

## МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Фейнмановский метод распутывания операторов  
и теория представлений групп

В.С. Попов

*Обсуждается применение предложенного Фейнманом метода распутывания выражений, содержащих некоммутующие между собой операторы, к нестационарным задачам квантовой механики. Рассматриваются возбуждение гармонического осциллятора внешней силой и (или) переменной во времени частотой, поворот спина в магнитном поле, зависящем от времени, распутывание гамильтониана атома (иона) в лазерном поле, модель с группой скрытой симметрии атома водорода, теория когерентных состояний и др. Операторное исчисление Фейнмана, дополненное простыми теоретико-групповыми соображениями, позволяет представить гамильтониан в распутанном виде и получить без громоздких вычислений точные аналитические выражения для вероятностей перехода между начальным и конечным состояниями квантового осциллятора. Кратко обсуждается случай D-мерного осциллятора, в частности, применительно к проблеме рождения пар из вакуума в интенсивном электрическом поле.*

PACS numbers: 02.20. – a, 03.65.Ca, 03.65.Fd

DOI: 10.3367/UFNr.0177.200712f.1319

## Содержание

1. Введение (1319).
  2. Основы фейнмановского метода распутывания (1320).
  3. Возбуждение гармонического осциллятора внешней силой (1321).
  4. Частица с произвольным спином во внешнем магнитном поле (1324).
  5. Квантовый осциллятор с переменной частотой (1326).
  6. Осциллятор с переменными параметрами (1329).
  7. Многомерный случай (1330).
  8. Дальнейшие применения фейнмановского метода распутывания (1331).
  9. Контрпримеры (1333).
  10. Заключение (1334).
  11. Приложения (1335).
    - А. Представление Фока – Баргмана. Б. О параметре возбуждения квантового осциллятора. В. Вращение спина в магнитном поле и уравнение Риккати. Г. Условие унитарности.
- Список литературы (1339).

## 1. Введение

В 1940-х годах Ричард Фейнман выдвинул несколько новых и оригинальных подходов в квантовой теории:

**В.С. Попов.** Государственный научный центр Российской Федерации "Институт теоретической и экспериментальной физики им. А.И. Алиханова", 117218 Москва, ул. Б. Черемушкинская 25, Российская Федерация  
E-mail: markina@itep.ru

Статья поступила 25 апреля 2007 г.,  
после доработки 27 июня 2007 г.

континуальный интеграл "по всем путям" [1, 2], диаграммную технику в теории возмущений [3–5], названную впоследствии фейнмановской, и метод распутывания<sup>1</sup> выражений, содержащих некоммутующие между собой операторы [6]. Первые два подхода, получившие широкую известность и существенное развитие, постоянно используются в различных областях теоретической физики — от квантовой теории поля и статистической физики до гидродинамики и теории турбулентности. Эти методы детально изложены во многих учебниках и монографиях. В то же время фейнмановский метод распутывания (ФМР) использовался лишь немногими, редко упоминается в физической литературе и, по видимому, мало известен физикам. Данная статья имеет целью восполнить этот пробел и изложить основные аспекты ФМР применительно к задачам квантовой механики, а также рассмотреть некоторые связанные с ними теоретико-групповые вопросы.

Кратко опишем содержание статьи. Основные понятия и формулы ФМР, в том числе важная для дальнейшего теорема Фейнмана о выпутывании экспоненциального фактора, приведены в разделе 2. В разделе 3 изложено эlegantное решение [6] задачи о гармоническом осцилляторе с постоянной частотой, возбуждаемом внешней силой  $f(t)$ , произвольным образом зависящей от времени (см. также работы [7–9]). Раздел 4 посвящен применению ФМР к задаче о вращении спина частицы [10], обладающей магнитным моментом, во внешнем магнитном поле  $H(t)$ . На этих примерах удобно описывать ФМР, поскольку это дает возможность останавливаться на некоторых деталях данного метода, обычно

<sup>1</sup> Или выпутывания (disentangling). Пояснение относительно этого термина см. в начале раздела 2.

опускаемых в литературе. В разделах 5–8 изложение становится более кратким: как правило, мы приводим только постановку задачи и окончательные результаты, отсылая читателя за подробностями вычислений к оригинальным статьям. Рассмотрены вероятности переходов в квантовом осцилляторе с переменной во времени частотой [11, 12]; общий случай осциллятора с переменными параметрами  $\omega(t)$  и  $f(t)$ ; распутывание гамильтониана атома (иона) в сильном лазерном поле; применение ФМР в теории возмущений [6], к модельному гамильтониану с группой "скрытой" симметрии атома водорода [11], в теории когерентных состояний и др. Заключительные разделы 9 и 10 посвящены выводам и перспективам. Дополнительные вопросы и детали вычислений вынесены в приложения: в приложении А обсуждается так называемое представление Фока–Баргмана, в котором волновые функции осциллятора и атома водорода имеют наиболее простой вид, в приложении Б — параметры возбуждения осциллятора  $\nu$  и  $\rho$  (см. формулы (3.15) и (5.12) в разделах 3 и 5 соответственно), в приложении В — уравнение Риккати для задачи о вращении спина в переменном магнитном поле, в приложении Г — условие унитарности.

При применении ФМР к конкретным физическим проблемам существенную помощь может оказать теория групп, позволяющая значительно упростить вычисления. Необходимые сведения из теории групп содержатся (с большим запасом) в книгах [13–18]. Для понимания разделов 5 и 6 потребуются элементарные сведения об унитарных представлениях некомпактных алгебр Ли; изложение этой теории на доступном уровне можно найти в обзоре [19].

Приведем необходимые для дальнейшего коммутационные соотношения для генераторов унитарной группы  $SU(2)$  и квазиунитарной группы  $SU(1, 1)$ , которые можно записать в едином виде:

$$[\hat{J}_+, \hat{J}_-] = 2\eta\hat{J}_0, \quad [\hat{J}_0, \hat{J}_\pm] = \pm\hat{J}_\pm, \quad (1.1)$$

где

$$\hat{J}_\pm = \hat{J}_x \pm i\hat{J}_y, \quad \hat{J}_0 = \hat{J}_z, \quad (1.2)$$

$$\eta = \begin{cases} 1 & \text{для } SU(2), \\ -1 & \text{для } SU(1, 1). \end{cases} \quad (1.3)$$

При этом  $\hat{J}_+$  является повышающим, а  $\hat{J}_-$  — понижающим оператором на собственных функциях оператора  $\hat{J}_0$ :

$$\hat{J}_0|\mu\rangle = \mu|\mu\rangle, \quad \hat{J}_0\hat{J}_\pm|\mu\rangle = (\mu \pm 1)\hat{J}_\pm|\mu\rangle. \quad (1.4)$$

С генераторами  $\hat{J}_a$  коммутирует оператор Казимира  $\hat{\mathbf{J}}^2$  ("квадрат углового момента" на группе), собственное значение которого задает неприводимое представление

$$[\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{J}_a] = 0, \quad a = \pm, 0, \quad (1.5)$$

$$\hat{\mathbf{J}}^2 = \hat{J}_z^2 + \eta(\hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2) = \hat{J}_0^2 + \frac{1}{2}\eta(\hat{J}_+\hat{J}_- + \hat{J}_-\hat{J}_+). \quad (1.6)$$

Группа  $SU(2)$  является компактной и имеет конечномерные унитарные неприводимые представления, хорошо известные из квантовой механики, на которых

оператор  $\hat{\mathbf{J}}^2$  сводится к  $c$ -числу:

$$\hat{\mathbf{J}}^2|\psi\rangle = j(j+1)|\psi\rangle, \quad j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots \quad (1.7)$$

( $j$  — спин или угловой момент), а у некомпактной группы  $SU(1, 1)$  таких представлений нет<sup>2</sup>. Указанное различие этих групп можно проиллюстрировать на примере матриц, отвечающих повороту вокруг оси  $x$ : для спинорного ( $j = 1/2$ ) представления группы  $SU(2)$  имеем

$$g_x(\vartheta) = \exp\left(-\frac{i}{2}\vartheta\sigma_x\right) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\vartheta}{2} & -i\sin\frac{\vartheta}{2} \\ -i\sin\frac{\vartheta}{2} & \cos\frac{\vartheta}{2} \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad (1.8)$$

а в случае группы  $SU(1, 1)$ :  $\vartheta \rightarrow i\beta$ ,

$$g_x(\beta) = \exp\left(\frac{1}{2}\beta\sigma_x\right) = \begin{pmatrix} \cosh\frac{\beta}{2} & \sinh\frac{\beta}{2} \\ \sinh\frac{\beta}{2} & \cosh\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \beta < \infty. \quad (1.9)$$

Очевидно, что последнее представление является конечномерным, но не унитарным.

В разделе 4 вместо  $\hat{J}_a$  мы используем спиновый оператор  $\hat{s}_a$ , удовлетворяющий коммутационным соотношениям (1.1) при  $\eta = 1$ .

## 2. Основы фейнмановского метода распутывания

Прежде всего поясним термин "распутывание операторов". В квантовой механике и теории поля часто встречаются выражения вида

$$\hat{H} = \exp(\alpha\hat{A} + \beta\hat{B} + \gamma\hat{C} + \dots), \quad (2.1)$$

где  $\hat{A}, \hat{B}, \dots$  — некоммутирующие операторы (например  $\hat{x}$  и  $\hat{p}$ ,  $\hat{a}$  и  $\hat{a}^+$ ),  $\alpha, \beta, \dots$  — некоторые константы или числовые функции. Наличие в экспоненте некоммутирующих между собой операторов сильно затрудняет вычисления. Фейнман развил своеобразное операторное исчисление [6], в котором у оператора вводится упорядочивающий индекс  $s$ , определяющий порядок действия оператора и позволяющий применять обычные правила математического анализа. По определению оператор с большим значением индекса действует позднее:

$$\hat{A}_s\hat{B}_{s'} = \begin{cases} \hat{A}\hat{B}, & s > s', \\ \hat{B}\hat{A}, & s < s', \end{cases} \quad (2.2)$$

причем  $\hat{B}\hat{A}$  можно записать как в виде  $\hat{B}_1\hat{A}_0$ , так и в виде  $\hat{A}_0\hat{B}_1$  (вместо индексов 0 и 1 можно использовать и другие, необязательно целые; так,  $\hat{A}_{-1,5}\hat{B}_{0,3} = \hat{B}\hat{A}$ , поскольку  $-1,5 < 0,3$ ). Индекс  $s$  может быть и непрерывной переменной, например временем (см. разделы 3–6).

<sup>2</sup> Как известно [16, 19], некомпактные группы вообще не имеют конечномерных унитарных представлений за исключением тривиального (единичного).

Приведем пример [6]: пусть  $\hat{A} = \exp \hat{a}$  и  $\hat{B} = \exp \hat{b}$ , тогда

$$\begin{aligned} \hat{B}\hat{A} &= \exp(\hat{a}_0 + \hat{b}_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\hat{a}_0 + \hat{b}_1)^n = \\ &= 1 + \hat{a} + \hat{b} + \frac{1}{2}(\hat{a}^2 + 2\hat{b}\hat{a} + \hat{b}^2) + \\ &+ \frac{1}{6}(\hat{a}^3 + 3\hat{b}\hat{a}^2 + 3\hat{b}^2\hat{a} + \hat{b}^3) + \dots, \end{aligned} \quad (2.3)$$

поскольку

$$(\hat{a}_0 + \hat{b}_1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \hat{a}_0^k \hat{b}_1^{n-k} \equiv n! \sum_{k=0}^n [k!(n-k)!]^{-1} \hat{b}^{n-k} \hat{a}^k$$

(в обычной записи).

В результате использования ФМР выражение (2.1) преобразуется к виду

$$\hat{S} = \exp(\tilde{\alpha}\hat{A}) \exp(\tilde{\beta}\hat{B}) \exp(\tilde{\gamma}\hat{C}) \exp(\tilde{\delta}\hat{D}) \dots, \quad (2.4)$$

который и называется "распутанным": здесь каждый сомножитель содержит только один оператор, поэтому функции от него, такие как  $\exp(\hat{A})$ , определяются однозначно, например, с помощью степенного ряда.

Коэффициенты  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \dots$  вычисляются через исходные  $\alpha, \beta, \dots$  из уравнений (обычно дифференциальных). При этом в (2.4) могут появиться и новые операторы (обозначенные в (2.4) через  $\hat{D}$ ), которых не было в исходном выражении. Представление оператора  $\hat{S}$  в виде (2.4) позволяет в ряде случаев легко вычислять матричные элементы  $S_{mn}$ , описывающие переходы между различными квантовыми состояниями. Конкретные примеры применения этой процедуры будут даны в дальнейшем.

В статье мы постоянно используем теорему Фейнмана о выпутывании экспоненциального множителя. Пусть  $\mathcal{F}[\hat{M}(s), \hat{N}(s), \dots]$  — функционал от операторов  $\hat{M}, \hat{N}, \dots, s$  — упорядочивающий параметр. При унитарном преобразовании  $\hat{M}'(s) = \hat{U}^{-1}\hat{M}(s)\hat{U}$ , где  $\hat{U}$  — постоянный оператор, не зависящий от  $s$ , в произведении операторов  $\hat{M}(s+ds)\hat{N}(s)$  стоящий между ними множитель полностью сокращается:  $UU^{-1} \equiv 1$ , отсюда

$$\mathcal{F}[\hat{M}'(s), \hat{N}'(s), \dots] = \hat{U}^{-1} \mathcal{F}[\hat{M}(s), \hat{N}(s), \dots] \hat{U}. \quad (2.5)$$

Значительно более интересен случай, когда оператор  $\hat{U}(s)$  сам зависит от  $s$ . При этом

$$\begin{aligned} \hat{U}(s+ds)\hat{U}^{-1}(s) &= 1 + \hat{P}(s)ds = \\ &= \exp \left[ \hat{P} \left( s + \frac{1}{2} ds \right) ds \right], \quad ds \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

т.е. полной компенсации сомножителей  $\hat{U}(s+ds)$  и  $\hat{U}^{-1}(s)$  уже не происходит: между ними возникает оператор  $\hat{P}(s)$ , определяемый из уравнения

$$\frac{d\hat{U}(s)}{ds} = \hat{P}(s) \hat{U}(s). \quad (2.7)$$

Аргумент  $s + (1/2)ds$  у  $\hat{P}$  автоматически указывает правильный порядок его положения в произведении операторов, входящих в функционал  $\mathcal{F}$ , что дает после

перемножения фактор  $\exp \left[ \int_{s_0}^{s_1} \hat{P}(s) ds \right]$ . В итоге приходим к соотношению (теорема Фейнмана)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\hat{M}'(s), \hat{N}'(s), \dots] &= \hat{U}^{-1}(s_1) \mathcal{F}[\hat{M}(s), \hat{N}(s), \dots] \times \\ &\times \exp \left\{ \int_{s_0}^{s_1} \hat{P}(s) ds \right\} \hat{U}(s_0), \end{aligned} \quad (2.8)$$

где

$$\hat{M}'(s) = \hat{U}^{-1}(s) \hat{M}(s) \hat{U}(s), \quad (2.8')$$

$$\hat{U}(s) = \exp \left\{ \int_{s_0}^s \hat{P}(s') ds' \right\} \hat{U}(s_0).$$

В частности, если  $\hat{P}(s) = \alpha(s)\hat{P}_s$ , где  $\alpha(s)$  — произвольная числовая функция, а оператор  $\hat{P}_s$  не зависит от  $s$  явным образом<sup>3</sup> и  $U(s_0) = 1$ , то

$$\begin{aligned} \exp \left\{ \int_{s_0}^{s_1} \alpha(s) \hat{P}_s ds \right\} \mathcal{F}[\hat{M}(s), \hat{N}(s), \dots] &= \\ &= \exp \left\{ \hat{P}_{s_1} \int_{s_0}^{s_1} \alpha(s) ds \right\} \mathcal{F}[\hat{M}'(s), \hat{N}'(s), \dots], \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\hat{M}'(s) = \exp \left\{ -\hat{P}_s \int_{s_0}^s \alpha(s') ds' \right\} \hat{M}(s) \exp \left\{ \hat{P}_s \int_{s_0}^s \alpha(s') ds' \right\}. \quad (2.9')$$

Отметим, что функционал  $\mathcal{F}$  в формулах (2.8) и (2.9) не следует воспринимать как предэкспоненту. Эти формулы (см. в [6] уравнения (16)–(20)) задают правило выпутывания экспоненциального фактора  $\exp \left\{ \hat{P} \int_{s_0}^{s_1} \alpha(s) ds \right\}$  из выражений типа (2.1). При этом подразумевается, что все операторы упорядочены согласно (2.2).

В дальнейшем роль  $s$  играет время и упорядочение операторов по Фейнману соответствует Т-произведению. Например, оператор эволюции квантовой системы

$$\begin{aligned} \hat{S}(t_1, t_0) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^N \left\{ 1 - \frac{i}{\hbar} \hat{H}(t_i) \Delta t_i \right\} = \\ &= T \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t_1} \hat{H}(t') dt' \right\}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где  $\hat{H}$  — гамильтониан и  $\Delta t_i = (t_1 - t_0)/N \rightarrow 0$ .

На этом мы закончим общее введение в ФМР, отсылая читателя за дальнейшими подробностями к основополагающей работе Фейнмана [6] (см. также приложение А в [6], в котором изложен более строгий вывод приведенных выше формул). Перейдем к применениям ФМР в квантовой механике.

### 3. Возбуждение гармонического осциллятора внешней силой

Начнем с рассмотренной Фейнманом [6, 7] задачи, которая, по его словам, "сформулированная в наиболее общем виде, является главной проблемой квантовой

<sup>3</sup> Такой случай часто встречается в приложениях. При этом индекс  $s$  у  $P_s$  определяет только порядок действия этого оператора относительно других операторов ( $\hat{M}, \hat{N}, \dots$ ) в (2.8), в дальнейшем мы его для краткости опускаем.

электродинамики" [6, с. 114]:

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \frac{1}{2}(\hat{p}^2 + \omega^2 \hat{q}^2) - f(t)\hat{q} = \\ &= \frac{1}{2}\omega(\hat{a}\hat{a}^+ + \hat{a}^+\hat{a}) - \frac{f(t)}{\sqrt{2\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^+).\end{aligned}\quad (3.1)$$

Здесь и далее мы выбираем систему единиц  $\hbar = m = 1$ ; при этом  $[\hat{p}, \hat{q}] = -i$ ,  $\hat{a}^+$  и  $\hat{a}$  — операторы рождения и уничтожения колебательных квантов:

$$\hat{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\omega\hat{q} - i\hat{p}), \quad \hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\omega\hat{q} + i\hat{p}), \quad [\hat{a}, \hat{a}^+] = 1, \quad (3.2)$$

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad \hat{a}^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad (3.3)$$

$$[\hat{H}, \hat{a}] = -\omega\hat{a} + (2\omega)^{-1/2}f, \quad [\hat{H}, \hat{a}^+] = \omega\hat{a}^+ - (2\omega)^{-1/2}f. \quad (3.4)$$

Относительно внешней силы  $f(t)$ , действующей на осциллятор, предполагается лишь, что  $f(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \pm\infty$ . Требуется найти вероятности перехода между начальным ( $|m\rangle$ ) и конечным ( $|n\rangle$ ) состояниями осциллятора с определенным числом квантов.

