

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

**Бифуркационные свойства гармоник,
генерируемых полем накачки
благодаря тормозному излучению в плазме**

В.П. Силин, П.В. Силин

Кратко изложен обзор нелинейной генерации нечетных гармоник электромагнитного поля накачки в полностью ионизованной плазме. Обсуждены два пороговых бифуркационных свойства гармоник: раздвоение максимума интенсивности гармоник как функций степени круговой поляризации накачки, а при несколько большем пороге — появление при не полностью поляризованной по кругу накачке полностью поляризованных по кругу гармоник с отличной от нуля интенсивностью.

PACS numbers: 42.65. – k, 42.65.Ky, 52.35.Mw

Содержание

1. Введение (763).
 2. Общие исходные соотношения (764).
 3. Поле накачки (765).
 4. Поле гармоник (765).
 5. Эффективность генерации гармоник (766).
 6. Явление бифуркации степени круговой поляризации гармоник (770).
 7. Заключение (773).
 8. Приложение (773).
- Список литературы (775).

1. Введение

Нагрев электронов полностью ионизованной плазмы, благодаря обратному тормозному поглощению, представляет собой процесс передачи энергии упорядоченного волнового движения электромагнитного поля сначала в энергию упорядоченного движения электронов плазмы, а затем, благодаря беспорядочным столкновениям электронов с ионами плазмы, представляет собой процесс возникновения беспорядочного теплового движения электронов, которое и отвечает нагреву электронов. Такой нагрев плазмы отвечает потере энергии в плазме греющего ее излучения. Часть такой энергии, благодаря процессу тормозного излучения, возникающего при столкновениях нагретых электронов с ионами,

излучается и, например, при воздействии греющего излучения ведет к конкуренции потерь с энергией, которая может выделяться в термоядерном реакторе [1].

В настоящей статье мы сосредоточим свое внимание на нелинейных оптических явлениях, которые возникают в полностью ионизованной плазме во время воздействия на нее электромагнитного излучения, осциллирующего с определенной частотой ω и приводящего к упорядоченно осциллирующему движению электронов. В реальности такое движение является нелинейным, например, в том смысле, что оно оказывается нелинейно зависящим от напряженности электрического поля, приводящего электроны в движение, а также нелинейно зависящим от поляризации электромагнитного поля [2]. В результате нелинейного движения электронов их столкновение с ионами приводит к тормозному излучению нового электромагнитного поля с частотами, кратными частоте ω поля накачки излучения в плазме. Настоящая статья посвящена изложению свойств гармоник, генерируемых полем накачки. Во введении мы также коснемся результатов, напрямую несвязанных с явлениями в полностью ионизованной плазме из-за неполной интерпретации их свойств.

Нелинейное оптическое явление — генерация высших гармоник электромагнитного поля в полностью ионизованной плазме — первоначально рассматривалось как фундаментальное явление безотносительно к его возможным применениям. Тем более, в то время рассуждения о практических приложениях делало публикацию затруднительной, а сами практические применения далекими от их осуществления. Однако сама возможность существенного повышения частот ставила задачу установления сред с такими полосами прозрачности, для которых источники излучения высокой частоты могли бы отвечать не существовавшим в то время источникам. Это привело к тому, что четверть века спустя после публикации статьи [2] возникла не только теоретиче-

В.П. Силин, П.В. Силин. Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН,
119991 Москва, Ленинский просп. 53, Российская Федерация
Тел. (495) 132-63-24, (495) 132-68-71
E-mail: silin@sci.lebedev.ru, silinp@mail.ru

Статья поступила 11 декабря 2006 г.,
после доработки 7 января 2007 г.

ская, но и экспериментальная наука, посвященная генерации гармоник поля накачки не только в плазме, но и в газах [3]. Область исследований быстро развивалась. Укажем здесь несколько работ, представляющих картину такого развития [3–12]. Одна из причин такого быстрого развития связана с переходом к импульсам фемтосекундного диапазона, позволившим увеличивать плотность потока энергии без необходимости создания лазеров большой энергии. Это привело к более глубокому исследованию свойств генерируемых гармоник, в том числе обусловленных их генерацией. Мы бы назвали некоторые из таких свойств — свойствами генерации гармоник. Одно из этих свойств было экспериментально обнаружено в работе [13] при изучении генерации третьей гармоники поля лазера накачки. Суть явления заключалась в том, что при непосредственном облучении газа с интенсивностью достаточной для его ионизации, эффективность генерации оказывалась весьма малой, а последующий лазерный импульс, возникавший спустя время, когда практически вся ионизованность газа исчезала, приводил при прочих равных условиях к эффективности генерации третьей гармоники почти на два порядка большей, чем это было в результате первого импульса. В работе [13] это явление связано с тем, что в плазме газа имеются долгоживущие возбужденные состояния, которые в некоторых условиях живут и тогда, когда плазма практически нейтрализовалась. В теоретической модели водородоподобного атома [14] была продемонстрирована чрезвычайно важная роль таких отдельно возбужденных состояний, качественно увеличивающая эффективность генерации гармоник. В работах [15] не обсуждалась причина возникающего нарушения l -вырождения, а демонстрировался яркий эффект проявления такого нарушения.

Другим эффектом [16], не нашедшим себе объяснения у экспериментаторов, явилась зависимость положения максимума эффективности генерации гармоник, как функции степени круговой поляризации поля накачки не в пределе линейной поляризации, а при некотором конечном значении степени круговой поляризации. Такое объяснение оказалось возможным после появления работ [2, 12]. Однако и здесь для полного понимания необходимо большее количество экспериментальных данных. В целом можно сказать, что явление генерации гармоник потребует к себе большего внимания и более глубоких фундаментальных исследований. Наш обзор, используя сравнительно простую модель явления, ставит перед собой задачу заинтересовать читателя в постановке именно фундаментальных исследований.

В настоящей работе рассматриваются и обсуждаются на предмет экспериментальных исследований нелинейные бифуркационные свойства генерируемых в плазме гармоник.

В такой постановке задачи плазма представляет собой рабочее тело генератора излучения, в котором электромагнитное поле накачки с частотой ω преобразуется в поле нечетных гармоник $(2n + 1)\omega$, где n — целые положительные числа. Такая ситуация может реализовываться тогда, когда амплитуда скорости осцилляций электрона V_E в поле накачки мала по сравнению со скоростью света c

$$V_E \equiv \frac{|e|E_1}{m\omega} \ll c, \quad (1)$$

где e — заряд электрона, m — его масса, E_1 — амплитуда напряженности электрического поля накачки. В такой ситуации нерелятивистского движения электронов возможно описание взаимодействия поля накачки с электронами в дипольном приближении. Это отвечает возможности пренебрежения как пространственной неоднородностью поля накачки, так и возникающим при этом магнитным полем, как причинами их влияния на движение электронов.

2. Общие исходные соотношения

Ограничение дипольным приближением позволяет использовать для описания электронов кинетическое уравнение в следующей форме

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{e}{m} \mathbf{E} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{V}} = J_e[f], \quad (2)$$

где f — электронная функция распределения, \mathbf{V} — скорость электронов, а $J_e = J_{ee} + J_{ei}$ — сумма интегралов столкновений электронов с электронами J_{ee} и электронами с ионами J_{ei} .

Для описания электрического поля, которое в нашем рассмотрении полагается поперечным ($\text{div} \mathbf{E} = 0$), используем следствие уравнений Максвелла

$$c^2 \Delta \mathbf{E} - \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 4\pi \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}, \quad (3)$$

где для плотности электрического тока \mathbf{j} имеем

$$\mathbf{j} = e \int d\mathbf{V} \mathbf{V} f. \quad (4)$$

В нашем рассмотрении важную роль играет поляризация излучения, в описании которой мы будем следовать книге Ландау и Лифшица [17]. При этом в заданной точке пространства задается напряженность электрического поля в виде

$$\mathbf{E}_0(t) \exp(-i\omega t) + \mathbf{E}_0^* \exp(i\omega t).$$

Поляризационные свойства такого поля характеризуются поляризационным тензором

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{E_{0\alpha} E_{0\beta}^*}{\mathbf{E}_0 \mathbf{E}_0^*} \quad (\alpha, \beta = 1, 2 \rightarrow x, y).$$

Этот тензор записывается в виде

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ \xi_1 + i\xi_2 & 1 - \xi_3 \end{pmatrix},$$

где параметры ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 , называемые параметрами Стокса, пробегают значения от -1 до $+1$. $\xi_2 \equiv A$ представляет собой степень круговой поляризации поля, а $(\xi_1^2 + \xi_2^2)^{1/2}$ представляет собой степень линейной поляризации.

Ниже, интересуясь влиянием электромагнитного поля накачки, будем использовать для степени его круговой поляризации обозначение $A(1) \equiv A$. Степень круговой поляризации гармоник обозначим $A[2n + 1, A, x]$, что отвечает нелинейной функции трех аргументов: $2n + 1$ — номера гармоники, A — степени круговой

поляризации накачки и, наконец, безразмерной напряженности электрического поля накачки $x = V_E/2V_T$, где $V_T = \sqrt{k_B T/m}$ — тепловая скорость электронов с температурой T .

3. Поле накачки

Будем считать частоту столкновений электронов много меньше частоты поля накачки и при его описании полностью пренебрежем столкновениями. Тогда кинетическое уравнение для электронной функции распределения f_1 в поле накачки \mathbf{E}_1 в соответствии с уравнением (2) принимает простой, как говорят, бесстолкновительный вид

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{e}{m} \mathbf{E}_1 \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{V}} = 0. \quad (5)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$f_1(\mathbf{V}, t) = F(\mathbf{V} - \mathbf{u}(t)), \quad (6)$$

где в качестве произвольной функции F мы используем максвелловское распределение

$$F(\mathbf{V}) = \frac{N_e}{(2\pi)^{3/2} V_T^3} \exp\left(-\frac{mV^2}{2V_T^2}\right). \quad (7)$$

Здесь N_e — число электронов в единице объема.

