением Юпитера) [167–169], пояса Койпера (Эджворта – Койпера) [170, 171] и облака комет Оорта [172]. К этому тесно примыкает весьма популярная в последнее время проблема астероидной опасности, т.е. оценка вероятности миграции малых тел в зону планет земной группы [164, 173, 174]. Следует отметить также теоретические вопросы о конечности числа относительных равновесий в классической задаче  $N$  тел и о столкновительных траекториях.

К одному из очень интересных явлений, нуждающихся в объяснении и касающихся теории хаотических динамических систем, можно отнести некоторые сложные конфигурации колец больших планет [164, 175]. В последнее время эта задача вновь привлекла интерес в связи с миссией "Кассини".

Однако фундаментальной нерешенной проблемой в небесной механике, которая давно интересует исследователей, остается устойчивость Солнечной системы [164, 176, 177]. Исследования последних лет показали, что хотя Солнечная система и неустойчива, однако на временах, меньших времени ее жизни (примерно 5 млрд лет), ее можно рассматривать как устойчивую. В течение же нескольких миллиардов лет, вследствие диффузии орбит земной группы, может произойти уход Меркурия или его столкновение с Венерой (см. [178]). При этом движение больших планет будет достаточно регулярным. Однако следует отметить, что на таких временах сказывается влияние множества других эффектов, неучтенных в уравнениях Ньютона (трение о межзвездную пыль, релятивистские поправки и др.). Поэтому в данной постановке вопрос об устойчивости Солнечной системы имеет лишь косвенное отношение к реальному движению планет.

Системы бильярдного типа с возмущаемыми границами, описанные в разделе 9, — это достаточно новая область математической физики, которая открывает большие перспективы в исследовании некоторых фундаментальных проблем классической статистической меха-

ники (см. [137]). Так, с новой стороны раскрывается проблема ускорения космических частиц до высоких энергий — ускорения Ферми. Начиная с классической работы Ферми [115], эта проблема до сих пор привлекает к себе внимание исследователей из самых различных областей физики: оптики [179, 180], физики плазмы [181, 182], астрофизики [183–185] и др. Не так давно подобные идеи были привлечены для объяснения ряда экспериментальных результатов, полученных в атомной физике [186].

Бильярды специальных конфигураций также применяются для изучения феномена ускорения Ферми [113, 114, 134]. Их отличительная особенность состоит в том, что при должной модификации такие системы могут быть использованы для экспериментальных исследований [187–189].

В работе [113, 114] на основе полученных результатов впервые была высказана гипотеза о том, что если бильярд с фиксированной границей хаотичен, то при включении возмущения его границы будет наблюдаться ускорение Ферми. Данная гипотеза была подвергнута проверке и получила частичное подтверждение (см. [125, 134, 135]).

Для фокусирующих бильярдных, близких к интегрируемым, кривизна компонент границы которых вносит только слабую нелинейность в систему, периодические возмущения границ приводят к новому интересному явлению — разделению частиц по скоростям. В зависимости от значения начальной скорости в бильярдной системе происходит или ускорение, или замедление частиц. В случае ускорения распределение частиц является нестационарным и неограниченно возрастает. Для замедляющихся частиц устанавливается равновесное распределение по скоростям. Это свойство бильярдной системы можно интерпретировать как "бильярдный" демон Максвелла: следствием периодических возмущений границ является потеря скорости до определенного ненулевого уровня медленными ("холодными") частицами и ускорение быстрых ("горячих") частиц. Физический механизм, приводящий к замедлению частиц, пока до конца не выяснен [136].

Автор признателен В.Б. Брагинскому за предложение написать данную статью, полезные дискуссии и ценные замечания, а также М.Л. Городецкому за критическое прочтение рукописи и предложения по улучшению текста.

