

ПРИБОРЫ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

Генерация сжатого (субпуассоновского) света
многомодовым лазером

А.В. Козловский

Рассмотрены теоретические и экспериментальные результаты исследований квантового шума излучения многомодовых лазеров. Анализируется возможность генерации многомодовым лазером, имеющим однородно уширенную линию, света со сжатым по числу фотонов (субпуассоновским) распределением фотонов. Рассмотрены условия шумящей и бесшумовой (регулярной) накачки. В приближении эквидистантных одинаковых мод вычислены флуктуации числа фотонов полного излучения лазера, суммарного по всем генерируемым модам, а также флуктуации числа фотонов в отдельной моде поля внутри и вне резонатора. Рассчитаны спектры шума выходного излучения и флуктуации числа фотонов для твердотельных (неодимовое стекло, Nd:YAG) и полупроводниковых лазеров. Проведено сравнение теоретических результатов с рядом экспериментальных данных, полученных за последние годы для полупроводниковых лазеров.

PACS numbers: 03.65. – w, 42.50.Lc, 42.55.Ah

DOI: 10.3367/UFNr.0177.200712h.1345

Содержание

1. Введение (1345).
 - 1.1. Фотонный шум и сжатый свет. 1.2. Квантовый шум в одномодовых лазерах. 1.3. Квантовый шум в многомодовых лазерах.
 2. Квантовая теория многомодового лазера в приближении спектра эквидистантных одинаковых мод (1348).
 3. Стационарные средние лазерных переменных (рабочая точка лазера) (1351).
 4. Процедура квазилинеаризации балансных уравнений и расчет флуктуаций числа фотонов внутри резонатора (1352).
 5. Спектр фотонного шума излучения, выходящего через зеркало резонатора (1354).
 6. Результаты расчетов спектра фотонного шума излучения многомодового лазера (1356).
 7. Сравнение теоретических и экспериментальных данных о квантовых флуктуациях числа фотонов излучения многомодовых лазеров (1357).
 8. Заключение (1359).
- Список литературы (1359).

1. Введение

1.1. Фотонный шум и сжатый свет

Квантовая природа света вносит принципиально неустранимые флуктуации и шумы в излучение как естествен-

ных, так и искусственных источников электромагнитного поля. Уровень флуктуаций числа фотонов электромагнитного поля, создаваемого детерминированными классическими токами, соответствует уровню дробового фотонного шума. Создаваемое в таких условиях электромагнитное поле находится в квантово-механическом когерентном состоянии с пуассоновским распределением числа фотонов, в котором дисперсия числа фотонов равна их среднему числу: $\langle (\Delta n)^2 \rangle = \langle n \rangle$. Квантовое когерентное состояние, представляющее собой собственное состояние оператора уничтожения фотонов поля, имеет фундаментальное значение в квантовой оптике. Неклассические состояния поля, характеризующиеся уровнем флуктуаций числа фотонов ниже стандартного уровня дробового шума, характерного для когерентного состояния, при которых

$$\langle (\Delta n)^2 \rangle < \langle n \rangle,$$

носят названия субпуассоновских состояний.

Дисперсии квадратур поля $p = (a^+ - a)i/2$, $q = (a^+ + a)/2$ — импульса и координаты в фазовом пространстве гармонического осциллятора нормальных мод поля, где a^+ , a — операторы рождения и уничтожения фотона, в когерентном состоянии равны между собой: $\langle (\Delta p)^2 \rangle = \langle (\Delta q)^2 \rangle = 1/4$, и минимизируют соотношение неопределенности Гейзенберга

$$\langle (\Delta p)^2 \rangle \langle (\Delta q)^2 \rangle \geq \frac{1}{16}.$$

Флуктуации квадратурных компонент поля, соответствующие когерентному состоянию, представляют собой фундаментальный предел уровня флуктуаций электромагнитного поля и, следовательно, определяют предел точности его измерения. Понижение шумов в одной из квадратур поля до более низкого, чем этот предел, уровня

А.В. Козловский. Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, 119991 Москва, Ленинский просп. 53, Российская Федерация
Тел. (499) 783-36-51
E-mail: kozlovsk@sci.lebedev.ru

Статья поступила 30 января 2007 г.,
после доработки 29 октября 2007 г.

и соответствующее повышение шумов в канонически сопряженной квадратуре представляют собой существенно неклассическое явление.

Описанные состояния электромагнитного поля, называемые сжатыми состояниями, характеризуются пониженным уровнем шумов числа фотонов и/или фазы поля, а также квадратурных компонент полей [1–4].

Проведение прецизионных оптических экспериментов, использующих различные источники света, привело к необходимости глубоких и систематических исследований квантовых флуктуаций электромагнитного поля, которые, в свою очередь, привели к обнаружению ряда новых физических эффектов, обусловленных квантовой природой света и материи (см. обзоры и тематические сборники статей [1–3, 5–15]). К их числу относится явление сжатия квадратур света и существования состояний света с уровнем флуктуаций числа фотонов ниже уровня квантового дробового шума (субпуассоновские состояния), возникающее в результате таких известных нелинейных оптических процессов, как лазерная генерация [5, 14, 16–62], параметрическое рассеяние [1–3, 6–8], оптическая бистабильность [1, 2, 63, 64], четырехволновое рассеяние [1–3, 65] и др. [15, 66].

Феномен сжатия имеет практическое значение. Фундаментальные исследования квантовых явлений, возникающих при взаимодействии света со средой, стали основой для бурного развития новых перспективных направлений теоретических и экспериментальных исследований по оптической передаче информации [10, 67, 68], квантовой криптографии [67, 68] и разработке квантовых компьютеров [11]. Использование наблюдаемых электромагнитного поля, относящихся к квадратуре с пониженным уровнем шумов (например напряженности поля $E \propto a - a^\dagger$), открывает возможности для измерения квантовых полей, имеющих малую интенсивность, с точностью, превышающей фундаментальное ограничение, связанное с неустраняемыми квантовыми флуктуациями вакуума. В ряду применений сжатого света следует также отметить низкошумовую оптическую связь, высокоточные спектроскопические атомные измерения, прецизионные интерферометрические эксперименты [12, 13, 69, 70], а также его использование при фотодетектировании слабых оптических сигналов [65]. Квантовый шум, связанный с приготовлением сигнала и его измерением, определяет верхнее ограничение информационной емкости канала. Собственное состояние оператора числа фотонов, или фоковское состояние света, для которого флуктуации числа фотонов равны нулю, является оптимальным для оптической связи, поскольку идеальный предел информационной емкости оптического канала реализуется именно в случае фоковского состояния сигнала [10]. Кроме того, применение однофотонного состояния света для оптической передачи информации исключает возможность подслушивания передаваемых сообщений даже в условиях открытого канала связи.

Электромагнитное поле в сжатом состоянии находит применение при проведении квантовых неразрушающих измерений характеристик электромагнитного поля [12, 13, 71], а также в прецизионных опытах по атомной интерферометрии и при совершенствовании стандартов частоты [12, 13, 69]. Так, в работе [69] показано, что при использовании субпуассоновского света в атомной спектроскопии Рэмзи повышается соотношение сигнал/шум.

Поиск надежных источников света, обладающих неклассическими свойствами, т.е. подчиняющихся субпуассоновской статистике числа фотонов или сжатых в амплитудной или фазовой квадратуре поля, является сейчас одной из наиболее актуальных задач квантовой оптики. Разработанный за последние 30 лет математический аппарат квантовой теории открытых систем, т.е. систем, обладающих флуктуациями и диссипацией, дает возможность проводить количественные исследования квантово-статистических свойств излучения. Успехи в экспериментальных исследованиях, достигнутые за последние годы, позволяют надеяться на то, что будут созданы необходимые на практике источники сильно сжатого света.

1.2. Квантовый шум в одномодовых лазерах

Основными источниками когерентного излучения сейчас являются лазеры и квантовые оптические усилители бегущей волны. Детальные количественные исследования квантовых флуктуаций и шумов электромагнитного поля, генерируемого этими устройствами, представляют собой сегодня актуальнейшую задачу. Разработка и совершенствование методов решения этой задачи, а также поиски схем лазерной генерации, позволяющих управлять уровнем шумов и флуктуаций света, возникновение которых связано с процессами взаимодействия света с усиливающей средой, являются центральной проблемой современной квантовой оптики. Решение этой проблемы открывает путь к разработке практических приложений, связанных с новейшими технологиями, а также расширяет возможности применения лазеров в качестве инструмента научных исследований в фундаментальных областях физики.

Флуктуации интенсивности излучения лазера определяются двумя факторами: флуктуациями интенсивности, вызванными техническими причинами, и флуктуациями, обусловленными квантовой природой взаимодействия света с материей, так называемыми квантовыми флуктуациями. В качестве квантовых флуктуаций могут быть рассмотрены процессы спонтанного излучения атомов активной среды лазера (флуктуации поляризации активной среды), флуктуации электромагнитного вакуума, а также квантовые флуктуации накачки лазера (флуктуации населенностей состояний активной среды). Флуктуации, вызываемые техническими причинами и возможной хаотической динамикой генерации лазера, могут быть устранены в экспериментальных условиях практически полностью, тогда как квантовые флуктуации носят фундаментальный характер и неизбежно присутствуют в квантово-статистической динамике лазера. Пуассоновская статистика фотонов (дробовой шум), характерная для излучения лазера при превышении порога генерации, может быть интерпретирована в рамках квантовой механики как следствие указанных выше процессов квантовых флуктуаций.

Возможность понижения уровня флуктуаций интенсивности лазера до уровня более низкого, чем фундаментальный пуассоновский, активно рассматривается в ряде исследований, проведенных за последние 20 лет. Эти исследования показали, что число фотонов в лазерном излучении при превышении порога генерации может подчиняться при специальных условиях субпуассоновской статистике. Показано, что уровень квантовых шумов излучения одномодового лазера находится в

прямой количественной зависимости от параметров лазерной среды, степени превышения порога генерации и характера накачки [16–29].

Эффективным методом создания субпуассоновского света является использование бесшумовой (регулярной) накачки [16]. В работах [16, 28] показано, что в отсутствие флуктуаций накачки при большом превышении порога генерации флуктуации числа фотонов в резонаторе трехуровневого лазера в пренебрежении истощением населенности нижнего атомного уровня могут достигать минимального уровня, определяемого лишь флуктуациями электромагнитного вакуума, что указывает на полное подавление в таких условиях флуктуаций спонтанного излучения. Сжатие в спектре флуктуаций интенсивности выходного излучения при этом оказывается полным (100%-ное сжатие). В работах [25, 26] также рассмотрено влияние на величину флуктуаций числа фотонов и фазы поля атомной когерентности при накачке с различными статистическими свойствами. Авторами [26] показано, что в случае регулярной накачки атомная когерентность, создаваемая путем приготовления активных атомов в когерентной суперпозиции состояний, участвующих в генерации, приводит к полному подавлению спонтанного шума, при этом статистика фотонов является субпуассоновской, т.е. дисперсия числа фотонов меньше уровня дробового шума.

В работах [18–24, 29] обнаружено, что в условиях шумящей (гауссовой) накачки в трех- и четырехуровневых схемах лазера при превышении порога квантовый шум фотонов также устанавливается ниже стандартного пуассоновского уровня. Приближенные численные и аналитические расчеты показали, что при определенных соотношениях между константами спонтанного распада атомных уровней шум спонтанного излучения и накачки эффективно подавляются. Минимум флуктуаций в трехуровневой схеме составляет $3/4$ от среднего числа фотонов в резонаторе лазера, а в четырехуровневой — $2/3$. Уровень шума выходного излучения лазера при этом ниже уровня дробового шума в два раза для трехуровневого лазера и в пять раз для четырехуровневого. Такое явление получило название динамического подавления квантового шума лазера [19, 21].

Источником субпуассоновского света может служить активно исследуемый в последние годы одноатомный лазер [14, 30–40]. Возможность генерации сильно сжатого света одноатомным одномодовым лазером теоретически показана в работах [30, 36, 37] для двух-, трех- и четырехуровневой схем. Экспериментальные исследования, которые ведутся и в настоящее время, продемонстрировали возможность генерации сжатого состояния как одноатомным лазером [35], так и лазером на нескольких атомах ($N_a \sim 10$) [36].

Лазер на квантовой точке также может быть отнесен к числу одноатомных лазеров, способных генерировать субпуассоновский свет. В работах [31–33] было предсказано, что уровень фотонного шума такого лазера при определенных условиях генерации может стать значительно ниже уровня дробового шума. Теоретические результаты получили экспериментальное подтверждение в [34]. Теория лазера на квантовой точке показывает, что этот лазер может рассматриваться в качестве потенциального источника однофотонных фоковских состояний света, находящих применение в оптической передаче информации и квантовой криптографии [14].

Успешные эксперименты по созданию субпуассоновского света с помощью полупроводниковых лазеров с регулярной накачкой проведены в работах [41–45]. Измерение спектра флуктуаций фототока и статистики фотонов излучения полупроводниковых лазеров показало наличие значительного сжатия; так, в [44] сообщалось о достижении 85%-ного сжатия ($-8,3$ дБ) при полном подавлении шума накачки.

