

ИЗ ИСТОРИИ ФИЗИКИ

Прецессия Томаса: корректные и некорректные решения

Г.Б. Малыкин

В литературе имеется большое число различных выражений для частоты прецессии Томаса (ПТ), что привело к длительной дискуссии по данному вопросу. Показано, что корректный результат был получен в работах ряда авторов, опубликованных еще более сорока лет назад, однако оказавшихся незамеченными на фоне множества ошибочных работ. Показана ошибочность нескольких связанных с ПТ физических парадоксов, сформулированных в основном с целью опровержения специальной теории относительности. Рассмотрены различные методы получения корректного выражения и проанализированы причины возникновения основных некорректных выражений для частоты ПТ.

PACS numbers: 01.65. + g, 03.30. + p, 03.65.Vf

Содержание

1. Введение (865).
 2. Обзор литературы (868).
 - 2.1. Различные выражения для прецессии Томаса. 2.2. Эксперименты, в ходе которых проявляется прецессия Томаса.
 3. О мнимых парадоксах и заблуждениях, связанных с рассмотрением прецессии Томаса (873).
 4. Выводы корректного выражения прецессии Томаса (875).
 - 4.1. Метод Вигнера–Стаппа–Ритуса. 4.2. Метод Я.А. Сморгинского (геометрия Лобачевского). 4.3. Метод Чакрабарти. 4.4. Прецессия Томаса как следствие теоремы Ишлинского. 4.5. Анализ причин получения Л.Х. Томасом и К. Мёллером некорректного выражения для прецессии Томаса. 4.6. Иллюстрации кинематики прецессии Томаса. 4.7. О влиянии прецессии Томаса на энергию и излучение материальной частицы со спином.
 5. Заключение (878).
- Список литературы (880).

1. Введение

Прецессия Томаса (ПТ) [1–3] есть релятивистский кинематический эффект, заключающийся в том, что спин элементарной частицы или ось вращения макроскопического механического гироскопа, а также ось координат системы отсчета, движущихся по криволинейной траектории, поворачиваются (прецессируют) относительно осей лабораторной инерциальной системы отсчета (ИСО). Прецессия Томаса связывает угловую скорость

поворота спина элементарной частицы, движущейся по криволинейной орбите (например окружности), с угловой скоростью движения по орбите. Прецессия Томаса не связана с воздействием каких-либо сил, приводящих к изменению углового положения тела, т.е. имеет чисто кинематическое происхождение.

Понятие ПТ возникло на заре развития квантовой механики при описании движения электрона в атоме с учетом его собственного магнитного момента, определяемого спином. Ядро создает только электрическое поле, но в системе, связанной с электроном, в соответствии с релятивистскими формулами преобразования имеется и магнитное поле, что при наличии собственного магнитного момента электрона снимает вырождение по магнитному квантовому числу (спин-орбитальное взаимодействие). Однако рассчитанные при формальном учете магнитного взаимодействия значения тонкой структуры спектра атома водорода оказались в два раза выше экспериментальных данных. Как отмечено в [4], ранее полагали, что скорость изменения ориентации спина электрона в сопровождающей его движение системе координат равна векторному произведению магнитного момента электрона на величину магнитного поля в этой системе координат. Л.Х. Томас (1903–1992) пришел к выводу [1, 2], что это имеет место только в том случае, когда система отсчета, в которой электрон покоится, является неврашающейся системой координат. Если же сопровождающая движение электрона система координат вращается, то скорость изменения произвольного вектора (в том числе и осей координат рассматриваемой системы) будет меньше, чем скорость его изменения в соответствующей неврашающейся системе отсчета, на некоторую величину, которая впоследствии стала именоваться прецессией Томаса.

Л.Х. Томас [1, 2] рассмотрел последовательные преобразования Лоренца для системы, движущейся по криволинейной траектории, и показал, что вследствие некоммутативности общих преобразований Лоренца

Г.Б. Малыкин. Институт прикладной физики РАН,
603950 Нижний Новгород, ул. Ульянова 46, Российская Федерация
Тел. (8312) 16-48-70
E-mail: malykin@ufp.appl.sci-nnov.ru

Статья поступила 23 августа 2005 г.,
после доработки 16 мая 2006 г.

последовательность преобразований приводит к дополнительному вращению осей системы, движущейся с ускорением, относительно неподвижной системы [1, 2]. Учет этого дополнительного вращения и обеспечивает совпадение расчетных величин с наблюдаемыми. Однако Томас при этом интересовали в основном проблемы квантовой механики, поэтому для специальной теории относительности (СТО) результаты его работы оказались одним из многих сложных и запутанных вопросов.

Подчеркнем, что Л.Х. Томас рассматривал вращение осей сопровождающей движение электрона системы координат, а не вращение спина электрона. Это привело в дальнейшем к ряду недоразумений и появлению ошибочных работ по проблеме ПТ. Можно ввести три различные системы отсчета, сопровождающие движение электрона по круговой орбите, а в самом общем случае по криволинейной траектории: 1) система отсчета, оси координат которой остаются параллельными (или сохраняют свое угловое положение) по отношению к осям лабораторной ИСО; 2) система отсчета, в которой одна из осей координат всегда совпадает с вектором скорости электрона; 3) система отсчета, в которой вектор спина электрона сохраняет свою ориентацию относительно осей координат. Очевидно, что по отношению к осям координат первых двух систем отсчета вектор спина электрона прецессирует, но угловая скорость его прецессии в этих системах различна. Оси координат второй и третьей систем отсчета вращаются относительно осей лабораторной ИСО, причем вращение осей третьей системы совпадает с ПТ спина электрона. Отметим, что даже первая система отсчета не является инерциальной, поскольку начало ее координат движется не поступательно, а по криволинейной траектории. Поэтому наиболее простым и наглядным является рассмотрение ПТ спина элементарной частицы или оси вращения механического гироскопа относительно осей лабораторной (неподвижной) ИСО.