Применяя теорему Фейнмана к оператору эволюции осциллятора

$$\hat{S}(t, t_0) = T \exp\left(-i \int_{t_0}^t \hat{H}(t') dt'\right), \quad (3.5)$$

выпутаем сначала оператор  $\hat{H}_0 = (1/2)\omega(\hat{a}\hat{a}^+ + \hat{a}^+\hat{a})$ , относящийся к свободному осциллятору:

$$\begin{aligned}\hat{a}(t) &= \exp(i\hat{H}_0 t) \hat{a} \exp(-i\hat{H}_0 t) = \hat{a} \exp(-i\omega t), \\ \hat{a}^+(t) &= \hat{a}^+ \exp(i\omega t),\end{aligned}\quad (3.6)$$

что соответствует переходу к представлению взаимодействия. Отсюда получим

$$\begin{aligned}\hat{S}(t, t_0) &= \exp[-i\hat{H}_0(t-t_0)] \times \\ &\times T \exp\left\{\frac{i}{\sqrt{2\omega}} \int_{t_0}^t f(t') [\hat{a} \exp(-i\omega t') + \hat{a}^+ \exp(i\omega t')] dt'\right\},\end{aligned}\quad (3.7)$$

после чего применяем ФМР к выпутыванию слагаемого с  $\hat{a}^+$ . Учитывая соотношения

$$\begin{aligned}\hat{a}' &= \exp(-i\beta\hat{a}) \hat{a} \exp(i\beta\hat{a}^+) = \hat{a} + i\beta, \\ \hat{a}^{+'} &= \exp(-i\beta\hat{a}) \hat{a}^+ \exp(i\beta\hat{a}^+) = \hat{a}^+ - i\beta,\end{aligned}\quad (3.8)$$

в справедливости которых можно убедиться, продифференцировав их по параметру  $\beta$  с учетом<sup>4</sup> коммутационных соотношений и начального условия  $\hat{a}'(\beta=0) = \hat{a}$ , для амплитуды перехода между начальным  $|m\rangle$  и конечным  $|n\rangle$  состояниями осциллятора с определенным числом квантов находим:

$$A_{nm} = \frac{1}{\sqrt{m!n!}} \langle 0 | \hat{a}^n \exp(i\beta^* \hat{a}^+) \exp(i\beta \hat{a}) \hat{a}^{+'m} | 0 \rangle, \quad (3.9)$$

где в соответствии с (3.7)

$$\beta(t, t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \int_{t_0}^t f(t') \exp(-i\omega t') dt'. \quad (3.10)$$

Далее положим  $t_0 \rightarrow -\infty$ ,  $t \rightarrow \infty$  и  $\beta \equiv \beta(\infty, -\infty)$  — параметр, определяющий степень возбуждения осциллятора за все время действия внешней силы  $f(t)$ . Переставляя множители  $\exp(i\beta\hat{a})$  и  $\hat{a}^{+'m}$ ,  $\hat{a}^n$  и  $\exp(i\beta^* \hat{a}^+)$  и учитывая, что

$$\begin{aligned}|n\rangle &= (n!)^{-1/2} \hat{a}^{+'n} |0\rangle, \quad \hat{a}|0\rangle = \langle 0 | \hat{a}^+ \equiv 0, \\ \langle 0 | \hat{a}^{+'n} \hat{a}^m | 0 \rangle &= n! \delta_{nm}, \quad \exp(i\beta\hat{a}) |0\rangle = |0\rangle,\end{aligned}\quad (3.11)$$

окончательно получаем [6]:

$$\begin{aligned}A_{nm} &= \frac{1}{\sqrt{m!n!}} \langle 0 | (\hat{a} + i\beta^*)^n (\hat{a}^+ - i\beta)^m | 0 \rangle A_{00} = \\ &= A_{00} \sum_r \frac{\sqrt{m!n!}}{r!(n-r)!(m-r)!} (i\beta^*)^{n-r} (-i\beta)^{m-r},\end{aligned}\quad (3.12)$$

где  $0 \leq r \leq \min(m, n)$ ,  $A_{00}$  — амплитуда перехода вакуум-вакуум [7],

$$\begin{aligned}|A_{00}|^2 &= \exp\left\{-\frac{1}{2\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega|t-t'|) f(t) f(t') dt dt'\right\} = \\ &= \exp(-|\beta|^2).\end{aligned}\quad (3.13)$$

Другим способом (с помощью лагранжевой формы квантовой механики) формулы (3.12), (3.13) впервые были получены Фейнманом в работе [7]. При этом Фейнман отмечает, что входящую в (3.12) сумму можно выразить через полином Лагерра, однако, по его мнению, "в таком представлении нет никакого преимущества" [7, с. 451]. Последнее утверждение, по-видимому, не является бесспорным. Вскоре после появления работ [6, 7] Швингер получил (иным способом) более компактное выражение для вероятностей перехода [9]:

$$w_{nm} = |A_{nm}|^2 = (n_{<}/n_{>}!) \exp(-v) v^k [L_{n_{<}}^{(k)}(v)]^2 \quad (3.14)$$

(сравнительно простой вывод этой формулы на основе представления Фока-Баргмана приводится в приложении А). Здесь

$$n_{<} = \min(m, n), \quad n_{>} = \max(m, n), \quad (3.15)$$

$$k = n_{>} - n_{<} = |m - n|, \quad v = |\beta|^2,$$

а обобщенные полиномы Лагерра определяются согласно [20, 21]:

$$\begin{aligned}L_0^{(k)}(x) &= 1, \quad L_1^{(k)}(x) = k + 1 - x, \\ L_2^{(k)}(x) &= \frac{1}{2}(k+1)(k+2) - (k+2)x + \frac{1}{2}x^2, \\ L_n^{(k)}(x) &= \frac{(n+k)!}{n!k!} - \frac{(n+k)!}{(n-1)!(k+1)!}x + \dots + \frac{(-1)^n}{n!}x^n.\end{aligned}$$

Формула Швингера (3.14) эквивалентна (3.12), но для больших квантовых чисел она более удобна, так как позволяет воспользоваться известными асимптотиками для полиномов Лагерра. Для "диагональных" ( $m = n$ ) переходов

$$w_{mm} = 1 - (2n+1)v + \frac{3}{2}\left(n^2 + n + \frac{1}{3}\right)v^2 - \dots, \quad v \rightarrow 0, \quad (3.16)$$

<sup>4</sup> Здесь подразумевается, что параметр  $\beta$  не зависит от  $\hat{a}$  и  $\hat{a}^+$ .

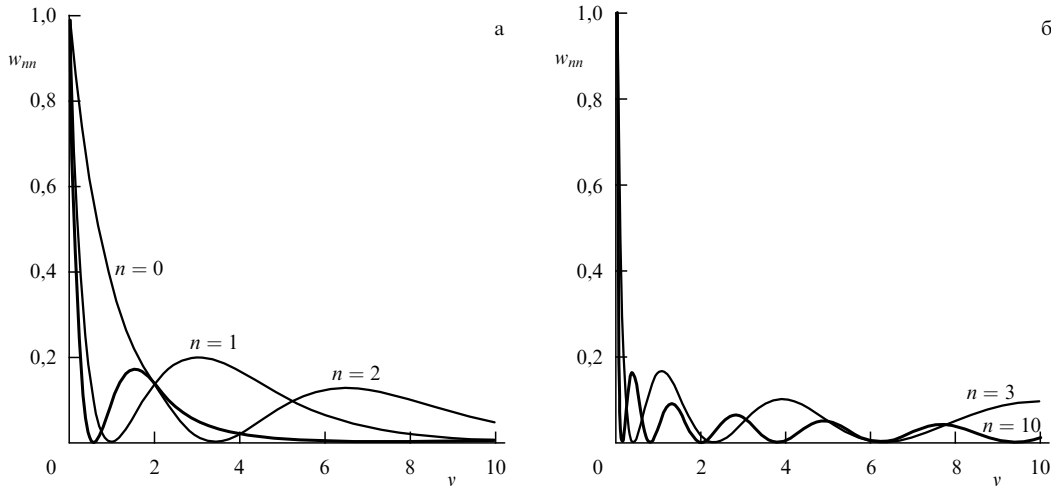


Рис. 1. Возбуждение гармонического осциллятора внешней силой: "диагональные" ( $m = n$ ) вероятности перехода в зависимости от  $v$  для (а)  $n = 0, 1$  и  $2$ ; (б)  $n = 3$  и  $10$ . У кривых указаны значения квантового числа  $n$ .

а при  $n \gg 1$  и любом  $v$

$$w_{nm} = \left[ J_0(\sqrt{2(2n+1)v}) \right]^2 + O(n^{-3/4}), \quad (3.16')$$

где  $J_0$  — функция Бесселя (формула типа Хильба, см. формулу 10.15.2 в [20]). С возрастанием параметра возбуждения  $v$  вероятности переходов изменяются немонотонно (за исключением случая малых квантовых чисел  $m, n$ ), что видно также из рис. 1. Заметим, что асимптотика (3.16') при  $v \rightarrow 0$  отличается от точного разложения (3.16) коэффициентом при  $v^2$ , который содержит  $n^2 + n + 1/4$  вместо правильного множителя  $n^2 + n + 1/3$ . В пределе  $v \gg 1$  (сильно возбужденный осциллятор)

$$w_{nm} = \exp(-v) \frac{v^{m+n}}{m!n!} \left[ 1 - 2mnv^{-1} + O(v^{-2}) \right]. \quad (3.17)$$

В ряде случаев формулы (3.12), (3.14) упрощаются. Так, для переходов с основного уровня (или на основной уровень) они сводятся к распределению Пуассона:

$$w_{n0}(v) = w_{0n}(v) = \exp(-v) \frac{v^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.18)$$

Для переходов с первого возбужденного уровня осциллятора

$$w_{01} = \exp(-v)v, \quad w_{n1}(v) = \exp(-v) \frac{v^{n-1}(n-v)^2}{n!}, \quad (3.18')$$

а для диагональных переходов

$$w_{nn}(v) = \exp(-v) \left[ \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!2} (-v)^k \right]^2. \quad (3.18'')$$

Как видно из (3.10), гармонический осциллятор возбуждается лишь той спектральной компонентой внешней силы, частота которой совпадает с его собственной частотой  $\omega$ , что связано с линейностью данной системы.

В заключение этого раздела заметим следующее.

а. Формула (3.14) появилась у Швингера при решении следующей задачи квантовой электродинамики (КЭД).

Пусть на пространственноподобных поверхностях  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , получающихся одна из другой с помощью параллельного переноса, заданы состояния изолированного (свободного) электромагнитного поля. В области между  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  поле взаимодействует с внешним током  $J_\mu(x)$ , который зависит от времени, но обращается в нуль на  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Требуется найти вероятность возбуждения различных состояний электромагнитного поля. Ответ имеет следующий вид (см. формулу (39) в работе [9]):

$$p(n, n') = \prod_{\lambda k} \left\{ \frac{n_{<}!}{n_{>}!} (|J|^2)^{n_{>} - n_{<}} [L_{n_{<}}^{(n_{>} - n_{<})} (|J|^2)]^2 \exp(-|J|^2) \right\}, \quad (3.19)$$

где  $n$  и  $n'$  — числа квантов с импульсом  $k$  и поляризацией  $\lambda$  в начальном и конечном состоянии поля. Формула (3.14) является частным случаем (3.19) для модели одного осциллятора. Пользуясь этими выражениями, Швингер рассмотрел квазиклассический предел, когда  $n, n' \gg 1$  и  $\Delta n = |n - n'| \ll n, n'$ .

Статья [9] входит в известный цикл работ Швингера, посвященных построению теории квантованных полей на основе единого динамического принципа, в который входят также работы [22, 23]. Странно, но ни [9], ни другие статьи этого цикла не содержат ссылок на более ранние работы Фейнмана [6, 7].

б. Используя (3.18) и (3.18'), легко проверить, что при  $m = 0$  и  $1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_{nm}(v) = 1. \quad (3.20)$$

Разумеется, условие унитарности (3.20) должно выполняться при произвольном начальном состоянии  $|m\rangle$ , однако проверить это непосредственно исходя из выражений (3.12) или (3.14) не так просто.

в. Вероятности перехода  $w_{nm}$  зависят от одного параметра  $v$ , определяемого формулами (3.10), (3.15) при  $t \rightarrow +\infty$ . Если характерное время действия силы велико по сравнению с периодом осциллятора  $T = 2\pi/\omega$  и сила  $f(t)$  изменяется плавно (адиабатический предел), то параметр возбуждения  $v$  экспоненциально мал (см. приложение Б) и переходы происходят практически

только на соседние уровни:

$$\begin{aligned} w_{n+1,n} &= (n+1)v + O(v^2), \\ w_{nn} &= 1 - (2n+1)v + \dots, \\ w_{n-1,n} &= nv + \dots, \end{aligned} \tag{3.21}$$

и в общем случае

$$\begin{aligned} w_{n+k,n}(v) &= \frac{(n+k)!}{n!k!^2} v^k + \dots, \\ w_{n-k,n}(v) &= \frac{n!}{(n-k)!k!^2} v^k, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{3.22}$$

г. Гамильтониан

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \hat{p}^2 + \frac{1}{2} \omega^2 (\hat{q} - \xi(t))^2 \tag{3.23}$$

соответствует осциллятору, точка равновесия которого смещается (колеблется) произвольным образом. При этом

$$\begin{aligned} \hat{S}(\infty, -\infty) &= \exp(-i\varphi) \times \\ &\times \text{T exp} \left\{ -i \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2} (\hat{p}^2 + \omega^2 \hat{q}^2) - \omega^2 \xi(t) \hat{q} \right] dt \right\}, \end{aligned} \tag{3.24}$$

где  $\varphi$  — фаза, не влияющая на вероятности перехода. Поэтому справедливы все предыдущие формулы, в которых теперь

$$v = \frac{1}{2} \omega^3 \left| \int_{-\infty}^{\infty} \xi(t) \exp(-i\omega t) dt \right|^2. \tag{3.25}$$

Итак, ФМР естественным образом приводит к точному решению задачи о возбуждении гармонического осциллятора при произвольном виде внешней силы  $f(t)$ . Существенным моментом является то, что в гамильтониан (3.1) входят только два оператора  $\hat{a}$  и  $\hat{a}^+$ , коммутатор которых представляет собой  $c$ -число. В других случаях применение ФМР усложняется.

#### 4. Частица с произвольным спином во внешнем магнитном поле

Уравнение Шрёдингера для спиновой волновой функции [24, 25]

$$i\dot{\psi} = -\gamma(\mathbf{H}(t)\hat{\mathbf{s}})\psi, \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_s \\ \psi_{s-1} \\ \vdots \\ \psi_{-s} \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

( $\gamma$  — гиромагнитное отношение,  $\hbar = 1$ ) с учетом явного вида спиновых матричных элементов  $\hat{s}_{\sigma\sigma'}$  сводится к системе из  $2s+1$  связанных между собой уравнений для компонент  $\psi_{\sigma}$ , имеющих довольно громоздкий вид. ФМР позволяет найти решение этой системы при произвольной зависимости магнитного поля  $\mathbf{H}(t)$  от времени.

Заметим, что

$$(\mathbf{H}\hat{\mathbf{s}}) = \sum_{\mu=-1}^1 H_{\mu}(t)\hat{s}_{\mu}, \quad H_{\pm} = \frac{1}{2}(H_x \mp iH_y), \quad H_0 = H_z, \tag{4.2}$$

где операторы  $\hat{s}_{\mu}$  определяются как в (1.2). Оператор эволюции  $\hat{S}$  может быть записан в виде Т-экспоненты, однако при этом операторы  $\mathbf{H}\hat{\mathbf{s}}$  в разные моменты времени не коммутируют между собой<sup>5</sup>. Попробуем представить  $\hat{S}$  в "распутанном" виде:

$$\hat{S}(t, t_0) = \exp(a\hat{s}_+) \exp(b\hat{s}_0) \exp(c\hat{s}_-), \tag{4.3}$$

где  $a, b$  и  $c$  — некоторые функции времени. Поскольку в выражениях  $\exp(c\hat{s}_-)|\sigma'\rangle$  и  $\langle\sigma|\exp(a\hat{s}_+)$  отличны от нуля лишь несколько первых членов разложения экспоненты в ряд, то из (4.3) нетрудно получить [10] формулу, подобную (3.12), для вероятностей перехода из одного спинового состояния в другое ( $\sigma' \rightarrow \sigma$ ):

$$w_{\sigma\sigma'} = |S_{\sigma\sigma'}(t, t_0)|^2, \quad -s \leq \sigma, \quad \sigma' \leq s. \tag{4.4}$$

Однако ответ можно представить в более компактном виде. Для этого, следуя [10], запишем

$$\mathbf{H}\hat{\mathbf{s}} = \chi\hat{s}_+ + (H_+ - \chi)\hat{s}_+ + H_0\hat{s}_0 + H_-\hat{s}_-, \tag{4.5}$$

не фиксируя функцию  $\chi(t)$  заранее, и применим к первому слагаемому теореме Фейнмана о распутывании экспоненциального множителя:

$$\begin{aligned} \hat{S}(t, t_0) &= \exp(a(t)\hat{s}_+) \times \\ &\times \text{T exp} \left\{ i\gamma \int_{t_0}^t [(H_+ - \chi)\hat{s}'_+ + H_0\hat{s}'_0 + H_-\hat{s}'_-] dt' \right\}, \end{aligned} \tag{4.6}$$

где согласно (2.8')

$$a(t) = -i\gamma \int_{t_0}^t \chi(t') dt', \quad \hat{s}'_{\mu}(t) = \exp(-a\hat{s}_+) \hat{s}_{\mu} \exp(a\hat{s}_+). \tag{4.6'}$$

Дифференцируя (4.6') по параметру  $a$  и учитывая коммутаторы (1.1) с  $\eta = 1$ , находим

$$\dot{s}'_+ = \hat{s}_+, \quad \dot{s}'_0 = \hat{s}_0 + a\hat{s}_+, \quad \dot{s}'_- = \hat{s}_- - 2a\hat{s}_0 - a^2\hat{s}_+. \tag{4.7}$$

Подставляя (4.7) в (4.6), потребуем, чтобы оператор  $\hat{s}_+$  выпутался полностью, что дает для  $a(t)$  уравнение Риккати

$$\dot{a} = i\gamma(H_+ + H_0a - H_-a^2), \quad a(t_0) = 0. \tag{4.8}$$

Продолжая эту процедуру, можно получить явные (хотя и довольно громоздкие) [10] выражения для функций  $b(t)$  и  $c(t)$ , однако, как мы сейчас увидим, в этом нет необходимости.

Уравнение (4.1) сохраняет  $\mathbf{s}^2$ , поэтому преобразование волновой функции является пространственным поворотом:

$$S_{\sigma\sigma'}(t, t_0) = D_{\sigma\sigma'}^{(s)}(\varphi, \vartheta, \psi) = \exp[-i(\sigma\varphi + \sigma'\psi)] d_{\sigma\sigma'}^s(\vartheta), \tag{4.9}$$

где  $\psi, \vartheta, \varphi$  — углы Эйлера, зависящие от  $t$ ,  $D_{\sigma\sigma'}^{(s)}$  — матрица конечного поворота в группе SU(2), или D-функция Вигнера [13, 18, 26]. Вероятность изменения проекции спина частицы на ось  $z$  выражается в виде

$$w_{\sigma\sigma'} = |S_{\sigma\sigma'}|^2 = |d_{\sigma\sigma'}^s(\vartheta(t))|^2. \tag{4.10}$$

<sup>5</sup> За исключением тривиального случая, когда магнитное поле сохраняет свое направление в пространстве:  $[\mathbf{H}_1\hat{\mathbf{s}}, \mathbf{H}_2\hat{\mathbf{s}}] = i(\mathbf{H}_1 \times \mathbf{H}_2)\hat{\mathbf{s}}$ .