Согласно (4) и (6) имеем

$$\mathbf{j}_1 = eN_e \mathbf{u}(t). \quad (8)$$

Согласно (5) $\mathbf{u}(t)$ — скорость электронов в поле накачки, которая подчиняется уравнению

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{e\mathbf{E}_1}{m}. \quad (9)$$

Соответственно этому уравнение (3) приобретает вид

$$c^2 \Delta \mathbf{E}_1 - \frac{\partial^2 \mathbf{E}_1}{\partial t^2} = \omega_{Le}^2 \mathbf{E}_1, \quad (10)$$

где $\omega_{Le} = \sqrt{4\pi e^2 N_e/m}$ — ленгмюровская частота электронов.

Используем далее решение уравнения (10) в виде $\mathbf{E}_1(E_{1x}, E_{1y}, 0)$:

$$E_{1x} = e_x E \cos(\omega t - kz), \quad (11)$$

$$E_{1y} = -e_y E \sin(\omega t - kz),$$

где e_x и e_y — поляризационные орты ($e_x^2 + e_y^2 = 1$). Для нас специальный интерес представляет степень круговой поляризации поля накачки, которая в случае (11) имеет вид

$$A = -2e_x e_y. \quad (12)$$

Далее согласно (9)

$$u_x = -e_x V_E \sin(\omega t - kz), \quad (13)$$

$$u_y = -e_y V_E \cos(\omega t - kz).$$

Последние выражения представляют собой компоненты вектора скорости осцилляционного нерелятивистского движения электрона в поле накачки (11) в отсутствие столкновений электронов с ионами.

4. Поле гармоник

В нашем изложении мы будем использовать подход и некоторые результаты работ [2, 11, 12, 18–20]. Продуктивность подхода к генерации гармоник накачки на основе механизма тормозного излучения с помощью теоретической методики отличной от нашей была также продемонстрирована в работе [21].

Поле генерируемых гармоник в нашем рассмотрении мало по сравнению с полем накачки так же, как соответствующее возмущение электронной функции распределения мало по сравнению с функцией распределения, определяющей поле накачки. Поэтому полное электрическое поле и полную функцию распределения можно записать в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \delta \mathbf{E}, \quad f = f_1 + \delta f. \quad (14)$$

Более того возможна линеаризация кинетического уравнения (2), когда в интеграле столкновений вместо f подставляется f_1

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + \frac{e\mathbf{E}_1}{m} \frac{\partial \delta f}{\partial \mathbf{V}} + \frac{e\delta \mathbf{E}}{m} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{V}} = J_{ee}[f_1] + J_{ei}[f_1]. \quad (15)$$

В соответствии с уравнением (3) нет необходимости в решении этого уравнения, а достаточно умножить его на заряд и скорость электрона и проинтегрировать по скоростям. Тогда, учитывая закон сохранения импульса при столкновении электронов с электронами, приводящий к $\int d\mathbf{V} \mathbf{V} J_{ee}[f] = 0$, из уравнения (15) получаем

$$\frac{\partial \delta \mathbf{j}}{\partial t} - \frac{e^2 N}{m} \delta \mathbf{E} = \frac{\partial \delta \mathbf{j}^{(r)}}{\partial t} \equiv \int d\mathbf{V} e \mathbf{V} J_{ei}[f_1]. \quad (16)$$

При этом учтено, что

$$\int d\mathbf{V} f_1 = \int d\mathbf{V} f = N_e, \quad \delta \mathbf{j} = \int e \mathbf{V} \delta f d\mathbf{V}. \quad (17)$$

Уравнение (16) позволяет, согласно (3), записать следующее уравнение для поля гармоник

$$c^2 \Delta \delta \mathbf{E} - \frac{\partial^2 \delta \mathbf{E}}{\partial t^2} - \omega_{Le}^2 \delta \mathbf{E} = 4\pi \frac{\partial \delta \mathbf{j}^{(r)}}{\partial t} = 4\pi \int d\mathbf{V} e \mathbf{V} J_{ei}[f_1]. \quad (18)$$

Тем самым установление уравнения поля гармоник сводится к взятию интеграла в правой части (18), который представляет собой источник генерируемых, благодаря электрон-ионным столкновениям, полей гармоник.

Для описания таких столкновений воспользуемся интегралом столкновений Ландау

$$J_{ei}[F(\mathbf{V})] = \frac{2\pi e^2 e_i^2 N_i A}{m^2} \frac{\partial}{\partial V_j} \frac{V^2 \delta_{jk} - V_j V_k}{V^3} \frac{\partial}{\partial V_k} F(\mathbf{V}), \quad (19)$$

где e_i — заряд иона, N_i — число ионов в единице объема, A — кулоновский логарифм. Используя выражения (17), (6) и (7), получаем

$$\frac{4\pi \partial \mathbf{j}^{(r)}}{\partial t} = -4\pi e N_e \frac{\sqrt{2} e^2 e_i^2 A N_i}{\sqrt{\pi} m^2 V_T^3} \int d\mathbf{V} \frac{\mathbf{V}}{V^3} \exp\left(-\frac{(\mathbf{V} - \mathbf{u})^2}{2V_T^2}\right). \quad (20)$$

Имея в виду

$$\frac{\mathbf{V}}{V^3} = i \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{4\pi}{q^2} \mathbf{q} \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{V}),$$

формулу (20) можно записать в виде

$$\frac{4\pi \partial \mathbf{j}^{(r)}}{\partial t} = i4\pi e N_e \frac{2e^2 e_i^2 \Lambda N_i}{\pi m^2} \times \int d\mathbf{q} \frac{\mathbf{q}}{q^2} \exp\left(-i\mathbf{q}\mathbf{u}(t) - \frac{1}{2} q^2 V_T^2\right). \quad (21)$$

Для того чтобы представить левую часть последней формулы в виде разложения по гармоникам, заметим, что

$$-\mathbf{q}\mathbf{u}(t) = \frac{q}{2} V_E \sin \theta [(e_x + e_y) \sin(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \varphi) + (e_x - e_y) \sin(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} - \varphi)] \quad (22)$$

и соответственно этому

$$\exp[-i\mathbf{q}\mathbf{u}(t)] = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_l \left(V_E q \sin \theta \frac{e_x + e_y}{2} \right) \times J_k \left(V_E q \sin \theta \frac{e_x - e_y}{2} \right) \times \exp[i(l+k)(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})] \exp[i(l-k)\varphi]. \quad (23)$$

Приведенные здесь соотношения и (7) позволяют (см. приложение) записать x -проекцию правой части формулы (21) в виде

$$\frac{4\pi \partial j_x^{(r)}}{\partial t} = e_x E \omega_{Le}^2 \frac{v(E)}{\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \sin[(2n+1)(\omega t - kz)] \times \left[A_n \left(\rho^2, \frac{V_E}{2V_T} \right) - A_{n+1} \left(\rho^2, \frac{V_E}{2V_T} \right) \right], \quad (24)$$

где $\rho^2 = e_x^2 - e_y^2 > 0$. Аналогично получаем согласно (21) и (П.8)

$$4\pi \frac{\partial j_y^{(r)}}{\partial t} = e_y E \omega_{Le}^2 \frac{v(E)}{\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \cos[(2n+1)(\omega t - kz)] \times \left[A_n \left(\rho^2, \frac{V_E}{2V_T} \right) + A_{n+1} \left(\rho^2, \frac{V_E}{2V_T} \right) \right]. \quad (25)$$

Здесь

$$A_l(\rho^2, x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x^2} dt \sqrt{t} \exp(-t) I_l(\rho^2 t), \quad (26)$$

а

$$v(E) = \frac{8\pi\sqrt{2} e^2 e_i^2 \Lambda N_i}{m^2 V_T^3} \quad (27)$$

— частота электрон-ионных столкновений в сильном поле накачки, когда $V_E \gg V_T$, а $I_l(z)$ — функция Бесселя мнимого аргумента [22].

Уравнение поля (18) и выражения (24) и (25) позволяют записать поле гармоник в виде

$$\delta E_x = \sum_{n=0}^{\infty} E_x^{(2n+1)} \sin[(2n+1)(\omega t - kz)], \quad (28)$$

$$\delta E_y = \sum_{n=0}^{\infty} E_y^{(2n+1)} \cos[(2n+1)(\omega t - kz)], \quad (29)$$

где

$$E_x^{(2n+1)} = \frac{e_x E}{4n(n+1)} \frac{v(E)}{\omega} \left[A_n \left(\rho^2, \frac{V_E}{2V_T} \right) - A_{n+1} \left(\rho^2, \frac{V_E}{2V_T} \right) \right], \quad (30)$$

$$E_y^{(2n+1)} = \frac{e_y E}{4n(n+1)} \frac{v(E)}{\omega} \left[A_n \left(\rho^2, \frac{V_E}{2V_T} \right) + A_{n+1} \left(\rho^2, \frac{V_E}{2V_T} \right) \right]. \quad (31)$$

Зачастую удобно использовать эффективную частоту столкновений v_{ei} электронов и ионов при слабом поле накачки, когда $V_E \ll V_T$. Тогда

$$v_{ei} = \frac{4\sqrt{2}\pi e^2 e_i^2 \Lambda N_i}{3m^2 V_T^3}. \quad (32)$$

При этом формулы (30) и (31) принимают вид

$$E_x^{(2n+1)} = \frac{e_x E}{n(n+1)} \frac{3\sqrt{\pi}}{16} \frac{v_{ei}}{\omega} [A_n(\rho^2, x) - A_{n+1}(\rho^2, x)] \frac{1}{x^3}, \quad (33)$$

$$E_y^{(2n+1)} = \frac{e_y E}{n(n+1)} \frac{3\sqrt{\pi}}{16} \frac{v_{ei}}{\omega} [A_n(\rho^2, x) + A_{n+1}(\rho^2, x)] \frac{1}{x^3}. \quad (34)$$