В работах [15, 41, 48, 72] развита идея создания субпуассоновского света с помощью лазера с обратной связью. Возможность понижения фотонного шума излучения полупроводникового лазера с помощью цепи обратной связи исследовалась в работах [41–44]. При использовании отрицательной электронной обратной связи переменная (флуктуационная) составляющая тока фотодетектора, измеряющего интенсивность выходного поля лазера, после инвертирования ее фазы и усиления смешивается с током накачки, который, в свою очередь, модулирует интенсивность выходного излучения лазера, поступающего на фотодетектор. Флуктуации числа фотонов, измеренные в [41] в такой замкнутой цепи обратной связи, оказываются значительно ниже пуассоновского уровня и могут составлять величину $0,26$ от среднего числа фотонов. Однако вывод сжатого света из замкнутой цепи посредством использования светоделителя оказался невозможным, поскольку вакуумное поле, поступающее на свободный вход светоделителя, нарушает квантовые корреляции между интенсивностями двух выходящих из светоделителя полей. Вследствие этого выводимое с помощью светоделителя поле обладает суперпуассоновской статистикой фотонов при уровне флуктуаций, значительно превышающем уровень дробового шума. В работе [41] предложен способ вывода сжатого света из петли обратной связи с помощью неразрушающего измерения числа фотонов с использованием неразрушающего детектора на основе оптического эффекта Керра. В этой схеме поток фотонов излучения лазера пропускается через прозрачную керровскую среду, вызывая в ней модуляцию показателя преломления согласно временной зависимости потока фотонов $N(t)$. Дополнительное пробное поле, проходя через керровскую среду с модулированным показателем преломления, приобретает фазовую задержку, отражающую временную зависимость потока фотонов $N(t)$. Пробное поле далее поступает на оптический фазовый детектор [41], с помощью которого производится считывание временной зависимости потока фотонов без его разрушения.

Ток, поступающий из оптического фазового детектора, затем смешивается с током накачки полупроводникового лазера в электронной цепи обратной связи. Как показано в [41], в условиях, при которых неопределенность в результатах измерения с помощью фазового детектора незначительна и цепь обратной связи обладает большим усилением, флуктуации выходного потока фотонов лазера могут быть подавлены до сколь угодно малого уровня.

Метод неразрушающего фотодетектирования для понижения уровня флуктуаций излучения лазера, предложенный в [41], до сих пор остается экспериментально нереализованным. Необходимо отметить, что принципиальная сложность проведения неразрушающего измерения обусловлена процессами диссипации, протекаю-

щими в керровской среде [71], а также слабостью кубической нелинейности среды.

Иная схема лазера с обратной связью для генерации субпуассоновского света предложена в [48]. Авторы этой работы рассмотрели лазер, в котором пропускание выходного зеркала контролируется током фотодетектора, измеряющего интенсивность проходящего через него света. Теоретические расчеты предсказали уровень флуктуаций числа фотонов на 25 % меньший уровня дробового шума.

В работах [46, 47] теоретически и экспериментально исследован уровень квантовых флуктуаций одномодового кольцевого неодимового лазера (Nd:YAG) при инжекции внешнего сигнала с различными статистиками фотонов. Результаты расчетов и экспериментов показали, что использование слабого внешнего сигнала позволяет понизить уровень шума лазерного излучения и приводит к генерации в такой схеме субпуассоновского света.

1.3. Квантовый шум в многомодовых лазерах

Первые работы, в которых теоретически исследовались квантовые флуктуации излучения многомодового лазера, относятся к середине 1960-х годов. В работе [73] на основе уравнений Ланжевена с феноменологическим учетом процессов диссипации и флуктуаций полевых и атомных переменных лазера были рассчитаны спектры флуктуаций числа фотонов внутри резонатора для полного, суммарного по всем модам поля, а также для поля в отдельной моде резонатора. Заключение автора работы [73] состояли в том, что флуктуации полного излучения лазера стабилизируются и достигают уровня дробового шума (пуассоновское распределение фотонов) при превышении порога генерации. В то же время излучение в отдельной моде находится в равновесном тепловом состоянии (распределение Бозе–Эйнштейна) при любом превышении накачки порога генерации и любом числе мод, участвующих в генерации. Для расчетов в [73] использовалось приближение скоростных (балансных) уравнений для мод с идентичными параметрами.

Аналогичный вывод был сделан в работе [74], где для расчетов использовались кинетические уравнения для диагональных членов матрицы плотности системы в приближении эквивалентных мод. Такой же подход применялся для анализа флуктуаций многомодового лазера в более поздней работе [75] для случая различных мод. Заключение авторов работы [75] повторяют выводы, сделанные в [74].

Известно [76, с. 523–525], что если излучение содержит Q одинаково заполненных независимых мод электромагнитного поля в равновесном состоянии со статистикой фотонов Бозе–Эйнштейна, то суммарное по всем модам поле обладает пуассоновским распределением фотонов со средним $\langle n \rangle = Q \langle n_q \rangle$, где $\langle n_q \rangle$ — среднее число фотонов в q -й моде, при $Q \gg \langle n \rangle$. К аналогичному результату привели расчеты [73–75] для излучения многомодового лазера.

Теоретические расчеты и экспериментальные исследования, проведенные в работе [77] для многомодового лазера на красителе, позволили ее авторам сделать выводы об уровне квантовых флуктуаций излучения многомодового лазера, принципиально отличающиеся от теоретических предсказаний в [73, 74]. Исследования

показали, что значительные флуктуации числа фотонов в отдельной моде лазера объясняются сложной хаотической динамикой многомодовой генерации, присущей лазерам на красителях, при этом уровень квантовых флуктуаций оказывается незначительным. Значительные флуктуации, характерные для теплового излучения и соизмеримые со средним значением числа фотонов, возникают лишь в непосредственной близости порога генерации данной моды. Дальнейшие теоретические и экспериментальные исследования флуктуаций в многомодовых лазерах подтвердили выводы работы [77].

Развитие квантовой теории многомодовой генерации лазера открыло возможность для проведения расчетов флуктуаций числа фотонов исходя из первых принципов. Использование общих уравнений Гейзенберга–Ланжевена, корректно описывающих взаимодействие атомных и полевых подсистем лазера с резервуарами, ответственными за процессы диссипации и флуктуации, привело к обнаружению сложных квантово-статистических свойств излучения многомодового лазера.

В работе [50] была предсказана возможность многомодовой генерации излучения лазера с неклассическими статистическими свойствами. Как показано в [50, 51], в зависимости от параметров лазера флуктуации числа фотонов могут быть как выше уровня дробового шума (пуассоновское распределение), так и значительно ниже этого уровня (сжатое состояние света). К аналогичному выводу пришли авторы работы [52], в которой было экспериментально обнаружено сжатие интенсивности полного излучения лазерного диода с регулярной накачкой, не вносящей дополнительных квантовых шумов. Расчеты, проведенные в [52], показали, что флуктуации как полной интенсивности, так и интенсивности излучения в отдельной моде значительно ниже, чем флуктуации равновесного теплового излучения.

Многочисленные экспериментальные работы [53–61], последовавшие за работами [50–52], проведенные для различных полупроводниковых лазеров с многомодовой генерацией, подтвердили выводы, сделанные в [50–52].

Субпуассоновскую статистику излучения в отдельной моде многомодового лазерного диода при использовании внешнего оптического сигнала предсказывают, в частности, расчеты, проведенные в [62].

2. Квантовая теория многомодового лазера в приближении спектра эквивалентных мод

Электромагнитное поле в резонаторе рассматривается нами в виде его разложения по собственным нормальным модам резонатора. Для атомной подсистемы нами используется четырехуровневая модель Лэкса и Луиселла, согласно которой возбужденный некогерентной накачкой атом переходит из основного состояния $|0\rangle$ в верхнее энергетическое состояние $|3\rangle$, из которого электрон безызлучательно переходит (с большой вероятностью перехода) на верхний лазерный уровень $|2\rangle$, связанный радиационным переходом с нижним лазерным уровнем $|1\rangle$. Таким образом, эффективная накачка происходит непосредственно на уровень $|2\rangle$ и состояние $|3\rangle$ может быть исключено из анализа динамики лазера.

В приближении вращающейся волны гамильтониан системы электромагнитного поля, дипольно взаимодействующего с двухуровневым атомом, представ-

ляется в виде

$$H_S = H_{S0} + V_{\text{int}} = \sum_q \hbar \omega_q a_q^+ a_q + \sum_{j=0,1,2} \hbar \omega_j (|j\rangle\langle j|)_n + \\ + i\hbar \sum_q \mu_q [a_q^+ (|1\rangle\langle 2|)_n - (|2\rangle\langle 1|)_n a_q],$$

где H_{S0} — сумма операторов энергий атома и поля, V_{int} — оператор взаимодействия между ними, a_q^+ — оператор рождения фотонов q -й нормальной дискретной моды полости. При выводе последнего члена, характеризующего взаимодействие атома с многомодовым полем, мы использовали дипольное приближение; в этом случае константа связи

$$\mu_q = \sqrt{\frac{2\pi\omega_q}{V\hbar}} d_{12},$$

где d_{12} — матричный элемент перехода оператора дипольного момента атома, V — объем резонатора, $\omega_q = \pi c q / A$, A — длина резонатора, c — скорость света, q — целое число. Небольшое различие констант связи для разных мод в дальнейших расчетах нами учитываться не будет, таким образом, мы рассмотрим приближение эквивалентных мод, справедливое для лазеров с межмодовыми частотными расстояниями, много меньшими, чем собственные частоты резонатора даже при большом превышении порога генерации. Будем также предполагать, что собственная частота одной из мод резонатора близка к частоте перехода атома $|2\rangle \rightarrow |1\rangle$.

Мы будем исходить из того, что полный гамильтониан состоит из гамильтониана системы H_S , гамильтонианов резервуаров атомной R_A и полевой R_F подсистем, а также взаимодействия соответствующих резервуаров с атомной и полевой подсистемами:

$$H = H_S + R_A + R_F + V_{A-R} + V_{F-R}.$$

Разложим оператор взаимодействия атом–резервуар по базисным операторам, составленным из собственных векторов базиса состояний атомов:

$$V_{A-R} = \hbar \sum_{m,n} f_{mn} |m\rangle\langle n|.$$

Здесь f_{mn} — оператор, относящийся к резервуару атома. Аналогичным образом оператор взаимодействия поле–резервуар выбирается в виде

$$V_{F-R} = i\hbar \sum_q (a_q^+ \Gamma_q - \Gamma_q^+ a_q),$$

где Γ_q — оператор резервуара, связанного с модой q . Последнее выражение получено в приближении вращающейся волны.

Для того чтобы исключить из дифференциальных уравнений движения для операторов системы переменные резервуаров, в рамках стохастического описания динамики системы мы воспользуемся марковским приближением для стохастических операторов резервуаров. Мы будем вычислять изменения операторов системы, обусловленные их взаимодействием с резервуарами, на конечном интервале времени Δt , большем, чем обратные собственные частоты этих операторов в гейзенбергов-

ском представлении, но меньшем, чем времена корреляции операторов резервуаров τ (величины, соответствующие "времени столкновения" системы с резервуарами), устремляя затем Δt к нулю. Вклад резервуаров в динамику операторов системы отражается в наличии в уравнениях для квантово-механических средних величин релаксационных членов. Взаимодействие с резервуарами приводит к переходам между состояниями атомной подсистемы, а также к затуханию поля в модах резонатора. Необходимые для изучения флуктуаций стохастические уравнения движения могут быть получены согласно ланжевенскому подходу из уравнений для средних путем дополнения их случайными операторами источников шума. Таким образом, получаем систему квантово-механических стохастических уравнений для операторов поля и атомов.

Система уравнений движения Гейзенберга–Ланжевена для трехуровневого многомодового лазера с однородно уширенной линией, последовательный вывод которой дан в [50], имеет следующий вид:

$$\frac{d}{dt} a_q = -\frac{\gamma_q}{2} a_q + \mu_q \sigma \exp(i\Delta_{qA} t) + F_q(t), \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} (a_{q'}^+ a_{q''}) = -\frac{\gamma_{q'} + \gamma_{q''}}{2} a_{q'}^+ a_{q''} + B_{q'q''} + \\ + F_{q'}^+(t) a_{q''} + a_{q'}^+ F_{q''}(t), \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} N_1 = -\Gamma_1 N_1 + \sum_{q=1}^Q B_{qq} + F_{11}(t), \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt} N_2 = -\Gamma_2 N_2 + N_A w_{02} - \sum_{q=1}^Q B_{qq} + F_{22}(t), \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt} \sigma = -\Gamma \sigma + \sum_{q=1}^Q \mu_q a_q \exp(-i\Delta_{qA} t) N_A (\sigma_{22} - \sigma_{11}) + F_{12}(t), \quad (5)$$

если

$$B_{q'q''}(t) \equiv \mu_{q'} a_{q'}^+ \sigma \exp(i\Delta_{q''A} t) + \mu_{q''} \sigma^+ a_{q''} \exp(-i\Delta_{q'A} t), \quad (6)$$

$$\Delta_{qA} \equiv \omega_q - \omega_A,$$

где a_q^+ (a_q) — операторы рождения (уничтожения) фотонов q -й моды электромагнитного поля резонатора, $a_{q'}^+ a_{q''}$ — перекрестные операторы различных мод поля при $q'' \neq q'$ или операторы числа фотонов в отдельной моде поля при $q'' = q'$, N_1 и N_2 — операторы населенностей нижнего $|1\rangle$ и верхнего $|2\rangle$ лазерных уровней атомов:

$$N_j = \sum_{n=1}^{N_A} (|j\rangle\langle j|)_n, \quad j = 1, 2,$$

σ — оператор атомной поляризации (суммарного по всем атомам наведенного дипольного момента) среды, $\sigma = \sum_{n=1}^{N_A} (|1\rangle\langle 2|)_n \exp(i\omega_A t)$, N_A — полное число активных атомов среды, w_{02} — скорость накачки верхнего лазерного состояния $|2\rangle$, получаемого возбуждением нижнего электронного состояния трехуровневой системы $|0\rangle$. Содержащиеся в уравнениях коэффициенты диссипации γ_q , $\gamma_{q'}$, $\gamma_{q''}$, Γ_1 , Γ_2 , $\Gamma = \Gamma_{\text{ph}} + (\Gamma_1 + \Gamma_2)/2$ (где Γ_{ph} — константа релаксации фазы дипольного момента

атома в результате упругих столкновений) содержат в себе информацию о внешних резервуарах и выражаются через интегралы от корреляторов операторов, относящихся к резервуарам. Операторы $F_\alpha(t)$, $\alpha = q, q', q'', 11, 12, 22$, в правых частях уравнений (1)–(5) представляют собой ланжевенские источники квантового шума, обусловленного взаимодействием наблюдаемой системы с внешними резервуарами. Вследствие принятого предположения о марковости, ланжевенские источники обладают δ -коррелированными вторыми моментами, в общем случае зависящими от времени. Статистические свойства случайных ланжевенских операторов обеспечивают сохранение во времени коммутационных соотношений гейзенберговских операторов системы в условиях ее динамики с учетом флуктуаций и диссипации [78, 79].