Функции  $d_{\sigma\sigma'}^s(\vartheta)$ , отвечающие повороту на угол  $\vartheta$  вокруг оси  $Ox$ , хорошо известны и затабулированы [26], например

$$d_{jj}^j(\vartheta) = d_{-j,-j}^j(\vartheta) = \left(\cos \frac{\vartheta}{2}\right)^{2j}, \quad d_{j,-j}^j(\vartheta) = i^{2j} \left(\sin \frac{\vartheta}{2}\right)^{2j},$$

а в общем случае они выражаются через полиномы Якоби [18].

Остается указать связь угла  $\vartheta(t)$  с  $a(t)$ . В уравнение (4.8) входит  $\gamma$  и внешнее магнитное поле, но не входит (в отличие от (4.1)) в явном виде спин частицы  $s$ . Поэтому искомое соотношение можно найти для любого спина  $s$ , т.е. для любого неприводимого представления унитарной группы  $SU(2)$ . Естественно выбрать простейшее представление, в котором  $\hat{s}_{\pm} = (1/2)(\sigma_x \pm i\sigma_y)$ ,  $\hat{s}_0 = (1/2)\sigma_z$ ,  $\sigma_i$  — матрицы Паули:

$$\begin{aligned} \hat{s}_+ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \exp(a\hat{s}_+) &= \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \hat{s}_0 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, & \exp(b\hat{s}_0) &= \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{b}{2}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-\frac{b}{2}\right) \end{pmatrix}, \\ \hat{s}_- &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \exp(c\hat{s}_-) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}, & \hat{s}_{\pm}^2 &= 0. \end{aligned}$$

Перемножая входящие в (4.3) матрицы, получим

$$\hat{S}(t, t_0) = \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{b}{2}\right) + ac \exp\left(-\frac{b}{2}\right) & a \exp\left(-\frac{b}{2}\right) \\ c \exp\left(-\frac{b}{2}\right) & \exp\left(-\frac{b}{2}\right) \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

и, сравнивая со стандартным выражением [13, 18] для функций Вигнера

$$\begin{aligned} D^{(1/2)}(\psi, \vartheta, \varphi) &= \begin{pmatrix} \alpha & -\beta^* \\ \beta & \alpha^* \end{pmatrix}, \\ \alpha &= \cos \frac{\vartheta}{2} \exp\left[\frac{i(\psi + \varphi)}{2}\right], & \beta &= i \sin \frac{\vartheta}{2} \exp\left[\frac{i(\psi - \varphi)}{2}\right], \end{aligned}$$

окончательно находим  $c = a \exp[i(\psi - \varphi)]$  и

$$\tan^2 \frac{\vartheta}{2} = |a(t)|^2. \quad (4.12)$$

Таким образом, для вычисления вероятностей перехода  $w_{\sigma\sigma'}$  в случае частицы с произвольным спином  $s$  достаточно найти лишь одну функцию<sup>6</sup>  $a(t)$ , которая полностью определяется из уравнения Риккати (4.8).

Приведем для иллюстрации вероятности спиновых переходов в случае низших спинов  $s = 1/2$  и 1:

$$\begin{aligned} w_{1/2,1/2} &= (1 + |a|^2)^{-1}, & w_{-1/2,1/2} &= |a|^2(1 + |a|^2)^{-1}, \\ w_{11} &= (1 + |a|^2)^{-2}, & w_{01} &= 2|a|^2(1 + |a|^2)^{-2}, \\ w_{-1,1} &= |a|^4(1 + |a|^2)^{-2}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

и для частицы с любым спином  $s$ :

$$w_{\sigma\sigma'} = \frac{(2s)!}{(s + \sigma)!(s - \sigma)!} |a|^{2(s-\sigma)} (1 + |a|^2)^{-2s}, \quad (4.14)$$

здесь принято, что в начальный момент проекция спина максимальна:  $\sigma' = s$ .

Может показаться, что данный подход справедлив лишь до того момента  $t = t_1$ , при котором  $a(t)$  обращается в бесконечность (что, как видно из (4.13), соответствует полной переориентации спина частицы). Однако это не так: достаточно перейти от (4.8) к уравнению для функции  $\tilde{a}(t) = 1/a(t)$ , также являющемуся уравнением Риккати:

$$\dot{\tilde{a}} = i\gamma(H_- - H_0\tilde{a} - H_+\tilde{a}^2), \quad (4.15)$$

в котором  $\tilde{a}(t_1) \rightarrow 0$ . Используя попеременно эти два уравнения, можно продолжить решение  $a(t)$  на сколь угодно большое время  $t$ . В приложении В мы проиллюстрируем применение уравнения Риккати на некоторых примерах.

Следует отметить, что уравнение (4.8) было получено (естественно, без применения ФМР) еще в 1932 г. в работе Майорана [25], который, однако, не использовал его в конкретных расчетах. В [25] рассмотрена динамика спина  $s = 1/2$  в магнитном поле вида  $\mathbf{B}(t) = \{B_x, 0, B_z t\}$ , где  $B_x$  и  $B_z$  — некоторые константы. При этом  $z$ -я компонента поля исчезает при  $t = 0$  и переориентация спина возможна, даже если магнитное поле изменяется медленно (на макроскопических расстояниях) в результате нарушения адиабатичности. Майорана представил решение уравнения Шрёдингера (4.1) в виде контурного интеграла на комплексной плоскости и вычислил вероятность переориентации спина; уравнение Риккати, отвечающее этому примеру, приведено в приложении В (см. формулу (В.7)).

В работе [27] опубликован интересный исторический комментарий к работе Майорана, в котором показано, что она имеет непосредственное отношение к теории неадиабатических переходов между квазипересекающимися уровнями, в частности, при медленных атомных столкновениях<sup>7</sup>. Эта задача была рассмотрена (различными методами) в том же 1932 г. в работах Ландау [30], Зинера [31] и Штюкельберга [32], результаты которых хорошо известны специалистам по атомной физике, однако связь этих результатов с работой Майорана [25] была замечена лишь недавно [27].

Отметим также, что Майорана впервые применил изящный прием, рассматривая частицу с произвольным спином  $s$  как совокупность  $2s$  "частиц" со спином  $1/2$ , спины которых параллельны и вращаются в магнитном поле независимо. Этот прием неоднократно использовался в дальнейшем [33, 34] (см. также [24, § 114]) и уже вошел в учебную литературу.

Уравнения (4.1) и (4.8) относятся к нерелятивистскому случаю. Если частица с магнитным моментом движется с релятивистской скоростью в электромагнитном поле  $F_{\mu\nu}$ , причем ее орбитальное движение можно считать квази-

<sup>6</sup> Это не было замечено в [10] и привело к некоторому усложнению вычислений.

<sup>7</sup> Проблему вычисления вероятностей неадиабатических переходов в квантовой механике впервые обсуждал, по-видимому, Гюттингер [28]. Некоторые неточности, допущенные в этой работе, исправлены Швингером [29].

классическим, то изменение спина (или вектора поляризации частицы) определяется из уравнения Баргмана – Мишеля – Телегди (см. [35, 36], а также [37, § 41]):

$$\frac{ds^\mu}{d\tau} = \frac{e}{2mc} [gF^{\mu\nu}s_\nu + (g-2)u^\mu F^{\alpha\beta}u_\alpha s_\beta], \quad (4.16)$$

где  $g$  — гиромагнитное отношение,  $u^\mu = dx^\mu/d\tau$  — 4-скорость частицы,  $\tau$  — собственное время. Некоторые примеры решения этого уравнения приведены в [37]. В работе [38] на основе уравнения (4.16) найдена угловая скорость вращения спина в системе покоя частицы, жестко связанной с ее траекторией<sup>8</sup>.

## 5. Квантовый осциллятор с переменной частотой

В этом случае гамильтониан имеет вид (3.1) с  $f(t) \equiv 0$ , но частота  $\omega$  теперь изменяется со временем. Предполагается существование пределов

$$\omega(t) \rightarrow \begin{cases} \omega_-, & t \rightarrow -\infty, \\ \omega_+, & t \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (5.1)$$

что позволяет ввести начальные и конечные состояния осциллятора с определенным числом квантов ( $m$  и  $n$  соответственно) и рассмотреть переходы между ними. Считаем, что  $\omega_\pm > 0$ , однако при конечных  $t$  может быть  $\omega^2(t) < 0$ , что соответствует нестабильному осциллятору (или подбарьерной области в квантовой механике,  $t \rightarrow x$ ).

Представим оператор эволюции

$$\hat{S}(t, t_0) = T \exp \left\{ -i \int_{t_0}^t \left( \frac{1}{2} \hat{p}^2 + \frac{1}{2} \omega^2(t') \hat{q}^2 \right) dt' \right\} \quad (5.2)$$

в распутанном виде. Соотношения коммутации

$$\begin{aligned} [\hat{p}^2, \hat{q}^2] &= -2i(\hat{p}\hat{q} + \hat{q}\hat{p}), \\ [\hat{p}^2, \hat{p}\hat{q} + \hat{q}\hat{p}] &= -4i\hat{p}^2, \\ [\hat{q}^2, \hat{p}\hat{q} + \hat{q}\hat{p}] &= 4i\hat{q}^2 \end{aligned} \quad (5.3)$$

показывают, что операторная алгебра замыкается, и потому возможно применение ФМР. Обозначая

$$\hat{A} = \frac{1}{2} \hat{q}^2, \quad \hat{B} = \frac{1}{2} \hat{p}^2, \quad \hat{C} = \frac{1}{4} (\hat{p}\hat{q} + \hat{q}\hat{p}), \quad (5.4)$$

имеем

$$[\hat{A}, \hat{B}] = 2i\hat{C}, \quad [\hat{B}, \hat{C}] = -i\hat{B}, \quad [\hat{C}, \hat{A}] = -i\hat{A}. \quad (5.5)$$

Далее применяем тот же прием, что и в (4.5), (4.6): полагаем  $\hat{H} = \chi\hat{A} + (\omega^2 - \chi)\hat{A} + \hat{B}$ , где  $\chi(t)$  определяется в самом процессе распутывания. Учитывая соотношения

$$\hat{A}' = \hat{A}, \quad \hat{B}' = \hat{B} + 2ia\hat{C} - a^2\hat{A}, \quad \hat{C}' = \hat{C} + ia\hat{A},$$

$$a(t) = i \int_{t_0}^t \chi(t') dt',$$

в которых операторы  $\hat{A}'(t)$  и т.д. определены как в (2.8'), в итоге получаем [11]

$$\hat{S}(t, t_0) = \exp \left( -\frac{1}{2} a\hat{q}^2 \right) \exp \left[ \frac{c}{2} (\hat{p}\hat{q} + \hat{q}\hat{p}) \right] \exp \left( -\frac{1}{2} b\hat{p}^2 \right), \quad (5.6)$$

где операторы полностью распутаны, знак Т-произведения можно опустить и функция  $a(t)$  определяется из уравнения Риккати

$$\dot{a} = i[\omega^2(t) - a^2], \quad (5.7)$$

а  $b(t)$  и  $c(t)$  выражаются через нее в виде квадратур:

$$b(t) = i \int_{t_0}^t \exp(-2ic(t')) dt', \quad c(t) = \int_{t_0}^t a(t') dt'. \quad (5.7')$$

При вычислении амплитуды перехода

$$A_{nm} = \langle n, \omega_+ | \hat{S}(+\infty, -\infty) | m, \omega_- \rangle \quad (5.8)$$

удобно взять волновую функцию начального состояния  $|m, \omega_- \rangle$  в р-представлении, волновую функцию конечного состояния  $|n, \omega_+ \rangle$  — в q-представлении и использовать явный вид собственных функций оператора  $\hat{C}$ . После этого проблему можно считать в принципе решенной, но возникающие интегралы являются (особенно при произвольных квантовых числах  $m$  и  $n$ ) довольно громоздкими.

Выкладки упрощаются, если дополнить ФМР простыми теоретико-групповыми соображениями. Операторы

$$\hat{J}_\pm = \hat{C} \pm \frac{i}{2} (\hat{A} - \hat{B}) = \pm \frac{i}{4} (\hat{q} \mp i\hat{p})^2, \quad (5.9)$$

$$\hat{J}_0 = \frac{1}{2} (\hat{A} + \hat{B}) = \frac{1}{4} (\hat{p}^2 + \hat{q}^2)$$

удовлетворяют коммутационным соотношениям (1.1) с  $\eta = -1$ . Прямое вычисление с использованием явного вида операторов (5.9) дает

$$\hat{\mathbf{J}}^2 = \hat{J}_0^2 - \frac{1}{2} (\hat{J}_+\hat{J}_- + \hat{J}_-\hat{J}_+) = -\frac{3}{16}. \quad (5.9')$$

Поскольку оператор Казимира  $\hat{\mathbf{J}}^2$  свелся к  $c$ -числу, то мы имеем дело с неприводимым [14–17] представлением группы (точнее, алгебры)  $SU(1,1)$ . Полагая  $\hat{\mathbf{J}}^2 = j(j+1)$ , имеем  $j = -1/4$  или  $-3/4$ , т.е. на волновых функциях осциллятора реализуются два неприводимых представления (с указанными "весами"  $j$ ), которые являются унитарными (поскольку для оператора эволюции в квантовой механике  $S^\dagger S = 1$ ) и бесконечномерными<sup>9</sup>.

Как ясно из (5.9), спектр оператора  $\hat{J}_0$  имеет вид  $\lambda_n = (2n+1)/4$  с  $n = 0, 1, 2, \dots$ . При четных  $n = 2k$  имеем

<sup>9</sup> Что неудивительно, поскольку  $SU(1, 1)$  — некомпактная группа (последнее видно уже из того, что матричные элементы (1.9) не ограничены по величине). Подобная ситуация более знакома физикам по однородной (или собственной) группе Лоренца [39–41]. Математическая теория представлений группы Лоренца подробно рассмотрена в [42, 43], теорию унитарных (бесконечномерных) представлений некомпактных алгебр Ли можно найти в [19]. В книге Виленкина [18] группа  $SU(1, 1)$  обозначается как  $QU(2)$ .

<sup>8</sup> Аналог трехгранника Френе для четырехмерной траектории  $x^\mu(\tau)$  в пространстве Минковского.



$\lambda_n = k - j$  с  $j = -1/4$ , а при  $n = 2l + 1$  имеем  $\lambda_n = l - j$  с  $j = -3/4$ , где  $k, l = 0, 1, 2, \dots$  — целые числа. Переходы происходят между состояниями  $|m, \omega_- \rangle$  и  $|n, \omega_+ \rangle$  с одинаковой четностью, что вытекает из четности осцилляторного потенциала. При этом амплитуды перехода  $A_{nm}$  выражаются через функции Вигнера, т.е. матрицы конечных поворотов для указанных выше представлений:

$$A_{nm} = D_{\mu\nu}^j(\psi, \beta, \varphi) = \exp[-i(\mu\psi + \nu\varphi)] f_{\mu\nu}^{(j)}(\beta), \quad (5.10)$$

$$w_{nm} = |A_{nm}|^2 = |f_{k-j, l-j}^{(j)}(\beta)|, \quad 0 \leq \beta < \infty,$$

причем для четных уровней осциллятора

$$j = -\frac{1}{4}, \quad k = \frac{n}{2}, \quad l = \frac{m}{2}, \quad (5.10')$$

а для нечетных уровней

$$j = -\frac{3}{4}, \quad k = \frac{n-1}{2}, \quad l = \frac{m-1}{2} \quad (5.10'')$$

и в обоих случаях  $k - j = (1/2)(n + 1/2)$ ,  $l - j = (1/2)(m + 1/2)$ . Вероятности квантовых переходов выражаются (мы опускаем технические детали вычислений) в виде [11]

$$w_{nm} = \frac{L!}{K!^2 S!} \frac{\Gamma(L - 2j)}{\Gamma(S - 2j)} \times \rho^K (1 - \rho)^{-2j} \left[ {}_2F_1(-S, L - 2j; K + 1; \rho) \right]^2, \quad (5.11)$$

где  $L = \max(k, l)$ ,  $S = \min(k, l)$ ,  $K = L - S = |m - n|/2$ ,  $\rho = \tanh^2(\beta/2)$  — параметр, определяющий степень возбуждения осциллятора ( $0 \leq \rho < 1$ ),  ${}_2F_1(\dots)$  — гипергеометрическая функция Гаусса,  $\beta$  — угол гиперболического поворота в группе  $SU(1, 1)$ , который может быть вычислен из классического уравнения движения  $\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0$  либо из уравнения Риккати (5.7):

$$a(-\infty) = \omega_-, \quad \rho = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left| \frac{\omega_+ - a(t)}{\omega_+ + a(t)} \right|^2, \quad (5.12)$$

$$\beta = \ln \frac{1 + \sqrt{\rho}}{1 - \sqrt{\rho}}.$$

Например, для  $\omega(t) = \omega_- \theta(-t) + \omega_+ \theta(t)$  (где  $\theta(t)$  — ступенчатая функция Хевисайда), что соответствует мгновенному скачку частоты осциллятора от  $\omega_-$  к  $\omega_+$  (см. также формулу (Б.6)), имеем

$$\beta = \ln \frac{\omega_+}{\omega_-}, \quad \rho = \tanh^2 \frac{\beta}{2} = \left[ \frac{\omega_+ - \omega_-}{\omega_+ + \omega_-} \right]^2. \quad (5.13)$$

Поскольку в (5.11)  $S \geq 0$  — целое, то гипергеометрическая функция всегда сводится к полиному. Рассмотрим несколько частных случаев.