Полученные в этом разделе формулы будут использованы ниже при рассмотрении свойств гармоник, обусловленных круговой поляризацией поля накачки A , в том числе, для рассмотрения бифуркационных явлений. Соответственно этому будем использовать

$$A_n(\rho^2, x) \rightarrow A_n(\sqrt{1-A^2}, x). \quad (35)$$

5. Эффективность генерации гармоник

Под эффективностью генерации гармоник будем понимать усредненное по времени значение квадрата напряженности электрического поля гармоники деленное на усредненное по времени значение квадрата напряженности электрического поля накачки

$$\eta_{\text{eff}}^{(2n+1)} = \frac{\langle [\delta E_x^{(2n+1)}]^2 + [\delta E_y^{(2n+1)}]^2 \rangle}{\langle [E_{1x}]^2 + [E_{1y}]^2 \rangle}. \quad (36)$$

Здесь скобки означают усреднение по соответствующему периоду колебаний. Прежде всего укажем, что согласно формуле (12) имеем

$$\langle [E_{1x}]^2 + [E_{1y}]^2 \rangle = \frac{1}{2} E^2. \quad (37)$$

Далее формулы (28), (29), (33), (34) при учете (35) позволяют записать формулу (36) в следующем виде

$$\eta_{\text{eff}}^{(2n+1)} = D[2n+1, x, A] \left(\frac{v_{ei}}{\omega} \right)^2, \quad (38)$$

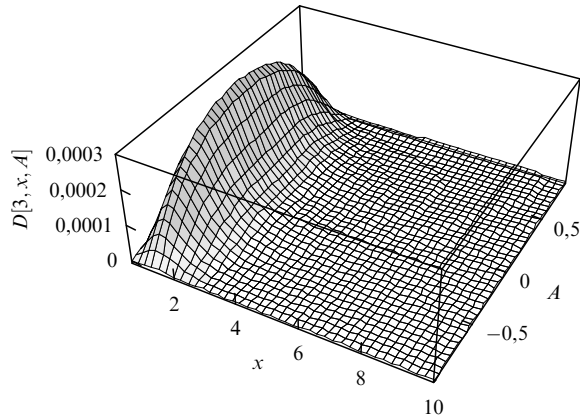


Рис. 1. Поверхность, отвечающая функции $D[3, x, A]$, характеризующая эффективность генерации третьей гармоники в зависимости от безразмерной напряженности электрического поля накачки $x = V_E/2V_T$ и от его степени круговой поляризации A .

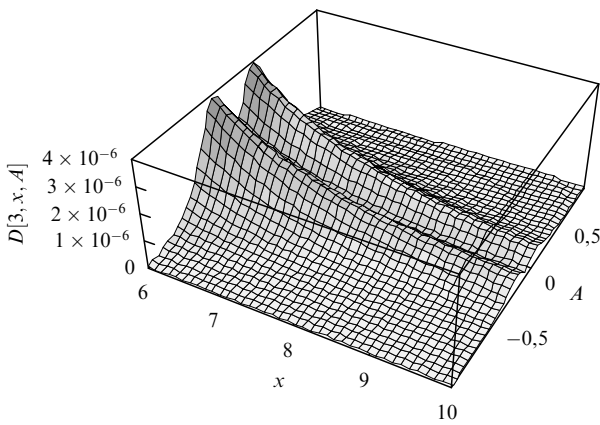


Рис. 2. Участок поверхности функции $D[3, x, A]$, демонстрирующий проявление оврагов.

где

$$D[2n + 1, x, A] = \frac{9\pi}{256n^2(n + 1)^2 x^6} \times [A_n^2(\sqrt{1 - A^2}, x) + A_{n+1}^2(\sqrt{1 - A^2}, x) - 2\sqrt{1 - A^2} A_n(\sqrt{1 - A^2}, x) A_{n+1}(\sqrt{1 - A^2}, x)]. \quad (39)$$

Анализ явлений, описываемых формулами (38), (39), проведем с помощью рисунков для ряда гармоник с частотами $(2n + 1)\omega$.

Для случая третьей гармоники на рис. 1 представлена поверхность, отвечающая функции $D[3, x, A]$. Из этого рисунка видно, что эффективность генерации третьей гармоники, определяющаяся согласно (39) в зависимости от безразмерной напряженности электрического поля накачки x при сравнительно небольших значениях x , сначала нарастает, а затем, при больших значениях, убывает. Также видно, что при приближении степени круговой поляризации накачки A к пределам полной круговой поляризации $A = +1$ и $A = -1$ эффективность генерации третьей гармоники стремится к нулю. Однако сама детальная зависимость от степени круговой поляризации поля накачки функции $D[3, x, A]$ оказывается сравнительно интересной, хотя на рис. 1 она четко не

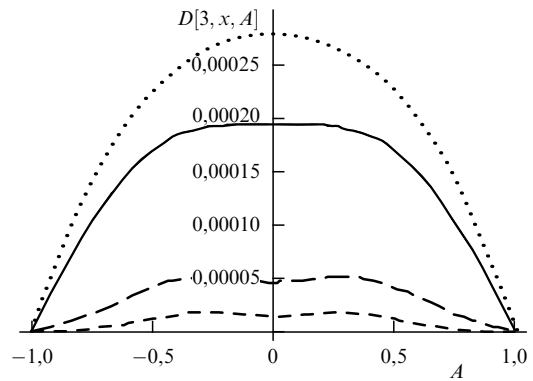


Рис. 3. Четыре кривые сечения поверхности функции $D[3, x, A]$ при различных значениях безразмерного поля накачки: пунктирная кривая при $x = 1$, сплошная кривая при $x = 1,8042$, штриховая кривая (длинные штрихи) при $x = 3$ и штриховая кривая (короткие штрихи) при $x = 4$.

просматривается. Для того чтобы это усмотреть, обратимся прежде всего к рис. 2, на котором представлен участок той же поверхности $D[3, x, A]$, отвечающей изменению значения безразмерной напряженности электрического поля накачки при сравнительно больших значениях x — от восьми до десяти. Здесь, благодаря изменению масштаба по сравнению с рис. 1, ясно выступает изрезанность оврагами этой поверхности, которая не видна на рис. 1.

Естественен вопрос: при каких значениях x возникает такая изрезанность? На этот вопрос можно увидеть ответ на рис. 3, где изображены четыре сечения поверхности $D[3, x, A]$, соответственно пунктирная при $x = 1$, сплошная при $x = 1,8042$, штриховая кривая (длинные штрихи) при $x = 3$, и, наконец, штриховая кривая (короткие штрихи) при $x = 4$. При этом именно сплошная кривая разделяет область, в которой при $x_{\text{int.pol}}^{\text{th.3}} \cong 1,8042 > x$, все кривые сечений поверхности $D[3, A, x]$ имеют только один максимум, от области $x_{\text{int.pol}}^{\text{th.3}} \cong 1,8042 < x$, в которой все кривые сечений поверхности $D[3, A, x]$ имеют по два максимума. На рисунке 3 эти максимума слабо выражены. Это связано со сравнительно быстрым убыванием функции $D[3, x, A]$ с ростом безразмерной напряженности электрического поля накачки. Для того чтобы четче видеть удвоение максимумов кривых сечений функции $D[3, x, A]$, приводим рис. 4 и 5 соответственно при $x = 6$ и $x = 10$. Видно, что с ростом x увеличивается относительное углубление провала между двумя максимумами. Явление удвоения максимумов функции (равных по величине) мы называем явлением бифуркации интенсивности генерации $(2n + 1)$ -гармоники как функции степени круговой поляризации поля накачки. Соответствующее значение безразмерной напряженности электрического поля накачки $x_{\text{int.pol}}^{\text{th.2n+1}}$, при превышении которого возникает удвоение максимумов функции $D(2n + 1, x, A)$, называем порогом бифуркации интенсивности $(2n + 1)$ -й гармоники.

Общность обсуждаемого явления можно видеть уже в случае пятой гармоники. Здесь рис. 6 и 7 качественно подобны рис. 1 и 2, отражая тем самым общие свойства наличия оврагов у поверхности функции $D[5, x, A]$. Четыре сечения поверхности $D[5, x, A]$, приведенные на рис. 8, соответственно пунктирная при $x = 3,2$, сплошная при $x = 3,41257$, штриховая кривая (длинные

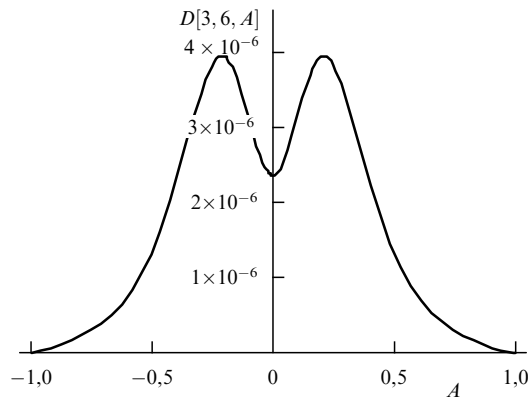


Рис. 4. Кривая сечения поверхности функции $D[3, x, A]$ при $x = 6$.

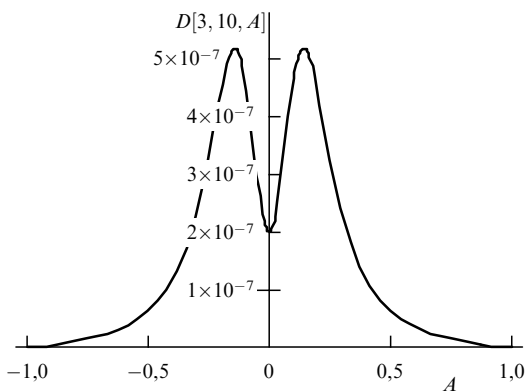


Рис. 5. Кривая сечения поверхности функции $D[3, x, A]$ при $x = 10$.