Приближение эквивалентных мод, которое используется в дальнейших расчетах, состоит в предположении равенства между собой скоростей потерь поля, а также констант связи атомов с полем для всех мод поля, т.е.

$$\gamma = \gamma_q \propto \omega_q^3, \quad \mu = \mu_q \propto \sqrt{\omega_q}, \quad q = 1, 2, \dots, Q. \quad (7)$$

Кубическая зависимость потерь поля через зеркало резонатора следует из квантово-механического соотношения $\gamma_q = 2\pi\rho(\omega_q)|\mu_q(\omega_q)|^2$, где $\rho(\omega_q)$ — плотность состояний поля в пустом пространстве [76].

В условиях, при которых скорости затухания поляризации среды (Γ) и атомных населенностей (Γ_1 и Γ_2) намного больше скорости затухания поля (γ), в уравнениях (1)–(7) может быть проведено адиабатическое исключение атомных переменных лазера [50]. Тогда уравнения Гейзенберга – Ланжевена для многомодового лазера приобретают следующий вид:

$$\frac{d}{dt} a_q = -\frac{\gamma}{2} a_q + \frac{PD}{2} \sum_{q'} a_{q'} \exp(i\Delta_{qq'}t) + G_q, \quad (8)$$

$$\frac{d}{dt} (a_q^+ a_{q''}) = -\gamma a_q^+ a_{q''} + \frac{PD}{2} \sum_q [a_q^+ a_{q'} \exp(i\Delta_{qq'}t) + a_q^+ a_q \exp(-i\Delta_{qq''}t)] + \Pi N_2 + G_{q'q''}, \quad (9)$$

$$\frac{dn_q}{dt} = -\gamma n_q + PD n_q + \frac{PD}{2} \sum_{q' \neq q} \bar{B}_{q'q} + \Pi N_2 + G_{qq}, \quad (10)$$

$$\frac{dN}{dt} = -\gamma N + PD \sum_q n_q + \frac{PD}{2} \sum_q \sum_{q' \neq q} \bar{B}_{q'q} + Q\Pi N_2 + \sum_q G_{qq}, \quad (11)$$

$$\frac{dD}{dt} = -\Gamma_2 D + (\Gamma_1 - \Gamma_2) N_1 + R - 2PD \sum_q n_q - PD \sum_{q' \neq q''} \bar{B}_{q'q''} + G_2 - G_1, \quad (12)$$

$$\frac{dN_1}{dt} = -\Gamma_1 N_1 + PD \sum_q n_q + \frac{PD}{2} \sum_{q' \neq q''} \bar{B}_{q'q''} + G_1, \quad (13)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = -\Gamma_2 N_2 + R - PD \sum_q n_q - \frac{PD}{2} \sum_{q' \neq q''} \bar{B}_{q'q''} + G_2, \quad (14)$$

где члены, билинейные по операторам полей, ответственные за когерентное взаимодействие поля с атомами,

записываются как

$$\bar{B}_{q'q''} \equiv a_{q'}^+ a_{q''} \exp(i\Delta_{q'q''}t) + \text{h.c.} \quad (15)$$

Здесь введены обозначения

$$D \equiv N_2 - N_1, \quad R \equiv w_{02} N_A, \quad \Pi \equiv \frac{2\mu^2}{\Gamma}.$$

Новые случайные источники в (8)–(14) выражаются в следующем виде:

$$G_1 = N_A F_{11} + \sum_q N_A F_{Bq}, \quad G_2 = N_A F_{22} - \sum_q N_A F_{Bq},$$

$$F_{Bq} = \frac{\mu}{\Gamma} \left\{ a_{qc}^+ F_{12} \exp[-i(\omega_A - \omega_q)t] + F_{12}^+ a_{qc} \exp[i(\omega_A - \omega_q)t] \right\},$$

$$a_{qc} \equiv a_q(t - \varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

$$G_{a_q} = \frac{N_A \mu}{\Gamma} F_{12} \exp[i(\omega_q - \omega_A)t] + F_q,$$

$$G_{q'q''} = a_{q'}^+ F_{q''} + a_{q''} \frac{\mu}{\Gamma} \left\{ a_{q'c}^+ F_{12} \exp[-i(\omega_A - \omega_{q'})t] + F_{12}^+ a_{q'c} \exp[i(\omega_A - \omega_{q'})t] \right\} = a_{q'c}^+ G_{a_{q'}} + G_{a_{q''}}^+ a_{q''}.$$

Для полного описания квантовой динамики лазера уравнениями (8)–(14) необходимо также определить квантово-статистические свойства операторов случайных ланжевенских сил, входящих в (8)–(14). Для этого мы воспользуемся следующим подходом (см. также [50, 51]).

Стохастические уравнения Гейзенберга – Ланжевена в общем случае для произвольного оператора системы M_x могут быть записаны в виде

$$\frac{d}{dt} M_x(t) = A_x(t) + G_x(t),$$

где A_x — оператор сдвига для данного уравнения, G_x — ланжевенский оператор уравнения для оператора M_x . Тогда коэффициенты диффузии стохастических уравнений движения (8)–(14) вида $\langle 2D_{\alpha\beta} \rangle = \langle \Delta M_\alpha(t) \Delta M_\beta(t) \rangle / \Delta t$ могут быть вычислены из обобщенного соотношения Эйнштейна

$$\frac{d}{dt} \langle M_\alpha(t) M_\beta(t) \rangle = 2\langle D_{\alpha\beta}(t) \rangle + \langle A_\alpha(t) M_\beta(t) \rangle + \langle M_\alpha(t) A_\beta(t) \rangle,$$

следующего из тождества

$$\Delta M_\alpha(t) \Delta M_\beta(t) = \Delta (M_\alpha(t) M_\beta(t)) + A_\alpha(t) \Delta M_\beta(t) + \Delta M_\alpha(t) A_\beta(t),$$

где

$$\Delta M_x(t) \equiv M_x(t + \Delta t) - M_x(t), \quad x = \alpha, \beta,$$

$$\Delta (M_\alpha(t) M_\beta(t)) \equiv M_\alpha(t + \Delta t) M_\beta(t + \Delta t) - M_\alpha(t) M_\beta(t).$$

Полагая, что ланжевенские случайные источники G являются δ -коррелированными (марковское приближение), для соответствующих коэффициентов диффузии

находим [23]:

$$\langle G_i(t) G_j(u) \rangle = \langle 2D_{ij} \rangle \delta(t - u), \quad (16)$$

$$\langle 2D_{11} \rangle = \Gamma_1 \langle N_1 \rangle + S\Pi \sum_q \langle n_q \rangle + \Pi \langle N_2 \rangle Q + \Sigma_1, \quad (17)$$

$$\langle 2D_{22} \rangle = R + \Gamma_2 \langle N_2 \rangle + S\Pi \sum_q \langle n_q \rangle + \Pi \langle N_2 \rangle Q + \Sigma_1, \quad (18)$$

$$\langle 2D_{12} \rangle = -S\Pi \sum_q \langle n_q \rangle - \Pi \langle N_2 \rangle Q - \Sigma_1, \quad (19)$$

$$\langle 2D_{n_q n_q} \rangle = \gamma \langle n_q \rangle + S\Pi \langle n_q \rangle + \Pi \langle N_2 \rangle, \quad \langle 2D_{n_q n_{q'}} \rangle = \Sigma_{2q}, \quad (20)$$

$$\langle 2D_{1n_q} \rangle = S\Pi \langle n_q \rangle + \Pi \langle N_2 \rangle + \Sigma_{2q}, \quad (21)$$

$$\langle 2D_{2n_q} \rangle = -S\Pi \langle n_q \rangle - \Pi \langle N_2 \rangle - \Sigma_{2q}, \quad (22)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \Sigma_1 \equiv & \Pi \sum_{q' \neq q''} \{ \langle a_{q'}^+ a_{q''} \rangle \exp(i\Delta_{q'q''} t) \langle N_1 \rangle + \\ & + \langle a_{q'} a_{q''}^+ \rangle \exp(-i\Delta_{q'q''} t) \langle N_2 \rangle \}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{2q} \equiv & \Pi \sum_{q' \neq q} \{ \langle a_{q'}^+ a_q \rangle \exp(i\Delta_{q'q} t) \langle N_1 \rangle + \\ & + \langle a_{q'} a_q^+ \rangle \exp(-i\Delta_{q'q} t) \langle N_2 \rangle \}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$S \equiv \langle N_1 \rangle + \langle N_2 \rangle.$$

3. Стационарные средние лазерных переменных (рабочая точка лазера)

В целях последующего расчета флуктуаций числа фотонов лазерного излучения найдем стационарные решения точных уравнений (1)–(5) для квантово-механических средних от операторов системы. Для этого положим производные по времени $d/dt \langle \dots \rangle$ в усредненных по переменным системы и резервуаров уравнениях (1)–(5) равными нулю. Учитывая, что среднее от операторов ланжевеновских источников, взятое по переменным соответствующих резервуаров, равно 0, получаем следующую систему алгебраических уравнений:

$$\frac{d}{dt} \langle a_q \rangle = -\frac{\gamma}{2} \langle a_q \rangle + \mu \langle \sigma \rangle \exp(i\Delta_{qA} t) = 0, \quad (25)$$

$$\frac{d}{dt} \langle a_{q'}^+ a_{q''} \rangle = -\gamma \langle a_{q'}^+ a_{q''} \rangle + \langle B_{q'q''} \rangle = 0, \quad (26)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \sigma \rangle = -\Gamma \langle \sigma \rangle + \sum_{q=1}^Q \mu \langle a_q (N_2 - N_1) \rangle \exp(-i\Delta_{qA} t) = 0, \quad (27)$$

$$\frac{d}{dt} \langle N_1 \rangle = -\Gamma_1 \langle N_1 \rangle + \sum_{q=1}^Q \langle B_{qq} \rangle = 0, \quad (28)$$

$$\frac{d}{dt} \langle N_2 \rangle = -\Gamma_2 \langle N_2 \rangle + N_A w_{02} - \sum_{q=1}^Q \langle B_{qq} \rangle = 0, \quad (29)$$

$$D \equiv N_2 - N_1 = N_A (\sigma_{22} - \sigma_{11}), \quad \Delta_{qA} \equiv \omega_q - \omega_A, \quad (30)$$

$$R \equiv N_A w_{02}. \quad (31)$$

Найдем стационарную среднюю инверсию из уравнений для поля и поляризации (25), (26):

$$-\frac{\gamma}{2} \langle a_q \rangle + \mu \langle \sigma \rangle \exp(i\Delta_{qA} t) = 0, \quad (32)$$

$$-\Gamma \langle \sigma \rangle + \sum_{q=1}^Q \mu \langle a_q D \rangle \exp(-i\Delta_{qA} t) = 0. \quad (33)$$

Полагаем, что при превышении порога генерации атомные и полевые переменные не коррелируют между собой:

$$\langle a_q D \rangle \approx \langle a_q \rangle \langle D \rangle, \quad (34)$$

что справедливо при большом числе активных атомов и большом числе фотонов в каждой моде поля [79].

Из уравнения (32) следует, что

$$\langle a_q \rangle = \frac{2\mu}{\gamma} \langle \sigma \rangle \exp(i\Delta_{qA} t), \quad \forall q, \quad (35)$$

$$\langle \sigma \rangle = \frac{\gamma}{2\mu} \langle a_q \rangle \exp(-i\Delta_{qA} t). \quad (36)$$

С учетом приближения (34) из (33) получим

$$\langle \sigma \rangle = \frac{\mu}{\Gamma} \sum_q \langle a_q \rangle \langle D \rangle \exp(-i\Delta_{qA} t). \quad (37)$$

Из соотношений (35) и (37) следует:

$$\begin{aligned} \langle \sigma \rangle &= \frac{\mu}{\Gamma} \sum_{q'} \langle a_{q'} \rangle \langle D \rangle \exp(-i\Delta_{q'A} t) = \\ &= \frac{\gamma}{2\mu} \langle a_q \rangle \exp(-i\Delta_{qA} t), \quad \forall q. \end{aligned} \quad (38)$$

Просуммируем равенство (38) по q :

$$\begin{aligned} \sum_q \langle \sigma \rangle &= Q \langle \sigma \rangle = \frac{\mu}{\Gamma} \sum_q \left(\sum_{q'} \langle a_{q'} \rangle \langle D \rangle \exp(-i\Delta_{q'A} t) \right) = \\ &= \frac{\gamma}{2\mu} \sum_q \langle a_q \rangle \exp(-i\Delta_{qA} t) = \\ &= \frac{\mu Q}{\Gamma} \left(\sum_{q'} \langle a_{q'} \rangle \langle D \rangle \exp(-i\Delta_{q'A} t) \right). \end{aligned}$$

Делая замену $q \rightarrow q'$ в последнем равенстве и обозначая $S \equiv \sum_{q'} \langle a_{q'} \rangle \exp(-i\Delta_{q'A} t)$, находим

$$\frac{Q\mu}{\Gamma} \langle D \rangle S = \frac{\gamma}{2\mu} S,$$

откуда получаем соотношение для инверсии населенностей

$$\langle D \rangle = \frac{\gamma\Gamma}{2\mu^2 Q} = \frac{\gamma}{PQ}. \quad (39)$$

Из соотношения (39) следует, что инверсия населенностей в случае многомодовой генерации значительно ниже, чем в случае одномодовой генерации ($Q = 1$). Таким образом, эффект насыщения усиления в многомодовом случае является значительно бóльшим, чем в одномодовом. Заметим, что подавление флуктуаций числа фотонов в лазерном излучении при превышении порога обусловлено эффектом насыщения.