Для переходов с двух нижних уровней осциллятора ( $m = 0$  и  $1$ ) формулы значительно упрощаются:

$$w_{n0} = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{(n/2)! \Gamma(1/2)} \rho^{n/2} \sqrt{1-\rho}, \quad n = 0, 2, 4, \dots, \quad (5.14)$$

$$w_{n1} = \frac{\Gamma((n+2)/2)}{\Gamma((n+1)/2) \Gamma(3/2)} \rho^{(n-1)/2} (1-\rho)^{3/2}, \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

Выражения (5.14) совпадают с полученными в [44–47]. В случае "диагональных" ( $m = n$ ) переходов вероятности  $w_{nn}$  можно выразить через обобщенный гипергеометрический ряд [11]:

$$w_{nn} = \sqrt{1-\rho} {}_3F_2\left(-n, n+1, \frac{1}{2}; 1, 1; \rho\right), \quad (5.15)$$

что удобно, например, в адиабатическом случае, когда  $\rho \ll 1$ :

$$w_{nn}(\rho) = 1 - \frac{1}{2} N \rho + \frac{1}{32} (3N^2 - 4N - 3) \rho^2 - \frac{1}{576} (5N^3 - 28N^2 + 11N + 48) \rho^3 + \dots, \quad (5.16)$$

где  $N = n^2 + n + 1$ . Малым параметром здесь служит  $n^2 \rho$ , причем коэффициент при  $\rho^k$  является полиномом  $k$ -й степени от  $N$ . Вероятности переходов с  $m \neq n$  при  $\rho \rightarrow 0$  быстро убывают с возрастанием  $|m - n| = 2K$ :

$$w_{nm} = \frac{n!}{(2^K K!)^2 n!} \left[ \rho^K - \frac{mn + (m+n)/2 + 1}{2(K+1)} \rho^{K+1} + \dots \right]. \quad (5.17)$$

С возрастанием параметра возбуждения  $\rho$  вероятности перехода для больших квантовых чисел изменяются довольно прихотливо, как видно из рис. 2 (который можно сравнить с рис. 1) и рис. 3, 4. На рисунке 4 изображены вероятности переходов вверх с  $m$ -го уровня  $W_m^{(+)} = \sum_{n>m} w_{nm}$ . При малых  $\rho$  переходы вверх преобладают над переходами вниз:

$$W_m^{(+)} = \frac{1}{4} (m+1)(m+2) \left[ \rho - \frac{1}{16} (3m^2 + 5m - 4) \rho^2 + \dots \right], \quad (5.18)$$

$$\frac{W_m^{(-)}}{W_m^{(+)}} = \frac{m(m-1)}{(m+1)(m+2)} [1 + O(\rho)], \quad (5.19)$$

и, как показывает численный расчет [11], то же верно и при  $\rho \sim 1$ . За исключением двух нижних уровней зависимость вероятностей  $w_{nm}$  от  $\rho$  не является монотонной и имеет осцилляции. В частности, вероятности перехода обращаются в нуль при значениях  $\rho$ , соответствующих нулям функций Лежандра.

В квазиклассическом пределе  $m, n \gg 1$  после усреднения  $w_{nm}$  по быстрым осцилляциям, характерным для квантовой механики, происходит переход к распределению, соответствующему классическому осциллятору:

$$\langle w_{nm} \rangle = \frac{2}{\pi \sqrt{(n-n_1)(n_2-n)}}, \quad n_{1,2} = m \exp(\mp \beta), \quad (5.20)$$

что хорошо видно из рис. 3г, д. Здесь  $n_{1,2}$  — точки поворота, при  $n < n_1$  и  $n > n_2$  вероятности перехода убывают экспоненциально [46].

В случае  $m = n$  (5.11) можно представить также в виде

$$w_{nn} = \sqrt{1-\rho} \left[ P_n(\sqrt{1-\rho}) \right]^2, \quad (5.21)$$

где  $P_n$  — полином Лежандра. Для произвольных квантовых чисел  $m$  и  $n$  аналогичное выражение получено

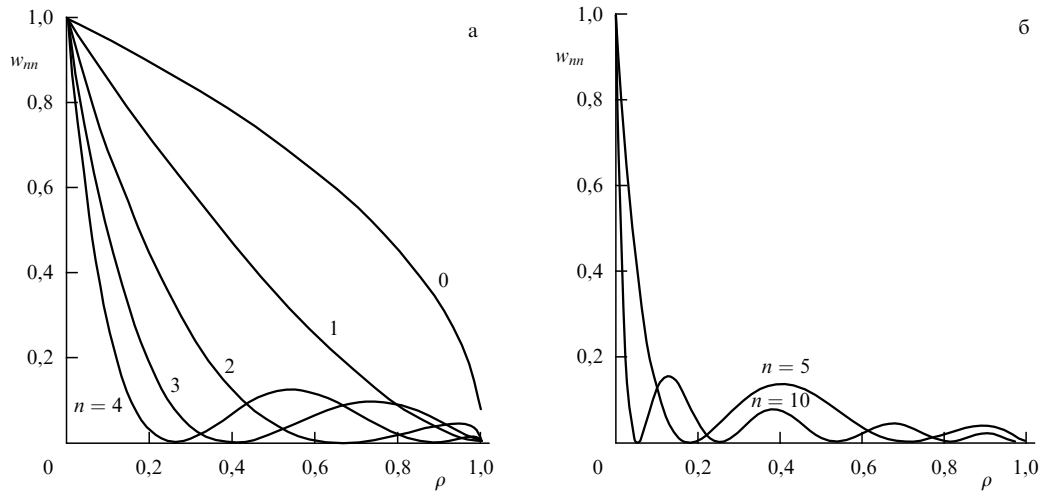


Рис. 2. Осциллятор с переменной частотой. Вероятности перехода  $w_{nm}(\rho)$  при: (а)  $0 \leq n \leq 4$  и (б)  $n = 5$  и  $10$ .

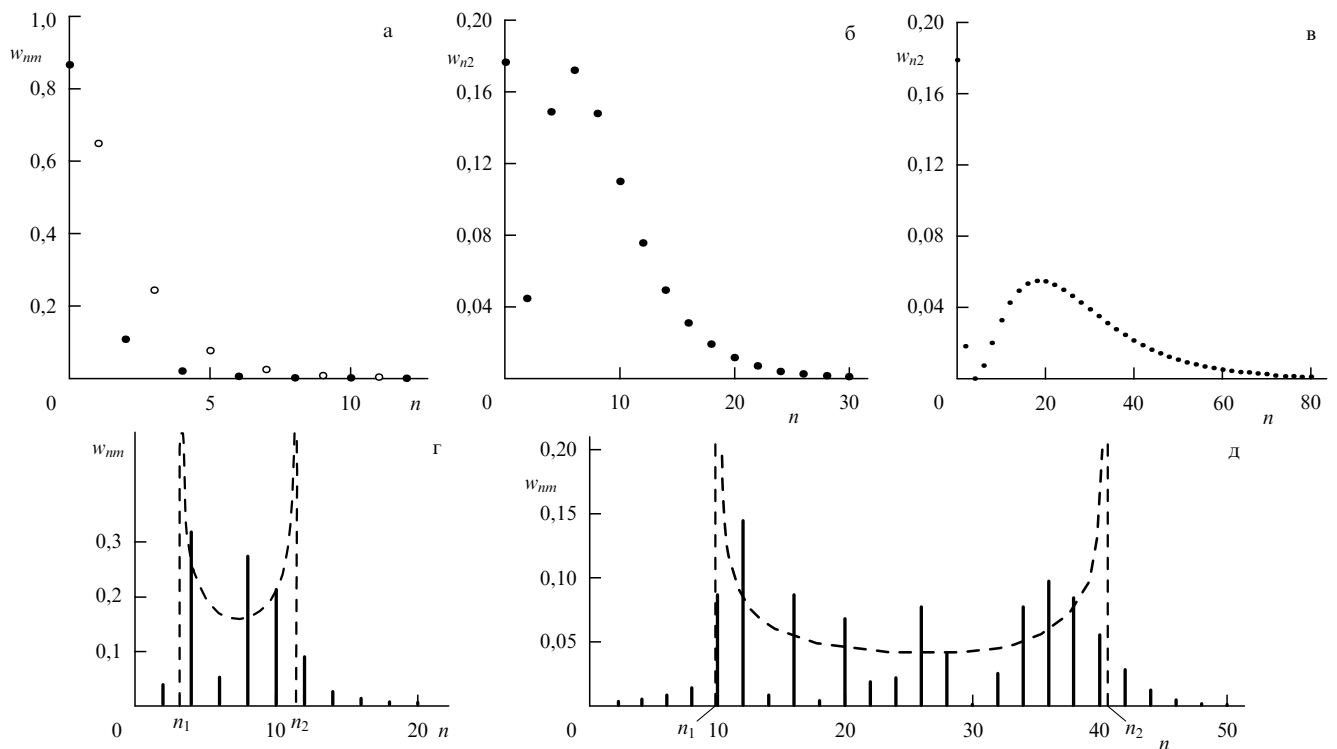


Рис. 3. Распределение вероятностей  $w_{nm}$  для переходов с  $m$ -го уровня осциллятора: (а)  $\rho = 0,25$ ,  $m = 0(\bullet)$  и  $m = 1(\circ)$ ; (б)  $\rho = 0,5$ ,  $m = 2$ ; (в)  $\rho = 0,8$ ,  $m = 2$ ; (г)  $m = 6$ ,  $\rho = 0,096$ ; (д)  $m = 20$ ,  $\rho = 0,12$ . Штриховые кривые на рис. г и д соответствуют распределению (5.20) в классической механике.

(более сложным способом) в [46] при непосредственном решении уравнения Шрёдингера.

В адиабатическом случае выражение (5.11) предпочтительнее, чем (5.21). Следует отметить, что вероятности перехода  $w_{nm}$  были вычислены в адиабатическом приближении в работе Дыхне [48], некоторое уточнение результатов которой содержится в формулах (4.6), (4.7) работы [11].

Основным результатом данного раздела можно считать формулу (5.11), которая была получена [11] с помощью эвристического приема: аналитического продолжения функций Вигнера (4.9) с группы  $SU(2)$  на

квазиунитарную группу  $SU(1,1)$ . Для конечномерных представлений унитарность при таком продолжении заведомо нарушается, что видно из (1.9). Тем не менее в специальном случае бесконечномерных представлений с весами  $j = -1/4$  и  $-3/4$  условие унитарности выполняется:

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_{nm}(\rho) = 1, \quad m = 0, 1, 2, \dots \tag{5.22}$$

что служит обоснованием изложенных выше результатов (см. в связи с этим также приложение Г).

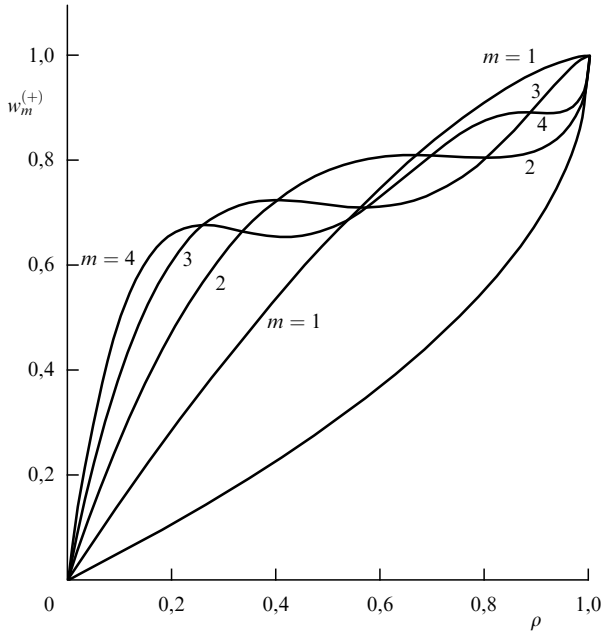


Рис. 4. Вероятности переходов вверх ( $n > m$ ) с  $m$ -го уровня осциллятора в зависимости от параметра возбуждения  $\rho$ .

### 6. Осциллятор с переменными параметрами

Рассмотрим теперь гамильтониан (3.1), в котором как частота  $\omega$ , так и сила  $f$  зависят от времени произвольным образом. Вычисляя коммутаторы операторов, входящих в гамильтониан:

$$\begin{aligned} [\hat{p}^2, \hat{q}^2] &= -2i(\hat{p}\hat{q} + \hat{q}\hat{p}), & [\hat{p}^2, \hat{p}\hat{q} + \hat{q}\hat{p}] &= -4i\hat{p}^2, \\ [\hat{q}^2, \hat{p}\hat{q} + \hat{q}\hat{p}] &= 4i\hat{q}^2, & [\hat{p}^2, \hat{q}] &= [\hat{p}, \hat{p}\hat{q} + \hat{q}\hat{p}] = -2i\hat{p}, \\ [\hat{q}^2, \hat{p}] &= [\hat{q}, \hat{p}\hat{q} + \hat{q}\hat{p}] = 2i\hat{q}, & [\hat{p}, \hat{q}] &= -i, \end{aligned} \quad (6.1)$$

видим, что операторная алгебра на этом замыкается, что указывает на возможность применения ФМР к оператору эволюции  $\hat{S}$ . Используя ту же процедуру, что и в разделе 5, получаем

$$\hat{S}(t, t_0) = \exp\left(-\frac{a}{2}\hat{q}^2\right) \exp\left[\frac{c}{2}(\hat{p}\hat{q} + \hat{q}\hat{p})\right] \exp\left(-\frac{b}{2}\hat{p}^2\right) \hat{U}, \quad (6.2)$$

где  $a(t)$ ,  $b(t)$  и  $c(t)$  — те же функции, что и в (5.6),

$$\begin{aligned} \hat{U}(t, t_0) &= T \exp\left\{i \int_{t_0}^t [u(t')\hat{q} + v(t')\hat{p}] dt'\right\}, \\ u(t) &= \int_{t_0}^t f(t') \exp[ic(t')] dt', \\ v(t) &= -i \int_{t_0}^t f(t') b(t') \exp(ic(t')) dt'. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Остается распутать оператор  $\hat{U}$ , т.е. представить его в виде произведения  $\exp(iu_1\hat{q}) \exp(iv_1\hat{p})$ , однако удобнее поступить иначе. Заметим, что первые три множителя в (6.2) совпадают с правой частью (5.6), а от внешней силы зависит только оператор  $\hat{U}$ . Используя условие полноты, запишем матричный элемент перехода в виде

$$S_{mn} = \sum_{m'} A_{mm'} U_{m'n}, \quad (6.4)$$

где фактор  $A_{mm'}$  — тот же, что и в (5.8), (5.10), а второй множитель, который относится к осциллятору с постоянной частотой, равной  $\omega_-$ ,

$$U_{m'n}(t) = \left\langle m', \omega_- \left| T \exp\left\{i \int_{t_0}^t [u(t')\hat{q} + v(t')\hat{p}] dt'\right\} \right| m, \omega_- \right\rangle, \quad (6.5)$$

без труда вычисляется, если перейти к операторам  $\hat{a}$ ,  $\hat{a}^+$ . Тем самым задача в принципе решена — оператор эволюции полностью распутан, хотя определение вероятностей  $w_{nm}$  для произвольных квантовых чисел  $m$  и  $n$  связано с чрезвычайно громоздкими вычислениями.

Мы ограничимся случаем, физически наиболее интересным, когда осциллятор вначале находится в основном (невозбужденном) состоянии:

$$\psi_0(x, t) = \langle x, t | 0, \omega_- \rangle = \left(\frac{\omega_-}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left\{-\frac{1}{2}\omega_-(x^2 + it)\right\}.$$

Из уравнения Шрёдингера следует, что в любой момент  $t$  волновая функция остается гауссовым пакетом:

$$\psi(x, t) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[a(t)x^2 + 2b(t)x + c(t)\right]\right\}, \quad (6.6)$$

если [44]

$$i\dot{a} = a^2 - \omega^2, \quad i\dot{b} = ab + 2f, \quad \dot{c} = i(a - b^2), \quad (6.7)$$

с начальными условиями  $a = \omega_-$ ,  $b = 0$ ,  $c = i\omega_-t - (1/2) \ln(\omega_-/\pi)$  при  $t \rightarrow -\infty$ . Матричный элемент перехода

$$\begin{aligned} \langle n, \omega_+ | \hat{S} | 0, \omega_- \rangle &\propto \\ &\propto \int_{t_0}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[(a + \omega_+)x^2 + 2bx\right]\right\} H_n(\sqrt{\omega_+}x) dx \end{aligned}$$

вычисляется аналитически (преобразование Гаусса, см. формулу 10.13.30 в [20]). В итоге имеем [46, 47]

$$w_{n0} = w_{00} \frac{\rho^{n/2}}{2^n n!} \left| H_n\left(\sqrt{\frac{v}{\sinh \beta}} \exp(-i\varphi)\right) \right|^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (6.8)$$

$\sinh \beta = 2\sqrt{\rho}/(1 - \rho)$ . В частности, для переходов вакуум-вакуум и на первый уровень

$$\begin{aligned} w_{00} &= \sqrt{1 - \rho} \exp[-v(1 - \sqrt{\rho} \cos 2\varphi)], \\ w_{10} &= v(1 - \rho)w_{00}, \end{aligned} \quad (6.9)$$

а в двух предельных случаях имеем

$$w_{00} = \begin{cases} \exp(-v) \left[1 + \rho^{1/2} v \cos 2\varphi + \frac{1}{2} \rho(v^2 \cos^2 2\varphi - 1) + \dots\right], & \rho \rightarrow 0, \\ \sqrt{1 - \rho} \exp(-2v \sin^2 \varphi), & \rho \rightarrow 1. \end{cases}$$

Здесь  $\rho = \tanh^2 \beta/2$ , параметр  $v$  характеризует возбуждение осциллятора внешней силой:  $v = |d|^2$ , где  $d(t)$  — смещение точки, изображающей состояние классиче-

ского осциллятора на фазовой плоскости под действием силы  $f(t)$ ,  $H_n$  — полином Эрмита. Точное определение величин  $d$ ,  $v$  и фазы  $\varphi$  приведено в [46, 49].

Рассмотрим предельные случаи. Если частота  $\omega(t)$  изменяется медленно (адиабатический случай), т.е.  $\rho \ll 1$ , то

$$w_{n0} = \exp(-v) \frac{v^n}{n!} \times \left\{ 1 + \sqrt{\rho} \left[ v - (n^2 - n)v^{-1} \right] \cos 2\varphi + O(\rho) \right\}, \quad (6.10)$$

при  $n^2 \rho^{1/2} \ll v \ll \rho^{-1/2}$ . При  $\rho \rightarrow 0$  эта формула переходит в распределение Пуассона (3.18), причем первая поправка к нему имеет порядок  $\sqrt{\rho}$  (а не  $\rho$ ).

Если  $v \ll 1$ , то распределение (6.8) имеет разный вид для четных и нечетных  $n$ . При  $n = 0, 2, 4, \dots$  оно переходит в (5.14), а при  $n = 1, 3, 5, \dots$

$$w_{n0} = \frac{8 \Gamma(n/2 + 1)}{\sqrt{\pi} \Gamma((n+1)/2)} \rho^{(n-1)/2} (1 - \rho)^{3/2} v + O(v^2). \quad (6.11)$$

Для произвольных  $m, n$  формулы усложняются: в общем случае вероятности перехода  $w_{nm}$  можно выразить [49] через обобщенные полиномы Эрмита от двух комплексных переменных. Квазиклассический предел для  $w_{nm}$  рассмотрен в [47, 49].

В заключение заметим, что соотношения (6.1) принимают более симметричный вид, если перейти к операторам рождения и уничтожения:

$$J_0 = \frac{1}{4}(aa^+ + a^+a), \quad J_+ = \frac{i}{2}a^{+2}, \quad J_- = -\frac{i}{2}a^2. \quad (6.12)$$

При этом

$$[J_+, J_-] = -2J_0, \quad [J_0, J_{\pm}] = \pm J_{\pm}, \quad (6.13)$$

$$J^2 = \frac{1}{16} \{ (\hat{a}\hat{a}^+ + \hat{a}^+\hat{a})^2 - 2(\hat{a}^2\hat{a}^{+2} + \hat{a}^{+2}\hat{a}^2) \} = -\frac{3}{16}, \quad (6.14)$$

$$[J_0, a] = \frac{1}{2i} [J_-, a^+] = -\frac{1}{2}a, \quad [J_0, a^+] = \frac{i}{2} [J_+, a] = \frac{1}{2}a^+, \quad (6.15)$$

$$[J_+, a^+] = [J_-, a] = 0, \quad [a, a^+] = 1,$$

здесь  $\hbar = m = \omega = 1$ . При этом уравнения (6.13) полностью соответствуют генераторам группы  $SU(1, 1)$ , а соотношение  $[a, a^+] = 1$  — алгебре Гейзенберга (нильпотентной). Вся же совокупность десяти коммутационных соотношений задает некоторую алгебру Ли, которая, однако, уже не является полупростой.