## Список литературы

1. Poincaré H *Calcul des Probabilités* (Paris: Gauthier-Villars, 1912)
2. Boltzmann L *J. Math.* **100** 201 (1887)
3. Boltzmann L *Vorlesungen über Gastheorie* (Leipzig: J.A. Barth, 1896)
4. Больцман Л *Статьи и речи* (М.: Наука, 1970)
5. Ehrenfest P, Ehrenfest T, in *Enzyklopaedie der Mathematischen Wissenschaften* Bd. IV (Leipzig, 1911) Тl. 32
6. Эренфест П *Относительность. Кванты. Статистика. Сборник статей* (М.: Наука, 1972)
7. Кац М *Вероятность и смежные вопросы в физике* (М.: Мир, 1965)
8. Cohen E G D, Thirring W (Eds) *The Boltzmann Equation: Theory and Applications* (Acta Physica Austriaca, Suppl. 10) (Wien: Springer-Verlag, 1973)
9. Fermi E, Pasta J, Ulam S "Studies of nonlinear problems", Los Alamos Sci. Laboratory Rep. LA-1940 (Los Alamos: Los Alamos Scientific Laboratory, 1955)
10. Ford J J. *Math. Phys.* **2** 387 (1961)
11. Jackson E A *J. Math. Phys.* **4** 551 (1963)