Рассмотрим члены $B_{q'q''}(t)$, входящие в систему уравнений (1)–(5), ответственные за вынужденное излучение и определенные в (6) как

$$B_{q'q''}(t) \equiv [\mu_{q'} a_{q'}^+ \sigma \exp(i\Delta_{q''\Lambda} t) + \mu_{q''} \sigma^+ a_{q''} \exp(-i\Delta_{q'\Lambda} t)]. \quad (40)$$

Подобно тому, как это было сделано в (34), будем считать, что $\langle \sigma^+ a_{q''} \rangle_0 \approx \langle \sigma^+ \rangle \langle a_{q''} \rangle$, $\langle a_{q'}^+ \sigma \rangle_0 \approx \langle a_{q'}^+ \rangle \langle \sigma \rangle$. Полагая также, что $\mu = \mu_q$, $\forall q$, подставим (36) в (40). Тогда для среднего квантово-механического получаем

$$\langle B_{q'q''}(t) \rangle \approx \mu \frac{\gamma}{2\mu} [\exp(-i\Delta_{q'\Lambda} t) \langle a_{q'}^+ \rangle \langle a_{q''} \rangle \exp(i\Delta_{q''\Lambda} t) + \langle a_{q''}^+ \rangle \langle a_{q''} \rangle \exp(i\Delta_{q''\Lambda} t) \exp(-i\Delta_{q'\Lambda} t)].$$

Следовательно,

$$\langle B_{q'q''}(t) \rangle \approx \frac{\gamma}{2} (\langle a_{q'}^+ \rangle \langle a_{q''} \rangle + \langle a_{q''}^+ \rangle \langle a_{q''} \rangle) \exp(i\Delta_{q''\Lambda} t) = \gamma \langle a_{q'}^+ \rangle \langle a_{q''} \rangle \exp(i\Delta_{q''\Lambda} t), \quad \forall q, q', q'', \quad (41)$$

так как

$$\langle a_q \rangle = \langle a_{q'} \rangle \exp(i\Delta_{qq'} t) = \langle a_{q''} \rangle \exp(i\Delta_{qq''} t), \quad (42)$$

$$\langle a_q^+ \rangle = \langle a_{q'}^+ \rangle \exp(-i\Delta_{qq'} t) = \langle a_{q''}^+ \rangle \exp(-i\Delta_{qq''} t).$$

Найдем стационарные средние населенности лазерных уровней и числа фотонов из уравнений для N_1 , N_1 и $a_{q'}^+ a_{q''}$.

Воспользуемся для этого уравнениями (28), (29) и соотношениями (39), (41). Находим

$$-\Gamma_2 N_{20} + R - \sum_q B_{qq} = -\Gamma_2 N_{20} + R - \sum_q \gamma \langle a_q^+ \rangle \langle a_q \rangle = 0, \quad (43)$$

$$-\Gamma_1 N_{10} + \sum_q \gamma \langle a_q^+ \rangle \langle a_q \rangle = 0. \quad (44)$$

Обозначим $\rho \equiv \langle a_q^+ \rangle \langle a_q \rangle$. Используя (42), из (43) получаем

$$N_{20} = \frac{R - Q\gamma\rho}{\Gamma_2}. \quad (45)$$

Подставляя (45) в (44), находим

$$\rho = \frac{\bar{\Gamma}}{\Pi Q^2} \left(\frac{\Pi R Q}{\gamma \Gamma_2} - 1 \right). \quad (46)$$

Итак, мы получили стационарные средние значения атомных переменных D_0 , N_{10} , N_{20} и ρ . Теперь из уравнений для $\langle a_q^+ a_{q''} \rangle$ (26) найдем $\langle n_{q0} \rangle$ и $N_{\text{ph}0} = \sum_{q=1}^Q \langle n_{q0} \rangle$ — среднее значение числа фотонов в отдельной моде поля и полное число фотонов во всех модах поля соответственно.

При $q' = q''$ имеем

$$\frac{d}{dt} \langle n_q \rangle = -\gamma \langle n_q \rangle + \langle B_{qq} \rangle = 0,$$

$$\langle B_{qq} \rangle = \gamma \langle a_q^+ \rangle \langle a_q \rangle = \gamma \rho.$$

Откуда

$$n_0 \equiv \langle n_{q0} \rangle = \frac{\langle B_{qq} \rangle}{\gamma} = \frac{\gamma \rho}{\gamma} = \rho. \quad (47)$$

Таким образом, мы показали, что

$$\langle n_{q0} \rangle = \langle a_q^+ a_q \rangle = \langle a_q^+ \rangle \langle a_q \rangle = \frac{\bar{\Gamma}}{\Pi Q^2} \left(\frac{\Pi R Q}{\gamma \Gamma_2} - 1 \right). \quad (48)$$

Аналогично находим

$$\langle a_{q'}^+ a_{q''} \rangle = n_0 \exp(i\Delta_{q''\Lambda} t). \quad (49)$$

4. Процедура квазилинеаризации балансных уравнений и расчет флуктуаций числа фотонов внутри резонатора

Для расчета флуктуаций фотонов воспользуемся приближением балансных уравнений. Для этого усредним по времени быстроосциллирующие во времени члены, пропорциональные $\bar{B}_{q',q''}(t)$, определенные согласно (15) и содержащиеся в правых частях уравнений (10)–(14). Применяя эргодическую теорему, заменим усреднение по времени квантово-механическим усреднением по ансамблю реализаций, т.е.

$$\begin{aligned} \overline{\frac{PD}{2} B_{q'q''}(t)} &= \overline{\frac{PD}{2} a_{q'}^+ a_{q''} \exp(i\Delta_{q''\Lambda} t) + \frac{PD}{2} a_{q''}^+ a_{q'} \exp(-i\Delta_{q''\Lambda} t)} = \\ &= \left\langle \frac{PD}{2} B_{q'q''}(t) \right\rangle = \left\langle \frac{PD}{2} a_{q'}^+ a_{q''} \right\rangle \exp(i\Delta_{q''\Lambda} t) + \\ &+ \left\langle \frac{PD}{2} a_{q''}^+ a_{q'} \right\rangle \exp(-i\Delta_{q''\Lambda} t). \end{aligned} \quad (50)$$

Используем далее предположение о факторизации корреляторов атомных и полевых переменных вида $\langle a_q^+ a_{q''} D \rangle \approx \langle a_q^+ a_{q''} \rangle \langle D \rangle$. Поскольку усредненные по времени величины от него не зависят, учитывая соотношение (49) и подставляя средние стационарные значения D_0 и n_0 в усредненные члены, приходим к следующей системе стохастических балансных уравнений для переменных лазера:

$$\frac{dn_q(t)}{dt} = -\gamma n_q(t) + PD(t) n_q(t) + C_{n_q} + G_{n_q}(t), \quad (51)$$

$$\frac{dN_{\text{ph}}(t)}{dt} = -\gamma N_{\text{ph}}(t) + PD(t) N_{\text{ph}}(t) + C_{N_{\text{ph}}} + G_{N_{\text{ph}}}(t), \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \frac{dD(t)}{dt} &= -\Gamma_2 D(t) + (\Gamma_1 - \Gamma_2) N_1(t) - 2PD(t) N_{\text{ph}}(t) + R + \\ &+ C_D + G_2(t) - G_1(t), \end{aligned} \quad (53)$$

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = -\Gamma_1 N_1(t) + PD(t) N_{\text{ph}}(t) + C_1 + G_1(t). \quad (54)$$

Значения констант $\{C_i\}$ (средних значений) зависят от выбора рабочей точки генерации лазера. Так, для рабочей точки (39), (45), (48) получаем: $C_{n_q} = \gamma n_0 (1 - 1/Q) = C_{N_{\text{ph}}}/Q$, $C_{N_1} = -C_{N_2} = C_{N_{\text{ph}}} = -C_D/2$.

Нетрудно убедиться, что стационарные решения квантово-механически усредненных приближенных кинетических

тических уравнений (51)–(54)

$$\left\langle \frac{dn_q}{dt} \right\rangle, \left\langle \frac{dN_{ph}}{dt} \right\rangle, \left\langle \frac{dD}{dt} \right\rangle, \left\langle \frac{dN_1}{dt} \right\rangle = 0$$

совпадают с найденной выше рабочей точкой (39), (45), (48), полученной в результате решения точных уравнений движения.

Запишем уравнения в следующих переменных:

$$\Delta n_q(t) = n_q(t) - n_0, \quad \Delta N_{ph}(t) = N_{ph}(t) - N_{ph0}, \quad (55)$$

$$\Delta D(t) = D(t) - D_0, \quad \Delta N_1(t) = N_1(t) - N_{10},$$

характеризующих отклонения переменных от их средних стационарных значений.

Отбрасывая нелинейные по малым отклонениям члены, получим

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta D(t)}{dt} = & -\Gamma_2 \Delta D(t) + (\Gamma_1 - \Gamma_2) \Delta N_1(t) - \\ & - 2\Pi(D_0 \Delta N_{ph}(t) + \Delta D N_{ph0}(t)) + G_2(t) - G_1(t), \end{aligned} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta N_1(t)}{dt} = & -\Gamma_1 \Delta N_1(t) + \\ & + \Pi(D_0 \Delta N_{ph}(t) + N_{ph0} \Delta D(t)) + G_1(t), \end{aligned} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta N_{ph}(t)}{dt} = & -\gamma \Delta N_{ph}(t) + \\ & + \Pi(D_0 \Delta N_{ph}(t) + N_{ph0} \Delta D(t)) + G_{N_{ph}}(t), \end{aligned} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta n_q(t)}{dt} = & -\gamma \Delta n_q(t) + \Pi(D_0 \Delta n_q(t) + n_0 \Delta D(t)) + G_{n_q}(t). \end{aligned} \quad (59)$$

Выполним далее стандартное преобразование Фурье для системы (56)–(59):

$$\begin{aligned} -i\omega \Delta D(\omega) = & -\Gamma_2 \Delta D(\omega) + (\Gamma_1 - \Gamma_2) \Delta N_1(\omega) - \\ & - 2\Pi(D_0 \Delta N_{ph}(\omega) + \Delta D(\omega) N_{ph0}) + G_2(\omega) - G_1(\omega), \end{aligned} \quad (60)$$

$$\begin{aligned} -i\omega \Delta N_1(\omega) = & -\Gamma_1 \Delta N_1(\omega) + \\ & + \Pi(D_0 \Delta N_{ph}(\omega) + N_{ph0} \Delta D(\omega)) + G_1(\omega), \end{aligned} \quad (61)$$

$$\begin{aligned} -i\omega \Delta N_{ph}(\omega) = & -\gamma \Delta N_{ph}(\omega) + \\ & + \Pi(D_0 \Delta N_{ph}(\omega) + N_{ph0} \Delta D(\omega)) + G_{N_{ph}}(\omega), \end{aligned} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} -i\omega \Delta n_q(\omega) = & -\gamma \Delta n_q(\omega) + \\ & + \Pi(D_0 \Delta n_q(\omega) + n_0 \Delta D(\omega)) + G_{n_q}(\omega). \end{aligned} \quad (63)$$

Из уравнений (60) и (61) получаем

$$\begin{aligned} \Delta D(\omega) = & \frac{1}{\zeta(\omega)} [(\Gamma_1 - \Gamma_2) \Pi D_0 \Delta N_{ph}(\omega) - z_2 G_1(\omega) - \\ & - 2\Pi D_0 z_1 \Delta N_{ph}(\omega) + z_1 G_2(\omega)], \end{aligned} \quad (64)$$

где

$$z_j \equiv -i\omega + \Gamma_j, \quad j = 1, 2, \quad (65)$$

$$\zeta \equiv z_1 z_2 + (z_2 + z_2) \Pi N_{ph0}. \quad (66)$$

Подставив (64) в (62), находим

$$\Delta N_{ph}(\omega) = \frac{-\Pi z_2 N_{ph0} G_1(\omega) + \Pi z_1 N_{ph0} G_2(\omega) + \zeta G_{N_{ph}}(\omega)}{\zeta_1(\omega)}, \quad (67)$$

$$\zeta_1 \equiv \zeta \Delta + z \Pi Q^{-1} N_{ph0}, \quad (68)$$

$$\Delta \equiv -i\omega + \gamma \left(1 - \frac{1}{Q}\right), \quad z = z_1 + z_2. \quad (69)$$

Согласно теореме Винера–Хинчина спектр флуктуаций стационарного случайного процесса $A(t)$ удовлетворяет соотношению

$$S_A(\omega) \equiv \langle A^+(\omega) A(\omega) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \exp(-i\omega\tau) \langle A^+(\tau) A(0) \rangle,$$

где $A(\omega)$ — преобразование Фурье $A(t)$. Полагая $A(t) = \Delta N(t)$, имеем

$$\begin{aligned} \langle \Delta N^+(\omega) \Delta N(\omega) \rangle = & S_{\Delta N}(\omega) = \\ = & \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \langle \Delta N^+(\omega) \Delta N(\omega') \rangle = \\ = & \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \langle \Delta N^2(\omega) \rangle \delta(\omega + \omega') = \langle \Delta N^2(\omega) \rangle, \end{aligned}$$

где использовано свойство δ -коррелированности преобразований Фурье ланжевеновских случайных источников $\langle F_\alpha(\omega) F_\beta(\omega') \rangle = \langle 2D_{\alpha\beta} \rangle \delta(\omega + \omega')$, входящих в фурье-преобразования квазилинеаризованных уравнений движения.