## 7. Многомерный случай

Кратко рассмотрим обобщение изложенных выше результатов для случая  $D$ -мерного осциллятора<sup>10</sup>. Пусть

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^D \{ \hat{p}_i^2 + \omega_i^2(t) \hat{q}_i^2 \}, \quad [\hat{p}_j, \hat{q}_k] = -i\delta_{jk}. \quad (7.1)$$

<sup>10</sup> Задача о  $D$ -мерном осцилляторе с зависящими от времени параметрами рассматривалась также в работах [50–52], последняя из которых содержит обширную библиографию.

С помощью ФМР находим оператор эволюции как произведение  $D$  операторов типа (5.6), коммутирующих между собой при различных  $i$ . Вероятность перехода вакуум–вакуум

$$w_{00}^{(D)} = \sqrt{(1 - \rho_1)(1 - \rho_2) \dots (1 - \rho_D)}, \quad (7.2)$$

в частности, для изотропного осциллятора

$$w_{00}^{(D)} = (1 - \rho)^{D/2} = \left( \cosh \frac{\beta}{2} \right)^{-D}, \quad (7.3)$$

где  $\beta$  — угол гиперболического поворота в группе  $SU(1, 1)$ . Вес неприводимого представления  $j = -D/4$ , поэтому вероятность перехода  $|0, \omega_-\rangle \rightarrow |2n, \omega_+\rangle$  выражается как

$$w_{2n,0}^{(D)} = \frac{\Gamma(n + D/2)}{n! \Gamma(D/2)} \rho^n (1 - \rho)^{D/2}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} w_{2n,0}^{(D)} = 1 \quad (7.4)$$

(только четные уровни возбуждаются в случае основного состояния осциллятора). При  $D = 2$  формула (7.4), которая принимает вид

$$w_{2n,0} = (1 - \rho)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (7.5)$$

дает распределение по числу пар  $n$  заряженных скалярных (бесспиновых) бозонов, рожденных из вакуума под действием однородного электрического поля  $\mathcal{E}(t)$ . Последнее утверждение удобно пояснить, привлекая теорию групп. Уравнение Клейна–Гордона в данном случае сводится [53] к уравнению  $\ddot{\xi} + \omega^2(t)\xi = 0$  для полевых осцилляторов, где

$$\omega^2(t) = m^2 + \mathbf{p}^2(t), \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}_- + e \int_{-\infty}^t \mathcal{E}(t') dt', \quad (7.6)$$

$\mathbf{p}(t)$  — импульс классической частицы во внешнем поле  $\mathcal{E}(t)$ . Рассмотрим гейзенберговские операторы  $\hat{a}_{\mathbf{p}}(t)$  и  $\hat{b}_{-\mathbf{p}}(t)$  для частиц и античастиц. Уравнения движения для них имеют решение в форме канонического преобразования Боголюбова:

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\mathbf{p}}(t) &= u(t)\hat{a}_{\mathbf{p}}(t_0) + v(t)\hat{b}_{-\mathbf{p}}^+(t_0), \\ \hat{b}_{-\mathbf{p}}^+(t) &= v^*(t)\hat{a}_{\mathbf{p}}(t_0) + u^*(t)\hat{b}_{-\mathbf{p}}^+(t_0). \end{aligned} \quad (7.7)$$

При этом  $|u(t)|^2 - |v(t)|^2 = 1$ , т.е. преобразование (7.7) принадлежит группе  $SU(1, 1)$ . Среднее число бозонных пар, родившихся в состоянии с данным импульсом,

$$\langle n_{\mathbf{p}} \rangle = \lim_{t \rightarrow +\infty} \langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{p}}^+(t) \hat{a}_{\mathbf{p}}(t) | 0 \rangle = |v(\infty)|^2 = \frac{\rho}{1 - \rho}, \quad (7.8)$$

где  $|0\rangle$  — вектор начального вакуума, а распределение по числу пар имеет вид (7.5). Таким образом, задача о рождении пар из вакуума под действием однородного поля  $\mathcal{E}(t)$  сводится к задаче о возбуждении двумерного осциллятора с переменной частотой, причем параметр  $\rho$  совпадает с коэффициентом отражения от барьера, задаваемого функцией  $\omega^2(x)$ ,  $t \rightarrow x$  (см. примеры в приложении Б).

Положим теперь (см. [53])

$$J_+ = a^+b^+, \quad J_0 = \frac{1}{2}(a^+a + b^+b + 1), \quad J_- = ba = ab. \quad (7.9)$$

Для краткости мы опускаем здесь индекс  $\mathbf{p}$  (а в фермионном случае  $\mathbf{p}\sigma$ , где  $\sigma$  — проекция спина) у операторов рождения и уничтожения. Поскольку  $[a, a^+] = [b, b^+] = 1$ , то операторы (7.9) удовлетворяют тем же соотношениям коммутации, что и генераторы группы  $SU(1, 1)$ . Аналогичным образом, для фермионов ( $s = 1/2$ ):  $\{a, a^+\} = \{b, b^+\} = 1$ , где  $\{\dots\}$  — антикоммутатор, и операторы

$$J_+ = a^+b^+, \quad J_0 = \frac{1}{2}(a^+a + b^+b - 1), \quad J_- = ba = -ab \quad (7.10)$$

являются генераторами группы  $SU(2)$ . При этом оператор Казимира (1.6) имеет вид

$$\mathbf{J}^2 = j(j+1)[1 - (a^+a - b^+b)^2], \quad (7.11)$$

$$j = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & s = 0, \\ \frac{1}{2}, & s = \frac{1}{2} \end{cases}$$

(для вакуумного состояния  $a|0\rangle = b|0\rangle = 0$  и  $J^2 = j(j+1) = -1/4$  или  $3/4$ ). Вероятность рождения  $n$  пар в состоянии с импульсом  $\mathbf{p}$  дается квадратом функции Вигнера  $d_{n-j, -j}^{(j)}(\theta)$  для соответствующего представления. В бозонном случае — это бесконечномерное унитарное представление группы  $SU(1, 1)$  с весом  $j = -1/2$ , а для фермионов — спинорное ( $j = 1/2$ ) представление группы  $SU(2)$ . В последнем случае возможны только два значения:  $n = 0$  (пары не рождаются) и  $n = 1$  с вероятностями  $\cos^2 \theta/2$  и  $\sin^2 \theta/2$  соответственно. Это объясняет причину различия<sup>11</sup> между случаями  $s = 0$  и  $s = 1/2$ .

Для импульсного поля специального вида  $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0/\cosh^2 \omega t$  выражение (7.6) имеет вид потенциала Экарта [64] при надлежащем выборе параметров  $\omega_\pm$  и  $\omega_0$  (см. формулу (Б.7) из приложения Б). Это позволяет сразу же написать формулы [53] для параметра  $\rho$  при значениях спина  $s = 0$  и  $1/2$ , полностью совпадающие с результатами работ [65], в которых они были получены непосредственно из уравнений Клейна–Гордона и Дирака (допускающих в данном случае точное решение).

Однородное электрическое поле  $\mathcal{E}(t)$  представляет собой идеализацию, завышающую число образующих пар  $N$ . В электромагнитной волне всегда присутствует магнитное поле, которое уменьшает  $N$  (как известно, в чисто магнитном поле, так же как и в плоской волне с произвольной интенсивностью и спектральным составом, пары из вакуума вообще не рождаются [63]). В работе [58, 59] рассмотрена реалистическая трехмерная модель сфокусированного лазерного импульса, основанная на точном решении уравнений Максвелла в вакууме. Численное интегрирование по 4-объему импульса позволило изучить зависимость числа  $N$  родившихся  $e^+e^-$ -пар от параметров задачи: радиуса фокального пятна  $R$ , дифракционной длины  $L = R/\Delta$ , параметра фокуси-

ровки  $\Delta = c/\omega R = \lambda/(2\pi R)$ , характеризующего отличие лазерного импульса от плоской волны, и от поляризации излучения. Мы не будем здесь обсуждать физические аспекты проблемы рождения из вакуума  $e^+e^-$ -пар при фокусировке сверхмощного лазерного излучения. В связи с быстрым прогрессом лазерной технологии этот вопрос приобретает сейчас актуальность и рассматривается во многих работах (см., например, [54–60] и указанные там ссылки).

Отметим также, что задача о квантовом осцилляторе с переменной частотой находит применение не только в КЭД сильных полей, но и в теории рождения частиц в гравитационном поле вблизи космологической сингулярности [66–68].

### 8. Дальнейшие применения фейнмановского метода распутывания

Укажем еще несколько задач, в которых использование ФМР оказывается полезным.

1. Первый пример мы заимствуем у Фейнмана [6]. Для произвольных операторов  $\hat{\alpha}$  и  $\hat{\beta}$ , вводя упорядочивающий индекс  $s$ , имеем

$$\exp(\hat{\alpha} + \hat{\beta}) = \exp\left\{\int_0^1 (\hat{\alpha} + \hat{\beta}) ds\right\} = \exp \hat{\alpha} \exp\left\{\int_0^1 \hat{\beta}'(s) ds\right\}, \quad (8.1)$$

где в соответствии с (2.8')

$$\hat{\beta}'(s) = \exp\left(-\int_0^s \hat{\alpha} ds'\right) \hat{\beta} \exp\left(\int_0^s \hat{\alpha} ds'\right) = \exp(-s\hat{\alpha}) \hat{\beta} \exp(s\hat{\alpha}). \quad (8.2)$$

Это выражение формально является точным, но интеграл по  $s$  в (8.1), на первый взгляд несложный, вряд ли может быть вычислен в явном виде, поскольку  $[\hat{\alpha}, \hat{\beta}] \neq 0$ . Предположим, что оператор  $\hat{\beta}$  в некотором смысле мал, и учтем это, используя теорию возмущений:

$$\exp(\hat{\alpha} + \hat{\beta}) = \exp \hat{\alpha} + \int_0^1 \exp[(1-s)\hat{\alpha}] \hat{\beta} \exp(s\hat{\alpha}) ds + \dots \quad (8.3)$$

В представлении, где оператор  $\hat{\alpha}$  диагонален и имеет собственные значения  $\alpha_n$ :

$$\hat{\alpha}|n\rangle = \alpha_n|n\rangle, \quad \langle m|n\rangle = \delta_{mn}, \quad (8.4)$$

из (8.3) легко может быть получена формула теории возмущений для матричных элементов

$$\langle \exp(\hat{\alpha} + \hat{\beta}) \rangle_{nm} = \delta_{mn} \exp \alpha_n + \frac{\exp \alpha_m - \exp \alpha_n}{\alpha_m - \alpha_n} \beta_{mn} + O(\beta^2) \quad (8.5)$$

(см. уравнение (2) в работе [6], там же показано, как с помощью ФМР получить стандартные результаты теории возмущений, зависящих от времени).

2. Уравнение Шрёдингера для атомного электрона в поле электромагнитной волны имеет вид

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi, \quad \hat{H} = \frac{1}{2} \mathbf{p}^2 + V(\mathbf{r}, t) + U(r), \quad (8.6)$$

где использовано дипольное приближение  $V(\mathbf{r}, t) = -e\mathcal{E}(t)\mathbf{r}$ ,  $\mathcal{E}(t) = -c^{-1} \partial \mathbf{A} / \partial t$  — электрическое поле пло-

<sup>11</sup> Следует, впрочем, заметить, что при  $\mathcal{E} \ll \mathcal{E}_{cr} = m^2 c^3 / e\hbar$ , что реально можно ожидать в эксперименте [54–60], параметр возбуждения полевых осцилляторов экспоненциально мал,  $\rho \propto \exp(-\pi \mathcal{E}_{cr} / \mathcal{E})$ , и возможно рождение из вакуума практически только одной пары. При этом различие между случаями бозонов и фермионов стирается. Здесь  $\mathcal{E}_{cr}$  — так называемое критическое поле в КЭД [61–63]:  $\mathcal{E}_{cr} = 1,3 \times 10^{16}$  В см<sup>-1</sup> для  $e^+e^-$ ,  $\mathcal{E}_{cr} \sim 10^{21}$  В см<sup>-1</sup> для  $\pi^+\pi^-$ .

ской световой волны,  $U(r)$  — потенциал, описывающий взаимодействие электрона с атомным остовом. Уравнение (8.6) соответствует так называемой "калибровке длины", которая использовалась Келдышем в работе [69] и впоследствии многими авторами.

Обозначая  $\hat{A} = (1/2)\mathbf{p}^2$ ,  $\hat{B} = \mathcal{E}\mathbf{r}$ ,  $\hat{C} = \mathcal{E}\mathbf{p}$ , получим

$$[\hat{A}, \hat{B}] = -i\hat{C}, \quad [\hat{B}, \hat{C}] = i\mathcal{E}^2\hat{I}, \quad [\hat{C}, \hat{A}] = 0, \quad (8.7)$$

где  $\hat{I}$  — единичный оператор (коммутирующий со всеми остальными). Таким образом, операторная алгебра замыкается, и можно использовать ФМР:

$$\begin{aligned} \hat{S}(t, t_0) &= T \exp \left\{ -i \int_{t_0}^t \hat{H}(t') dt' \right\} = \\ &= \exp \left( i \frac{e}{c} \mathbf{A}(t) \mathbf{r} \right) \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int_{t_0}^t \mathbf{P}^2(t') dt' \right\}. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Волковская волновая функция [37, 70]

$$\begin{aligned} \psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t) &= \hat{S} \exp(i\mathbf{p}\mathbf{r}) = \\ &= (2\pi)^{-3/2} \exp \left\{ i \left[ \mathbf{P}(t) \mathbf{r} - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \mathbf{P}^2(t') dt' \right] \right\} \end{aligned} \quad (8.9)$$

часто используется в теории ионизации и возбуждения атомов лазерным светом. Здесь  $\mathbf{P} = \mathbf{p} - (e/c)\mathbf{A}(t)$  — обобщенный импульс.

Выражение (8.8) соответствует взаимодействию атома с внешним полем, выбранному в виде

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \mathbf{A}(t) \mathbf{p} + \frac{1}{2c^2} \mathbf{A}^2(t), \quad (8.6')$$

что получило в литературе название "калибровка скорости". Эти две калибровки используются в многочисленных работах по теории ионизации и возбуждения атомов интенсивным лазерным излучением (см., например, обзоры [60, 71]). Нашей целью было продемонстрировать, что применение ФМР к распутыванию входящих в гамильтониан операторов позволяет легко перейти от одной волновой функции к другой. Отметим, что при распутывании операторов в  $\hat{S}(t, t_0)$  мы предполагали, что  $U(r)$  в (8.6) — короткодействующий потенциал, что является неплохим приближением в случае ионизации однозарядных отрицательных ионов типа  $\text{H}^-$ ,  $\text{Li}^-$ ,  $\text{Na}^-$  и т.п. (см., например, [72, 73]), — предельный случай представляет собой хорошо известная в атомной и ядерной физике модель потенциала нулевого радиуса действия сил [47].

3. Рассмотрим модель с группой скрытой симметрии:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \omega_1(t)\mathbf{L} + \omega_2(t)\mathbf{A}, \quad \hat{H}_0 = \frac{1}{2} \mathbf{p}^2 - \frac{1}{r}, \quad (8.10)$$

где  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  — орбитальный момент,

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \{ (\mathbf{L} \times \mathbf{p}) - (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) \} + \frac{\mathbf{r}}{r}$$

— вектор Лапласа–Рунге–Ленца, а частоты  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  — заданные функции времени. Оператор  $\hat{H}$  можно рассматривать как проекцию гамильтониана атома водорода, находящегося под действием переменных электрического и магнитного полей, на подпространство состояний с фиксированной энергией.

Как известно [17, 24], в атоме водорода имеется так называемое "случайное" вырождение уровней с дан-

ными  $n = (-2E)^{-1/2}$  и орбитальными моментами  $l = 0, 1, \dots, n-1$ . Это вырождение объясняется тем, что гамильтониан  $\hat{H}_0$  обладает, помимо очевидной группы геометрической симметрии  $\text{SO}(3)$ , также группой скрытой симметрии кулоновского потенциала: группой  $\text{SO}(4)$  для состояний дискретного спектра и группой Лоренца  $\text{SO}(3, 1)$  для непрерывного спектра [17, 74–78].

В первом случае, полагая  $\mathbf{M} = (-2H_0)^{-1/2}\mathbf{A}$ , получаем

$$[\mathbf{L}, \mathbf{L}] = [\mathbf{M}, \mathbf{M}] = i\mathbf{L}, \quad [\mathbf{L}, \mathbf{M}] = i\mathbf{M}, \quad (8.11)$$

$$\mathbf{L}^2 + \mathbf{M}^2 = (-2H_0)^{-1} - 1 = n^2 - 1,$$

что совпадает с соотношениями коммутации для генераторов четырехмерной группы вращений  $\text{SO}(4) = \text{SO}(3) \otimes \text{SO}(3)$ . Переходя к операторам  $\mathbf{I}_{1,2} = (\mathbf{L} \pm \mathbf{M})/2$ , которые коммутируют между собой, для оператора эволюции получаем

$$\hat{S}(t, 0) = \exp(-iE_n t) \exp(-i\Omega_1 \mathbf{I}_1) \exp(-i\Omega_2 \mathbf{I}_2), \quad (8.12)$$

$$\Omega_{1,2}(t) = \int_{t_0}^t \left[ \omega_1(t') \pm \frac{1}{n} \omega_2(t') \right] dt'.$$

Дальнейшее распутывание операторов  $I_+$ ,  $I_0$  и  $I_-$  проводится с помощью ФМР в точности так же, как и в задаче о вращении спина (см. раздел 4).

В случае состояний непрерывного спектра с энергией  $E = k^2/2 > 0$  оператор  $\mathbf{M}$  становится неэрмитовым и его нужно заменить оператором  $\mathbf{N} = (2H_0)^{-1/2}\mathbf{A}$ . Это дает коммутационные соотношения

$$[\mathbf{L}, \mathbf{L}] = i\mathbf{L}, \quad [\mathbf{L}, \mathbf{N}] = i\mathbf{N}, \quad [\mathbf{N}, \mathbf{N}] = -i\mathbf{L}, \quad (8.13)$$

соответствующие генераторам группы Лоренца<sup>12</sup>. Дальнейшие выкладки аналогичны (4.12). Отметим, что выше были использованы следующие обозначения:  $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = i\mathbf{C}$  означает, что  $[\hat{A}_j, \hat{B}_k] = i\epsilon_{jkl}\hat{C}_l$ , где  $\epsilon_{jkl}$  — полностью антисимметричный тензор третьего ранга ( $\epsilon_{123} = 1$ ), а индексы  $j, k, l$  пробегает значения 1, 2, 3. При этом большая часть этих уравнений соответствует известному правилу коммутации [24]:  $[\mathbf{L}, \mathbf{V}] = i\mathbf{V}$ , где  $\mathbf{L}$  — оператор углового момента в группе  $\text{SO}(3)$ ,  $\mathbf{V}$  — произвольный трехмерный вектор, в то время как последнее из соотношений (8.13), отличающееся знаком от двух предыдущих, на языке теории групп отвечает эффекту томасовской прецессии в релятивистской квантовой механике [79–82].