12. Пуанкаре А *Избранные труды* Т. 1 (М.: Наука, 1971)
13. Биркгоф Д *Динамические системы* (Ижевск: Изд. дом "Удм. ун-т", 1999)
14. Крылов Н С *Работы по обоснованию статистической физики* (М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1950)
15. Борн М *УФН* **69** 173 (1959)
16. Ford J "Foreword" *Phys. Rep.* **75** 288 (1981)
17. Li T-Y, Yorke J A *Am. Math. Mon.* **82** 985 (1975)
18. Каток А Б, Хассельблат Б *Введение в теорию динамических систем с обзором последних достижений* (М.: Изд-во МЦНМО, 2005)
19. Синай Я Г *Империя математики* (3) 13 (2000)
20. Анищенко В С и др. *УФН* **175** 163 (2005)
21. Колмогоров А Н *ДАН СССР* **98** 527 (1954)
22. Арнольд В И *Усп. мат. наук* **18** 13 (1963)
23. Арнольд В И *Усп. мат. наук* **18** 91 (1963)
24. Мозер Ю, в сб. *Математика. Периодический сборник переводов иностранных статей* Т. 6 (М.: Мир, 1962) с. 51
25. Мозер Ю *Лекции о гамильтоновых системах* (М.: Мир, 1973)
26. Аносов Д В *Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны* (М.: Наука, 1967)
27. Синай Я Г *ДАН СССР* **153** 1261 (1963)
28. Синай Я Г *Вестн. МГУ. Сер. 1. Мат. Мех.* **18** (5) 6 (1963)
29. Шильников Л П *ДАН СССР* **160** 558 (1965)
30. Шильников Л П *ДАН СССР* **172** 298 (1967)
31. Шильников Л П и др. *Методы качественной теории в нелинейной динамике* (М.-Ижевск: Инст. компьютер. исслед., 2004)
32. Арнольд В И и др., в сб. *Итоги науки и техники* (Динамические системы, Т. 5, Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, Под ред. В И Арнольда, Р В Гамкрелидзе) (М.: ВИНТИ, 1986) с. 5
33. Колмогоров А Н *ДАН СССР* **119** 861 (1958)
34. Колмогоров А Н *ДАН СССР* **124** 754 (1959)
35. Синай Я Г *ДАН СССР* **124** 768 (1959)
36. Smale S, in *Differential and Combinatorial Topology* (General Ed. S S Cairns) (Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1965) p. 63
37. Смейл С *Усп. мат. наук* **25** 113 (1970)
38. Аносов Д В *ДАН СССР* **145** 707 (1962); **151** 1250 (1963)
39. Боуэн Р *Методы символической динамики* (М.: Мир, 1979)
40. Каток А, Хассельблат Б *Введение в современную теорию динамических систем* (М.: Факториал, 1999)
41. Нитецки З *Введение в дифференциальную динамику* (М.: Мир, 1975)
42. Lasota A, Mackey V C *Chaos, Fractals, and Noise. Stochastic Aspects of Dynamics* 2nd ed. (New York: Springer-Verlag, 1994)
43. Аносов Д В и др., в сб. *Итоги науки и техники* (Динамические системы, Т. 9, Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления) (М.: ВИНТИ, 1991)
44. Bunimovich L A, Sinai Ya G *Commun. Math. Phys.* **78** 479 (1981)
45. Бунимович Л А, в сб. *Итоги науки и техники* (Динамические системы, Т. 2, Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления) (М.: ВИНТИ, 1985)
46. Bunimovich L A *Chaos* **1** 187 (1991)
47. Tabachnikov A *Billiards* (Paris: France Math. Soc. Press, 1995)
48. Дубровин Б А, в сб. *Итоги науки и техники* (Динамические системы, Т. 4, Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления) (М.: ВИНТИ, 1985) с. 179
49. Ольшанецкий М А, Переломов А М, Семенов-Тянь-Шанский М А, в сб. *Итоги науки и техники* (Сер. Динамические системы, Т. 7) (М.: ВИНТИ, 1987) с. 86
50. Трофимов В В, Фоменко А Т, в сб. *Итоги науки и техники* (Динамические системы, Т. 7, Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления) (М.: ВИНТИ, 1987) с. 227
51. Переломов А М *Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли* (М.: Наука, 1990)
52. Табор М *Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике* (М.: Эдиториал УРСС, 2001)
53. Арнольд В И, Козлов В В, Нейштадт А И *Математические аспекты классической и небесной механики* (М.: Эдиториал УРСС, 2002)
54. Лихтенберг А, Либерман М *Регулярная и стохастическая динамика* (М.: Мир, 1984)
55. Козлов В В *Симметрия, топология и резонансы в гамильтоновой механике* (Ижевск: Изд-во Удм. гос. ун-та, 1995)
56. Trueba J L, Baltanás J P, Sanjuán M A F *Chaos, Solitons, Fractals* **15** 911 (2003)
57. Dzhanaev A R, Loskutov A, Cao H, Sanjuán M A F *Discrete Continuous Dyn. Syst. B* **7** 275 (2007)
58. Чириков Б В *Атом. энергия* **6** 630 (1959)
59. Chirikov В V *Phys. Rep.* **52** 263 (1979)
60. Заславский Г М *Физика хаоса в гамильтоновых системах* (М.-Ижевск: Инст. компьютер. исслед., 2004)