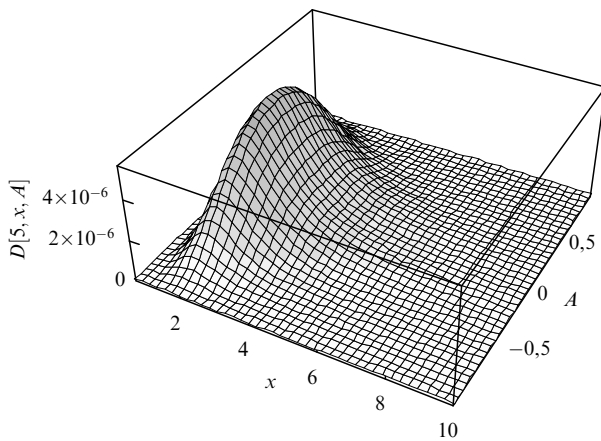


Рис. 6. Поверхность, отвечающая функции $D[5, x, A]$, характеризующая эффективность генерации пятой гармоники.

штрихи) при $x = 4,5$ и штриховая кривая (короткие штрихи) при $x = 6$ отвечает разделению на подпороговую область $x < x_{\text{int.pol}}^{\text{th.5}} = 3,41257$ и на надпороговую область $x > x_{\text{int.pol}}^{\text{th.5}}$. В последней имеет место удвоение максимумов сечений функции $D[5, x, A]$. Поскольку на рис. 8 максимумы кривых не очень четко видны, то мы приводим также рис. 9, отвечающий сечениям поверхности $D[5, x, A]$ соответственно при $x = 8$ (пунктирная линия) и при $x = 10$ (сплошная линия). Здесь удвоение максимумов сечений очевидно.

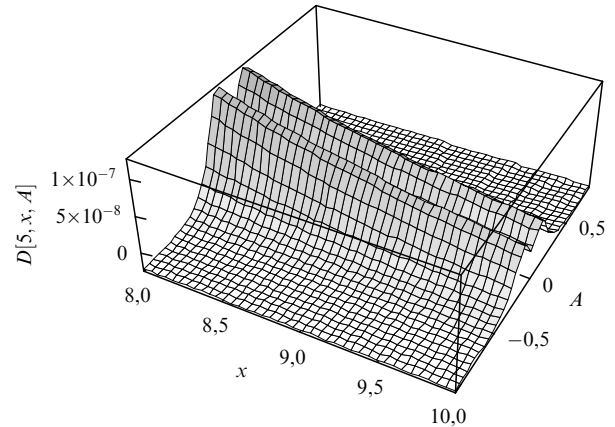


Рис. 7. Участок поверхности функции $D[5, x, A]$, демонстрирующий проявление оврагов.

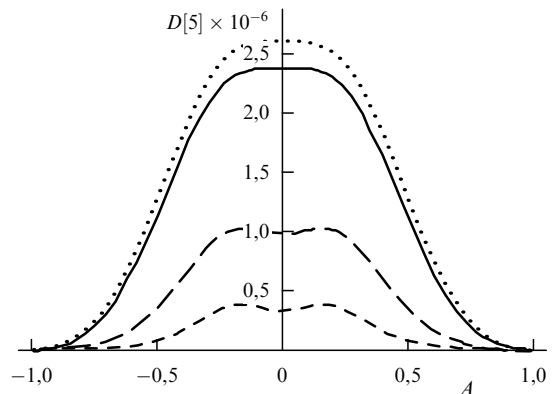


Рис. 8. Четыре кривые сечения поверхности функции $D[5, x, A]$ при различных значениях безразмерного поля накачки: пунктирная кривая при $x = 3,2$, сплошная кривая при $x = 3,41257$, штриховая кривая (длинные штрихи) при $x = 4,5$ и штриховая кривая (короткие штрихи) при $x = 6$.

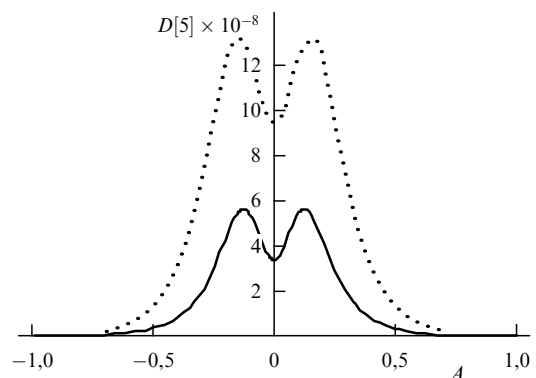


Рис. 9. Две кривые сечений поверхности функции $D[5, x, A]$, ярко демонстрирующие удвоение максимумов эффективности генерации пятой гармоники. Точечная кривая при $x = 8$ и сплошная кривая при $x = 10$.

Явление удвоения максимумов кривых зависимости интенсивности генерации гармоник при заданной напряженности поля накачки сравнительно четко просматривается в случае седьмой гармоники. Это следует из рис. 10 и 11. Однако, прежде всего заметим, что согласно рис. 10

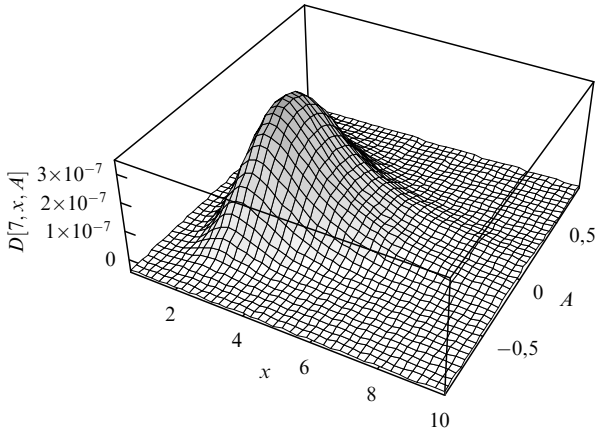


Рис. 10. Поверхность, отвечающая функции $D[7, x, A]$, характеризующая эффективность генерации седьмой гармоники.

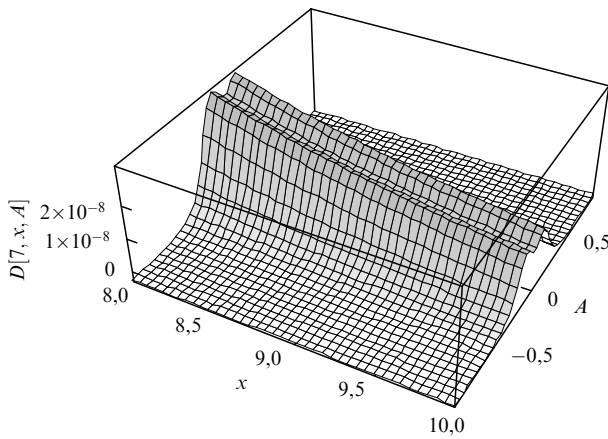


Рис. 11. Участок поверхности функции $D[7, x, A]$ при сравнительно больших напряженностях поля накачки, демонстрирующий проявление оврагов.

область малых значений приведенной здесь функции $D[7, x, A]$ значительно расширяется при малых значениях x как по сравнению с пятой (рис. 6), так и особенно по сравнению с третьей (рис. 1) гармоникой. Из рисунка 11 четко видно возникновение оврагов при сравнительно больших напряженностях электрического поля накачки ($8 < x < 10$). Порог появления оврагов, отвечающих удвоению числа максимумов кривых сечений поверхности $D[7, x, A]$, можно видеть из рис. 12, где приведены три кривых таких сечений. Пунктирная кривая отвечает $x = 4$, сплошная кривая соответствует порогу бифуркационного удвоения периодов $x_{\text{int.pol}}^{\text{th.7}} = 4,8777$, наконец, штриховая кривая (короткие штрихи) отвечает надпороговому значению $x = 6$, когда уже просматриваются два максимума. Рисунок 13 демонстрирует двухмаксимовые кривые в надпороговой области: соответственно $x = 6$ — штриховая кривая (короткие штрихи), $x = 7$ — сплошная "толстая" кривая, а $x = 9$ — сплошная "тонкая" кривая.

Приведенный набор рисунков для третьей, пятой и седьмой гармоник легко может быть продолжен и для более высоких генерируемых гармоник поля накачки. Общим является то, что расширяется область малых значений x , при которых $D[2n + 1, x, A]$ особенно мало. Далее с ростом номера гармоники уменьшается пиковое

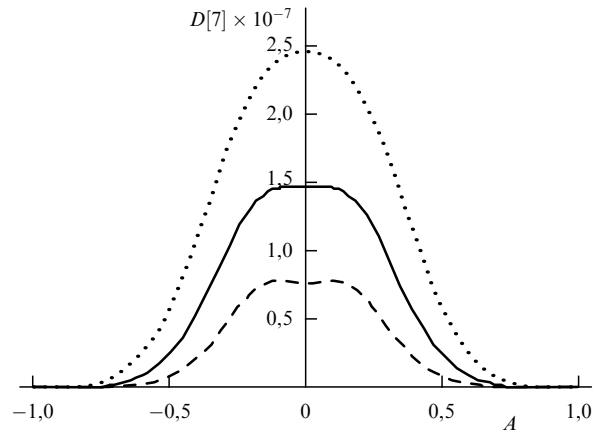


Рис. 12. Три кривые сечений поверхности $D[7, x, A]$ при различных значениях безразмерного поля накачки. Пунктирная кривая отвечает $x = 4$, сплошная кривая отвечает $x = 4,8777$, а штриховая кривая (короткие штрихи) отвечает $x = 6$.