Теория групп позволяет выписать матричные элементы переходов между состояниями  $|n, l, m\rangle$  атома водорода с фиксированным главным квантовым числом  $n$ . В случае  $E_n = -1/2n^2 < 0$  — это функции Вигнера для представления  $D(j_1, j_2)$  группы  $\text{SO}(4)$  с  $j_1 = j_2 = (n-1)/2$ , а в случае энергии  $E = k^2/2 > 0$  они относятся к бесконечномерному унитарному представлению  $D(0, \rho)$  группы Лоренца так называемой основной серии [43]. При этом собственное значение скаляра  $\hat{F}$  равно

$$\hat{F} = \frac{1}{2} M^{\mu\nu} M_{\mu\nu} = \mathbf{L}^2 - \mathbf{N}^2 = -\left(1 + \frac{\rho^2}{4}\right), \quad (8.14)$$

<sup>12</sup> При обычной реализации группы Лоренца  $\hat{N}_i$  — это оператор буста (т.е. собственного преобразования Лоренца без поворота осей) вдоль  $i$ -й оси системы отсчета [39, 42].

где  $M_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu$  — оператор 4-момента. Это выражение получается из (8.11) при замене  $n \rightarrow i\rho/2$ , откуда  $\rho = 2/k$ . Второй инвариант группы Лоренца (псевдоскаляр) равен здесь нулю (он отличен от нуля только при наличии у частицы спина [39–42], а в (8.10) спином электрона пренебрегается).

4. Следующий пример носит математический характер. Пусть  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  — операторы, коммутирующие с  $[\hat{A}, \hat{B}]$ :

$$[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0. \tag{8.15}$$

Вводя формально параметр  $t$  (от которого операторы  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  не зависят), имеем

$$\hat{S}(t) \equiv \exp [(\hat{A} + \hat{B})t] = \exp \left\{ \int_0^t (\hat{A} + \hat{B}) dt' \right\}$$

и с помощью ФМР выпутываем первый сомножитель:

$$\hat{S}(t) = \exp (\hat{A}t) \exp \left( \int_0^t \hat{B}' dt' \right), \tag{8.16}$$

где согласно (2.8')

$$\hat{B}'(t') = \exp (-\hat{A}t') \hat{B} \exp (\hat{A}t') = \hat{B} - [\hat{A}, \hat{B}] t'.$$

Применяя далее процедуру ФМР с учетом условия (8.15), получаем формулу Глаубера [83]:

$$\begin{aligned} \exp \{(\hat{A} + \hat{B})t\} &= \exp (\hat{A}t) \exp (\hat{B}t) \exp \left( -\frac{1}{2} [\hat{A}, \hat{B}] t^2 \right) \equiv \\ &\equiv \exp (\hat{B}t) \exp (\hat{A}t) \exp \left( \frac{1}{2} ([\hat{A}, \hat{B}] t^2) \right). \end{aligned} \tag{8.17}$$

Отсюда ясно видно, что для некоммутирующих между собой операторов  $\exp (\hat{A} + \hat{B}) \neq \exp \hat{A} \exp \hat{B}$ , что является основной трудностью некоммутативного анализа, которую преодолевает ФМР.

Операторы, удовлетворяющие условию (8.15), довольно часто встречаются в теоретической физике [47, 83, 89], поэтому тождество (8.17) весьма полезно. Оно является частным случаем ряда Бейкера–Хаусдорфа, известного из теории групп:

$$\begin{aligned} \exp \hat{A} \exp \hat{B} &= \exp \left\{ \hat{A} + \hat{B} + \frac{1}{2} [\hat{A}, \hat{B}] - \right. \\ &\left. - \frac{1}{12} ([\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + [[\hat{A}, \hat{B}], \hat{B}]) + \dots \right\}. \end{aligned} \tag{8.18}$$

Под знаком экспоненты в правой части стоит формальный степенной ряд, для которого вопрос о сходимости не ставится. Следующие члены этого ряда см. в [84, 85].

5. Рассмотрим оператор  $U(\alpha) = \exp (\alpha \hat{a}^+ - \alpha^* \hat{a})$ , который является унитарным при любом комплексном  $\alpha$ :

$$U^+(\alpha) = \exp (\alpha^* \hat{a} - \alpha \hat{a}^+) = U(-\alpha) = U^{-1}(\alpha). \tag{8.19}$$

Его нетрудно распутать с помощью соотношения (8.17):

$$\begin{aligned} U(\alpha) &= \exp \left( -\frac{1}{2} |\alpha|^2 \right) \exp (\alpha \hat{a}^+) \exp (-\alpha^* \hat{a}) = \\ &= \exp \left( \frac{1}{2} |\alpha|^2 \right) \exp (-\alpha^* \hat{a}) \exp (\alpha \hat{a}^+). \end{aligned} \tag{8.20}$$

Отсюда имеем

$$U(\alpha)|0\rangle = \exp \left( -\frac{1}{2} |\alpha|^2 \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \equiv |\alpha\rangle, \tag{8.21}$$

т.е. оператор  $U(\alpha)$  переводит вакуумное состояние  $|0\rangle$  в когерентное  $|\alpha\rangle$ , сохраняя нормировку:  $\langle \alpha | \alpha \rangle = \langle 0 | 0 \rangle = 1$ .

Приведем еще соотношения:

$$U^+(\alpha) \hat{a} U(\alpha) = \exp (-\alpha \hat{a}^+) \hat{a} \exp (\alpha \hat{a}^+) = \hat{a} + \alpha, \tag{8.22}$$

$$U^+(\alpha) \hat{a}^+ U(\alpha) = \exp (\alpha^* \hat{a}) \hat{a}^+ \exp (-\alpha^* \hat{a}) = \hat{a}^+ + \alpha^*,$$

$$U(\alpha) U(\beta) = U(\alpha + \beta) \exp (i\varphi), \quad \varphi = \text{Im} (\alpha \beta^*), \tag{8.23}$$

в силу которых оператор  $U(\alpha)$  называют иногда оператором смещения (сдвига).

Эти соотношения, равно как и сами когерентные состояния  $|\alpha\rangle$ , впервые введенные Шрёдингером [86, 88], постоянно используются в квантовой оптике при описании свойств когерентности лазерного света (см., например, [87–89]).

6. На естественный вопрос о том, имеют ли операторы  $\hat{a}$  и  $\hat{a}^+$  собственные функции, проще всего ответить на основе представления Фока–Баргмана для осциллятора [90–92], которое рассматривается в приложении А. Оказывается, что спектр оператора уничтожения  $\hat{a}$  непрерывно заполняет всю комплексную плоскость, в то время как оператор  $\hat{a}^+$  вообще не имеет собственных функций (см. также [47]). Отсюда видно, насколько непривычными могут быть свойства неэрмитовых (точнее, несамосопряженных) операторов, каковыми являются  $\hat{a}$  и  $\hat{a}^+$ .

7. Отметим еще формулу [8]

$$\exp \hat{A} \exp \hat{B} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \hat{B}_n, \tag{8.24}$$

где  $\hat{B}_0 = \hat{B}$  и  $\hat{B}_{n+1} = [\hat{A}, \hat{B}_n]$ , в результате применения которой обычно возникает бесконечная последовательность операторов. Иногда, однако, процесс обрывается:

$$\text{если } [\hat{A}, \hat{B}_N] = 0, \text{ то } \hat{B}_{N+1} = \hat{B}_{N+2} = \dots = 0, \tag{8.25}$$

и система из конечного числа операторов является замкнутой относительно соотношений коммутации. В этом случае применение ФМР может быть успешным.

Изложенные выше примеры дают некоторое представление о возможных применениях ФМР в квантовой механике и математической физике.

## 9. Контрпримеры

Естественно, возникает вопрос о возможности использовать ФМР в других задачах. Начнем с ангармонического осциллятора<sup>13</sup>

$$\hat{H} = \frac{1}{2} p^2 + \frac{g}{4} x^4. \tag{9.1}$$

<sup>13</sup> Популярная модель в квантовой механике и теории поля, которая изучалась с разных сторон многими авторами (см., например, [93–97]), однако ФМР к ней, по-видимому, не применялся. Здесь мы опускаем для краткости "крышки" ( $\wedge$ ) над операторами.

Последовательно вычисляя коммутаторы с учетом соотношений

$$\begin{aligned} [p, x^n] &= -inx^{n-1}, \quad [p^n, x] = -inp^{n-1}, \\ [p^2, x^n] &= -in(px^{n-1} + x^{n-1}p), \\ [p^2, px^n + x^n p] &= -2in(p^2x^{n-1} + x^{n-1}p^2) - \\ &\quad - in(n-1)(n-2)x^{n-3}, \end{aligned} \quad (9.2)$$

получаем

$$\begin{aligned} [p^2, x^4] &= -4i(px^3 + x^3p), \\ [p^2, px^3 + x^3p] &= -6i(p^2x^2 + x^2p^2 + 1), \\ [p^2, p^2x^2 + x^2p^2] &= -4i(p^3x + xp^3), \\ [p^2, p^3x + xp^3] &= -4ip^4, \quad [p^2, p^4] = 0, \end{aligned} \quad (9.3)$$

и на этом цепочка коммутаторов, начинающихся с  $p^2$ , обрывается. Далее, однако, имеем

$$[px^3 + x^3p, x^4] = -8ix^6, \quad [px^3 + x^3p, x^6] = -12ix^8,$$

и в общем случае

$$[px^3 + x^3p, x^{2k}] = -4ikx^{2k+2}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (9.4)$$

Степень  $x$  при коммутировании неограниченно возрастает, и потому ФМР не приводит в данном случае к замкнутой алгебре операторов с конечным числом образующих, а распутывание оператора эволюции  $\hat{S}$  порождает бесконечный процесс. То же имеет место при замене  $x^4$  в гамильтониане (9.1) ангармонизмом общего вида  $x^{2N}$ ,  $N \geq 2$ .

Помимо гармонического осциллятора, точное решение уравнения Шрёдингера существует для кулоновского потенциала. В этом случае ФМР встречается с теми же трудностями. Так, для одномерной модели "атома водорода",  $H = p^2 + x^{-1}$ , получаем

$$\begin{aligned} [p^2, x^{-1}] &= i(px^{-2} + x^{-2}p), \\ [p^2, px^{-2} + x^{-2}p] &= 2i(p^2x^{-3} + 2px^{-3}p + x^{-3}p^2), \\ [px^{-2} + x^{-2}p, x^{-1}] &= 2ix^{-4}, \\ [px^{-2} + x^{-2}p, x^{-4}] &= 8ix^{-7}, \end{aligned} \quad (9.5)$$

и т.д. Цепочка коммутаторов не обрывается, и на каждом новом шаге возникают все более сингулярные (при  $x \rightarrow 0$ ) операторы. При переходе к трехмерному атому водорода положение только усугубляется:

$$\begin{aligned} [\mathbf{p}^2, r^{-1}] &= i\{(\mathbf{pr})r^{-3} + r^{-3}(\mathbf{rp})\}, \\ [(\mathbf{pr})r^{-3} + r^{-3}(\mathbf{rp}), r^{-1}] &= 2ir^{-4}, \\ [\mathbf{p}^2, r^{-n}] &= in\{(\mathbf{pr})r^{-(n+2)} + r^{-(n+2)}(\mathbf{rp})\}, \dots \end{aligned} \quad (9.6)$$

Рассмотренные примеры показывают, что возможности применения ФМР в нерелятивистской квантовой механике, по-видимому, достаточно ограничены. Быть может, наряду с поиском новых точных решений, стоило бы посмотреть, нельзя ли использовать ФМР в приближенных и качественных методах квантовой теории [98, 99].

## 10. Заключение

Мы рассмотрели несколько квантово-механических задач, в которых ФМР позволяет полностью распутать входящие в гамильтониан операторы и получить точное (аналитическое) решение временного уравнения Шрёдингера. Однако ФМР отнюдь не универсален — в отличие, например, от фейнмановской диаграммной техники в теории возмущений. Применение ФМР вряд ли может быть стандартизировано и требует некоторой изобретательности. Тем не менее если ФМР удастся применить, то можно получить решение при произвольном законе изменения во времени параметров гамильтониана — силы  $f(t)$ , частоты  $\omega(t)$  и т.д., что само по себе представляет интерес. Сделаем несколько замечаний.

1. В задаче о возбуждении осциллятора внешней силой имеются только два оператора,  $\hat{a}$  и  $\hat{a}^+$ , коммутатор которых является  $c$ -числом, поэтому применение ФМР сразу приводит к желаемому результату [6]. В работах [10–12] рассмотрены случаи, когда входящие в гамильтониан операторы порождают алгебру Ли, содержащую три образующих ( $\hat{J}_+$ ,  $\hat{J}_0$  и  $\hat{J}_-$ ). Распутывание оператора эволюции  $\hat{S}$  производится в рамках ФМР с помощью указанного в [10] приема ("неполное выпутывание" операторов [12]), суть которого ясна из формул (4.5)–(4.8). Уравнение Риккати, возникающее при использовании ФМР, определяет амплитуды  $A_{nm}$  и вероятности квантовых переходов  $w_{nm} = |A_{nm}|^2$ . При этом амплитуды  $A_{nm}$  выражаются через матричные элементы неприводимых унитарных представлений группы  $SU(2)$  или ее некомпактного аналога  $SU(1, 1)$ , и это упрощает решение задачи.

2. Что касается теории поля, то в работе Фейнмана [6] отмечалась возможность применения данного метода к некоторым вопросам КЭД: доказательству эквивалентности различных формулировок КЭД (Дирака, Фока, Дайсона и самого Фейнмана), применение ФМР к уравнению Дирака в неквантованном внешнем поле и др. Однако дальнейшее развитие этих исследований нам неизвестно. Нахождение новых приложений ФМР и не только в квантовой механике, но и в теории поля представляло бы несомненный интерес.

3. Следует сказать, что ФМР под названием некоммутативного анализа рассматривается также в математической литературе (см. монографию [100] и приведенные там ссылки). В работах этого направления используются сложные математические конструкции и непривычная для физиков терминология (фильтр сечений, символ оператора, полибанаховы алгебры и т.д.). Насколько может судить автор данной статьи, новых физических результатов при этом получено не было.

4. Функция от некоммутирующих переменных является значительно более сложным математическим объектом, чем обычная функция, и требует развития соответствующего аппарата. В связи с этим укажем на альтернативный подход к данной проблеме, развитый в работах [101–103]. Ограничиваясь рассмотрением экспоненциальной функции, положим

$$\exp\{(\hat{a} + \hat{b})\tau\} = \exp(\hat{b}\tau) \hat{K}(\tau) \exp(\hat{a}\tau), \quad (10.1)$$

где  $\tau$  — параметр (вещественный или мнимый). Фактор  $\hat{K}$  учитывает некоммутативность операторов (если  $[\hat{a}, \hat{b}] = 0$ , то  $\hat{K}(\tau) \equiv 1$ ) и определяется из дифференциаль-



ного уравнения

$$\frac{\partial \hat{K}}{\partial \tau} = \exp(\hat{b}\tau) \hat{a} \exp(-\hat{b}\tau) \hat{K} - \hat{K} \hat{a} \quad (10.2)$$

с начальным условием  $\hat{K}(0) = 1$ ,

$$\exp(-\hat{b}\tau) \hat{a} \exp(\hat{b}\tau) = \hat{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\tau)^n}{n!} \underbrace{[\hat{b}[\hat{b}, \dots [\hat{b}, \hat{a}] \dots]]}_{n \text{ раз}}. \quad (10.3)$$

Как правило, здесь все коммутаторы отличны от нуля и решение задачи становится крайне сложным. Если, однако, операторы  $\hat{a}$  и  $\hat{b}$  таковы, что большинство коммутаторов равно нулю, то уравнения могут иметь простое решение. Отсюда нетрудно получить формулу Глаубера (8.17), а также рассмотреть такие случаи, как  $[\hat{a}, \hat{b}] = -\lambda \hat{a}$ , когда

$$\exp\{(\hat{a} + \hat{b})\tau\} = \exp(\hat{b}\tau) \exp\left\{\frac{\hat{a}[1 - \exp(-\lambda\tau)]}{\lambda}\right\} \quad (10.4)$$

( $\lambda$  —  $c$ -число), или  $[\hat{a}, \hat{b}] = \lambda \hat{b}$ , когда

$$\exp\{(\hat{a} + \hat{b})\tau\} = \exp\left\{\frac{\hat{b}[\exp(\lambda\tau) - 1]}{\lambda}\right\} \exp(\hat{a}\tau). \quad (10.4')$$

При решении конкретных физических задач ФМР и метод работ [101–103] могут взаимно дополнять друг друга, хотя, на наш взгляд, ФМР обладает все же большей общностью. Так, например, для произвольных операторов  $\hat{a}$  и  $\hat{b}$  применение ФМР дает

$$\begin{aligned} \exp\{(\hat{a} + \hat{b})\tau\} &\equiv \exp\left\{\int_0^\tau (\hat{a} + \hat{b}) dt\right\} = \\ &= \exp(\hat{b}\tau) \exp\left\{\int_0^\tau \exp(-\hat{b}t) \hat{a} \exp(\hat{b}t) dt\right\} = \\ &= \exp\left\{\int_0^\tau \exp(\hat{a}t) \hat{b} \exp(-\hat{a}t) dt\right\} \exp(\hat{a}\tau), \quad (10.5) \end{aligned}$$

откуда непосредственно следуют формулы (10.4), (10.4') и ряд других.

Эта работа возникла из вопроса, заданного автору И.Я. Померанчуком много лет тому назад: какие задачи квантовой механики, помимо рассмотренных в [6, 10], можно было бы решить с помощью ФМР? Я очень благодарен К.Г. Борескову, Л.Б. Окуню, В.А. Рубакову, Ю.А. Симонову и М.А. Трусову, просмотревшим статью в рукописи, за интерес к работе и полезные замечания, В.Д. Муру за обсуждение результатов и указание на работы [101–103], С.Г. Позднякову, выполнившему численные расчеты, а также Н.С. Либовой и М.Н. Маркиной за помощь при подготовке рукописи к печати.

Работа частично поддержана РФФИ, гранты № 04-02-17157 и 07-02-01116.

## 11. Приложения

### А. Представление Фока–Баргмана

Напомним основные формулы, относящиеся к этому представлению [90–92].

1. Реализация операторов рождения и уничтожения:

$$\hat{a}^+ = z, \quad \hat{a} = \frac{d}{dz}, \quad (A.1)$$

где  $z \in C$  — вспомогательная комплексная переменная. Гильбертово пространство состояний осциллятора реализуется на аналитических функциях от  $z$ .