Прецессия Томаса определяет поправки при расчете влияния спин-орбитального взаимодействия на тонкую структуру спектров атомов [1, 2, 4, 5], позволяет объяснить аномальный эффект Зеемана [1, 2], дает возможность также качественно объяснить взаимодействие нуклонов в ядре и причину "обращения" дублетов в ядре [3]. В датчиках угловой скорости на волнах де Бройля материальных частиц (электронов, нейтронов, атомов и др.), принцип действия которых основан на эффекте Саньяка [6–9], ПТ приводит к дополнительному, не связанному с вращением сдвигу нуля интерференционной картины встречных волн [10, 11].

В настоящее время в квантовой физике члены спин-орбитального взаимодействия, к которым и приводит ПТ, вычисляются как приближение к решению релятивистского уравнения Дирака, из которого все эффекты СТО следуют непосредственно [12]. По мнению автора работы [13] ПТ влияет на величину постоянной Ридберга.

В последнее время математический аппарат ПТ применяется для описания изменения состояния поляризации света при его прохождении через многослойные диэлектрические покрытия или отражения в них [14–18], а также для описания сжатых состояний света [19] и изменения состояния поляризации электронов в процессе ионизирующих столкновений атомов с ионами [20]. В работах [21, 22] было даже предложено ввести новую элементарную частицу — так называемый мерон,

который соответствует эффекту ПТ и отвечает за спин-орбитальное взаимодействие.

В литературе приводится большое число различных выражений для ПТ. В ряде работ, посвященных ПТ, расчеты ведутся в первом приближении по v^2/c^2 , где v — скорость элементарной частицы в лабораторной ИСО, c — скорость света. В этом случае все авторы приходят к одному и тому же выражению, полученному впервые Томасом [1], причем независимо от того, рассматривается ли ими релятивистское вращение спина частицы или релятивистское вращение осей координат системы отсчета, сопровождающей движение частицы. Однако в самом общем случае выражения для ПТ, полученные разными авторами, различаются коренным образом, причем, как отмечалось выше, проблема осложняется тем, что разные авторы вкладывают в это выражение разный смысл: одни имеют в виду релятивистское вращение спина частицы в лабораторной ИСО, другие — в сопровождающей системе отсчета (при этом, как уже упоминалось выше, закон вращающихся осей этой системы может определяться тремя способами), третьи — релятивистское вращение осей координат системы отсчета, сопровождающей движение частицы.

Отметим, что вследствие эффекта релятивистского замедления времени в движущейся по отношению к неподвижной (лабораторной) ИСО системе отсчета угловая частота ПТ спина в системе отсчета, сопровождающей движение элементарной частицы со спином или механического гироскопа, всегда в γ раз больше ($\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, $\beta = v/c$), чем в лабораторной ИСО. Разные авторы приводят выражения для ПТ в разных системах отсчета, что дополнительно запутывает ситуацию.

Во избежание подобных недоразумений в дальнейшем все выражения для ПТ будут приводиться (если не делаются специальные оговорки) в лабораторной ИСО и только для релятивистской прецессии спина, которая в отличие от релятивистского вращающихся осей координат системы отсчета, сопровождающей движение частицы, есть реальное физическое явление, которое можно наблюдать, и его рассмотрение наиболее важно и интересно. В случае, когда в цитируемой работе выражение для ПТ рассчитано в сопровождающей системе отсчета, то во избежание возможных недоразумений и для удобства сравнения с другими выражениями для ПТ, оно также путем пересчета представляется в виде, соответствующем лабораторной ИСО. Разумеется, рассмотрение ПТ в сопровождающей системе отсчета также является вполне корректным, если учесть, что в этом случае ПТ в γ раз больше, чем в лабораторной ИСО. Поэтому случаи рассмотрения ПТ спина в сопровождающей системе отсчета или релятивистского вращающихся осей координат системы отсчета, сопровождающей движение частицы, будут всякий раз особо оговариваться. Отметим, что, к сожалению, некоторые авторы не дают никаких пояснений относительно того, в какой системе отсчета они записывают выражение для ПТ и прецессию чего — спина или осей координат — они рассматривают, что затрудняет понимание их результатов.

Цель данной статьи — проанализировать непростую ситуацию, сложившуюся вокруг ПТ, и выяснить, какое из выражений для ПТ является корректным и применительно к какой прецессии — прецессии спина частицы или осей координат системы отсчета, сопровождающей

движение частицы. Ниже, во введении, будет рассмотрено развитие конфликтной ситуации вокруг ПТ в ретроспективном плане. В разделе 2 рассматриваются основные работы, посвященные ПТ, и приводятся десять существенным образом различающихся между собой выражений, описывающих количественные характеристики данного явления, которые получены разными авторами. Анализируются также известные эксперименты по измерению ПТ. В разделе 3 описывается ряд связанных с ПТ физических парадоксов, сформулированных разными авторами в основном с целью отрицания СТО. В разделе 4 представлены различные методы вычисления корректного выражения для ПТ, а также проанализирована наиболее часто встречающаяся ошибка, которую допускает большая часть авторов, получающих некорректное выражение для ПТ. В разделе 4 также предложена простая и наглядная иллюстрация ПТ, демонстрирующая, что ПТ спина элементарной частицы или оси макроскопического гироскопа может рассматриваться как проявление эффекта релятивистского замедления времени в случае движения по круговой орбите объекта, имеющего выделенную ось, которая сохраняет ориентацию в пространстве при $v \ll c$. Показано, что ПТ не влияет на энергию и излучение частицы. В разделе 5 формулируются основные результаты статьи, а также приводятся весьма интересные, с нашей точки зрения, воспоминания Л.Х. Томаса о времени и обстоятельствах, в которых создавались его основополагающие работы [1,2].

Как отмечалось выше, выражение для ПТ в первой работе Л.Х. Томаса [1] получено в первом приближении по v^2/c^2 , и при выполнении этого условия оно всегда является корректным. В последующей работе [2] Л.Х. Томас, проведя вычисления для произвольного значения скорости электрона v , получил выражение, которое корректно описывает релятивистское вращение осей координат системы отсчета, сопровождающей движение частицы, по отношению к неподвижной (лабораторной) ИСО. Однако поскольку большинство авторов под ПТ понимают прецессию спина элементарной частицы, в дальнейшем это привело к ряду ошибок и недоразумений.