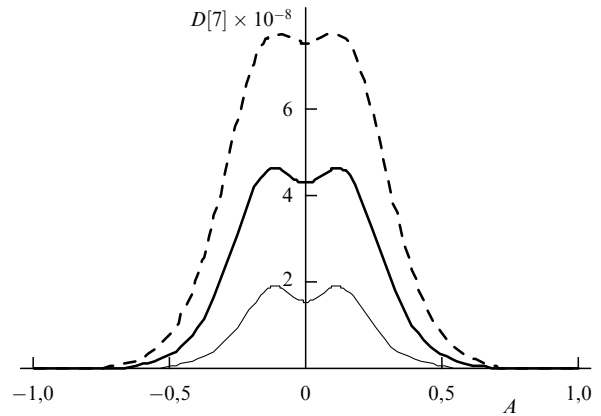


Рис. 13. Три кривые сечений поверхности $D[7, x, A]$ на которых видны два максимума. Штриховая кривая при $x = 6$, сплошная жирная кривая при $x = 7$ и сплошная тонкая кривая при $x = 9$.

значение $D[2n + 1, x, A]$. Так имеем

$$\begin{aligned} D(3)_{\text{max}} &\approx 3,2 \times 10^{-4}, & D(5)_{\text{max}} &\approx 5,5 \times 10^{-6}, \\ D(7)_{\text{max}} &\approx 3,8 \times 10^{-7}, & D(9)_{\text{max}} &\approx 5,8 \times 10^{-8}, \\ D(11)_{\text{max}} &\approx 4,3 \times 10^{-8}, & D(13)_{\text{max}} &\approx 2,56 \times 10^{-9}. \end{aligned}$$

Эти значения реализуются в подпороговой области, когда $x < x_{\text{int.pol}}^{\text{th.2n+1}}$. Проведенный анализ показывает, что с ростом номера гармоники растет пороговое поле $x_{\text{int.pol}}^{\text{th.2n+1}}$. Так, для третьей гармоники мы получили для порогового поля 1,8042, для 5-й — 3,4126, для 7-й — 4,8777, для 9-й — 6,325, для 11-й — 7,594, для 13-й — 9,1913. Итак, с ростом напряженности поля накачки сначала при $A = 0$ достигается максимальная для данной гармоники эффективность ее генерации, далее, при последующем росте x и уменьшении эффективности генерации достигается соответствующее поле бифуркации, превышение которого приводит к возникновению двух одинаковых, при противоположных значениях степени поляризации накачки, максимумов интенсивности генерации гармоник. При этом они четко проявляются тогда, когда x значительно превосходит порог

бифуркации эффективности генерации гармоник. Естественно, что при наличии двух максимумов интенсивности генерации гармоник, нулевому значению поляризации поля накачки отвечает относительный минимум.

В экспериментальной работе [16] исследовалось влияние круговой поляризации поля накачки на генерацию гармоник в газе, причем можно полагать, что при этом на определенном этапе облучения газ ионизируется. Если в предшествующих исследованиях той же группы авторов, с ростом степени круговой поляризации накачки эффективность генерации монотонно уменьшалась, то в работе [16] обнаружена существенная немонотонность с максимумом при $A \neq 0$. В работе [12] для объяснения такого явления был привлечен механизм, теория которого изложена выше.

Наконец, заметим, что в модели, использующей для электронов функцию распределения Фока [23], порог бифуркации интенсивности для третьей гармоники рассматривался в работе [24], а в несколько иной постановке в работе [12].

6. Явление бифуркации степени круговой поляризации гармоник

Обсуждаемые в этом разделе явления в какой-то мере обнаружались еще в работе [12], хотя достаточного внимания им и, в частности, их пороговому характеру, не было уделено. Они подверглись сравнительно детальному рассмотрению и обсуждению в работах [25, 26], посвященных поляризационным свойствам третьей гармоники, которая генерируется благодаря тормозному излучению в плазме, образуемой ионизацией водородоподобных атомов. Функция распределения электронов такой полностью ионизованной плазмы моделировалась функцией распределения электронов, находящихся на n -энергетическом уровне атома водорода, при учете l -вырождения их состояний. Такая функция распределения была получена Фоком [27], а впоследствии независимо повторена в работах [27, 28]. В работах [25, 26] была высказана гипотеза об универсальности обсуждавшегося в работах [25, 26] явления бифуркации, что было подтверждено в работах [18, 19], где вместо распределения Фока использовалось обычное максвелловское распределение. Ниже мы изложим теоретические представления о явлении бифуркации степени круговой поляризации гармоник на основе результатов раздела "поле гармоник".

Полученные выше выражения (28)–(35), описывающие поле гармоник, позволяют записать поляризационный тензор поля гармоник, который выражается (см. выше) через параметры Стокса и позволяет записать для $A[2n+1, x, A]$ — степени круговой поляризации $(2n+1)$ -й гармоники следующее выражение:

$$A[2n+1, x, A] = A \left[(A_n [\sqrt{1-A^2}, x])^2 - (A_{n+1} [\sqrt{1-A^2}, x])^2 \right] \times \left[(A_n [\sqrt{1-A^2}, x])^2 + (A_{n+1} [\sqrt{1-A^2}, x])^2 - 2\sqrt{1-A^2} A_n [\sqrt{1-A^2}, x] A_{n+1} [\sqrt{1-A^2}, x] \right]^{-1}. \quad (40)$$

Рисунки, построенные ниже с помощью этой формулы, позволяют понять зависимости степени круговой поляризации от поля накачки и напряженности его

электрического поля и степени круговой поляризации и, в частности, продемонстрировать явление бифуркации степени круговой поляризации гармоник.

В этом разделе рассмотрение начнем со случая третьей гармоники. Прежде всего, получим из функции (40) разложение при малых значениях x — безразмерной напряженности электрического поля накачки. Ограничиваясь слагаемыми $\sim x^2$, получаем

$$A[3, x, A] \cong A \left\{ 1 + \frac{5}{14} (1 - A^2) x^2 + \dots \right\}. \quad (41)$$

Отсюда видно, что полная круговая поляризация $|A(3)| = 1$ третьей гармоники возникает только при полной круговой поляризации поля накачки $A^2 = 1$. Однако, как это видно из рисунков предыдущего раздела, в таком пределе не возникает генерации гармоник. Более того, можно утверждать, что $A = \pm 1$ являются предельными значениями степени поляризации поля накачки в том смысле, что в таком пределе интенсивность третьей гармоники, как и других гармоник, стремится к нулю. Это свойство является общим свойством генерации гармоник благодаря механизму тормозного излучения. Однако свойства гармоник существенно обогащаются при достаточно сильных напряженностях электрического поля накачки, что можно при достаточно внимательном рассмотрении увидеть на рис. 14, где продемонстрирована трехмерная картина поверхности $A[3, x, A]$ степени круговой поляризации третьей гармоники как функции безразмерной напряженности электрического поля накачки x и степени круговой поляризации A поля накачки. Можно увидеть (правда, с некоторым трудом), что третья гармоника оказывается полностью поляризованной не только в пределе $A = \pm 1$, но и при значениях $|A|$, меньших единицы. Для того, чтобы это лучше увидеть, а также усмотреть своеобразие зависимости степени круговой поляризации при достаточно больших значениях степени круговой поляризации поля накачки, приведем рис. 15, на котором представлены четыре сечения поверхности $A[3, x, A]$: при $x = 1$ — пунктирная кривая; при $x = 2,02 \equiv x_{\text{bif. pol}}^{\text{th. 3}}$ — сплошная кривая, являющаяся бифуркационной; $x = 5$ — штриховая кривая (длинные штрихи), $x = 8$ — штриховая кривая (короткие штрихи).

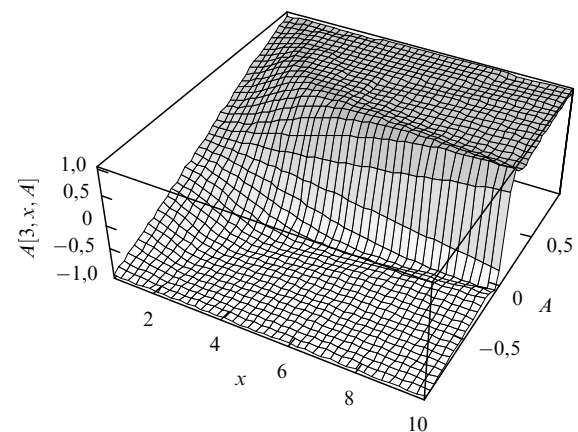


Рис. 14. Поверхность, отвечающая функции $A[3, x, A]$, описывающей зависимость степени круговой поляризации третьей гармоники в зависимости от безразмерной напряженности электрического поля накачки x и степени его круговой поляризации A .

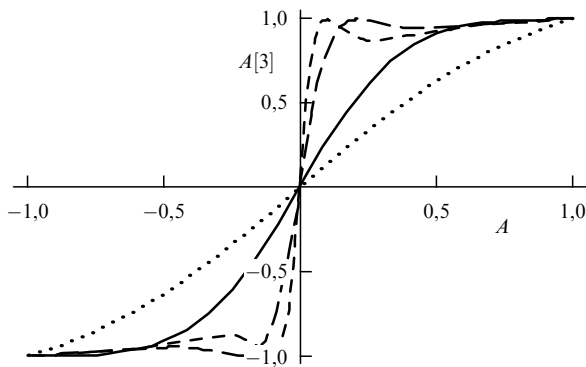


Рис. 15. Четыре сечения поверхности $A[3, x, A]$ для нескольких значений безразмерной напряженности электрического поля накачки. Пунктирная кривая отвечает $x = 1$, сплошная кривая — бифуркационная — отвечает $x = 2,02$, штриховая кривая (длинные штрихи) отвечает $x = 5$, а штриховая кривая (короткие штрихи) отвечает $x = 8$.