2. Скалярное произведение волновых функций:

$$\langle \psi | \varphi \rangle = \int \psi^*(z) \varphi(z) d\mu(z), \quad d\mu(z) = \frac{1}{\pi} \exp(-\rho^2) \rho d\rho d\varphi,$$

где

$$z = \rho \exp(i\varphi), \quad 0 \leq \rho < \infty, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad \int d\mu(z) = 1. \quad (A.2)$$

3. Гамильтониан гармонического осциллятора и другие операторы:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= 2\hat{J}_0 = \frac{1}{2} \omega(\hat{a}\hat{a}^+ + \hat{a}^+\hat{a}) = \omega\left(z \frac{d}{dz} + \frac{1}{2}\right), \\ \hat{x} &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left(z + \frac{d}{dz}\right), \quad \hat{p} = i\sqrt{\frac{\omega}{2}} \left(z - \frac{d}{dz}\right), \quad (A.3) \\ \hat{p}\hat{x} + \hat{x}\hat{p} &= 4\hat{J}_1 = \frac{1}{2i} \left(\frac{d^2}{dz^2} - z^2\right). \end{aligned}$$

4. Нормированные волновые функции стационарных ( $n$ -квантовых) состояний<sup>14</sup>

$$\langle z | n \rangle = \frac{z^n}{\sqrt{n!}}, \quad \langle n | n' \rangle = \int \langle n | z \rangle \langle z | n' \rangle d\mu(z) = \delta_{nn'}. \quad (A.4)$$

Для сравнения — то же в координатном представлении [24, 47]:

$$\langle x | n \rangle = (2^n n!)^{-1/2} \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{1/4} H_n(\sqrt{\omega}x) \exp\left(-\frac{1}{2}\omega x^2\right), \quad (A.4')$$

где  $H_n$  — полином Эрмита.

5. Выполняется равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} \langle z | n \rangle \langle n | z' \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(zz'^*)^n}{n!} = \exp(zz'^*) \equiv \delta(z, z'),$$

где  $\delta(z, z')$  играет роль  $\delta$ -функции при интегрировании с мерой  $d\mu(z)$ :  $\psi(z) = \int \delta(z, z') \psi(z') d\mu(z')$ .

6. Когерентные состояния:

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (A.5) \\ \langle z | \alpha \rangle &= \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2 + \alpha z\right), \end{aligned}$$

причем эти функции не являются взаимно ортогональными:

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \langle 0 | U(-\alpha) U(\beta) | 0 \rangle \propto \langle \alpha - \beta | 0 \rangle, \quad (A.6)$$

$$|\langle \alpha | \beta \rangle|^2 = \exp(-|\alpha - \beta|^2) \neq 0$$

<sup>14</sup> Мы пользуемся обозначениями Дирака [104]  $\hbar = m = 1$ .

и образуют переполненную систему [47, 105]. Временная эволюция когерентного состояния:

$$|\alpha, t\rangle = \exp\left(-\frac{i\omega t}{2}\right) |\alpha \exp(-i\omega t)\rangle. \tag{A.7}$$

7. В представлении Фока–Баргмана легко решается вопрос о собственных значениях операторов  $\hat{a}$  и  $\hat{a}^+$ . Учитывая (A.1), получаем уравнения

$$\hat{a}\psi_\alpha(z) \equiv \frac{d\psi_\alpha}{dz} = \alpha\psi_\alpha(z), \quad \hat{a}^+\psi_\lambda(z) \equiv z\psi_\lambda = \lambda\psi_\lambda(z), \tag{A.8}$$

первое из которых имеет очевидное решение

$$\psi_\alpha(z) = N \exp(\alpha z) = N \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \langle z|n\rangle \tag{A.9}$$

(см. (A.4)), причем  $|N| = \exp[-(1/2)|\alpha|^2]$  из условия нормировки. Таким образом, собственным значением оператора уничтожения  $\hat{a}$  может быть любое комплексное число  $\alpha$ , а собственные функции совпадают с когерентными состояниями.

С другой стороны, второе уравнение в (A.8) имеет вид:  $(z - \lambda)\psi_\lambda(z) = 0$ , что выполняется только при условии  $\psi_\lambda(z) \equiv 0$ , а такая функция не является собственной функцией.

8. Покажем теперь, следуя [106], как решается в представлении Фока–Баргмана задача об эволюции осциллятора с постоянной частотой. Уравнение Шрёдингера

$$i\dot{\psi} = \left\{ \omega \left( z \frac{d}{dz} + \frac{1}{2} \right) - \frac{f(t)}{\sqrt{2\omega}} \left( \frac{d}{dz} + z \right) \right\} \psi \tag{A.10}$$

имеет решение  $\psi(z, t) = \exp(az + b)\varphi(z - c, t)$ , где  $a, b$  и  $c$  — некоторые функции времени. Подставляя это решение в (A.10), приходим к уравнению

$$i \left[ \dot{\varphi} + (\dot{a}z + \dot{b})\varphi - \dot{c} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right] = \omega \left( z \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \left( az + \frac{1}{2} \right) \varphi \right) - \frac{f(t)}{\sqrt{2\omega}} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} + (z + a)\varphi \right). \tag{A.10'}$$

Пусть функция  $\varphi(z, t)$  удовлетворяет свободному (без внешней силы) уравнению

$$i\dot{\varphi} = \omega \left( z \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2} \right) \varphi.$$

Приравнявая коэффициенты при  $\varphi, z\varphi$  и  $\partial\varphi/\partial z$ , получаем уравнения

$$\begin{aligned} i\dot{a} &= \omega a - (2\omega)^{-1/2} f(t), \\ i\dot{b} &= -(2\omega)^{-1/2} f(t)a, \\ i\dot{c} &= \omega c - (2\omega)^{-1/2} f(t), \end{aligned} \tag{A.11}$$

откуда

$$\begin{aligned} a(t) &= c^*(t) = \frac{i}{\sqrt{2\omega}} \int_0^t f(t') \exp[-i\omega(t-t')] dt' = \\ &= i \exp(-i\omega t) \beta^*(t), \end{aligned} \tag{A.12}$$

$$b(t) = b_1 + ib_2 = \frac{i}{\sqrt{2\omega}} \int_0^t f(t') a(t') dt',$$

причем

$$\frac{d}{dt} |a(t)|^2 = \sqrt{\frac{2}{\omega}} f(t) a_2(t), \tag{A.12'}$$

$$b_1(t) = -\frac{1}{\sqrt{2\omega}} \int_0^t f(t') a_2(t') dt' = -\frac{1}{2} |a(t)|^2, \tag{A.12''}$$

( $\beta(t)$  см. в (3.10), мы положили здесь  $t_0 = 0$ ). Поскольку  $a = b = c = 0$  при  $t = t_0$ , то  $\varphi(z, 0)$  совпадает с волновой функцией начального состояния осциллятора  $\psi_0(z)$ . Отсюда при  $t > t_0 = 0$

$$\psi(z, t) = \exp\left\{ -\frac{1}{2} |a(t)|^2 + a(t)z + i\gamma \right\} \psi_0(z - a^*(t), t), \tag{A.13}$$

что решает задачу об эволюции произвольного начального состояния. Рассмотрим два примера.

а. Если вначале осциллятор находился в когерентном состоянии  $|\alpha\rangle$ , то

$$\psi(z, t) = \exp\left\{ -\frac{1}{2} |a + \alpha|^2 + (a + \alpha)z + i\gamma' \right\}, \tag{A.14}$$

где  $\gamma, \gamma'$  — вещественные фазы, зависящие от  $t, a(t)$  определено в (A.12). Таким образом, в любой момент времени осциллятор находится, с точностью до несущественного фазового множителя, в когерентном состоянии  $|\alpha\rangle$ :

$$\alpha(t) = \alpha(t_0) + a(t). \tag{A.15}$$

В частности, если  $\alpha(t_0) = 0$ , то  $\psi_0(z) = \langle z|0\rangle \equiv 1$  и  $\psi(z, t) = \exp(az + b_1)$ . Разложение этой функции в ряд Тейлора сразу приводит к (3.18) с параметром  $v = |a|^2$ . Аналогично, в случае переходов с первого уровня  $\psi(z, t) = (z - a^*) \exp(az + b)$ , что дает формулу (3.18').

б. Начальное состояние  $m$ -квантовое, тогда

$$\psi(z, t) = \frac{(z - a^*)^m}{\sqrt{m!}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} |a(t)|^2 + az + i\gamma'' \right\}. \tag{A.16}$$

Известные формулы [20, 21]

$$\exp(az) (z - a^*)^m = \sum_{k=0}^{\infty} L_k^{m-k}(|a|^2) (-a^*)^{m-k} z^k,$$

$$L_k^{m-k}(x) = \frac{m!}{k!} (-x)^{k-m} L_m^{k-m}(x), \quad k \geq m,$$

позволяют разложить волновую функцию (A.16) по базисным функциям  $\langle z|n\rangle$ , что сразу приводит к формуле (3.14), в которой  $v = |a(t)|^2$  при  $t \rightarrow +\infty$ .

9. В работе [107] дано обобщение метода Фока–Баргмана для атома водорода, в котором волновые функции дискретного спектра принимают исключительно простой вид. В параболическом базисе  $|n_1, n_2, m\rangle$  имеем

$$\langle \mathbf{z}|n_1 n_2 m\rangle = \frac{(n-1)!}{[n_1! n_2! (n_1 + |m|)! (n_2 + |m|)!]^{1/2}} z_1^{n_1 + \mu} z_2^{n_2 + \mu}, \tag{A.17}$$

где  $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$ ,  $z_{1,2}$  — две независимые комплексные переменные,  $n_1$  и  $n_2$  — параболические квантовые числа,

$n = n_1 + n_2 + |m| + 1$  [24],  $\mu = (m + |m|)/2$ , а в сферическом базисе  $|nlm\rangle$  волновые функции являются однородными полиномами от  $z_1$  и  $z_2$  степени  $n + m - 1$ . Так, для  $ns$ - и  $np$ -состояний

$$\langle \mathbf{z}|n, 0, 0\rangle = a_0(z_1 - z_2)^{n-1}, \quad a_0 = n^{-1/2}, \quad (\text{A.18})$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{z}|n, 1, 1\rangle &= b_1 z_1 z_2 (z_1 - z_2)^{n-2}, \\ \langle \mathbf{z}|n, 1, 0\rangle &= b_0 (z_1 + z_2)(z_1 - z_2)^{n-2}, \\ \langle \mathbf{z}|n, 1, -1\rangle &= b_{-1} (z_1 - z_2)^{n-2} \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

и в общем случае для состояний с максимальной проекцией  $m = l$

$$\langle \mathbf{z}|n, l, l\rangle = A_{nl}(z_1 z_2)^l (z_1 - z_2)^{n-l-1}, \quad (\text{A.20})$$

далее — спуск по  $m$  вплоть до  $m = -l$ :

$$\langle \mathbf{z}|n, l, m-1\rangle = \sqrt{\frac{l+m}{l-m+1}} \left( \frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2} \right) \langle \mathbf{z}|n, l, m\rangle, \quad (\text{A.21})$$

коэффициенты  $b_m$  и  $A_{nl}$  определены в [107]. Раскладывая полином  $\langle \mathbf{z}|nlm\rangle$  по степеням  $z_1$  и  $z_2$  и учитывая (A.17), находим [107] связь между волновыми функциями в этих двух базисах [108, 109]:

$$|nlm\rangle = \sum_{m_1+m_2=m} C_{j m_1, j m_2}^{lm} |n_1 n_2 m\rangle, \quad (\text{A.22})$$

где  $0 \leq l \leq n-1$ ,  $j = (n-1)/2$ ,  $m_1 = (m+n_1-n_2)/2$ ,  $m_2 = (m-n_1+n_2)/2$  и  $C_{j m_1, j m_2}^{lm}$  — коэффициент Клебша–Гордана. Сама возможность такого соотношения связана с тем, что группа "скрытой" симметрии кулоновского поля допускает разложение  $SO(4) \sim SO(3) \otimes SO(3)$  и коэффициенты Клебша–Гордана относятся к сложности двух моментов  $j = (n-1)/2$  в группе  $SO(3)$ .

### Б. О параметре возбуждения квантового осциллятора

Начнем с гамильтониана (3.1). Полагая в (3.10)  $f(t) = F_0 \varphi(t/\tau)$ , где  $\varphi$  — безразмерная функция, получаем

$$\begin{aligned} v &= v_0 (\omega \tau)^2 \left| \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s) \exp(-i\omega \tau s) ds \right|^2 = \\ &= v_0 \left| \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\varphi}(s) \exp(-i\omega \tau s) ds \right|^2, \end{aligned} \quad (\text{Б.1})$$

где

$$v_0 = \frac{F_0^2}{2m\hbar\omega^3} = \frac{1}{2} \left( \frac{d}{x_0} \right)^2 = -\frac{\Delta E}{\hbar\omega}, \quad (\text{Б.2})$$

$d = F_0/m\omega^2$  — смещение положения равновесия осциллятора,  $x_0 = \sqrt{\hbar/m\omega}$ , а  $\Delta E = -F_0^2/2m\omega^2$  — сдвиг его энергии при наложении однородного внешнего поля  $F_0$ . Последнее равенство в (Б.1) справедливо и в тех случаях, когда  $f(t)$  не обращается в нуль при  $t \rightarrow \pm\infty$ , но выходит на постоянные пределы  $f_{\pm}$ .

Если  $\tau \gg 1/\omega$ , то параметр возбуждения  $v$  экспоненциально мал (адиабатика). Проиллюстрируем это на нескольких примерах.

$$1. \quad \varphi = \left[ 1 + \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]^{-1}, \quad v = v_0 \left( \frac{\pi\omega\tau}{\sinh \pi\omega\tau} \right)^2.$$

Если  $\tau \rightarrow 0$ , то  $\varphi = \theta(t)$  и  $v = v_0$ , таким образом, параметр  $v_0$  соответствует возбуждению осциллятора при мгновенном скачке внешней силы  $f(t)$  от 0 до  $F_0$ . Далее имеем:

$$\begin{aligned} 2. \quad \varphi &= \left( \cosh \frac{t}{\tau} \right)^{-2}, \quad v = \frac{v_0 (\omega \tau)^4}{\sinh^2(\pi\omega\tau/2)}, \\ 3. \quad \varphi &= \exp\left(-\frac{t^2}{2\tau^2}\right), \quad v = 2\pi v_0 (\omega \tau)^2 \exp\{-(\omega \tau)^2\}. \end{aligned}$$

В адиабатическом случае, т.е. при  $\omega\tau \gg 1$ , значение  $v$  определяется вкладом особой точки функции  $\varphi$ , ближайшей к вещественной оси, что объясняет экспоненциальную малость этого параметра.

Для осциллятора с переменной частотой (5.2) ситуация аналогична. Характерный пример:

$$\omega(t) = \left\{ \frac{1}{2} [\omega_+^2 + \omega_-^2 + (\omega_+^2 - \omega_-^2) \tanh \omega t] \right\}^{1/2}, \quad (\text{Б.3})$$

когда [24, 110]

$$\rho = \left\{ \frac{\sinh [\pi(\omega_+ - \omega_-)/2\omega]}{\sinh [\pi(\omega_+ + \omega_-)/2\omega]} \right\}^2 \quad (\text{Б.4})$$

и  $\omega \rightarrow 0$  (адиабатика), имеем

$$\rho \approx \exp\left(-\frac{2\pi\omega_-}{\omega}\right) + O\left(\exp\left[-\frac{\pi(\omega_+ + \omega_-)}{\omega}\right]\right), \quad (\text{Б.5})$$

где  $\omega_- = \min(\omega_+, \omega_-)$ . Однако если частота осциллятора изменяется резко ( $\omega \gg \omega_{\pm}$ ), то

$$\rho = \left( \frac{\omega_+ - \omega_-}{\omega_+ + \omega_-} \right)^2 \left( 1 - \frac{\pi^2}{3} \frac{\omega_+ \omega_-}{\omega^2} + \dots \right), \quad (\text{Б.6})$$

что в пределе  $\omega \rightarrow \infty$  переходит в (5.13). Адиабатическое приближение здесь неприменимо и параметр возбуждения  $\rho$  не является, вообще говоря, малым.

Обобщение формул (Б.3), (Б.4), отвечающее точно решаемому потенциалу Экарта [64] в квантовой механике,

$$\begin{aligned} \omega^2(t) &= \frac{\omega_+^2}{1 + \exp(-2\omega t)} + \frac{\omega_-^2}{1 + \exp(2\omega t)} + \\ &+ \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{[\exp(\omega t) + \exp(-\omega t)]^2}, \end{aligned} \quad (\text{Б.7})$$

приведено в работе [11]. При этом в адиабатической области остается справедливой экспоненциальная асимптотика (Б.5).

### В. Вращение спина в магнитном поле

#### и уравнение Риккати

Рассмотрим переменное магнитное поле

$$H_x = H_1 \cos \omega t, \quad H_y = H_1 \sin \omega t, \quad H_z = H_0, \quad (\text{B.1})$$

имеющее отношение к опытам по измерению магнитных моментов атомных ядер [111]. В этом случае уравнение (4.8) принимает вид

$$i \frac{da}{d\tau} = \frac{1}{2} \sin \theta [\exp(-i\lambda\tau) - a^2 \exp(i\lambda\tau)] + a \cos \theta, \quad (\text{B.2})$$

где

$$\tau = \omega_0 t, \quad \omega_0 = -\gamma \sqrt{H_0^2 + H_1^2} = -\frac{\gamma H_0}{\cos \theta},$$

$$\frac{H_1}{H_0} = \tan \theta, \quad \lambda = \frac{\omega}{\omega_0},$$

причем  $\lambda \tau = \omega t$ . Нетрудно заметить, что оно имеет частное решение вида  $a(\tau) = N \exp(-i\lambda \tau)$  (константа  $N$  определяется из квадратного уравнения). Этого достаточно [112] для нахождения общего решения уравнения Риккати, что позволяет удовлетворить начальному условию  $a(t_0) = 0$ . В итоге получаем<sup>15</sup>

$$|a(t)|^2 = \tan^2 \frac{\vartheta}{2} = \frac{\sin^2 \delta}{1 + \Delta + \cos^2 \delta}, \quad \Delta = \left( \frac{\lambda - \cos \theta}{\sin \theta} \right)^2 \quad (\text{B.3})$$

(ср. с (4.12)). Согласно (4.13) вероятность переворота спина  $s = 1/2$  в магнитном поле вида (B.1) равна

$$w_{-1/2, 1/2} = \frac{\sin^2 \delta}{1 + \Delta} = \frac{\sin^2 \theta}{1 - 2\lambda \cos \theta + \lambda^2} \sin^2 \delta \leq \frac{1}{1 + \Delta}, \quad (\text{B.4})$$

где  $\delta = (1/2)\omega_0(t - t_0)\sqrt{1 - 2\lambda \cos \theta + \lambda^2}$ . Для частицы с произвольным спином  $s$

$$w_{-s, s}(t) = [w_{-1/2, 1/2}(t)]^{2s}. \quad (\text{B.5})$$

Спин частицы может полностью перевернуться, если  $\delta = (n + 1/2)\pi$  и  $\Delta = 0$ , или  $\omega = \omega_0 \cos \theta = \gamma H_0$  (магнитный резонанс [33, 111]; за дальнейшими подробностями мы отсылаем к [34]).

В работе Майорана [25] было рассмотрено магнитное поле

$$H_x = A, \quad H_y = 0, \quad H_z = -Ct, \quad (\text{B.6})$$

где  $A$  и  $C$  — некоторые константы. Уравнение (4.8) при этом имеет довольно простой вид:

$$\dot{a} = i\gamma \left\{ \frac{1}{2} A(1 - a^2) - Ct a \right\}, \quad (\text{B.7})$$

однако Майорана решал не это уравнение, а уравнение Шрёдингера (4.1) для спина  $s = 1/2$ . Для вероятности переворота спина за время от  $t = -\infty$  до  $t = \infty$  им было получено:

$$w_{-1/2, 1/2} = \exp\left(-\frac{\pi}{2} k\right), \quad k = \frac{\gamma A^2}{C}, \quad (\text{B.8})$$

$\gamma$  — гиромагнитное отношение. Численный пример [25], характеризующий степень нарушения адиабатичности:  $w_{-1/2, 1/2} = 21\%$  и  $4,3\%$  при  $k = 1$  и  $2$ .