Тем не менее предпосылки для получения корректного выражения для ПТ спина частицы при произвольной скорости орбитального движения возникли практически одновременно с публикацией работ Томаса [1, 2]. Еще в 1926 г. Я.И. Френкель, которого В. Паули ознакомил с работой Томаса [1] еще до ее опубликования, обратил внимание на то, что для полной характеристики магнитных свойств электрона задания трехмерного вектора магнитного момента μ , как это делал Томас [1, 2], недостаточно и следует использовать шестивектор [23].

В 1929 г. И.Е. Тамм [24], основываясь на результатах математической работы Г. Томсена [25], предложил использовать для описания спина пространственно-подобный четырехмерный вектор. Метод Тамма впоследствии был развит в работах А. Бакри [26, 27] и А.А. Логунова [28–30]. (Подробный анализ работ [23, 24] см. в обзорах [31–33].) И.Е. Тамм также показал [24], что ПТ не приводит к изменению энергии электрона. Однако Я.И. Френкеля и И.Е. Тамма так же, как и самого Л.Х. Томаса, интересовали в первую очередь вопросы квантовой механики, поэтому в [23, 24] приво-

дятся выражения для ПТ в первом приближении по v^2/c^2 .

В 1931 г. А. Зоммерфельд [34], введя четвертую пространственную переменную $x_4 = ict$ и превратив тем самым пространство Минковского в евклидово, свел проблему ПТ к проблеме сложения поворотов в евклидовом пространстве. Если довести до конца расчеты в соответствии с методом Зоммерфельда, то в результате получается выражение, существенно отличающееся от полученного Томасом: угловая скорость ПТ оказывается в γ раз меньше. Однако Зоммерфельд остановился на первом приближении по v^2/c^2 , когда приближенные выражения для ПТ в [34] и [1, 2] совпадают.

Отметим, что классическая теория спина затем развивалась во многих работах (см., например, [35–65]) 1930–1960-х годов. Однако в этих работах, по-видимому, даже не ставилась задача получения выражения для ПТ.

В 1934 г. Х. Крамерс [66] (см. также [67]) провел вычисление релятивистской динамики спина на основе шестивектора. Однако при расчете выражения для ПТ он также ограничился слабoreлятивистским приближением.

В 1942 г. А.Д. Галанин, аспирант И.Е. Тамма, для вычисления ПТ применил метод параллельного переноса вектора [68], тоже ограничившись слабoreлятивистским приближением.

В 1939 г. Э. Вигнер [69] разработал метод, позволяющий рассчитывать изменение ориентации спина элементарной частицы при скачкообразном изменении ее вектора скорости (так называемое вращение Вигнера (ВВ)). Прецессия Томаса является частным случаем ВВ, соответствующим бесконечно малому изменению вектора скорости. Однако ни в [69], ни в своих последующих работах [70–73] (см. также [74]) Вигнер так и не получил в явном виде выражений ни для ВВ, ни для ПТ.

В середине 1940-х гг. В.Л. Гинзбург [75, 76] пришел к выводу о необходимости получения точных релятивистских выражений для динамики спина¹. В 1947 г. В.Л. Гинзбург и И.Е. Тамм [77] вновь обратились к данному вопросу.

В 1952 г. датский ученый К. Мёллер (1904–1980), крупный специалист в области теории относительности, получил в известной монографии [78] выражение для ПТ, которое совпадает с соответствующим выражением Томаса [2] с точностью до знака и является корректным в сопровождающей системе отсчета. Однако в [78] указано, что данное выражение записано для лабораторной ИСО, что является ошибкой. Высокий научный авторитет К. Мёллера сыграл в данном случае весьма отрицательную роль: начиная с этого времени большинство авторов статей, монографий и учебных курсов стали использовать выражение для ПТ из [78] или же при выводе такого выражения старались, чтобы оно совпадало с приведенным в [78]. Для того чтобы охарактеризовать влияние результата [78] на некоторых исследователей, в качестве примера укажем, что в диссертации А. Бакри [27], посвященной в основном ПТ, один из разделов озаглавлен: "Прецессия Томаса–Мёллера". Причины ошибок, допущенных в [2] и [78], будут проанализированы в разделе 4.5.

¹ Из которых можно выделить и эффекты, связанные с ПТ.

В 1956 г. была опубликована работа Г. Стаппа [79], результаты которой в принципе позволяли получить адекватное выражение для ПТ, однако оно там не было получено.

В 1961 г. В.И. Ритус [80], используя результаты [69–73, 79], впервые получил аналитические выражения даже для ВВ [69–74], переход от которого к формуле для ПТ может быть сделан очень просто — путем устремления добавляемой скорости к нулю. К сожалению, в явном виде в [80] это не было сделано. Однако в [80] показано, что направление спина безмассовых частиц при их криволинейном движении всегда совпадает с направлением их импульса. Отсюда однозначно следует, что спин таких частиц, в том числе и фотона, делает один оборот на один оборот частицы.

В 1962 г. Я.А. Смородинский (1917–1992) [81] (см. также [82, 83]), используя геометрию Лобачевского, впервые получил и записал адекватное выражение для ПТ.

В 1964 г. А. Чакрабартти [84] получил адекватное выражение для ПТ, применяя математический аппарат группы Пуанкаре [85–88] (см. также его работы [89–93]). (Отметим здесь, что большое число работ А. Чакрабартти [89, 90, 92–99] посвящено вычислению состояния поляризации элементарных частиц с помощью решения уравнений Дирака [100, 101] в представлении Фолди–Воутхаузена [102, 103].)

Однако именно в середине 1960-х годов началась продолжающаяся по сей день оживленная дискуссия о физической природе ПТ, развернувшаяся на страницах *American Journal of Physics*, в результате чего было опубликовано большое число неадекватных выражений для ПТ². К сожалению, в ходе этой дискуссии корректные результаты [80–82, 84, 89, 91, 93] практически не упоминались.