Теперь, чтобы выразить $\langle (\Delta N)^2 \rangle$ через $\langle \Delta N^2(\omega) \rangle$, воспользуемся теоремой Винера–Хинчина:

$$\langle \Delta N^2(\omega) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \exp(-i\omega\tau) \langle \Delta N^+(\tau) \Delta N(0) \rangle.$$

Интегрируя по ω , получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \langle \Delta N^2(\omega) \rangle = & \\ = & \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega\tau) d\omega \right) d\tau \langle \Delta N^+(\tau) \Delta N(0) \rangle = \\ = & \int_{-\infty}^{\infty} d\tau 2\pi \delta(\tau) \langle \Delta N^+(\tau) \Delta N(0) \rangle = 2\pi \langle (\Delta N(0))^2 \rangle, \end{aligned}$$

т.е. для стационарных флуктуаций числа фотонов

$$\langle (\Delta N)^2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \langle \Delta N^2(\omega) \rangle.$$

Используя (67), для стационарных флуктуаций числа фотонов в резонаторе лазера находим

$$\begin{aligned} \langle (\Delta N_{ph})^2 \rangle = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \langle \Delta N_{ph}^+(\omega) \Delta N_{ph}(\omega) \rangle = \\ = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega |\zeta_1|^{-2} \{ |\Pi N_{ph0} z_2|^2 \langle 2D_{11} \rangle + |\Pi N_{ph0} z_1|^2 \times \\ & \times \langle 2D_{22} \rangle + |\zeta|^2 \langle 2D_{N_{ph}N_{ph}} \rangle - \Pi N_{ph0} 2 \operatorname{Re}(z_2^* \zeta) \langle 2D_{1N_{ph}} \rangle + \\ & + \Pi N_{ph0} 2 \operatorname{Re}(z_1^* \zeta) \langle 2D_{2N_{ph}} \rangle - (\Pi N_{ph0})^2 2 \operatorname{Re}(z_2^* z_1) \langle D_{12} \rangle \}, \end{aligned} \quad (70)$$

$$\langle 2D_{1N_{ph}} \rangle = Q \langle 2D_{1q} \rangle, \quad \langle 2D_{2N_{ph}} \rangle = Q \langle 2D_{2q} \rangle, \\ \langle 2D_{N_{ph}N_{ph}} \rangle = Q \langle 2D_{n_q n_q} \rangle + Q(Q-1) \langle 2D_{n_q n_{q'}} \rangle.$$

Коэффициенты диффузии, входящие в (70), могут быть получены из (16)–(24) путем подстановки средних стационарных величин N_0, b_0, N_{10}, D_0 , формулы для которых приведены в разделе 2.

Стационарные коэффициенты диффузии находятся из (16)–(24) путем подстановки средних стационарных величин $N_{ph0}, n_0, N_{10}, D_0, \langle a_q^+ a_q \rangle_0$, относящихся к соответствующей рабочей точке. Как видно из (23) и (24), коэффициенты диффузии зависят от перекрестных полевых членов, для вычисления которых мы воспользуемся соотношением (49). Пренебрегая малыми членами, находим:

$$\langle 2D_{11} \rangle = \Gamma_1 N_{10} + \Pi S_0 N_{ph0} Q, \quad (71)$$

$$\langle 2D_{22} \rangle = \Gamma_2 N_{20} + R + \Pi S_0 N_{ph0} Q, \quad (72)$$

$$\langle 2D_{12} \rangle = -\Pi S_0 N_{ph0} Q, \quad (73)$$

$$\langle 2D_{1n_q} \rangle = -\langle 2D_{2n_q} \rangle = \Pi S_0 n_0 Q, \quad (74)$$

$$\langle 2D_{n_q n_{q'}} \rangle = \gamma n_0 \delta_{qq'} + \Pi S_0 n_0 Q, \quad (75)$$

где $\delta_{qq'}$ — символ Кронекера. Малыми членами $Q \Pi N_{20}$ и $Q^2 \Pi N_{20}$ в условиях большого превышения порога генерации пренебрегается.

Для преобразования Фурье отклонений от среднего числа фотонов в отдельной моде поля с учетом (63) получаем [50]

$$\Delta n_q(\omega) = \frac{\alpha G_1(\omega) + \beta G_2(\omega) + \mu G_q(\omega) + v \sum_{q' \neq q} G_{q'}(\omega)}{A(\omega) + (Q-1) B(\omega)}, \quad (76)$$

где

$$\alpha \equiv -z_2 \Pi n_0, \\ \beta \equiv z_1 \Pi n_0, \\ \mu \equiv \frac{\zeta}{A-B} [A + B(Q-2)], \\ v \equiv -\frac{B\zeta}{A-B}, \\ A(\omega) \equiv \zeta A + \frac{z\gamma \Pi n_0}{Q}, \\ B(\omega) \equiv \frac{\Pi n_0 \gamma z}{Q}. \quad (77)$$

Тогда для флуктуаций числа фотонов в отдельной моде поля получим

$$\langle (\Delta n_q)^2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega |A(\omega) + (Q-1) B(\omega)|^{-2} \times \\ \times \left\{ |\alpha|^2 \langle 2D_{11} \rangle + |\beta|^2 \langle 2D_{22} \rangle + |v|^2 \sum_{q', q'' \neq q} \langle 2D_{q' q''} \rangle + \right. \\ \left. + |\mu|^2 \langle 2D_{qq} \rangle + 2 \operatorname{Re}(v^* \mu) \sum_{q' \neq q} \langle 2D_{q' q} \rangle + \right. \\ \left. + 2 \operatorname{Re}(\alpha^* \beta) \langle 2D_{12} \rangle + 2 \operatorname{Re}(\beta^* \mu) \langle 2D_{2q} \rangle + \right. \\ \left. + 2 \operatorname{Re}(\alpha^* v) \sum_{q' \neq q} \langle 2D_{q' 1} \rangle + 2 \operatorname{Re}(\beta^* v) \sum_{q' \neq q} \langle 2D_{q' 2} \rangle \right\}, \quad (78)$$

5. Спектр фотонного шума излучения, выходящего через зеркало резонатора

Электромагнитное поле вне резонатора состоит из поля, выходящего через зеркало из резонатора, и поля электромагнитного теплового резервуара непрерывного спектра мод пустого пространства, находящегося вне резонатора. Для каждой моды q излучения, генерируемого лазером, поле вне резонатора представляется в виде следующей суперпозиции [80]:

$$a_q^{(out)}(t) = \sqrt{\gamma} a_q(t) - b_q^{(in)}(t). \quad (79)$$

где $a_q(t)$ — оператор дискретного спектра поля внутри резонатора, $b_q^{(in)}(t)$ — оператор поля непрерывного спектра поля вне резонатора. Дальнейшие расчеты позволят нам найти вид этого оператора.

Релаксация поля (потери резонатора) является следствием взаимодействия дискретных мод поля внутри резонатора с резервуаром непрерывного спектра электромагнитного поля вне резонатора. Гамильтониан взаимодействия, приводящего к затуханию поля в резонаторе (потери при прохождении через зеркала), может быть записан в виде

$$V_{F-R} = \hbar \sum_{j,q} g_{j,q} (b_j a_q^+ + a_q b_j^+),$$

где $g_{j,q}$ — константа связи, которая может быть выражена через скорости потерь в зеркалах резонатора, $g_{j,q} = |g_{j,q}| \exp(i\phi_{j,q})$. Фаза константы связи $\phi_{j,q}$ произвольна и определяется геометрией задачи.

Уравнения Гейзенберга для операторов поля $a_q(t)$ и $b_j(t)$ имеют вид

$$\dot{a}_q(t) = -\frac{i}{\hbar} [a_q(t), H_S] - i \sum_j g_{j,q} b_j(t) \exp(i\Delta_{qj} t), \quad (80)$$

$$\dot{b}_j(t) = -i g_{j,q}^* a_q(t) \exp(-i\Delta_{qj} t),$$

где последний член в первом из этих уравнений соответствует случайному источнику в ланжевеновских уравнениях для резонаторных мод. Нетрудно видеть, что случайные источники выражаются через операторы резервуара как $F_q(t) = -i \sum_j g_{j,q} b_j(0) \exp(i\Delta_{qj} t)$, $\Delta_{qj} = \omega_q - \omega_j$. Скорости потерь резонатора γ_q могут быть выражены через константу связи и плотность состояний поля: $\gamma_q = 2\pi |g(\omega_q)|^2 \rho(\omega_q) \approx \gamma$, где $g(\omega_q) = g_{j,q}$ при $\omega_k = \omega_q$, $\rho(\omega)$ — плотность состояния свободного пространства [81]. Для константы связи теперь имеем

$$|g(\omega_q)| = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi\rho(\omega_q)}}.$$

Проведем формальное интегрирование уравнений Гейзенберга для $b_j(t)$ и подставим полученные таким образом решения, которые содержат зависимости от операторов поля a_q , в следующее выражение для оператора полного поля вне резонатора:

$$a_q^{(out)}(t) = i \exp(i\phi_q) \sum_j \left(\frac{2\pi\omega_j}{\rho(\omega_q)\omega_q} \right)^{1/2} b_j(t) \exp(-i\Delta_{qj} t),$$

записываемое нами в единицах потока фотонов. Заменяя в полученном выражении суммирование по модам

резервуара j интегрированием и применив марковское приближение [81], мы получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} a_q^{(\text{out})}(t) &\equiv E_{\text{free}}^{(+)}(t) + E_{\text{source}}^{(+)}(t) = \\ &= \exp(i\phi_q) \sum_j \left(\frac{2\pi\omega_j}{\rho(\omega_j)\omega_q} \right)^{1/2} b_j(0) \exp(-i\Delta_{q,j}t) + \\ &+ \sqrt{\gamma} a_q(t), \end{aligned} \quad (79a)$$

здесь операторы $E_{\text{free}}^{(+)}(t)$ и $E_{\text{source}}^{(+)}(t)$ описывают свободную эволюцию поля резервуара и эволюцию поля лазерного источника, проходящего через зеркало. Поскольку излучаемое на выходе лазера излучение содержит компоненту лазерного излучения, прошедшего через зеркало, и компоненту поля резервуара, отраженного от зеркала, для фазы параметра связи $g(\omega_q) = |g_q| \exp(i\phi_q)$ нами принимается значение $\phi_q = \pi$.

Таким образом, мы определили оператор полного внешнего поля (79a), включающий в себя как операторы поля резервуара, так и оператор лазерного поля q -й моды резонатора, выходящего через зеркала. Нетрудно заметить, что соотношение (79a) совпадает с (79), если

$$b_q^{(\text{in})}(t) = \sum_j \left(\frac{2\pi\omega_j}{\rho(\omega_j)\omega_q} \right)^{1/2} b_j(0) \exp(-i\Delta_{q,j}t).$$

Гейзенберговский оператор $a^{(\text{out})+}(t)a^{(\text{out})}(t)$ представляет собой оператор числа фотонов, выходящих через зеркало в единицу времени. Операторы $a_q^{(\text{out})}$ и $b_q^{(\text{in})}$ удовлетворяют коммутационным соотношениям для бозе-операторов непрерывного спектра вида $[b_q^{(\text{in})}(t), b_{q'}^{+(\text{in})}(u)] = \delta(t-u)\delta_{qq'}$. Для операторов резервуара, находящегося в равновесии при температуре T , имеем [80, 81]:

$$\begin{aligned} \langle b_q^{(\text{in})+}(t) b_{q'}^{(\text{in})}(u) \rangle &= \bar{n}_{qT} \delta(t-u) \delta_{qq'}, \\ \langle b_q^{(\text{in})}(t) b_{q'}^{(\text{in})+}(u) \rangle &= (\bar{n}_{qT} + 1) \delta(t-u) \delta_{qq'}. \end{aligned} \quad (81)$$

Можно показать, что операторы $b_q^{(\text{in})}(t)$ связаны с операторами ланжевеновских случайных источников $F_q(t)$, входящих в уравнения (1), соотношением $F_q(t) = \sqrt{\gamma} b_q^{(\text{in})}(t)$.