Здесь мы используем понятие бифуркации круговой поляризации третьей гармоники, а говоря о бифуркационной кривой, имеем в виду, что $x_{\text{bif.pol}}^{\text{th.3}}$ является порогом бифуркации круговой поляризации третьей гармоники. Говоря о такой бифуркации, мы имеем в виду следующее нелинейное явление, пороговым образом проявляющееся с ростом напряженности электрического поля накачки. Именно, при небольших значениях x , как это следует из формулы (41) и пунктирной кривой рис. 15, степень круговой поляризации третьей гармоники $A[3, x, A]$ становится по модулю равной единице, а круговая поляризация полной — только при равной по модулю единице степени круговой поляризации поля накачки $|A|$. Однако интенсивность третьей гармоники согласно рис. 1 и 3 в таком пределе обращается в нуль. Иными словами, $A[3, x, \pm 1]$ при значениях x , не превышающих пороговое значение $x_{\text{bif.pol}}^{\text{th.3}}$, полная круговая поляризация третьей гармоники является предельным свойством.

Положение меняется в надпороговой области, когда $x > x_{\text{bif.pol}}^{\text{th.3}}$. Как это следует из штриховых кривых рис. 15, полная круговая поляризация третьей гармоники отвечает не только предельным значениям при $|A| \rightarrow 1$, но и паре значений — положительному и отрицательному — степени круговой поляризации поля накачки по модулю меньших единицы. Тем самым на кривых сечений функции $A[3, x, A]$ происходит удвоение значений степени круговой поляризации накачки, при которых степень круговой поляризации гармоники является полной. Это явление, названное в работах [25, 26] явлением бифуркационного раздвоения положений полной круговой поляризации, было получено для плазм с иными, по сравнению с используемым в настоящей работе, распределением электронов. Но уже тогда была высказана мысль об универсальности такого явления.

Для плазмы с максвелловским распределением электронов это положение нашло свое подтверждение в работах [18, 19] и частично изложено выше в этом разделе для третьей гармоники. В работе [18] показано, что явление бифуркации круговой поляризации имеет место также для пятой и седьмой гармоник. Некоторыми результатами работы [18] мы теперь и воспользуемся.

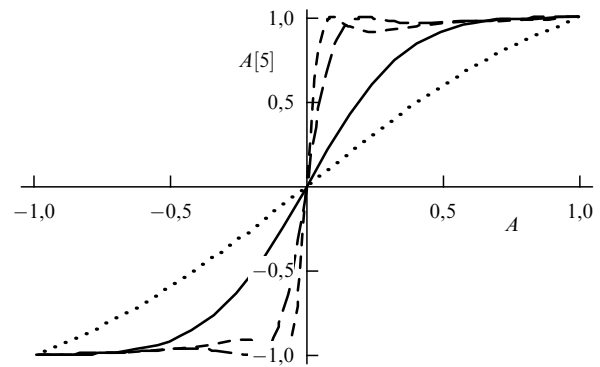


Рис. 16. Четыре сечения поверхности функции $A[5, x, A]$, описывающей степень круговой поляризации пятой гармоники. Пунктирная кривая отвечает $x = 1$, сплошная кривая отвечает $x = 2,39$ — пороговому полю, штриховая кривая (длинные штрихи) отвечает $x = 6$, а штриховая кривая (короткие штрихи) отвечает $x = 10$.

Здесь следует заметить, что рис. 14 для третьей гармоники качественно повторяется и для более высоких гармоник. Такие рисунки мы не станем приводить. Вместо этого рассмотрим аналог рис. 15. Так, на рис. 16 для пятой гармоники приведены четыре сечения поверхности, отвечающей функции $A[5, x, A]$, для четырех значений переменной x — безразмерной напряженности электрического поля накачки. Соответственно пунктирная кривая отвечает $x = 1$ и лежит в подпороговой области, сплошная кривая отвечает $x = 2,39 = x_{\text{bif.pol}}^{\text{th.5}}$ — пороговому полю, разделяющему подпороговую и надпороговую области, что позволяет называть ее бифуркационной кривой; кривая длинных штрихов отвечает $x = 6$, а кривая коротких штрихов отвечает $x = 10$. Две последние кривые расположены в надпороговой области. Они демонстрируют явление возникновения полностью поляризованной пятой гармоники при сравнительно небольших по абсолютной величине значениях степени круговой поляризации поля накачки. Таких значений для каждой кривой надпорогового сечения два. Это является общим положением для явления бифуркационного раздвоения положений полной круговой поляризации.

Уже сравнение рис. 15 и 16 позволяет сделать вывод о том, что в довольно широкой области изменения переменной A — степени круговой поляризации поля накачки — оказывается, что как третья, так и пятая гармоники с большой степенью точности почти полностью поляризованы по кругу. То же можно сказать и о седьмой гармонике согласно рис. 17, где изображены четыре кривые сечения поверхности, отвечающей функции $A[7, x, A]$. Здесь пунктирная кривая отвечает $x = 1$, сплошная кривая отвечает $x = 2,7$ — порогу бифуркации степени круговой поляризации седьмой гармоники и может называться бифуркационной. Две последние штриховые кривые (кривая длинных штрихов при $x = 5$ и кривая коротких штрихов при $x = 8$) отвечают надпороговой области. Последние две кривые имеют пару точек, отвечающих полной круговой поляризации при небольших по абсолютной величине значениях степени круговой поляризации. Так же, как в случае третьей и пятой гармоник, для седьмой гармоники сравнительно широка область, в которой седьмая гармоника с боль-

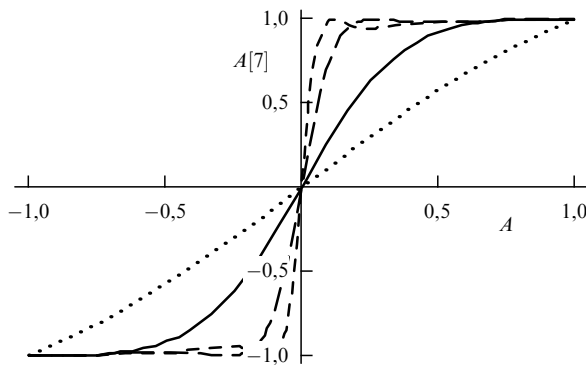


Рис. 17. Четыре сечения поверхности функции $A[7, x, A]$, описывающей степень круговой поляризации седьмой гармоники и позволяющей усмотреть явление бифуркации степени полной круговой поляризации и сопутствующие ему свойства. Точечная кривая отвечает $x = 1$, сплошная кривая отвечает $x = 2,7$ — порогу бифуркации степени круговой поляризации седьмой гармоники, кривая длинных штрихов отвечает $x = 5$, а кривая коротких штрихов отвечает $x = 8$.

шой точностью может считаться приближенно поляризованной по кругу, когда $A[7, x, A]$ по модулю близка к единице.

Наконец, все три рис. 15, 16, 17 указывают на то, что область изменения знака почти поляризованной по кругу степени поляризации гармоники уменьшается с ростом x — безразмерной напряженности поля накачки.

В нашем стремлении к установлению общности явления бифуркации круговой поляризации гармоник остановимся теперь на общем уравнении, описывающем пороги такого явления соответственно для $(2n + 1)$ -й гармоники. Для этого естественно использовать следующее уравнение

$$\pm 1 = A \frac{(A_n(\sqrt{1 - A^2}, x))^2 - (A_{n+1}(\sqrt{1 - A^2}, x))^2}{B[2n + 1, x, A]}, \quad (42)$$

где знак правой части этого уравнения совпадает со знаком A — степени круговой поляризации накачки и

$$B[2n + 1, x, A] = [A_n^2(\sqrt{1 - A^2}, x) + A_{n+1}^2(\sqrt{1 - A^2}, x) - 2\sqrt{1 - A^2} A_n(\sqrt{1 - A^2}, x) A_{n+1}(\sqrt{1 - A^2}, x)].$$

Для нахождения порогового значения x для $(2n + 1)$ -й гармоники необходимо рассмотреть следствия уравнения (42) вблизи $|A|^2 = 1$. Для этого используем

$$A_n(\sqrt{1 - A^2}, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{1 - A^2}/2)^{n+2k}}{k! \Gamma(n + k + 1)} \gamma\left(n + \frac{3}{2} + 2k, x^2\right), \quad (43)$$

где $\Gamma(\alpha)$ — функция Эйлера, а $\gamma(\alpha, x)$ — неполная функция Эйлера. С помощью (43) первое приближение уравнения (42) записывается в виде:

$$(1 - A^2)^{(n+1)} \left(\frac{\gamma(n + 3/2, x^2)}{\Gamma(n + 1)} - \frac{\gamma(n + 5/2, x^2)}{\Gamma(n + 2)} \right)^2 = 0. \quad (44)$$

Решение этого уравнения $A^2 = 1$ соответствует нулевому значению гармоник. Вблизи значения $A^2 = 1$, но при $A^2 \neq 0$ получаем уравнение для порога бифуркации полной круговой поляризации $(2n + 1)$ -й гармоники.

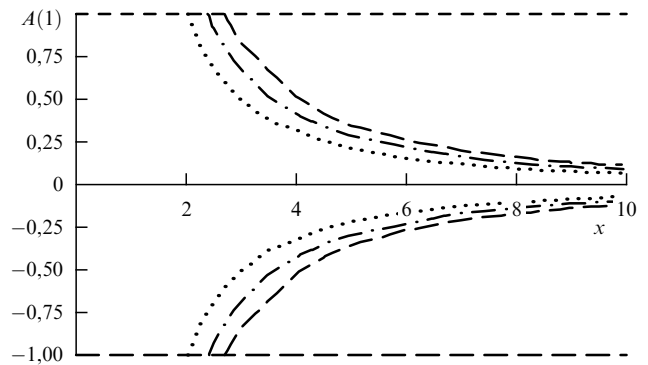


Рис. 18. Здесь представлены линии, отвечающие полной круговой поляризации гармоник. При этом верхняя половина рисунка отвечает $A[2n + 1, x, A] = +1$, а нижняя $A[2n + 1, x, A] = -1$. Горизонтальные штриховые прямые $A(1) \equiv A = 1$ и $A(1) \equiv A = -1$ являются предельными, для которых стремление поляризации к полной круговой одновременно сопровождается стремлением интенсивности гармоник к нулю. Точки шести кривых отвечают значениям x и A , при которых круговая поляризация гармоник является полной, а их интенсивность в случае общего положения отлична от нуля. Пунктирная кривая отвечает третьей гармонике, штрихпунктирная кривая отвечает пятой гармонике, а штриховая кривая — седьмой (ср. [7]).