В 1980–1981 гг. канадскими исследователями В. Бэйлисом [104] и Д. Гамильтоном [105] были получены адекватные выражения для ПТ с помощью шестикватернионов, или, что то же самое, метода матриц Паули (спиноров в пространстве Минковского [106–115]), и соответственно с помощью алгебры Клиффорда [116–124] (шестивектора) [105]. В 1983 г. В.А. Бордовицыным и С.В. Сорокиным [125] с помощью метода Баргмана–Мишеля–Телегди (БМТ) [126]³ было выведено адекватное выражение для ПТ в сопровождающей движение электрона системе отсчета. В 1986 г. М. Стрэндберг (США) получил корректное выражение для ПТ как в лабораторной ИСО, так и в системе отсчета, сопровождающей движение материальной частицы со спином [127] (см. также [128]). Отметим, что [127] является одной из немногих работ, в которой явно указано, что в мгновенно сопровождающей системе отсчета угловая частота ПТ в γ раз больше, чем в лабораторной ИСО.

В 1998 г. вышел в свет пятый том *Физической энциклопедии*, в котором имелась статья Г.Б. Малыкина и Г.В. Пермитина [3], содержащая корректное выражение для ПТ спина (без вывода).

² Большинство этих публикаций будет рассмотрено в разделе 2.

³ Как показано в [31], в частном случае, когда заряженная частица со спином движется в однородных электрическом и магнитном полях, уравнение Баргмана–Мишеля–Телегди переходит в уравнение Тамма–Гуда [24, 62], которое при отсутствии аномалии магнитного момента частицы сводится к уравнению Тамма [24].

В 1999 г. были опубликованы работы [129, 130] автора настоящей статьи, в которых адекватное выражение для ПТ произвольной оси, связанной с движущимся по криволинейной траектории твердым телом, получено с помощью известной теоремы А.Ю. Ишлинского о телесном угле [131, 132] (см. также [133–136]), примененной к релятивистской аберрации изображения движущегося тела [137–142]. Сходный подход применялся ранее в [143], однако до окончательной формулы вычисления там не доведены. В работе [144] использование указанного метода привело к ошибочному результату, причина которого будет проанализирована в разделах 4.4 и 4.5. Как уже отмечалось, для частного случая частиц с нулевой массой покоя связь между поворотом спина и релятивистской аберрацией была установлена еще в 1961 г. В.И. Ритусом [80]. Заметим, что данный метод эквивалентен методу параллельного переноса вектора, который более 60 лет назад применялся С.М. Рытовым [145, 146] и В.В. Владимирским [147] для перехода от волновой к геометрической оптике. В работе А.Д. Галанина [68] эта техника используется для перехода от волнового описания электронов и мезонов к динамическому, причем при разложении по v/c в низшем порядке получается слаборелятивистское приближение для ПТ.

Таким образом, существует необходимость детального рассмотрения ПТ. Так, в статье [3] для *Физической энциклопедии* Г.Б. Малыкин и Г.В. Пермитин приводят выражение для ПТ, совпадающее с выражением Я.А. Смородинского [81–83], А. Чакрабартти [84, 89, 91, 93], В. Бэйлиса [104], Д. Гамильтона [105], В.А. Бордовицына и С.В. Сорокина [125], Стрэндберга [127] и Г.Б. Малыкина [129, 130], а И.Ю. Кобзарев [148] в той же энциклопедии дает выражение⁴, совпадающее с выражением из [2]. Следует отметить, что Я.А. Смородинский в более поздней работе [149] фактически отказался от своего предыдущего результата [81–83] и получил выражение для ПТ, совпадающее с приведенным в [78]. Следует также отметить, что и Г.В. Пермитин в последующей работе [150], написанной совместно с А.И. Смирновым, также перешел к выражению для ПТ, совпадающему с приведенным в [78].

Наличие большого числа некорректных выражений для ПТ и общая неопределенная ситуация в данном вопросе привели к ряду заблуждений, часть из которых может быть сформулирована в виде физических парадоксов. Эти парадоксы не столь безобидны, как кажется на первый взгляд, поскольку при их поверхностном рассмотрении может возникнуть сомнение в справедливости СТО. Наглядная демонстрация несостоятельности этих парадоксов, которая будет проведена в разделе 3, имеет самостоятельное методическое значение.

2. Обзор литературы

2.1. Различные выражения для прецессии Томаса

Выражение для бесконечно малого угла поворота координатных осей системы, движущейся по криволинейной траектории, которое было получено Томасом [2], в

⁴ К сожалению, И.Ю. Кобзарев в [148] не указал, в какой системе отсчета он записал выражение для ПТ, что затрудняет интерпретацию его результатов.

современных обозначениях имеет вид

$$d\phi = (\gamma - 1) \frac{[\mathbf{v} \times d\mathbf{v}]}{v^2} = (\gamma - 1) d\phi, \quad (1)$$

где $d\mathbf{v}$ — вектор бесконечно малого изменения скорости за счет ускорения, ϕ — угол поворота пространственных осей координат движущейся системы отсчета, сопровождающей движение элементарной частицы или гирокомпаса, по отношению к осям неподвижной, измеренный в лабораторной ИСО, ϕ — орбитальный угол в лабораторной ИСО.

Выражение (1), представленное через угловую скорость ПТ $\Omega_T = d\phi/dt$, где t — время в лабораторной ИСО, с точностью до знака совпадает с выражением, полученным позднее К. Мёллером [78] (см. также [4, 26–30, 88, 144, 149–162]⁵):

$$\Omega_T = -(\gamma - 1) \frac{[\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}}]}{v^2}; \quad \Omega_T = (1 - \gamma) \omega, \quad (2)$$

где $\omega = d\phi/dt$ — угловая скорость вращения по орбите, измеренная в лабораторной ИСО. Второй вариант в (2) мы приводим для тела, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω , когда частота ПТ Ω_T также постоянна. Отметим, что и в ряде других работ (см., например, [163–170]) выражение для ПТ отличается от (2) знаком, т.е. совпадает с результатом Томаса [2].