61. Заславский Г М, Сагдеев Р З *Введение в нелинейную физику: От маятника до турбулентности и хаоса* (М.: Наука, 1988)
62. Заславский Г М и др. *Слабый хаос и квазирегулярные структуры* (М.: Наука, 1991)
63. Морозов А Д *Резонансы, циклы и хаос в квазиконсервативных системах* (М.-Ижевск: РХД, 2005)
64. Боголюбов Н Н, Митропольский Ю А *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний* 2-е изд. (М.: Физматгиз, 1958)
65. Чириков Б В "Исследования по теории нелинейного резонанса и стохастичности", Препринт № 267 (Новосибирск: ИЯФ АН СССР, Сиб. отд., 1969)
66. Escande D F *Phys. Rep.* **121** 165 (1985)
67. Walker G H, Ford J *Phys. Rev.* **188** 416 (1969)
68. Вайнберг С *Гравитация и космология: Принципы и приложения общей теории относительности* (М.: Мир, 1975)
69. Дяку Ф, Холмс Ф *Небесные встречи. Истоки хаоса и нелинейности* (М.-Ижевск: Инст. компьютер. исслед., 2004)
70. де ла Яве Р *Введение в КАМ-теорию* (М.-Ижевск: Инст. компьютер. исслед., 2003)
71. Трещёв Д В *Введение в теорию возмущений гамильтоновых систем* (М.: Фазис, 1998)
72. Арнольд В И, Авец А *Эргодические проблемы классической механики* (М.: РХД, 1999)
73. Lazutkin V F *KAM Theory and Semiclassical Approximations to Eigenfunctions* (Berlin: Springer-Verlag, 1993)
74. Broer H W, Huitema G B, Sevryuk M B *Quasi-periodic Motions in Families of Dynamical Systems: Order Amidst Chaos* (Lecture Notes in Math., No. 1645) (Berlin: Springer, 1996)
75. Broer H W, Huitema G B, Takens F *Mem. Am. Math. Soc.* **83** 1 (1990)
76. Pöschel J, in *Smooth Ergodic Theory and Its Applications* (Proc. of Symp. in Pure Math., Vol. 69, Eds A Katok et al.) (Providence, RI: Am. Math. Soc., 2001) p. 707
77. Арнольд В И *ДАН СССР* **156** 9 (1964)
78. Заславский Г М, Чириков Б В *УФН* **105** 3 (1971)
79. Holmes P J, Marsden J E *J. Math. Phys.* **23** 669 (1982)
80. MacKay R S, Meiss J D, Percival I C *Transport in Hamiltonian Systems* (London: Queen Mary College, 1983); *Physica D* **13** 55 (1984)
81. Tennyson J L, Lieberman M A, Lichtenberg A J, in *Nonlinear Dynamics and the Beam-Beam Interaction* (AIP Conf. Proc., No. 57, Eds M Month, J C Herrera) (New York: AIP, 1979) p. 272
82. Нехорошев Н Н *Усп. мат. наук* **32** (6) 5 (1977)
83. Пуанкаре А *Избранные труды* Т. 1 *Новые методы небесной механики* (М.: Наука, 1971)
84. Poincaré H *Rendicont Circolo Mat. Palermo* **33** 375 (1912)
85. Зигель К, Мозер Ю *Лекции по небесной механике* (М.-Ижевск: РХД, 2001).
86. Berry M V, in *Regular and Irregular Motion* (AIP Conf. Proc., No. 46) (New York: AIP, 1978) p. 16
87. Helleman R H G, in *Fundamental Problems in Statistical Mechanics* Vol. 5 (Ed. E G D Cohen) (Amsterdam: North-Holland, 1980) p. 165
88. Гукенхаймер Дж, Холмс Ф *Нелинейный колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей* (М.-Ижевск: Инст. компьютер. исслед., 2002)
89. Гельфрейх В Г, Лазуткин В Ф *Усп. мат. наук* **56** 79 (2001)
90. Shilnikov L, in *Nonlinear Dynamics, Chaotic and Complex Systems, Proc. of an Intern. Conf., Zakopane, Poland, November 7-12, 1995* (Eds E Infeld, R Żelazny, A Galkowski) (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997) p. 39
91. Мельников В К *Труды Моск. матем. общества* **12** 3 (1963)
92. Duffing G *Erzwungene Schwingungen bei Veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung* (Braunschweig: F. Vieweg und Sohn, 1918)
93. Кузнецов С П *Динамический хаос* (М.: Физматлит, 2001)
94. Мун Ф *Хаотические колебания* (М.: Мир, 1990)
95. Неймарк Ю И, Ланда П С *Стохастические и хаотические колебания* (М.: Наука, 1987)
96. Holmes P *Philos. Trans. R. Soc. London A* **292** 419 (1979)
97. Cuadros F, Chacón R *Phys. Rev. E* **47** 4628 (1993)
98. Schwalger T, Dzhanaev A, Loskutov A *Chaos* **16** 023109 (2006)
99. Holmes P *J. SIAM J. Appl. Math.* **38** 65 (1980)
100. Hopf E *Math. Ann.* **117** 590 (1940)
101. Пригожин И *От существующего к возникающему: Время и сложность в физических науках* (М.: Наука, 1985)
102. Пригожин И, Стенгерс И *Время, хаос, квант: К решению парадокса времени* (М.: Прогресс, 1994)
103. Mikhailov A S, Loskutov A *Foundations in Synergetics II: Complex Patterns* (Springer Series in Synergetics, Vol. 52) 2nd ed. (Berlin: Springer, 1996)
104. Hadamard J *J. Math. Pures Appl.* **4** 27 (1898)