Последнее уравнение имеет вид

$$\gamma\left(n + \frac{3}{2}, (x_{\text{bif. pol}}^{\text{th.}(2n+1)})^2\right) = \frac{1}{1 + n} \gamma\left(n + \frac{5}{2}, (x_{\text{bif. pol}}^{\text{th.}(2n+1)})^2\right). \quad (45)$$

Приведем численные решения уравнения (45) для ряда гармоник

$$\begin{aligned} x_{\text{bif. pol}}^{\text{th.}(3)} &= 2,02; & x_{\text{bif. pol}}^{\text{th.}(5)} &= 2,39; & x_{\text{bif. pol}}^{\text{th.}(7)} &= 2,70; \\ x_{\text{bif. pol}}^{\text{th.}(9)} &= 2,97; & x_{\text{bif. pol}}^{\text{th.}(11)} &= 3,2; & x_{\text{bif. pol}}^{\text{th.}(13)} &= 3,49; \\ x_{\text{bif. pol}}^{\text{th.}(15)} &= 3,61; & x_{\text{bif. pol}}^{\text{th.}(17)} &= 3,80; & x_{\text{bif. pol}}^{\text{th.}(19)} &= 3,97; \\ x_{\text{bif. pol}}^{\text{th.}(21)} &= 4,14; & x_{\text{bif. pol}}^{\text{th.}(23)} &= 4,39; & x_{\text{bif. pol}}^{\text{th.}(25)} &= 4,45; \\ x_{\text{bif. pol}}^{\text{th.}(27)} &= 4,59; & x_{\text{bif. pol}}^{\text{th.}(29)} &= 4,73; & x_{\text{bif. pol}}^{\text{th.}(31)} &= 4,87; \\ x_{\text{bif. pol}}^{\text{th.}(33)} &= 5,0. \end{aligned}$$

Эти решения позволяют видеть, что пороговые поля вплоть до сравнительно высоких гармоник расположены в сравнительно узкой области значений x .

Следует отметить, что наличие общего уравнения (45) и решения этого уравнения указывают на универсальность рассматриваемого нами явления в рамках применимости используемой теории.

Приведем еще одну иллюстрацию, которую позволяет получить соотношение (40) и решения уравнения (45). А именно, приведем кривые зависимости, связывающие степень круговой поляризации накачки A с безразмерной напряженностью электрического поля накачки x для полной круговой поляризации для 3-й, 5-й и 7-й гармоник тогда, когда они полностью поляризованы по кругу. Рисунок 18 представляет шесть кривых: верхние три кривые отвечают $A[2n + 1, x, A] = 1$, а нижние три кривые отвечают $A[2n + 1, x, A] = -1$. Верхняя штриховая прямая линия отвечает предельному значению $A[2n + 1, x, A] = 1$, а нижняя штриховая прямая линия $A[2n + 1, x, A] = -1$. Точки ответвления от штри-

ховых прямых отвечают пороговым значениям x . Пунктирные кривые соответствуют третьей гармонике; штрихпунктирные кривые соответствуют пятой гармонике; штриховые кривые соответствуют седьмой гармонике. Отраженные на рис. 18 ответвления кривых полной круговой поляризации — одно из простых свойств обсуждаемого бифуркационного явления.

7. Заключение

Материал, предложенный в настоящей статье, дает представление о свойствах нелинейного оптического явления — тормозного излучения плазмы, вызываемого монохроматическим электромагнитным полем накачки. Для нерелятивистской плазмы и для нерелятивистских скоростей электронов, осциллирующих в поле накачки, тормозное излучение характеризуется нечетными гармониками монохроматической накачки. Кратко изложенная теория рассматриваемого тормозного излучения, детали которой приведены в приложении, позволяет изучать нелинейные свойства гармоник как в зависимости от амплитуды E напряженности электрического поля накачки, так и от ее поляризации. Продемонстрировано, что если при сравнительно слабом заданном поле накачки максимум интенсивности генерируемых гармоник, как функция степени круговой поляризации накачки, реализуется в случае ее линейной поляризации ($A = 0$), то при превышении некоторого порогового значения напряженности поля накачки $x_{\text{int. pol}}^{\text{th. } 2n+1}$ появляются два соответствующих максимума для равных по абсолютной величине, но противоположных по знаку значений степени круговой поляризации накачки. Это явление мы называем бифуркацией интенсивности тормозного излучения гармоник накачки, проявляющееся в удвоении максимумов интенсивности гармоник.

С ростом интенсивности накачки проявляется еще одно бифуркационное свойство гармоник. Так, при сравнительно небольших интенсивностях накачки полная круговая поляризация гармоник отвечает их равной нулю интенсивности. Другими словами, при таких интенсивностях при стремлении поляризации гармоник к круговой одновременно стремится к нулю и их интенсивность. Это свойство сохраняется и при больших интенсивностях и описывается прямыми $A = 1$ и $A = -1$ (рис. 18). Однако при достижении порогового для данной гармоники значения безразмерной напряженности поля накачки $x_{\text{int. pol}}^{\text{th. } 2n+1}$ от таких прямых отходят кривые, отвечающие полной круговой поляризации $(2n + 1)$ -й гармоники и значениям степени круговой поляризации, при которых интенсивность гармоник отлична от нуля.

Помимо такого удвоения значений степени поляризации накачки, ведущих к полной круговой поляризации гармоник, для генерируемых гармоник возникают сравнительно широкие области значений степени круговой поляризации накачки, близких как к $A = +1$, так и к $A = -1$, когда поляризация гармоник оказывается с большой точностью, близкой к полной круговой. В то же время область перехода от отрицательных значений степени круговой поляризации гармоник к положительным уменьшается с ростом безразмерной напряженности поля накачки, а сам переход становится круче. Эти свойства как бы сопровождают явление бифуркации полной круговой поляризации гармоник.

Приведем здесь формулу, выражающую плотность потока энергии накачки q через параметр x :

$$q \cong x^2 \left(\frac{k_B T [\text{эВ}]}{25} \right) (\hbar \omega [\text{эВ}])^2 \times 1,7 \times 10^{14} \text{ Вт см}^{-2}, \quad (46)$$

где температура измеряется в единицах 25 эВ, а частота поля накачки — в электронвольтах. Тогда, когда для порога бифуркации положения интенсивности третьей гармоники имеем $x = 1,8042$, формула (46) дает

$$q_{\text{int. pol}}^{\text{th}(3)} \cong \left(\frac{k_B T [\text{эВ}]}{25} \right) (\hbar \omega [\text{эВ}])^2 \times 5,5 \times 10^{14} \text{ Вт см}^{-2}.$$

Соответственно для порога бифуркации степени круговой поляризации третьей гармоники, когда $x = 2,02$, имеем

$$q_{\text{bif. pol}}^{\text{th}(3)} \cong \left(\frac{k_B T [\text{эВ}]}{25} \right) (\hbar \omega [\text{эВ}])^2 \times 6,9 \times 10^{14} \text{ Вт см}^{-2}.$$

Превышение второго порога над первым является общим свойством гармоник, генерируемых в полностью ионизованной плазме благодаря столкновениям с ионами электронов, осциллирующих в поле накачки.

Отметим, что сохраняющийся интерес к генерации гармоник обусловлен также тем, что прогресс в генерации гармоник ведет к возможности создания коротких импульсов, которые, как известно, при сравнительно малой энергии лазерного импульса после его укорочения, приводят к высокой интенсивности плотности потока энергии излучения.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Роснауки (госконтракт № 02-445-11-7331), ИНТАС (грант № 05-51-5037), РФФИ (грант № 05-02-16897).

8. Приложение

Используя соотношение

$$\exp(iz \sin \varphi) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(z) \exp(ik\varphi),$$

покажем, как вычисляется интеграл

$$\begin{aligned} I_x &= \int d\mathbf{q} \frac{q_x}{q^2} \exp\left(-i\mathbf{q}\mathbf{u} - \frac{1}{2} q^2 V_T^2\right) = \\ &= \int_0^\infty dq q \exp\left(-\frac{1}{2} q^2 V_T^2\right) \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \cos \varphi \times \\ &\times \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_l(qV_E \alpha \sin \theta) J_n(qV_E \beta \sin \theta) \times \\ &\times \exp[i(l+n)(\omega t - kz)] \exp[i(l-n)\varphi] = \\ &= \pi \int_0^\infty dq q \exp\left(-\frac{1}{2} q^2 V_T^2\right) \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta \times \\ &\times \sum_{l=-\infty}^{+\infty} J_l(qV_E \alpha \sin \theta) \times \\ &\times \left[J_{l+1}(qV_E \beta \sin \theta) \exp[i(2l+1)(\omega t - kz)] + \right. \\ &\left. + J_{l-1}(qV_E \beta \sin \theta) \exp[i(2l-1)(\omega t - kz)] \right], \quad (\text{П.1}) \end{aligned}$$