Как было отмечено во введении, выражение (2) является корректным в системе отсчета, сопровождающей движение частицы, а точнее говоря, являлось бы корректным, если бы было записано в такой системе отсчета. Однако Мёллер совершенно ясно указал [78], что (2) относится к ПТ спина частицы в лабораторной ИСО. В частности, в этом случае из (2) следует, что спин фотона, как и любой безмассовой частицы, будет совершать в лабораторной ИСО бесконечно большое число оборотов на один оборот частицы, что явно противоречит результатам работы В.И. Ритуса [80].

В то же время имеются работы [3, 81, 82, 84, 89–93, 104, 105, 125, 127, 129, 130], в которых угловая скорость ПТ представляется в виде

$$d\phi = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{[\mathbf{v} \times d\mathbf{v}]}{v^2}; \quad \Omega_T = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \omega. \quad (3)$$

Отметим, что (3) может быть получено путем несложных преобразований из результатов работы [80]. Очевидно, что выражения (2) и (3) различаются как по знаку, так и по абсолютной величине.

Возникает вопрос: какое из выражений (2) и (3) является корректным? При правильном понимании рассматриваемого вопроса — и то, и другое. Выражение (3) описывает ПТ спина элементарной частицы или оси механического гироскопа в лабораторной (неподвижной) ИСО, а выражение (2) — в сопровождающей движение системе отсчета. Если рассматривается такая сопровождающая система отсчета, в которой направление спина относительно осей координат остается

постоянным, то ПТ ее осей координат в лабораторной ИСО совпадает с ПТ спина и описывается выражением (3). Напротив, если из сопровождающей системы координат наблюдать ПТ осей лабораторной ИСО, то ПТ будет описываться выражением (2). К сожалению, далеко не все авторы указывают, что именно прецессирует — спин или оси координат системы отсчета, как задана эта система отсчета и в какой именно системе отсчета регистрируется ПТ. Отсюда и возникает большая часть недоразумений, связанных с ПТ.

Как уже подчеркивалось, во избежание подобных недоразумений в настоящей статье все выражения для ПТ приводятся в лабораторной ИСО и только для релятивистской прецессии спина, которая в отличие от релятивистского вращения осей координат системы отсчета, сопровождающей движение частицы, представляет собой реальное физическое явление, которое можно наблюдать, и его рассмотрение наиболее важно и интересно. В этом случае выражение (2) является некорректным, а (3) — корректным. Докажем это на простом частном примере.

В соответствии с (2) при стремлении скорости элементарной частицы, движущейся по орбите, к скорости света спин частицы начинает совершать бесконечное число оборотов на один оборот частицы по орбите. Это противоречит как здравому смыслу, так и тому известному факту, что спин безмассовой частицы, например фотона (в чистом состоянии), при ее движении в вакууме всегда ориентирован либо по направлению ее движения, либо в противоположном направлении. Если бы выражение (2) было справедливым в лабораторной ИСО, то при движении света по криволинейной (например круговой) траектории спин фотона совершал бы бесконечное число оборотов на один оборот фотона по орбите. Между тем спин фотона совершает всего один оборот на один орбитальный оборот, при этом его направление всегда совпадает с направлением движения фотона, что точно описывается формулой (3). Еще в 1961 г. В.И. Ритус в известной работе [80], ставшей сейчас уже классической, показал, что направление спина фотона всегда совпадает с направлением вектора его скорости. (На этот весьма важный результат [80] первым обратил внимание А. Чакарбарти [84].) В работе [80] также показано, что изменение направления спина частицы с ненулевой массой покоя при ее движении всегда "отстает" от изменения направления ее скорости, что согласуется с выражением (3). Более того, несложные преобразования выражений, полученных в [80], позволяют получить (3) в явном виде. Таким образом, результаты работы В.И. Ритуса [80] прямо подтверждают справедливость выражения (3) для ПТ спина частицы в лабораторной ИСО.

Следует отметить, что в ряде практически важных задач заведомо выполняется условие $v \ll c$ ($\gamma \sim 1$) и выражения (2) и (3) различаются только знаком, что часто не влияет на конечный результат. Этим, по-видимому, можно объяснить, что, как ни удивительно, но до последнего времени никто из исследователей не отметил такого значительного расхождения результатов различных работ. Только после публикации [129] В.Ф. Чуб обратил внимание на данный факт. Действительно, в ультрарелятивистском случае, когда $\gamma \gg 1$, (2) и (3) различаются по абсолютной величине весьма значительно — в γ раз.

⁵ Отметим, что в работе [154], несмотря на некорректный результат, по-видимому, впервые было указано, что в системе отсчета, мгновенно сопровождающей материальную частицу со спином, угловая частота ПТ в γ раз больше, чем в лабораторной ИСО.

Корректное выражение (3) фактически было получено⁶ почти одновременно и независимо в работах В.И. Ритуса [80], Я.А. Смородинского [81, 82] и А. Чакрабартти [84]. Однако, как было отмечено во введении, Смородинский впоследствии признал верным выражение (2) [149]. Поэтому является справедливым именовать корректное выражение (3) выражением Ритуса–Чакрабартти⁷.

Иногда высказывают мнение, что оба выражения (2) и (3) являются корректными в одной и той же системе отсчета при условии их правильной трактовки. Еще раз подчеркнем, что два различных выражения для ПТ, (2) и (3), различающиеся в γ раз, никоим образом не могут привести к одинаковому (корректному или некорректному) результату в одной и той же системе отсчета. Выражение (2) корректно в сопровождающей системе отсчета, а (3) — в лабораторной ИСО.