Выразим полевые операторы внутри и вне резонатора через операторы амплитуд и фаз:

$$\begin{aligned} a_q^+(t) &= (r_{q0}(t) + \Delta r_q(t)) \exp\{-i[\phi_{q0}(t) + \Delta\phi_q(t)]\}, \\ a_q^{(\text{out})+}(t) &= (r_{q0}^{(\text{out})}(t) + \Delta r_q^{(\text{out})}(t)) \exp\{-i[\psi_{q0}(t) + \Delta\psi_q(t)]\}, \\ a_q(t) &= \exp\{i[\phi_{q0}(t) + \Delta\phi_q(t)]\} (r_{q0}(t) + \Delta r_q(t)), \end{aligned} \quad (82)$$

$$a_q^{(\text{out})}(t) = \exp\{i[\psi_{q0}(t) + \Delta\psi_q(t)]\} (r_{q0}^{(\text{out})}(t) + \Delta r_q^{(\text{out})}(t)),$$

здесь $r_{q0}, r_{q0}^{(\text{out})}, \phi_{q0}, \psi_{q0}$ — средние значения амплитуд и фаз полей, $\Delta r_{q0}, \Delta r_{q0}^{(\text{out})}, \Delta\phi_q, \Delta\psi_q$ — операторы флуктуации амплитуд и фаз полей; операторы амплитуд и фаз выражаются в виде $r_q(t) = r_{q0}(t) + \Delta r_q(t)$, $\phi_q(t) = \phi_{q0}(t) + \Delta\phi_q(t)$ и т.д. Эрмитовы операторы амплитуды и фазы данной формы могут быть корректно определены в рамках подхода, предложенного Пеггом и Барнетом (см., например, [76]). При этом выполняются

соотношения

$$\begin{aligned} n_q(t) &= (r_{q0}(t) + \Delta r_q(t))^2, \\ n_q^{(\text{out})}(t) &= (r_{q0}^{(\text{out})}(t) + \Delta r_q^{(\text{out})}(t))^2. \end{aligned} \quad (83)$$

Подставляя (82) в (79), находим

$$\begin{aligned} \Delta r_q^{(\text{out})}(t) &= \sqrt{\gamma} \Delta r_q(t) - \\ &- \frac{1}{2} [\exp(i\psi_q(t)) b_q^{(\text{in})}(t) + b_q^{+(\text{in})}(t) \exp(-i\psi_q(t))]. \end{aligned} \quad (84)$$

При выводе выражения (84) использовались соотношения $\cos(\Delta\psi_q - \Delta\phi_q) \approx 1$, $\langle \Delta\phi_q \rangle = \langle \Delta\psi_q \rangle = 0$ и $\phi_{q0} = \psi_{q0}$, последнее из которых вытекает из уравнения (79a).

Поскольку из (83) следует

$$\Delta r_q(t) = \frac{\Delta n_q(t)}{2r_{q0}(t)}, \quad \Delta r_q^{(\text{out})}(t) = \frac{\Delta n_q^{(\text{out})}(t)}{2r_{q0}^{(\text{out})}(t)},$$

$$n_{q0}^{(\text{out})}(t) = \gamma n_{q0}(t),$$

то из (84) находим

$$\Delta n_q^{(\text{out})}(t) = \gamma \Delta n_q(t) - F_{rq}(t), \quad (85)$$

где

$$\begin{aligned} F_{rq}(t) &= 2\sqrt{\gamma n_{q0}} f_{rq}(t), \\ f_{rq}(t) &\equiv \frac{1}{2} (\exp(i\psi_q(t)) b_q^{(\text{in})}(t) + b_q^{+(\text{in})}(t) \exp(-i\psi_q(t))), \end{aligned} \quad (86)$$

причем, учитывая (81), нетрудно убедиться, что

$$\langle f_{rq}(t) f_{rq'}^+(u) \rangle = \frac{1}{2} (\bar{n}_{qT} + \frac{1}{2}) \delta(t-u) \delta_{qq'}, \quad (87)$$

$$\langle F_{rq}(t) F_{rq'}^+(u) \rangle = 2\gamma n_{q0} (\bar{n}_{qT} + \frac{1}{2}) \delta(t-u) \delta_{qq'}. \quad (88)$$

Для оператора полного числа фотонов $N = \sum_{q=1}^Q n_q$ имеем

$$\begin{aligned} \Delta N^{(\text{out})}(t) &= \gamma \Delta N(t) - F_r(t), \\ F_r(t) &= 2\sqrt{\gamma} \sum_q \sqrt{n_{q0}} f_{rq}(t), \end{aligned} \quad (89)$$

$$\begin{aligned} \langle F_r(t) F_r^+(u) \rangle &= 2\gamma N_0 \delta(t-u), \\ \bar{n}_{qT} &\ll 1, \quad \forall q. \end{aligned} \quad (90)$$

Величиной, характеризующей статистику излучения лазера, проходящего через выходное зеркало резонатора лазера, является стационарный спектр флуктуаций числа фотонов (спектральная плотность) следующего вида:

$$\begin{aligned} S_{\Delta x}^{(\text{out})}(\omega) &\equiv \langle (\Delta x^{(\text{out})}(\omega))^2 \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \langle \Delta x^{(\text{out})+}(\omega) \Delta x^{(\text{out})}(\omega') \rangle d\omega' = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \langle (\Delta x^{(\text{out})}(\omega))^2 \rangle \delta(\omega - \omega') d\omega', \quad x = \Delta N, \Delta n_q. \end{aligned} \quad (91)$$

С помощью (85) и (89), учитывая уравнения для преобразований Фурье $\Delta N(\omega)$ и $\Delta n_q(\omega)$ (67) и (76), а также соотношение $\langle G_{x,\omega}^+ G_{y,\omega'} \rangle = \langle 2D_{xy} \rangle \delta(\omega - \omega')$, $x, y = 1, 2, q, q'$, находим спектр флуктуаций (спектральную плотность шума) полного числа фотонов на выходе резонатора:

$$S_{\Delta N}^{(out)}(\omega) = \gamma^2 \langle \Delta N^2(\omega) \rangle + \gamma N_0 - \gamma [\langle \Delta N^+(\omega) F_r(\omega) \rangle + \langle F_r^+(\omega) \Delta N(\omega) \rangle]. \quad (92a)$$

Аналогично находим спектр флуктуаций чисел фотонов в отдельной моде

$$S_{\Delta n_q}^{(out)}(\omega) = \gamma^2 \langle \Delta n_q^2(\omega) \rangle + \gamma n_0 - \gamma [\langle \Delta n_q^+(\omega) F_r(\omega) \rangle + \langle F_r^+(\omega) \Delta n_q(\omega) \rangle]. \quad (92b)$$

Вычислим спектральные корреляционные функции, входящие в спектры флуктуаций вида (92). Для этого воспользуемся выражением (67) для фурье-компоненты оператора флуктуаций полного числа фотонов внутри резонатора $\Delta N(\omega)$. Подставляя (67) в (92a), получаем для спектрального фактора Фано, определяемого как $V_{\Delta N}^{(out)} = S_{\Delta N}^{(out)}(\omega) / (\gamma N_0)$, следующее выражение:

$$V_{\Delta N}^{(out)}(\omega) = \frac{S_{\Delta N}^{(out)}(\omega)}{\gamma N_0} = \frac{1}{\gamma N_0} \left\{ |\zeta_1|^{-2} [|PN_0 z_2|^2 \langle 2D_{11} \rangle + |PN_0 z_1|^2 \langle 2D_{22} \rangle + |\zeta|^2 \langle 2D_{NN} \rangle - PN_0 2 \operatorname{Re}(z_2^* \zeta) \langle 2D_{1N} \rangle + PN_0 2 \operatorname{Re}(z_1^* \zeta) \langle 2D_{2N} \rangle - (PN_0)^2 2 \operatorname{Re}(z_2^* z_1) \langle 2D_{12} \rangle] \right\} - 2\gamma^2 \operatorname{Re}\left(\frac{\zeta_1}{\zeta}\right) + 1, \quad (93)$$

где

$$\langle 2D_{1N} \rangle = Q \langle 2D_{1n_q} \rangle, \quad \langle 2D_{2N} \rangle = Q \langle 2D_{2n_q} \rangle, \\ \langle 2D_{NN} \rangle = Q \langle 2D_{n_q n_q} \rangle + (Q-1) Q \langle 2D_{n_q n_{q'}} \rangle, \quad q' \neq q. \quad (94)$$

Аналогично из (92b) определяется спектральный фактор Фано $S_{\Delta n}^{(out)}(\omega) / (\gamma n_0)$ для интенсивности излучения лазера в отдельной моде. Нормированная на уровень дробового шума спектральная плотность фотонного шума $V(\omega)$ (спектральный фактор Фано (93)) принимает значение, меньшее 1, при сжатии на определенной частоте в случае неоднородного сжатия излучения лазера или же оказывается меньше 1 при всех частотах в случае однородного сжатия.

6. Результаты расчетов спектра фотонного шума излучения многомодового лазера

К числу известных трехуровневых лазеров с многомодовой генерацией относятся лазеры на неодимовом стекле и лазеры Nd:YAG. Эксперименты с лазером на неодимовом стекле продемонстрировали возможность генерации большого числа мод с близкими по величине интенсивностями [82]. Такой режим генерации лазера с трехуровневой схемой атомных уровней активной среды наиболее близок к рассматриваемой нами теоретической модели. В связи с этим нами проведены расчеты квантовых флуктуаций излучения лазера с использованием параметров, характерных для указанных твердотельных

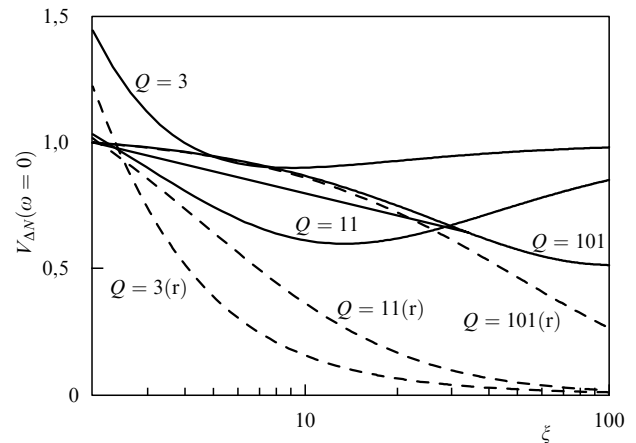


Рис. 1. Спектральная плотность флуктуаций на частоте $\omega \approx 0$ полного числа фотонов излучения лазера в зависимости от параметра превышения порога ξ для различного числа мод Q . Параметры лазера $\gamma = 10^9 \text{ c}^{-1}$, $P = 10^{-5} \text{ c}^{-1}$, $\Gamma_1 = 10^7 \text{ c}^{-1}$, $\Gamma_2 = 10^3 \text{ c}^{-1}$. Сплошными кривыми показаны результаты для шумящей накачки, штриховыми — для регулярной (r) накачки

лазеров. Типичными значениями параметров данных лазеров являются [82–85]: скорость потерь резонатора $\gamma = 10^8 \text{ c}^{-1}$, параметр усиления $P = 10^{-5} \text{ c}^{-1}$ и скорости релаксации лазерных уровней $\Gamma_1 = 10^7 \text{ c}^{-1}$, $\Gamma_2 = 10^3 \text{ c}^{-1}$.

Как показано на рис. 1, в случае шумящей накачки со стандартными (пуассоновскими) шумовыми характеристиками максимальное сжатие полного числа фотонов поля, выходящего из резонатора, для каждого числа мод $Q > 1$ достигается при оптимальном значении параметра превышения порога ξ_Q . Для частот в диапазоне $\omega < \gamma$ спектральный фактор Фано принимает значения меньше 1. Для значений $\xi > \xi_Q$ величина сжатия уменьшается и в дальнейшем с возрастанием ξ флуктуации достигают уровня дробового шума (пуассоновское распределение фотонов). Значительное сжатие для принятых значений параметров лазера γ , Γ_1 , Γ_2 , P возможно при больших Q и ξ . Максимальное сжатие $V_{\Delta N} = 0,5$ достигается при $Q \approx 101$ и $\xi_Q \approx 100$. При $Q > 101$ степень сжатия убывает, и при $Q \approx \Gamma_1/\Gamma_2$ уровень шума принимает значение $V_N = 1$ (дробовой шум) для всех ξ .

Неограниченно большое сжатие числа фотонов суммарного излучения лазера возможно при использовании регулярной (бесшумовой) накачки. Как показано на рис. 1, в случае $Q = 3$ при $\xi = 70$ достигается десятикратное сжатие. Отметим, что в условиях регулярной накачки и большого числа мод для получения большого сжатия требуется значительное превышение накачкой порога. Важным условием, обеспечивающим сжатие полного выходного излучения лазера, является выполнение соотношения $\Gamma_1 \gg \Gamma_2$ между скоростями распада верхнего и нижнего лазерных уровней атома.

Излучение лазера в отдельной моде на выходе резонатора также обладает ярко выраженными неклассическими свойствами. Как показано на рис. 2, в рассмотренном диапазоне превышений порога $2 < \xi < 100$ субпуассоновская статистика фотонов в отдельной моде поля наблюдается при любом числе мод $Q > 1$, участвующих в генерации. Уровень шума при этом монотонно убывает с возрастанием числа мод Q . Использование регулярной накачки улучшает шумовые характеристики излучения, причем эффективность применения регуляр-

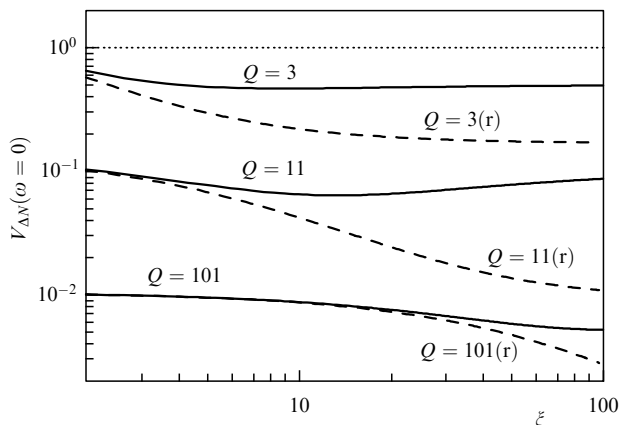


Рис. 2. Спектральная плотность флуктуаций на частоте $\omega \approx 0$ числа фотонов в отдельной моде излучения лазера в зависимости от параметра превышения порога ξ для различного числа мод Q . Параметры лазера $\gamma = 10^9 \text{ с}^{-1}$, $\Pi = 10^{-5} \text{ с}^{-1}$, $\Gamma_1 = 10^7 \text{ с}^{-1}$, $\Gamma_2 = 10^3 \text{ с}^{-1}$. Сплошными кривыми показаны результаты для шумящей накачки, штриховыми — для регулярной накачки.