где

$$\alpha = \frac{e_x + e_y}{2}, \quad \beta = \frac{e_x - e_y}{2}.$$

Для дальнейшего воспользуемся соотношением

$$\begin{aligned} & \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \exp [i(2l+1)(\omega t - kz)] \times \\ & \times [J_l(A) J_{l+1}(B) + J_{l+1}(A) J_l(B)] = \\ & = 2i \sum_{l=0}^{\infty} \sin [(2l+1)(\omega t - kz)] \times \\ & \times \left[\frac{l}{B} + \frac{l}{A} - \frac{d}{dB} - \frac{d}{dA} \right] J_l(A) J_l(B), \end{aligned}$$

которое позволяет записать (П.1) в виде

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{2\pi i}{V_E^2} \sum_{l=0}^{\infty} \sin [(2l+1)(\omega t - kz)] \left[\frac{l}{\alpha} + \frac{l}{\beta} - \frac{d}{d\alpha} - \frac{d}{d\beta} \right] \times \\ & \times \int_0^{\infty} dx x^2 \int_0^{\pi} d\theta \exp \left(-\frac{x^2 V_T^2}{2V_E^2 \sin^2 \theta} \right) J_l(\alpha x) J_l(\beta x). \end{aligned} \quad (\text{П.2})$$

Имея в виду [22]

$$\int_0^{\pi/2} d\theta \exp \left(-\frac{x^2 V_T^2}{2V_E^2 \sin^2 \theta} \right) = \pi \left[1 - \Phi \left(\frac{x V_T}{\sqrt{2} V_E} \right) \right],$$

где

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z dt \exp(-t^2)$$

— интеграл вероятности, можно представить (П.2) в виде

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{4i\pi^{3/2}}{V_E^2} \sum_{l=0}^{\infty} \sin [(2l+1)(\omega t - kz)] \left[\frac{l}{\alpha} + \frac{l}{\beta} - \frac{d}{d\alpha} - \frac{d}{d\beta} \right] \times \\ & \times \int_{V_T/\sqrt{2}V_E}^{\infty} d\tau \int_0^{\infty} dx x \exp(-x^2 \tau^2) J_l(\alpha x) J_l(\beta x). \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

Поскольку [10]

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} dx x \exp(-x^2 \tau^2) J_l(\alpha x) J_l(\beta x) = \\ & = \frac{1}{2\tau^2} \exp \left(-\frac{\alpha^2 + \beta^2}{4\tau^2} \right) I_l \left(\frac{\alpha\beta}{2\tau^2} \right), \end{aligned}$$

где $I_p(x)$ — функция Бесселя второго рода, то, подставляя последнее выражение в (П.2), после простых преобразований получаем

$$\begin{aligned} I_x &= e_x \frac{4\sqrt{2}i\pi^2}{V_E^2} \sum_{l=0}^{\infty} \sin [(2l+1)(\omega t - kz)] \times \\ & \times \left[A_l \left(\rho^2, \frac{V_E}{2V_T} \right) - A_{l+1} \left(\rho^2, \frac{V_E}{2V_T} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

Здесь использовано обозначение

$$A_l(\rho^2, x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x^2} dt \sqrt{t} \exp(-t) [I_l(\rho^2 t) - I_{l+1}(\rho^2 t)]. \quad (\text{П.5})$$

Формулы (П.4), (П.5), (21) позволяют записать x -проекции правой части уравнения (18) (см. формулу (24)).

Проведем соответствующее рассмотрение для y -компоненты правой части уравнения (19). Для этого рассмотрим

$$\begin{aligned} I_y &= \int d\mathbf{q} \frac{q_y}{q^2} \exp \left(-i\mathbf{q}\mathbf{u} - \frac{1}{2} q^2 V_T^2 \right) = \\ & = \int_0^{\infty} dq q \exp \left(-\frac{1}{2} q^2 V_T^2 \right) \int_0^{\pi} \sin^2 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \sin \varphi \times \\ & \times \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_l(q V_E \alpha \sin \theta) J_n(q V_E \beta \sin \theta) \times \\ & \times \exp [i(l+n)(\omega t - kz)] \exp [i(l-n)\varphi] = \\ & = -\frac{i\pi}{V_E^2} \int_0^{\infty} dx \int_0^{\pi} d\theta \exp \left(-\frac{V_T^2 x^2}{2V_E^2 \sin^2 \theta} \right) \times \\ & \times \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \exp [i(2l+1)(\omega t - kz)] \times \\ & \times [J_l(\alpha x) J_{l+1}(\beta x) - J_{l+1}(\alpha x) J_l(\beta x)]. \end{aligned} \quad (\text{П.6})$$

Далее воспользуемся соотношением

$$\begin{aligned} & \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \exp [i(2l+1)(\omega t - kz)] \times \\ & \times [J_l(A) J_{l+1}(B) - J_{l+1}(A) J_l(B)] = \\ & = 2 \sum_{l=0}^{\infty} \cos [(2l+1)(\omega t - kz)] \times \\ & \times \left[\frac{l}{B} - \frac{l}{A} + \frac{d}{dA} - \frac{d}{dB} \right] J_l(A) J_l(B), \end{aligned}$$

которое при одновременном преобразовании интеграла по θ в (П.6) позволяет I_y представить в виде:

$$\begin{aligned} I_y &= -\frac{4i\pi^{3/2}}{V_E^2} \sum_{l=0}^{\infty} \cos [(2l+1)(\omega t - kz)] \times \\ & \times \left[\frac{l}{\beta} - \frac{l}{\alpha} + \frac{d}{d\alpha} - \frac{d}{d\beta} \right] \times \\ & \times \int_{V_T/\sqrt{2}V_E}^{\infty} d\tau \int_0^{\infty} dx x \exp(-x^2 \tau^2) J_l(\alpha x) J_l(\beta x). \end{aligned} \quad (\text{П.7})$$

Поскольку это выражение во многом подобно (П.3), то, используя подобные при рассмотрении (П.3) преобразования, получаем

$$\begin{aligned} I_y &= e_y \frac{4\sqrt{2}i\pi^2}{V_E^2} \sum_{l=0}^{\infty} \cos [(2l+1)(\omega t - kz)] \times \\ & \times \left[A_l \left(\rho^2, \frac{V_E}{2V_T} \right) + A_{l+1} \left(\rho^2, \frac{V_E}{2V_T} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{П.8})$$

Последнее позволяет согласно (21) записать выражение (25).

Список литературы

1. Арцимович Л А *Управляемые термоядерные реакции* (М.: Физматгиз, 1961)
2. Силин В П *ЖЭТФ* **47** 2254 (1964)
3. Гладков С М, Коротеев Н И *УФН* **160** (7) 105 (1990)
4. Svanberg S et al. *Phys. Scripta* **49** 187 (1994)
5. Krause J L, Schafer K J, Kulander K C *Phys. Rev. Lett.* **68** 3535 (1992)
6. Wahlström C-G et al. *Phys. Rev. A* **48** 4709 (1993)
7. Kondo K et al. *Phys. Rev. A* **49** 3881 (1994)
8. Preston S G et al. *Phys. Rev. A* **53** R31 (1996)
9. Giammanco F et al. *Laser Phys.* **7** 22 (1996)
10. Schulz H, von der Linde D *Proc. SPIE* **1268** 30 (1990)
11. Силин В П *ЖЭТФ* **114** 864 (1998)
12. Овчинников К Н, Силин В П *Квантовая электрон.* **29** (11) 145 (1999)
13. Fedotov A B et al. *Phys. Lett. A* **271** 407 (2000)
14. Силин В П *ЖЭТФ* **117** 926 (2000)
15. Silin V P *Phys. Lett. A* **286** 190 (2001)
16. Burnett N H, Kan C, Corkum P V *Phys. Rev. A* **51** R3418 (1995)
17. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Наука, 1973)
18. Силин В П, Силин П В *Физ. плазмы* **32** 755 (2006)
19. Силин В П, Силин П В *Физ. плазмы* **33** (2) (2007)
20. Silin V P, Silin P V, in *ECLIM 2002: 27th Eur. Conf. on Laser Interaction with Matter* (Proc. SPIE, Vol. 5228, Eds O N Krokhin, S Yu Gus'kov, Yu A Merkul'ev) (Bellingham, Wash.: SPIE, 2003)
21. Haberland H, Bonitz M, Kremp D *Phys. Rev. E* **64** 026405 (2001)
22. Градштейн И С, Рыжик И М *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* 4-е изд. (М.: Физматгиз, 1962)
23. Fock V Z. *Phys.* **98** 145 (1935)
24. Вагин К Ю, Овчинников К Н, Силин В П *Квантовая электрон.* **34** 223 (2004)
25. Силин В П, Силин П В *Квантовая электрон.* **35** 531 (2005)
26. Silin V P, Silin P V *Ukrainian J. Phys.* **50** (8A) A10 (2005)
27. Lebedev V S, Beigman I L *Physics of Highly Excited Atoms and Ions* (Springer Ser. on Atoms + Plasmas, Vol. 22) (Berlin: Springer-Verlag, 1998)
28. Силин В П, Силин П В *Квантовая электрон.* **33** 897 (2003)

Bifurcation properties of bremsstrahlung pumped plasma harmonics

V.P. Silin, P.V. Silin

*P.N. Lebedev Physical Institute, Russian Academy of Sciences,
Leninskii prosp. 53, 119991 Moscow, Russian Federation
Tel. (7-495) 132-63 24, (7-495) 132-68 71
E-mail: silin@sci.lebedev.ru, silinp@mail.ru*

The nonlinear generation of odd pump-field harmonics in a fully ionized plasma is briefly reviewed. Two thresholding bifurcation features of harmonics are discussed: intensity peaks splitting as a function of the circular polarization degree of the pump field; and, for a somewhat higher threshold, nonzero intensity and full circular polarization produced by a pump field of incompletely circular polarization.

PACS numbers: **42.65. - k**, 42.65.Ky, 52.35.Mw

Bibliography — 28 references

*Received 11 December 2006, revised 7 January 2007**Uspekhi Fizicheskikh Nauk* **177** (7) 763–775 (2007)*Physics – Uspekhi* **50** (7) (2007)