Однако выражения (2), (3) далеко не единственные варианты представления связи ПТ и угловой скорости вращения. В ряде работ (например в [23, 24, 34, 66–68, 171–177]) рассматриваемое выражение приводится к виду

$$\Omega_T = \frac{[\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}}]}{2c^2}; \quad \Omega_T = 0,5 \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) \omega. \quad (4)$$

Имеются также работы [178–181], в которых соответствующее выражение может быть приведено к виду, аналогичному (4), но с обратным знаком или к отличающемуся от (4) множителем 2 [182]. Отметим, что (4) впервые было получено Я.И. Френкелем в предположении $v \ll c$ в известной работе [23], вышедшей в период между первой и второй публикациями Л.Х. Томаса [1] и [2]. В этом случае в первом порядке по v^2/c^2 выражения (3) и (4) приводят к одному и тому же результату. Оговорку о справедливости (4) при $v \ll c$ приводили также И.Е. Тамм [24], А. Зоммерфельд [34], Х. Крамерс [66] и А.Д. Галанин [68]. Однако впоследствии большинством авторов эта оговорка уже не делалась, что привело к дополнительным недоразумениям.

Используя результаты работы [183] для кругового движения, рассматриваемое там выражение можно привести к виду

$$\Omega_T = -\frac{(\gamma^2 - 1)(\gamma^2 - \gamma + 1)\omega}{(\gamma^2 + 1)\gamma}. \quad (5)$$

В работе [184] дается следующее выражение для ПТ:

$$\Omega_T = -\frac{1}{2}(\gamma^2 - 1)\omega. \quad (6)$$

И наконец выражение, рассматриваемое в [185], можно представить в следующем виде:

$$\Omega_T = 0,5 \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) \left(\frac{\operatorname{artanh} \beta}{\beta}\right)^2 \omega. \quad (7)$$

Близкое к (7) выражение было получено в написанном Г.А. Зайцевым дополнении [186] к русскому переводу монографии М.А. Тоннела [187]:

$$\begin{aligned} d\Phi &= \frac{\operatorname{artanh} \beta}{\beta} \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{[\mathbf{dv} \times \mathbf{v}]}{v^2}; \\ \Omega_T &= \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{\operatorname{artanh} \beta}{\beta} \omega. \end{aligned} \quad (8)$$

Это выражение, которое отличается от (3) множителем, содержащим гиперболический арктангенс, является результатом неверно выбранной параметризации.

Авторы некоторых работ полагают, что даже при $\omega = \text{const}$ частота ПТ изменяется во времени по некоторому закону. Так, в работе [188] приводится следующее выражение для ПТ:

$$\Omega_T = \beta^2 \cos^2(\xi) \omega, \quad (9)$$

где ξ — начальный угол между осью гироскопа и осью, перпендикулярной плоскости орбиты гироскопа. Поскольку под влиянием ПТ угол ξ периодически изменяется во времени (вид зависимости $\xi(t)$ в [188] не рассматривается), то согласно (9) даже при $\omega = \text{const}$ частота ПТ не остается постоянной. Далее автор работы [188] проводит усреднение величины ПТ для случая орбитального движения гироскопа по окружности ($\omega = \text{const}$) и, по его мнению, точное (а не приближенное) среднее значение ПТ соответствует выражению (4).

Авторы сборника задач [189] также фактически приходят к выводу, что величина ПТ периодически изменяется во времени. Окончательное выражение для ПТ в [189] не приводится, однако если довести до конца вычисление из [189], то можно получить

$$\Omega_T = -\frac{\omega(\gamma^2 - 1) \cos^2(\gamma\omega t + v)}{\gamma^2 + (\gamma^2 - 1) \cos^2(\gamma\omega t + v)}, \quad (10)$$

где v — некоторый начальный угол ориентации спина электрона. Физический смысл v в [189] не рассматривается. Авторы работы [189] высказывают предположение, что при $\gamma - 1 \ll 1$ выражение для ПТ с точностью до знака должно совпадать с (2), хотя это не следует из (10). Обратим внимание, что если бы даже такое совпадение имело место, то результат для ПТ в сборнике задач [189], специально составленном для усвоения учебного курса [156], отличался бы знаком от соответствующего результата [156].

Итак, мы имеем десять различных выражений для угловой частоты ПТ, причем последние шесть из них ни при каких условиях не могут считаться корректными.

Отметим, что аналогичные вопросы возникают и в проблеме ВВ [69–74].

2.2. Эксперименты, в ходе которых проявляется прецессия Томаса

Прежде всего отметим, что ПТ невозможно наблюдать в чистом виде, поскольку для того, чтобы макроскопическое тело или материальная частица двигались по криволинейной траектории, необходимо наличие центробежной силы, которая может возникнуть за счет механической связи или гравитационного поля, а в случае, когда тело или частица имеют заряд, — за счет

⁶ В разделе 4 выражение (3) будет выведено несколькими методами и, кроме того, будут рассмотрены причины, приведшие к возникновению ошибки в работах Л.Х. Томаса [2] и Мёллера [78] и соответственно в выражениях (1) и (2).

⁷ В работе Чакрабартти [84], вышедшей на три года позже работы Ритуса [80], выражение (3) записано уже в явном виде.

электрического или магнитного поля. Вследствие этого в реальном случае ПТ — кинематический эффект — будет сопровождаться различными динамическими эффектами. Так, например, если электрон вращается в кулоновском поле ядра атома, то в сопровождающей его движению системе отсчета имеет место магнитное поле, с которым будет взаимодействовать магнитный момент электрона. Если скорость электрона имеет составляющую, параллельную силовым линиям магнитного поля, то он также будет вращаться по круговой траектории, при этом к ПТ добавятся другие эффекты, связанные со взаимодействием магнитного момента электрона с магнитным полем, возникающим из электрического поля ядра в системе отсчета, связанной с электроном [126, 190–193]. В случае, когда электрон движется в произвольных полях [194] или макроскопическое вращающееся тело, имеющее электрическую проводимость, движется в неоднородном магнитном поле [193], ситуация еще более усложняется. При движении механического гироскопа в кардановом подвесе, который с помощью штанги вращается вокруг некоторого центра, величина его прецессии будет зависеть от скорости звука в материале, из которого изготовлен гироскоп. И наконец в случае, когда пробное тело, обладающее механическим моментом, вращается в гравитационном поле, создаваемом большой массой, возникнут еще более сложные дополнительные эффекты, связанные с искривлением пространства вокруг гравитирующей массы [172, 173, 195, 196]. Последний случай, а также влияние механического момента на траекторию пробного тела [197] подробно рассмотрены в обзоре [198]. В случае, если гравитирующая масса вращается относительно ИСО, в выражении ПТ пробного тела появятся дополнительные члены [172, 173, 196, 199], связанные с эффектом общей теории относительности (ОТО) Лензе–Тирринга [200–203]. Отсюда следует, что кинематический подход приводит к достаточно точным результатам, в частности, для случая движения механического гироскопа небольшого размера, вращающегося вокруг достаточно малой невращающейся гравитирующей массы, когда неоднородностью гравитационного поля и искривлением пространства можно пренебречь.