ной накачки увеличивается с возрастанием превышения порога и уменьшением Q . С увеличением числа мод применение регулярной накачки не приводит к заметному понижению квантового шума в отдельной моде лазера.

Как и в случае полного излучения многомодового лазера, величина сжатия зависит от соотношения между скоростями распада лазерных уровней атомов. Превышение скоростью распада нижнего лазерного уровня скорости распада верхнего лазерного уровня, $\Gamma_1 \gg \Gamma_2$, является важным условием достижения большого сжатия полного излучения лазера. Однако степень сжатия в отдельной моде поля слабо зависит от указанного соотношения. Так, например, при изменении значений параметров лазера ($\Gamma_1 = 10^3 \text{ с}^{-1}$, $\Gamma_2 = 10^4 \text{ с}^{-1}$) при $Q = 3$ для полного излучения сжатие отсутствует, в то же время для излучения в отдельной моде имеет место почти двукратное сжатие при всех ξ . При сохранении соотношения $\Gamma_1 \gg \Gamma_2$ и неизменном значении γ флуктуации числа фотонов как внутри, так и вне резонатора слабо зависят от величины Π .

7. Сравнение теоретических и экспериментальных данных о квантовых флуктуациях числа фотонов излучения многомодовых лазеров

С середины 1990-х годов пристальное внимание исследователей привлекла проблема генерации сжатого по числу фотонов (субпуассоновского) излучения с помощью многомодовых лазеров. В работе [52], где впервые экспериментально наблюдалось явление сжатия излучения многомодового лазера, было установлено, что излучение полупроводникового лазера (лазерного диода) в многомодовом режиме генерации обладает субпуассоновской статистикой фотонов излучения, суммарного по всем модам. В работе [52] использовалась регулярная накачка лазерного диода, при которой флуктуации тока отсутствовали. Теория, использованная в [52] для интерпретации экспериментальных данных, предсказывала также установление уровня фотонного

шума ниже пуассоновского уровня в отдельной моде излучения лазера при большом превышении порога. В условиях генерации, характерных для полупроводникового лазера, в спектре излучения присутствовала доминирующая центральная мода и две боковые моды со значительно меньшими интенсивностями по сравнению с интенсивностью центральной моды. Явление антикорреляции флуктуаций числа фотонов в различных модах, экспериментально обнаруженное в [52], рассматривалось авторами этой работы в качестве причины сжатия излучения лазера, суммарного по всем модам.

Дальнейшие исследования, проведенные рядом авторов [53–62] для лазерного диода, подтвердили выводы работы [52]. В работе [52], где проводились измерения флуктуаций полного излучения лазерного диода с регулярной накачкой, приведена зависимость фактора Фано полного излучения лазера, качественно согласующаяся с результатами наших расчетов. Отметим, что эффективная двухуровневая теория, описывающая генерацию полупроводникового лазера, соответствует рассматриваемой нами теории трехуровневого лазера в условиях адиабатического исключения поляризации активной среды и значительно большей скорости распада нижнего лазерного уровня по сравнению со скоростью распада верхнего лазерного уровня, $\Gamma_1 \gg \Gamma_2$. Такое соотношение скоростей релаксации лазерных уровней, как показывают проведенные нами расчеты, является оптимальным для создания сжатого состояния лазерного излучения.

В ряде экспериментальных исследований лазерных диодов наличие регулярной накачки оказывалось недостаточным для генерации сжатого состояния света [53, 55–57, 59, 61]. В этих случаях эффективной являлась техника фазовой и частотной синхронизации мод, позволявшая достичь почти двукратного сжатия по числу фотонов света, генерируемого лазером в многомодовом режиме [49, 53].

В работах [54, 58, 61] проведены измерения флуктуаций числа фотонов полного излучения лазерного диода в отсутствие регулярной накачки, для тока накачки с пуассоновскими флуктуациями. Исследования показали, что при наличии внешней синхронизации мод сжатие полного излучения также присутствует. В качестве средств, усиливающих эффект сжатия, использовались метод обратной связи и метод инжекции внешнего сигнала на частоте центральной моды лазера. В условиях, присущих лазерному диоду, когда генерация носит квазидномодовый характер, использование метода обратной связи, при котором часть излучения, выходящего через зеркало резонатора, возвращается в резонатор с помощью дифракционной решетки, приводило к подавлению боковых мод, участвующих в генерации. В то же время лазерная генерация проводилась в квазидномодовом режиме и сжатие распределения числа фотонов при этом отмечалось в суммарном по всем модам поле, включая множество боковых мод с малыми по сравнению с интенсивностью центральной моды интенсивностями. В результате синхронизации при наличии внешнего сигнала обратной связи интенсивности большого числа боковых мод (~ 100) почти уравнивались между собой. В работах [54–57] было установлено, что наличие в спектре измеряемого излучения большого числа мод лазера является необходимым в рассмотренном случае условием сжатия света по числу фотонов,

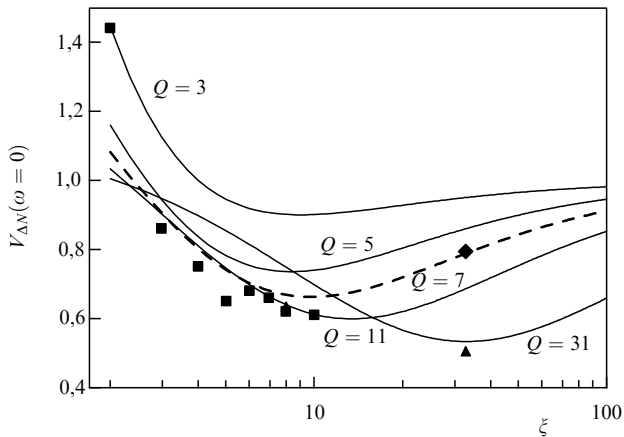


Рис. 3. Сравнение результатов расчета спектральной плотности флуктуаций на частоте $\omega \approx 0$ полного числа фотонов излучения лазерного диода при значениях параметров $\gamma = 10^{12} \text{ с}^{-1}$, $P = 3 \times 10^3 \text{ с}^{-1}$, $\Gamma_1 = 10^{12} \text{ с}^{-1}$, $\Gamma_2 = 10^9 \text{ с}^{-1}$ (кривые) с экспериментальными данными из [58] (квадраты) и [54] (треугольники и ромб).

даже если интенсивности боковых мод намного меньше интенсивности центральной моды. Такой эффект является следствием неклассической квантовой антикорреляции между различными модами поля лазера.

На рисунке 3 приведены результаты расчетов спектров шумов полного числа фотонов излучения лазера для значений параметров лазера, характерных для лазерного диода: $\gamma = 10^{12} \text{ с}^{-1}$, $P = 3 \times 10^3 \text{ с}^{-1}$, $\Gamma_1 = 10^{12} \text{ с}^{-1}$, $\Gamma_2 = 10^9 \text{ с}^{-1}$ [52–58]. Для сравнения показаны результаты эксперимента [54], в котором для синхронизации мод лазерного диода использовался метод обратной связи. В условиях эксперимента, в котором малая часть выходящего из лазера излучения на частоте центральной доминирующей моды с помощью дифракционной решетки возвращалась в резонатор, интенсивности большого числа боковых мод уравнивались между собой. Интенсивность подаваемого в резонатор поля обратной связи составляла незначительную величину — $I \approx 10^{-4} I_{\text{out}}$, где I_{out} — интенсивность выходного излучения на частоте центральной моды. Как видно из рис. 3, экспериментальные данные, полученные при превышении порога генерации $\xi < 10$, близки к теоретическим значениям. При $\xi = 2$ экспериментальное значение почти совпадает с теоретическим для числа мод $Q = 3$. С возрастанием накачки все большее число мод начинает принимать участие в многомодовой генерации лазера. Так, при $\xi = 3$ экспериментальные данные близки к теоретическим, полученным для $Q = 11$. При увеличении ξ от 3 до 10 экспериментальные данные количественно согласуются с теоретическими при фиксированном числе мод $Q = 11$.

Инъекция слабого сигнала на частоте центральной моды, как показано в [53–57], приводит к синхронизации боковых мод без их подавления, вследствие чего возникает сжатие в полном излучении лазера, но уже в многомодовом режиме, как это наблюдалось в работах [55–57].

На рисунке 3 приведены экспериментальные данные, полученные в [54, 58], где синхронизация мод лазерного диода достигалась при подаче слабого сигнала на частоте центральной моды от другого лазера. Как и в экспериментах [55–57], большое число генерируемых

лазером слабых боковых мод также выравнивалось между собой по интенсивности. Экспериментальные данные, полученные в этих условиях в [58] для $\xi = 8$, хорошо согласуются с экспериментальными данными из [54], а также с результатами расчета, проведенного нами. Как видно на рис. 3, спектр шума очень близок к теоретическому при $Q = 31$.

Необходимо отметить, что в работе [54] экспериментально обнаружено значительное сжатие флуктуаций числа фотонов полного излучения лазера также и в режиме свободной генерации без использования внешнего сигнала. Приведенное на рис. 3 экспериментальное значение $V_{\Delta N}(\omega = 0) = 0,8$, полученное в [54] в режиме свободной генерации, при $\xi = 33$ количественно совпадает с теоретическим результатом при $Q = 7$.

На рисунке 4 проведено сравнение результатов расчетов, выполненных нами, с экспериментальными данными, полученными в [52] с использованием регулярной (бесшумовой) накачки лазерного диода. В работе [52] было проведено прямое измерение спектра шума лазерного диода с регулярной накачкой для различных пороговых значений тока накачки при различных температурах. Как видно из рис. 4, теоретические результаты количественно согласуются с обеими группами экспериментальных данных, полученных при разных значениях пороговых токов накачки. Как и в рассмотренном выше случае использования внешнего сигнала, с возрастанием ξ экспериментальные значения приходят в согласие с теоретическими при увеличении числа мод, участвующих в генерации. Так, при $\xi \approx 2,5$ экспериментальные данные близки к теоретическим при $Q = 1$ (одномодовая генерация), при $\xi \approx 3$ согласие с экспериментом достигается при $Q = 3$, а при $\xi \approx 10$ теоретические и экспериментальные результаты согласуются при $Q = 41$. Для группы экспериментальных данных, полученных при меньшем пороговом значении тока накачки (в этих условиях экспериментаторам удалось достичь больших значений превышения порога накачки — $\xi > 30$), хорошее согласие с теорией также достигается при $Q = 41$.

Отметим, что как теоретические расчеты [62], выполненные другими авторами, так и экспериментальные

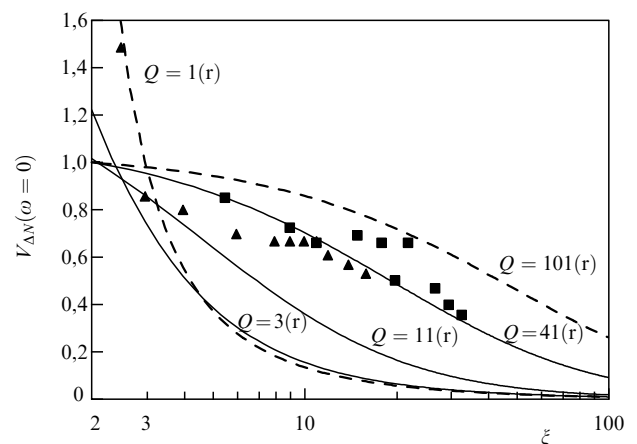


Рис. 4. Спектральная плотность флуктуаций на частоте $\omega \approx 0$ для полного числа фотонов излучения лазерного диода с регулярной накачкой для параметров $\gamma = 10^{12} \text{ с}^{-1}$, $P = 3 \times 10^3 \text{ с}^{-1}$, $\Gamma_1 = 10^{12} \text{ с}^{-1}$, $\Gamma_2 = 10^9 \text{ с}^{-1}$ (кривые). Квадратами и треугольниками показаны экспериментальные данные [52], полученные для различных температур и пороговых значений тока накачки.

измерения [54, 60] показали возможность подавления фотонного шума в отдельных модах (в частности в доминирующей центральной моде) при значительном превышении порога генерации.

Флуктуации числа фотонов излучения полупроводникового лазера с вертикальным резонатором (VCSEL — vertical-cavity surface-emitting laser) при генерации в двухмодовом режиме измерены в [59, 61]. В рассмотренных экспериментальных условиях лазером генерировались две поперечные моды с близкими по величине интенсивностями. Как и в случае обычного лазерного диода, флуктуации числа фотонов полного излучения при регулярной накачке оказались значительно ниже пуассоновского уровня. В работе [61] экспериментально установлено, что генерация сжатого по числу фотонов состояния света возможна в двух случаях: во-первых, при идеальной одномодовой генерации и, во-вторых, в случае идеальной двухмодовой генерации, при которой интенсивности обеих мод равны между собой.

Сжатое состояние излучения лазерного диода на квантовой яме обнаружено экспериментально в [60]. В этой работе сжатие по числу фотонов полного излучения лазерного диода наблюдалось в режиме свободной генерации на двух доминирующих продольных модах поля резонатора. Анализ экспериментальных данных позволил авторам работы [60] сделать вывод о наличии сжатия также и в каждой из обеих мод. Упомянутые выше экспериментальные результаты качественно согласуются с предсказаниями работ [50, 51].