В заключение приведем входящие в (4.3) функции для простейшего случая, когда магнитное поле изменяется по величине, но сохраняет свое направление в простран-

стве (поле направлено по оси  $z$ ):

$$a(t) = c(t) = 0, \quad b(t) = i\gamma \int_{t_0}^t H_z(t') dt'. \quad (\text{B.9})$$

### Г. Условие унитарности

Вывод формулы в [11] для вероятностей перехода (5.11) основан на аналитическом продолжении функций Вигнера с компактной группы на некомпактную:

$$d_{\mu\nu}^{(j)}(\vartheta) \rightarrow f_{\mu\nu}^{(j)}(\beta), \quad \vartheta \rightarrow i\beta. \quad (\text{Г.1})$$

Такой прием не является математически строгим; более того, сравнение формул (1.8) и (1.9) показывает, что унитарность при этом может нарушаться<sup>16</sup>. Поэтому проверка унитарности для используемых нами представлений с весами  $j = -1/4$  и  $-3/4$  представляется необходимой.

В случае осциллятора с переменной частотой для переходов с двух нижних уровней ( $m = 0$  и  $1$ ) условие унитарности (5.22) принимает вид

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \rho} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k + 1/2)}{k! \Gamma(1/2)} \rho^k &= \\ = (1 - \rho)^{3/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k + 3/2)}{k! \Gamma(3/2)} \rho^k &= 1 \end{aligned} \quad (\text{Г.2})$$

и выполняется в соответствии с биномом Ньютона. Для  $m = 2$  и  $3$  оно было с высокой точностью ( $\sim 10^{-12}$ ) проверено численно [11], а затем доказано аналитически при всех  $m$  и  $\rho$  исходя непосредственно из формулы (5.11). К сожалению, привести здесь это доказательство [113] не представляется возможным ввиду его громоздкости.

В общем случае переменных во времени  $\omega(t)$  и  $f(t)$  выражения для  $w_{nm}$  имеют слишком сложный вид, поэтому ограничимся переходами с основного уровня,  $m = 0$ . В отличие от случаев, когда частота  $\omega$  не зависит от  $t$  или сила  $f(t)$  отсутствует, для которых проверка унитарности в переходах  $|0, \omega_- \rangle \rightarrow |n, \omega_+ \rangle$  элементарна, здесь требуются некоторые сведения из теории специальных функций. Используем формулу Мелера (см. формулу 10.13.22 в [20]):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^{n/2}}{2^n n!} \left| H_n \left( \frac{z}{\sqrt{2}} \right) \right|^2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \rho}} \exp \left\{ |z|^2 \frac{\sqrt{\rho} - \rho \cos 2\varphi}{1 - \rho} \right\}, \quad (\text{Г.3})$$

где  $\varphi = \arg z$ ,  $H_n$  — полином Эрмита. В нашем случае  $|z|^2 = 2v/\sinh \beta = v(1 - \rho)/\sqrt{\rho}$  и, учитывая (6.9), нетрудно убедиться в том, что вероятности  $w_{n0}$  (6.8) удовлетворяют условию унитарности при произвольных значениях параметров  $v$ ,  $\rho$  и  $\varphi$ .

В случае осциллятора с постоянной частотой можно продвинуться дальше. Используя квантовый принцип действия [22, 114], Швингер показал [115], что

$$\sum_{m=0}^{\infty} w_{mm}(v) u^m = u^n L_n \left[ -\frac{v(1 - u)^2}{u} \right] \exp(vu - v) \quad (\text{Г.4})$$

<sup>15</sup> Подробности вычислений см. в [10]. В этой работе нормировка спиновых операторов  $\hat{S}_{\pm}$  отличается от принятой здесь, вследствие чего в выражения для функций  $a(t)$  и  $c(t)$  из [10] следует ввести дополнительные множители  $\mp 2^{-1/2}$ . В обозначениях работы [10]  $\delta = (\mu - \lambda)\tau/2$ .

<sup>16</sup> То же имеет место, если исходить из выражений для функций Вигнера, приведенных в таблицах 4.3–4.12 справочника [26].

(в работе [115]  $u = \exp(-\beta\omega)$ , где  $\omega$  — частота осциллятора, а  $\beta^{-1} = \theta$  можно интерпретировать как температуру термостата). Отсюда, учитывая формулу 22.9.15 из [21], находим производящую функцию

$$G(u, v) = \sum_{m, n=0}^{\infty} w_{nm} u^m v^n = (1 - uv)^{-1} \exp \left\{ -v \frac{(1-u)(1-v)}{1-uv} \right\}. \quad (\text{Г.5})$$

При этом  $G(u, 1) = (1-u)^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} u^m$ , следовательно, при всех  $t$  выполняются соотношения унитарности (3.20). Далее, функция  $G(u, v)$  симметрична по  $u$  и  $v$ , в силу чего  $w_{nm}(v) = w_{mn}(v)$  при произвольном виде силы  $f(t)$ . Такая симметрия вероятностей перехода по начальному и конечному состояниям специфична для осциллятора и связана со свойствами коэффициента отражения от одномерного барьера (замечание Л.П. Питаевского, см. [47, с. 259]). При  $u = 0$  из (Г.5) следует распределение Пуассона (3.18).

### Список литературы

1. Feynman R P *Rev. Mod. Phys.* **20** 367 (1948)
2. Feynman R P, Hibbs A R *Quantum Mechanics and Path Integrals* (New York: McGraw-Hill, 1965) [Фейнман Р, Хибс А *Квантовая механика и интегралы по траекториям* (М.: Мир, 1968)]
3. Feynman R P *Phys. Rev.* **76** 749, 769 (1949); см. также любой учебник по КЭД и теории поля
4. Фейнман Р *Квантовая электродинамика* (М.: Мир, 1964)
5. Фейнман Р *КЭД — странная теория света и вещества* (Библиотечка "Квант", Вып. 66) (М.: Наука, 1988)
6. Feynman R P *Phys. Rev.* **84** 108 (1951) [Фейнман Р, в сб. *Проблемы современной физики* Вып. 3 (М.: ИЛ, 1955) с. 37]
7. Feynman R P *Phys. Rev.* **80** 440 (1950)
8. Fujiwara I *Prog. Theor. Phys.* **7** 433 (1952)
9. Schwinger J *Phys. Rev.* **91** 728 (1953)
10. Попов В С *ЖЭТФ* **35** 985 (1958)
11. Popov V S *Phys. Lett. A* **342** 281 (2005); Попов В С *ЖЭТФ* **128** 944 (2005)
12. Попов В С, Трусов М А, в сб. *Научная сессия МИФИ-2007* Т. 5 (М.: МИФИ, 2007) с. 196; <http://library.mephi.ru/data/scientific-sessions/2007/t5/4-1-13.doc>
13. Wigner E P *Group Theory and Its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra* (New York: Academic Press, 1959) [Вигнер Е П *Теория групп и ее приложения к квантовой механической теории атомных спектров* (М.: ИЛ, 1961)]
14. Ван-дер-Варден Б Л *Метод теории групп в квантовой механике* (Харьков: ОНТИ НКТП, 1938) [van der Waerden B L *Group Theory and Quantum Mechanics* (Berlin: Springer, 1980)]
15. Вейль Г *Теория групп и квантовая механика* (М.: Наука, 1986)
16. Понтрягин Л С *Непрерывные группы* 2-е изд. (М.: Гостехиздат, 1954)
17. Петрашень М И, Трифонов Е Д *Применение теории групп в квантовой механике* (М.: УРСС, 1999)
18. Виленкин Н Я *Специальные функции и теория представлений групп* (М.: Наука, 1965)
19. Фронсдал К, в сб. *Теория групп и элементарные частицы* (Пер. под ред. Д Иваненко) (М.: Мир, 1967) с. 324
20. Bateman H *Higher Transcendental Functions* (Compiled A Erdélyi) Vol. 1, 2 (New York: McGraw-Hill, 1953) [Бейтмен Г, Эрдейи А *Высшие трансцендентные функции* Т. 1, 2 (М.: Наука, 1965–1966)]
21. Abramowitz M, Stegun I A (Eds) *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables* (New York: Dover Publ., 1965) [Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами (Под ред. М Абрамовица, И Стигана) (М.: Наука, 1979)]
22. Schwinger J *Phys. Rev.* **82** 914 (1951); **91** 713, 728; **92** 1283 (1953); **93** 615; **94** 1362 (1954)
23. Швингер Ю *Теория квантованных полей* (М.: ИЛ, 1956)
24. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Квантовая механика: Нерелятивистская теория* (М.: Наука, 1974)
25. Majorana E *Nuovo Cimento* **9** 43 (1932)
26. Варшалович Д А, Москалев А Н, Херсонский В К *Квантовая теория углового момента* (М.: Наука, 1975)
27. Ди Джакомо Ф, Никитин Е Е *УФН* **175** 545 (2005)
28. Güttinger P *Z. Phys.* **73** 169 (1931)
29. Schwinger J *Phys. Rev.* **51** 648 (1937)
30. Landau L *Phys. Z. Sowjetunion* **1** 88; **2** 46 (1932)
31. Zener C *Proc. R. Soc. London Ser. A* **137** 696 (1932)
32. Stückelberg E C G *Helv. Phys. Acta* **5** 369 (1932)
33. Bloch F, Rabi I I *Rev. Mod. Phys.* **17** 237 (1945)
34. Abragam A *The Principles of Nuclear Magnetism* (Oxford: Clarendon Press, 1961) [Абрагам А *Ядерный магнетизм* (М.: ИЛ, 1963)]; Абрагам А, Гольдман М *Ядерный магнетизм: порядок и беспорядок* (М.: Мир, 1984)
35. Bargmann V, Michel L, Telegdi V L *Phys. Rev. Lett.* **2** 435 (1959)
36. Frenkel J Z. *Phys.* **37** 243 (1926)
37. Берестецкий В Б, Лифшиц Е М, Питаевский Л П *Квантовая электродинамика* (М.: Физматлит, 2001)
38. Попов В С *ЖЭТФ* **38** 1584 (1960)
39. Шапиро И С *ДАН СССР* **106** 647 (1956)
40. Чжоу Гуан-Чжао, Заставенко Л Г *ЖЭТФ* **35** 1417 (1958)
41. Попов В С *ЖЭТФ* **37** 1116 (1959)
42. Гельфанд И М, Минлос Р А, Шапиро З Я *Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения* (М.: Физматгиз, 1958)
43. Наймарк М А *Линейные представления группы Лоренца* (М.: Физматгиз, 1958)
44. Husimi K *Prog. Theor. Phys.* **9** 381 (1953)
45. Lewis H R (Jr.), Riesenfeld W B J. *Math. Phys.* **10** 1458 (1969)
46. Попов В С, Переломов А М *ЖЭТФ* **56** 1375; **57** 1684 (1969)
47. Базь А И, Зельдович Я Б, Переломов А М *Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике* 2-е изд. (М.: Наука, 1971)
48. Дыхне А М *ЖЭТФ* **38** 570 (1960)
49. Переломов А М, Попов В С *ТМФ* **3** 377 (1970)
50. Malkin I A, Man'ko V I, Trifonov D A *Phys. Rev. D* **2** 1371 (1970)
51. Ахундова Э А, Додонов В В, Манько В И *ТМФ* **60** 413 (1984)
52. Малкин И А, Манько В И *Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем* (М.: Наука, 1979)
53. Попов В С *ЖЭТФ* **62** 1248 (1972)
54. Ringwald A *Phys. Lett. B* **510** 107 (2001)
55. Попов В С *Письма в ЖЭТФ* **74** 151 (2001); Popov V S *Phys. Lett. A* **298** 83 (2002)
56. Alkofer R et al. *Phys. Rev. Lett.* **87** 193902 (2001)
57. Tajima T, Mourou G *Phys. Rev. ST Accel. Beams* **5** 031301 (2002)
58. Narozhny N B, Bulanov S S, Mur V D, Popov V S *Phys. Lett. A* **330** 1 (2004); Буланов С С, Нарожный Н Б, Мур В Д, Попов В С *ЖЭТФ* **129** 14 (2006)
59. Narozhny N B *Laser Phys.* **15** 1458 (2005)
60. Mourou G A, Tajima T, Bulanov S V *Rev. Mod. Phys.* **78** 309 (2006)
61. Sauter F Z. *Phys.* **69** 742; **73** 547 (1931)
62. Heisenberg W, Euler H Z. *Phys.* **98** 714 (1936)
63. Schwinger J *Phys. Rev.* **82** 664 (1951)
64. Eckart C *Phys. Rev.* **35** 1303 (1930)
65. Nikishov A I *Nucl. Phys. B* **21** 346 (1970); Нарожный Н Б, Никишов А И *ЯФ* **11** 1072 (1970)
66. Parker L *Phys. Rev.* **183** 1057 (1969); *Phys. Rev. D* **3** 346 (1971)
67. Зельдович Я Б, Старобинский А А *ЖЭТФ* **61** 2161 (1971)
68. Зельдович Я Б, Питаевский Л П, Попов В С, Старобинский А А *УФН* **105** 780 (1971)
69. Келдыш Л В *ЖЭТФ* **47** 1945 (1964)
70. Volkow D M Z. *Phys.* **94** 250 (1935); Волков Д М *ЖЭТФ* **7** 1286 (1937)
71. Попов В С *УФН* **174** 921 (2004)
72. Manakov N L, Ovsianikov V D, Rapoport L P *Phys. Rep.* **141** 320 (1986)
73. Mur V D, Popruzenko S V, Pozdnyakov S G, Popov V S *Phys. Lett. A* **316** 226 (2003)

74. Fock V Z. *Phys.* **98** 145 (1935)
75. Bargmann V Z. *Phys.* **99** 576 (1936)
76. Переломов А М, Попов В С *ЖЭТФ* **50** 179 (1966)
77. Bander M, Itzykson C *Rev. Mod. Phys.* **38** 330, 346 (1966)
78. Попов В С, в сб. *Физика высоких энергий и теория элементарных частиц* (Отв. ред. В П Шелест) (Киев: Наукова думка, 1967) с. 702
79. Thomas L H *Nature* **117** 514 (1926)
80. Wigner E P *Rev. Mod. Phys.* **29** 255 (1957)
81. Малыкин Г Б *УФН* **176** 865 (2006)
82. Ритус В И *УФН* **177** 105 (2007)
83. Glauber R J *Phys. Rev.* **84** 395 (1951)
84. Kumar K J. *Math. Phys.* **6** 1923, 1928 (1965)
85. Magnus W, Karrass A, Solitar D *Combinatorial Group Theory* 2nd ed. (New York: Dover Publ., 1976)
86. Schrödinger E *Naturwissenschaften* **14** 664 (1926)
87. Glauber R J *Phys. Rev. Lett.* **10** 84 (1963); *Phys. Rev.* **130** 2529; **131** 2766 (1963)
88. Глаубер Р Дж *УФН* **176** 1342 (2006)
89. Klauder J R, Sudarshan E C G *Fundamentals of Quantum Optics* (New York: W.A. Benjamin, 1968) [Клаудер Дж, Сударшан Э *Основы квантовой оптики* (М.: Мир, 1970)]
90. Fock V Z. *Phys.* **49** 339 (1928)
91. Фок В А *Работы по квантовой теории поля* (Л.: Изд-во ЛГУ, 1957) с. 9, 20
92. Bargmann V *Commun. Pure Appl. Math.* **14** 187 (1961); *Rev. Mod. Phys.* **34** 829 (1962)
93. Bender C M, Wu T T *Phys. Rev.* **184** 1231 (1969); *Phys. Rev. D* **7** 1620 (1973)
94. Brézin E, Le Guillou J-C, Zinn-Justin J *Phys. Rev. D* **15** 1544, 1558 (1977)
95. Hioe F T, MacMillen D, Montroll E W *Phys. Rep.* **43** 305 (1978)
96. Dolgov A D, Popov V S *Phys. Lett. B* **79** 403 (1978); Alliluev S P, Eletsky V L, Popov V S *Phys. Lett. A* **73** 103 (1980); Долгов А Д, Попов В С *ЖЭТФ* **75** 2010 (1978)
97. Kazakov D I, Shirkov D V *Fortschr. Phys.* **28** 465 (1980)
98. Мигдал А Б, Крайнов В П *Приближенные методы квантовой механики* (М.: Наука, 1966)
99. Мигдал А Б *Качественные методы в квантовой теории* (М.: Наука, 1975)
100. Карасев М В, Маслов В П *Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование* (М.: Наука, 1991)
101. Bloch F Z. *Phys.* **74** 295 (1932)
102. Киржниц Д А *Труды ФИАН* **16** 3 (1961)
103. Киржниц Д А *Полевые методы теории многих частиц* (М.: Госатомиздат, 1963)
104. Dirac P A M *The Principles of Quantum Mechanics* (Oxford: Clarendon Press, 1958) [Дирак П А М *Собрание научных трудов* Т. 1 (М.: Физматлит, 2002) с. 9]
105. Переломов А М *ТМФ* **6** 213 (1971); *УФН* **123** 23 (1977)
106. Зельдович Б Я, Переломов А М, Попов В С, Препринт № 618 (М.: ИТЭФ, 1968)
107. Переломов А М, Попов В С *ЖЭТФ* **54** 1799 (1968)
108. Park D Z. *Phys.* **159** 155 (1960)
109. Stone A P *Proc. Camb. Philos. Soc.* **52** 424 (1956)
110. Morse P M, Feshbach H *Methods of Theoretical Physics* Vol. 2 (New York: McGraw-Hill, 1953) Sect. 12.3
111. Rabi I I *Phys. Rev.* **51** 652 (1937)
112. Степанов В В *Курс дифференциальных уравнений* (М.: Гостехиздат, 1953)
113. Трусов М А, частное сообщение
114. Schwinger J *Philos. Mag.* **44** 1171 (1953)
115. Schwinger J J. *Math. Phys.* **2** 407 (1961)

### Feynman disentangling of noncommuting operators and the theory of group representations

V.S. Popov

Russian Federation State Scientific Center "Alikhanov Institute of Theoretical and Experimental Physics",  
ul. B. Cheremushkinskaya 25, 117218 Moscow, Russian Federation  
E-mail: markina@itep.ru

Feynman's method for the disentangling of noncommuting operators is discussed and applied to nonstationary problems in quantum mechanics, including, among others, the excitation of an harmonic oscillator by an external force and/or by time-varying frequency; spin rotation in a time-varying magnetic field; the disentangling of an atom (ion) Hamiltonian in a laser field; a model with the hidden symmetry group of the hydrogen atom; and the theory of coherent states. Feynman operator calculus combined with simple group-theoretical considerations enables the Hamiltonian to be disentangled and exact transition probabilities between the initial and final states of a quantum oscillator be obtained in analytic form without too much difficulty. Extension to the case of a D-dimensional oscillator is briefly discussed, in particular in terms of vacuum pair creation in intense electric fields.

PACS numbers: **02.20** – a, 03.65.Ca, 03.65.Fd

DOI: 10.3367/UFNr.0177.200712f.1319

Bibliography — 115 references

Received 25 April 2007, revised 27 June 2007

*Uspekhi Fizicheskikh Nauk* **177** (12) 1319–1340 (2007)

*Physics–Uspekhi* **50** (12) (2007)