2.2.1. О возможности регистрации прецессии Томаса с помощью механических гироскопов при их орбитальном движении. Насколько нам известно, прямого наблюдения ПТ до сих пор не проводилось. Более сорока лет назад Л. Шифф (Стэнфордский университет, США) предложил эксперимент [172, 173] по обнаружению ПТ, а также двух эффектов ОТО — геодезической прецессии [204] и эффекта Лензе–Тирринга [200–203] — с помощью одноосного механического гироскопа, установленного на искусственном спутнике Земли, который движется по свободной от сноса полярной орбите (эти вопросы подробно обсуждаются в [196]). Работы по созданию и совершенствованию механического гироскопа с соответствующей точностью начиная с 1964 г. непрерывно велись в Стэнфорде [196, 205]. Отметим, что два других эффекта уже зарегистрированы: геодезическая прецессия была обнаружена (а точнее говоря, вычислена в процессе обработки данных астрономических наблюдений за длительный период времени) еще в 1859 г. французским астрономом У. Леверрье на примере прецессии перигелия орбиты Меркурия [206] и позднее получила адекват-

ное объяснение в ОТО [204], а эффект Лензе–Тирринга в 1998 г. зарегистрировали исследователи из NASA и Европы по смещению орбит двух космических аппаратов⁸ на 2 м в год в направлении вращения Земли [210, 211].

2.2.2. Регистрация прецессии Томаса при движении заряженных элементарных частиц со спином в кольцевом накопителе ускорителя. Существует возможность косвенной регистрации ПТ в ходе экспериментов по измерению аномальной части магнитного момента элементарных частиц — лептонов (электронов, позитронов и мюонов), которые проводятся в кольцевом накопителе ускорителя (см. обзор [212] и обзорную часть [213])⁹. Идея этих экспериментов сводится к следующему: при движении по кольцевой траектории элементарной частицы, скорость которой ортогональна силовым линиям магнитного поля, возникают два эффекта — ларморовская прецессия (ЛП) спина частицы и ПТ. Поскольку частица имеет аномальный магнитный момент, который характеризуется множителем Ланде (так называемым g -фактором, $g = 2(1 + a_c)$, где $a_c \ll 1$ — аномальная часть g -фактора), то это приводит к некоторой дополнительной ЛП спина частицы, которая пропорциональна a_c , что и регистрируется в процессе измерений. При этом можно регистрировать изменение резонансной частоты переходов с одного орбитального уровня на другой, связанное с аномальной частью магнитного момента (спин-резонансная методика), или непосредственно измерять дополнительный угол поворота спина (прецессионная методика) [213].

Первые эксперименты с электронами были проведены еще в 1953 г. в Мичиганском университете (США) [215], при этом влияние ПТ на суммарную прецессию спина электронов не принималась во внимание несмотря на то, что по оценкам [213] величина ПТ составляла 40 % от ЛП. В более поздних экспериментах, которые проводились в Мичигане [216, 217] и в ЦЕРНе (Женева, Швейцария) [213] (см. также [212, 218]), скорость частиц была уже ультрарелятивистской и ПТ учитывалась. Далее мы будем следовать работе [213], в которой данный вопрос рассматривается наиболее подробно. Круговая частота ЛП в этом случае составляет

$$\Omega_L = \frac{g}{2} \omega_0; \quad \omega_0 = \frac{eH}{m_0c}, \quad (11)$$

где H — величина магнитного поля в лабораторной ИСО, m_0 — масса покоя, e — заряд электрона, ω_0 — разность частот между соседними уровнями Ландау (Раби–Ландау) [219–221] с различными орбитальными числами. Частота ω_0 не зависит от скорости частицы, в то время как циклотронная частота частицы (частота ее орбитального движения по кольцу) обратно пропорциональна γ -фактору,

$$\omega_c = \frac{\omega_0}{\gamma}. \quad (12)$$

⁸ Идея этого эксперимента была предложена в 1956 г. В.Л. Гинзбургом [207] и значительно позднее Л. Миллером и И. Шапиро [208] (1971 г.) и Р. Ван Паттенном и Ч. Эверитом [209] (1976 г.).

⁹ Существуют и другие методы, например спектроскопические, по измерению аномальной части магнитного момента электронов [214].

Физический смысл соотношения (12) следующий. Циклотронная частота ω_c есть классическая частота движения заряженного тела с конечной массой по кольцевой траектории в магнитном поле, когда сила Лоренца является центростремительной силой. При $v \rightarrow c$ масса частицы и радиус ее орбиты неограниченно возрастают, а ее угловая скорость соответственно уменьшается так, чтобы сила Лоренца по-прежнему равнялась центростремительной силе. Напротив, частота ω_0 есть квантовая частота, задаваемая внешним магнитным полем, которая характеризует некоторое внутреннее вращение элементарной частицы. Последняя в общем случае "размазана" (т.е. находится с равной вероятностью) не только по всей круговой орбите (вследствие чего и не излучает электромагнитное поле на частоте ω_c), но еще и по различным орбитам с различными уровнями энергии. Увеличение энергии частицы приводит только к тому, что она с большей вероятностью начинает занимать все более высокие энергетические уровни, т.е. более высокие орбиты, тогда как расстояния между соседними уровнями, определяются значением энергии $h\omega_0/2\pi$ и остаются примерно эквидистантными¹⁰.