105. Козлов В В, Трещев Д В *Биллиарды. Генетическое введение в теорию систем с ударами* (М.: Изд-во МГУ, 1991)
106. Bunimovich L A *Commun. Math. Phys.* **65** 295 (1979)
107. Bunimovich L A *Chaos* **11** 802 (2001)
108. Синай Я Г *Усп. мат. наук* **25** 141 (1970)
109. Бунимович Л А *Матем. сб.* **94** 49 (1974)
110. Baldwin P R *J. Phys. A: Math. Gen.* **24** L941 (1991)
111. Chernov N J *Stat. Phys.* **88** 1 (1997)
112. Garrido P L *J. Stat. Phys.* **88** 807 (1997)
113. Лоскутов А Ю, Рябов А В, Акиншин Л Г *ЖЭТФ* **116** 1781 (1999)
114. Loskutov A, Ryabov A V, Akinshin L G *J. Phys. A: Math. Gen.* **33** 7973 (2000)
115. Fermi E *Phys. Rev.* **75** 1169 (1949)
116. Blandford R, Eichler D *Phys. Rep.* **154** 1 (1987)
117. Ulam S M, in *Proc. of the 4th Berkeley Symp. on Mathematical Statistics and Probability* Vol. 3 (California: California Univ. Press, 1961) p. 315
118. Brahic A *Astron. Astrophys.* **12** 98 (1971)
119. Заславский Г М *Статистическая необратимость в нелинейных системах* (М.: Наука, 1970)
120. Lichtenberg A J, Leiberman M A, Cohen R H *Physica D* **1** 291 (1980)
121. Пустыльников Л Д *ДАН СССР* **292** 549 (1987)
122. Пустыльников Л Д *Матем. сб.* **85** (6) 113 (1994)
123. Krüger T, Pustyl'nikov L D, Troubetzkoy S E *Nonlinearity* **8** 397 (1995)
124. Пустыльников Л Д *Усп. мат. наук* **50** 143 (1995)
125. Karlis A K et al. *Phys. Rev. Lett.* **97** 194102 (2006)
126. Koiller J et al. *Nonlinearity* **8** 983 (1995)
127. Koiller J et al. *J. Stat. Phys.* **83** 127 (1996)
128. Kamphorst S O, de Carvalho S P *Nonlinearity* **12** 1363 (1999)
129. Tsang K Y, Ngai K L *Phys. Rev. E* **56** R17 (1997)
130. Tsang K Y, Lieberman M A *Physica D* **11** 147 (1984)
131. Tsang K Y, Lieberman M A *Phys. Lett. A* **103** 175 (1984)
132. Loskutov A, Ryabov A J. *Stat. Phys.* **108** 995 (2002)
133. Лоскутов А Ю, Рябов А В, в сб. *Нелинейные волны — 2004* (Под ред А В Гапонова-Грехова, В И Некоркина) (Н. Новгород: ИПФ РАН, 2005) с. 510
134. de Carvalho R E, de Souza F C, Leonel E D J. *Phys. A: Math. Gen.* **39** 3561 (2006)
135. de Carvalho R E, Souza F C, Leonel E D *Phys. Rev. E* **73** 066229 (2006)
136. Ryabov A V, Loskutov A *Phys. Rev. Lett.* (in preparation)
137. Лоскутов А Ю, Михайлов А С *Основы теории сложных систем* (М. – Ижевск: РХД, Инст. компьютер. исслед., 2007)
138. Zaslavsky G M *Chaos* **5** 653 (1995)
139. Kuznetsov L, Zaslavsky G M *Phys. Rep.* **288** 457 (1997)
140. Kuksin S B *Nearly Integrable Infinite-Dimensional Hamiltonian Systems* (Berlin: Springer-Verlag, 1993)
141. Pöschel J *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* **23** 119 (1996)
142. Bambusi D *Math. Z.* **230** 345 (1999)
143. Bambusi D, Nekhoroshev N N *Physica D* **122** 73 (1998)
144. Sevryuk M B *Physica D* **112** 132 (1998)
145. Заславский Г М и др. *УФН* **156** 193 (1988)
146. Алексеев В М *Лекции по небесной механике* (М. – Ижевск: РХД, 2001)
147. Robutel P *Cel. Mech. Dyn. Astron.* **62** 219 (1995)
148. Xia Z *Ann. Math.* **135** 411 (1992)
149. Saari D G, Xia Z *Notices Am. Math. Soc.* **42** 538 (1995)
150. Gerver J L *J. Differ. Equations* **52** 76 (1984)
151. Симо К и др. *Современные проблемы хаоса и нелинейности* (М. – Ижевск: Инст. компьютер. исслед., 2002)
152. Белецкий В В, Хентов А А *Резонансные вращения небесных тел* (Н. Новгород: Нижегород. гуманитарн. центр, 1995)
153. Milani A, Nobili A M *Nature* **357** 569 (1992)
154. Laskar J *Celestial Mech.* **64** 115 (1996)
155. Lecar M et al. *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **39** 581 (2001)
156. Bakker L F, Diau F N *Romanian Astron. J.* **3** 139 (1993)
157. Peterson I *Newton's Clock: Chaos in the Solar System* (New York: W.H. Freeman, 1993)
158. Goldreich P, Rappaport N *Icarus* **166** 320 (2003)
159. Xia Z *J. Dyn. Differ. Equations* **5** 219 (1993)
160. Xia Z *J. Differ. Equations* **110** 289 (1994)
161. Niederman L *Nonlinearity* **9** 1703 (1996)
162. Chierchia L, Gallavotti G *Ann. Inst. Poincaré B Phys. Théor.* **60** 1 (1994)
163. Celletti A, Ferraz-Mello S (Eds) *Periodic, Quasi-Periodic and Chaotic Motions in Celestial Mechanics: Theory and Applications* (Dordrecht: Springer, 2006)
164. Murray C D, Dermott S F *Solar System Dynamics* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999)
165. Маров М Я *УФН* **175** 668 (2005)
166. Kirkwood D *Meteoritic Astronomy* (Philadelphia: J.B. Lippincott&Co., 1867)
167. Dermott S F, Murray C D *Nature* **301** 201 (1983)
168. Нейштадт А И *ДАН СССР* **295** 47 (1987)
169. Wisdom J *Icarus* **56** 51 (1983)
170. Kuiper G H, in *Astrophysics* (Ed. J A Hynek) (New York: McGraw-Hill, 1951) p. 357
171. Fernández J A *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **192** 481 (1980)
172. Oort J H *Bull. Astron. Inst. Neth.* **11** 91 (1950)
173. Asphaug E et al. *Nature* **393** 437 (1998)
174. Morbidelli A, Nesvorný D *Icarus* **139** 295 (1999)
175. Fridman A M, Gor'kavii N N *Physics of Planetary Rings: Celestial Mechanics of Continuous Media* (New York: Springer, 1999)
176. Kozai Y (Ed.) *The Stability of the Solar System and of Small Stellar Systems, Symp. No. 62 (Copernicus Symp. I), Warsaw, Poland, September 5–8, 1973* (Dordrecht: D. Reidel, 1974)
177. Moser J *Math. Intelligencer* **1** 65 (1978)
178. Laskar J *Astron. Astrophys.* **287** L9 (1994)
179. Steane A et al. *Phys. Rev. Lett.* **74** 4972 (1995)
180. Saif F et al. *Phys. Rev. A* **58** 4779 (1998)
181. Milovanov A V, Zelenyi L M *Phys. Rev. E* **64** 052101 (2001)
182. Michalek G, Ostrowski M, Schlickeiser R *Solar. Phys.* **184** 339 (1999)
183. Malkov M A *Phys. Rev. E* **58** 4911 (1998)
184. Kobayakawa K, Honda Y S, Samura T *Phys. Rev. D* **66** 083004 (2002)
185. Veltri A, Carbone V *Phys. Rev. Lett.* **92** 143901 (2004)
186. Lanza G et al. *Phys. Rev. Lett.* **83** 4518 (1999)
187. Frischat S D, Doron E *Phys. Rev. E* **57** 1421 (1998)
188. Dembowski C et al. *Phys. Rev. Lett.* **84** 867 (2000)
189. Hofferbert R et al. *Phys. Rev. E* **71** 046201 (2005)