Результаты позднейших расчетов, проведенных исходя из первых принципов в [62], для конкретного случая трехмодовой генерации полупроводникового лазера с внешней синхронизацией также хорошо согласуются с экспериментальными данными. В работе [62] описывается режим генерации сжатого состояния поля отдельно взятой центральной моды при генерации в случае флуктуирующей накачки при наличии слабого внешнего сигнала. При этом отмечается, что сжатие полного излучения возможно даже при незначительной интенсивности внешнего сигнала, тогда как для сжатия в центральной моде необходима большая степень синхронизации, достигаемая при увеличении интенсивности сигнала. Флуктуации фотонов в отдельно взятой боковой моде поля резко снижаются в рассмотренном авторами [62] случае трехмодовой генерации при полной синхронизации мод.

Отметим, что в одной из ранних экспериментальных работ [86], в которой проводились измерения уровня флуктуаций квазидномодового полупроводникового лазера, было обнаружено понижение флуктуаций числа фотонов в отдельной моде поля. При превышении порога генерации процесс подавления флуктуаций с возрастом накачки был установлен как для доминирующей центральной моды, так и для слабых боковых мод.

8. Заключение

Проведенные за последние 15 лет теоретические и экспериментальные исследования статистики фотонов излучения многомодовых лазеров однозначно указывают на возможность их использования в качестве источников субпуассоновского неклассического света. Сжатие света возможно как в полном излучении лазера, суммарном по всем модам, так и в отдельной моде поля.

Проведенные нами последовательные квантово-механические расчеты статистических свойств излучения многомодового лазера, рассмотренные в настоящей статье, показали, что значительное, но ограниченное по величине подавление фотонного шума (уменьшение его в два раза по сравнению с дробовым уровнем) возможно для полного излучения лазера при оптимальном числе генерируемых мод. Оптимальное для создания сжатого состояния света число мод определяется параметрами активной среды и резонатора лазера. Величину сжатия полного, суммарного по всем модам излучения ограничивает наличие дополнительного квантового шума накачки лазера. Понижение шума накачки или его полное устранение (регулярная накачка) позволяет неограниченно уменьшать флуктуации числа фотонов полного излучения лазера при оптимальном подборе значений параметров релаксации активной среды.

Сжатие излучения в отдельной моде излучения лазера может достигать значительной величины (спектр шума вблизи нулевой частоты $V_{\Delta n} \ll 1$) даже в случае шумящей (пуассоновской) накачки при большом числе генерируемых мод. Однако, как и в случае полного излучения, необходимым условием неклассичности излучения в отдельной моде является оптимальное соотношение скоростей релаксации лазерных состояний атомов: превышение скоростью релаксации нижнего лазерного уровня соответствующей величины для верхнего лазерного уровня ($\Gamma_1 \gg \Gamma_2$). При этом оказывается, что шум накачки, вносящий большой вклад в фотонный шум полного излучения лазера, полностью подавляется в отдельно взятой моде за счет большого числа генерируемых мод. Шум накачки распределяется в этих условиях между большим числом мод, имеющих одинаковую интенсивность, вследствие чего его вклад в шум каждой из мод поля оказывается незначительным. Такой механизм понижения уровня шума до уровня ниже дробового характерен для модели лазера с однородно уширенной линией, когда все моды поля взаимодействуют с одним и тем же ансамблем активных атомов.

Рассмотренный нами режим многомодовой генерации с однородным уширением линии для спектра идентичных мод наиболее ярко демонстрирует значительные возможности лазера для создания интенсивного сжатого света. Качественное согласие с экспериментальными данными подтверждает справедливость используемых в наших расчетах приближений.

Примеры практического применения сжатого (субпуассоновского) света в различных областях спектроскопии и квантовой информатики сегодня широко известны, при этом область применения такого света с пониженным уровнем шума постоянно расширяется. В связи с вышесказанным исследование предсказанной теоретически генерации субпуассоновского сжатого по числу фотонов света с помощью многомодовых лазеров продолжает оставаться актуальной задачей как для теоретиков, так и для экспериментаторов многих лабораторий в ряде стран.

Список литературы

1. Walls D F *Nature* **306** 141 (1983)
2. Kimble H J, Walls D F (Eds) "Squeezed Light" *J. Mod. Opt.* **34** (6/7, Special Issue) (1987)
3. Knight P L, Loudon R (Eds) "Squeezed states of the Electromagnetic field" *J. Opt. Soc. Am. B* **4** (Special Issue) (1987)

4. Mandel L *Phys. Rev. Lett.* **49** 136 (1982)
5. Davidovich L *Rev. Mod. Phys.* **68** 127 (1996)
6. Смирнов Д Ф, Трошин А С *УФН* **153** 233 (1987)
7. Быков В П *УФН* **161** (10) 145 (1991)
8. Клышко Д Н *УФН* **164** 1187 (1994)
9. Клышко Д Н *УФН* **166** 613 (1996)
10. Yamamoto Y, Haus H A *Rev. Mod. Phys.* **58** 1001 (1986)
11. Валиев К А, Кокин А А *Квантовые компьютеры: надежды и реальность* (Ижевск: РХД, 2001)
12. Воронцов Ю И *УФН* **164** 89 (1994)
13. Grangier P, Levenson J A, Poizat J-P *Nature* **396** 537 (1998)
14. Zwiller V, Aichele T, Benson O *New J. Phys.* **6** 96 (2004)
15. Клышко Д Н, Масалов А В *УФН* **165** 1249 (1995)
16. Голубев Ю М, Соколов И В *ЖЭТФ* **87** 408 (1984)
17. Голубев Ю М и др. *ЖЭТФ* **116** 485 (1999)
18. Ralph T C, Savage C M *Opt. Lett.* **16** 1113 (1991)
19. Ritsch H et al. *Phys. Rev. A* **44** 3361 (1991)
20. Marte M A, Ritsch H, Walls D F *Phys. Rev. Lett.* **61** 1093 (1988)
21. Ritsch H, Zoller P *Phys. Rev. A* **45** 1881 (1992)
22. Ralph T C, Savage C M *Phys. Rev. A* **44** 7809 (1991)
23. Hart D L, Kennedy T A B *Phys. Rev. A* **44** 4572 (1991)
24. Khazanov A M, Koganov G A, Gordov E P *Phys. Rev. A* **42** 3065 (1990)
25. Benkert C et al. *Phys. Rev. A* **41** 2756 (1990)
26. Benkert C, Scully M O *Phys. Rev. A* **42** 2817 (1990)
27. Briegel H-J, Meyer G M, Englert B-G *Phys. Rev. A* **53** 1143 (1996)
28. Kennedy T A B, Walls D F *Phys. Rev. A* **40** 6366 (1989)
29. Козловский А В, Ораевский А Н *Квантовая электроника* **21** 273 (1994)
30. Козловский А В, Ораевский А Н *Письма в ЖЭТФ* **67** 755 (1998); *ЖЭТФ* **115** 1210 (1999)
31. Wiele C et al. *Phys. Rev. A* **58** R2680 (1998)
32. Benson O, Yamamoto Y *Phys. Rev. A* **59** 4756 (1999)
33. Козловский А В, Ораевский А Н *ЖЭТФ* **118** 1084 (2000)
34. Zwiller V et al. *Phys. Rev. A* **66** 053814 (2002)
35. McKeever J et al. *Nature* **425** 268 (2003); Boozer A D et al. *Phys. Rev. A* **70** 023814 (2004)
36. Mielke S L, Foster G T, Orozco L A *Phys. Rev. Lett.* **80** 3948 (1998); Foster G T, Mielke S L, Orozco L A *Phys. Rev. A* **61** 053821 (2000)
37. Килин С Я, Карлович Т Б *ЖЭТФ* **122** 933 (2002)
38. Agarwal G S, Dutta Gupta S *Phys. Rev. A* **42** 1737 (1990)
39. Ginzl C et al. *Phys. Rev. A* **48** 732 (1993)
40. Jones B et al. *Phys. Rev. A* **60** 3267 (1999)
41. Yamamoto Y, Imoto N, Machida S *Phys. Rev. A* **33** 3243 (1986)
42. Haus H A, Yamamoto Y *Phys. Rev. A* **34** 270 (1986)
43. Machida S, Yamamoto Y *Opt. Commun.* **57** 290 (1986); Yamamoto Y, Mashida S, Nilsson O *Phys. Rev. A* **34** 4025 (1986)
44. Richardson W H, Shelby R M *Phys. Rev. Lett.* **64** 400 (1990); Richardson W H, Machida S, Yamamoto Y *Phys. Rev. Lett.* **66** 2867 (1991)
45. Фофанов Я А *Радиотехника и электроника* **33** 177 (1988)
46. Ralph T C, Harb C C, Vachor H-A *Phys. Rev. A* **54** 4359 (1996)
47. Harb C C et al. *Phys. Rev. A* **54** 4370 (1996)
48. Wiseman H M, Milburn G J *Phys. Rev. A* **46** 2853 (1992)
49. Козловский А В, Ораевский А Н *Письма в ЖЭТФ* **75** 273 (2002); Козловский А В *ЖЭТФ* **123** 1131 (2003)
50. Козловский А В *ЖЭТФ* **104** 2995 (1993)
51. Kozlovskii A V *Laser Phys.* **10** 907 (2000)
52. Inoue S et al. *Phys. Rev. A* **46** 2757 (1992)
53. Inoue S et al. *Phys. Rev. A* **48** 2230 (1993)
54. Wang H, Freeman M J, Steel D G *Phys. Rev. Lett.* **71** 3951 (1993)
55. Marin F et al. *Phys. Rev. Lett.* **75** 4606 (1995)
56. Zhang T-C et al. *Quantum Semiclass. Opt.* **7** 601 (1995)
57. Becher C, Gehrig E, Boller K-J *Phys. Rev. A* **57** 3952 (1998)
58. Li Y, Xiao M *Opt. Express* **2** 110 (1998)
59. Hermier J-P et al. *New J. Phys.* **2** 26 (2000)
60. Wöfl F et al. *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **4** 129 (2002)
61. Vey J-L et al. *Phys. Rev. A* **60** 3284 (1999)
62. Eschmann A, Gardiner C W *Phys. Rev. A* **54** 3373 (1996)
63. Rempe G et al. *Phys. Rev. Lett.* **67** 1727 (1991)
64. Козловский А В, Ораевский А Н *ЖЭТФ* **115** 2001 (1999)
65. Козловский А В *Квантовая электроника* **37** 74 (2007)
66. Белинский А В, Чиркин А С *Квантовая электроника* **16** 889 (1989)
67. D'Arano G M, Sacchi M F *Opt. Commun.* **149** 152 (1998)
68. Hillery M *Phys. Rev. A* **61** 022309 (2000)
69. Agarwal G S, Scully M O *Phys. Rev. A* **53** 467 (1996)
70. Huelga S F et al. *Phys. Rev. Lett.* **79** 3865 (1997)
71. Козловский А В *Оптика и спектроскоп.* **97** 804 (2004)
72. Козловский А В, Ораевский А Н *Оптика и спектроскоп.* **83** 943 (1997); **84** 82 (1998)
73. McCumber D E *Phys. Rev.* **141** 306 (1966)
74. Летохов В С *ЖЭТФ* **53** 2210 (1967)
75. Мироненко В Р, Юдсон В И *ЖЭТФ* **79** 1174 (1980)
76. Мандель Л, Вольф Э *Оптическая когерентность и квантовая оптика* (М.: Физматлит, 2000)
77. McMackin I et al. *Phys. Rev. A* **38** 820 (1988)
78. Лэкс М *Флуктуации и когерентные явления* (М.: Мир, 1974)
79. Хакен Г *Лазерная светодинамика* (М.: Мир, 1988)
80. Collett M J, Gardiner C W *Phys. Rev. A* **30** 1386 (1984)
81. Carmichael H J J. *Opt. Soc. Am. B* **4** 1588 (1987)
82. Peters B et al. *Phys. Rev. A* **64** 023816 (2001)
83. Huntington E H et al. *Phys. Rev. A* **75** 013802 (2007)
84. Harb C C et al. *Phys. Rev. A* **54** 4370 (1996)
85. Ralph T C *Phys. Rev. A* **55** 2326 (1997)
86. Armstrong J A, Smith A W *Phys. Rev.* **140** A155 (1965)

Squeezed (sub-Poissonian) light generation from a multimode laser

A.V. Kozlovskii

*P.N. Lebedev Physical Institute, Russian Academy of Sciences,
Leninskii prosp. 53, 119991 Moscow, Russian Federation
Tel. (7-499) 783-36 51
E-mail: kozlovsk@sci.lebedev.ru*

Theoretical and experimental results on quantum noise in multimode lasers are reviewed. The lasing ability of a multimode laser having a homogeneously broadened line with a number-squeezed (sub-Poissonian) photon distribution is analyzed. Conditions for noisy and noise-free (regular) pumping are discussed. Using the approximation of equidistant identical modes, fluctuations in the total number of laser-emitted photons (summed over all the generated modes) and fluctuations in the number of photons for an individual mode within and outside of the cavity are calculated. Output emission noise spectra and photon number fluctuations are calculated for solid state (neodymium glass, Nd:YAG) and semiconductor lasers. A comparison of theory with some recent experimental data on semiconductor lasers is made.

PACS numbers: **03.65** – w, 42.50.Lc, 42.55.Ah

DOI: 10.3367/UFNr.0177.200712h.1345

Bibliography — 86 references

Received 30 January 2007, revised 29 October 2007

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **177** (12) 1345–1360 (2007)

Physics – Uspekhi **50** (12) (2007)