## Dynamical chaos. Systems of classical mechanics

### A. Loskutov

*Physics Department, M.V. Lomonosov Moscow State University,  
Vorob'evy gory, 119992 Moscow, Russian Federation  
Tel. (7-495) 939-51 56. Fax (7-495) 939-29 88  
E-mail: Loskutov@chaos.phys.msu.ru*

This paper provides a methodological guide for those interested in chaotic dynamics. It covers the fundamentals of deterministic chaos theory as applied to systems of classic mechanics and reviews key results in this area, discussing elements of nonlinear-resonance and Kolmogorov – Arnold – Moser theories as well as Poincaré – Birkhoff's fixed point theorem and the Melnikov method. Special attention is given to the phenomena that underlie self-similarity and determine the nature of chaos: separatrix splitting and homo- and heteroclinic intersections. The important inherent properties of chaotic systems — nonpredictability, irreversibility, and time correlation decay with time — are described. Billiards with oscillating boundaries — classical statistical mechanical models currently popular for exhibiting chaotic behavior — are considered. It is shown that boundary perturbations lead to a Fermi acceleration process for a billiard in a developed chaotic regime, and result in a new phenomenon — velocity separation in the particle ensemble — for nearly integrable billiard systems. A particle is either accelerated or decelerated depending on whether its initial velocity does or does not exceed a certain critical value determined by the geometry of the billiard.

PACS numbers: **05.45. – a**, 05.45.Ac  
Bibliography — 189 references

Received 31 January 2007, revised 25 April 2007