Таким образом, можно утверждать, что при релятивистских скоростях происходит движение заряженной частицы со спином во внешнем магнитном поле с эффективной угловой скоростью ω_0 , а ее реальная угловая скорость ω_c не влияет ни на величину ЛП, ни (как будет показано ниже) на величину ПТ. Это является следствием квантово-механической природы рассматриваемых явлений — ЛП и ПТ для элементарных частиц. Например, известно, что механический момент электрона не может быть следствием его вращения, поскольку, как показывают оценки, для этого потребовалось бы, чтобы линейная скорость поверхности электрона на несколько порядков превышала скорость света. По-видимому, также нельзя отождествлять орбитальное движение электрона с его реальным вращением, вследствие чего в данном случае вместо циклотронной частоты ω_c следует рассматривать частоту ω_0 . Если бы аналогичные эксперименты проводились для движущегося во внешнем магнитном поле миниатюрного макроскопического механического гироскопа, имеющего значительный электрический заряд и, следовательно, магнитный момент, то подобные вопросы не возникли бы: в этом случае существовала бы всего одна реальная угловая скорость, равная циклотронной частоте. Разумеется, такое устройство невозможно разогнать до релятивистских скоростей, и для регистрации ПТ потребовалось бы накапливать связанный с ПТ поворот оси гироскопа в течение очень длительного времени. Кроме того, если бы удалось найти элементарную частицу, имеющую заряд и механический момент, но с нулевым g -фактором, т.е. без магнитного момента, то при ее движении во внешнем магнитном поле не возникала бы ЛП и, следовательно, можно было бы регистрировать ПТ в чистом виде.

¹⁰ В слаборелятивистском случае последнее приближенно выполняется лишь для уровней с достаточно низкой энергией, но для них, как показано в работах Гапонова, М.И. Петелина и В.К. Юлпатова [222, 223], слабозаметная неэквидистантность позволяет создать инверсию населенности уровней, что необходимо, например, для функционирования гиротрона — мазера на циклотронном резонансе [224, 225].

Выражение для угловой скорости (или, что то же самое, для круговой частоты) ПТ спина электрона имеет вид [213]

$$\Omega_T = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \omega_0. \quad (13)$$

Выражение (13) полностью соответствует (3) и связывает ПТ с внутренней частотой частицы ω_0 . Это является естественным, поскольку в данном случае ЛП также связана с частотой ω_0 . Отметим, что в работах [89, 91, 93] выражения для ЛП и ПТ также совпадают с (11) и (13). Далее, следуя [213], для вычисления частоты прецессии спина вычтем из частоты ЛП частоту ПТ:

$$\Omega_s = \Omega_L - \Omega_T = \left(a_e + \frac{1}{\gamma} \right) \omega_0 = a_e \omega_0 + \omega_c. \quad (14)$$

Отметим, что выражение (14) без разделения на лармовскую и томасовскую части было получено впервые в 1955 г. Х. Мендловицем и К. Кейсом [226] и несколько позднее М. Каррасси [227] (см. также [228, 229]). Из выражения (14), в частности, следует, что если магнитный момент заряженной частицы не имеет аномалии, то суммарное воздействие ЛП и ПТ приводит к тому, что спин частицы вращается с циклотронной частотой.

Таким образом, выражение (14), приведенное в классической работе [213], свидетельствует о том, что для частиц без аномалии магнитного момента эксперименты в кольцевом накопителе ускорителя подтверждают корректность выражения (3), в частности, из (3) следует, что при $v \rightarrow c$ спин частицы совершает один оборот на один оборот частицы.

Поскольку циклотронную частоту нетрудно определить, то выражение (14) позволяет с высокой точностью вычислять из результатов эксперимента аномальную часть магнитного момента электронов [212, 213, 216, 217] и мюонов [213].

Итак, можно утверждать, что эксперименты с лептонами, движущимися по кольцевой траектории в ортогональном магнитном поле [212, 213, 216, 217], косвенно подтверждают справедливость выражения (3) для ПТ, но не по отношению к реальной частоте вращения частиц по круговым траекториям — циклотронной частоте ω_c , а по отношению к внутренней частоте частиц ω_0 , поскольку в данном случае имеет место не синхротронное излучение, а излучение, обусловленное квантовыми переходами между соседними уровнями Ландау. С частотой ω_0 связана в данном случае и ЛП спина частиц.

В то же время, поскольку в эксперименте наблюдается прецессия спина частицы, вызванная суммой двух эффектов, ПТ и ЛП, то это дает возможность выбора различных выражений для каждого из этих эффектов при наблюдении лишь условия, чтобы в сумме эти выражения соответствовали (14). Однако приводить все эти выражения нет необходимости, они обсуждаются в работе [230]. Отметим, что в ряде работ (см., например, [231]) рассматривается только суммарная прецессия спина.

В 1959 г. была опубликована известная работа В. Баргмана, Л. Мишеля и В. Телегди [126] (см. также [232]), посвященная рассмотрению движения элементарных заряженных частиц со спином и аномальным магнитным моментом в однородных электрических и

магнитных полях. Результаты [126] получены методом квазиклассического приближения уравнения Дирака с аномальным взаимодействием Паули [233]. Особенность решений [126] (так называемое уравнение Баргмана–Мишеля–Телегди (БМТ)) заключается в том, что величины электрического и магнитного полей в [126] записываются в лабораторной ИСО, а прецессия спина выражается в сопровождающей частицу системе отсчета, которая в некоторых работах (см., например, [234]) именуется системой отсчета Мишеля. Прецессия Томаса в [126] вообще не рассматривается, поскольку уравнения Дирака позволяют получить решение для суммарной прецессии спина частицы без разделения ее на ларморовскую и томасовскую части. В 1962 г. А. Бакри [26] (см. также [27, 235–237], используя результаты [126], полностью перешел к лабораторной ИСО и получил выражения для ЛП и ПТ (в настоящее время эти выражения широко используются (см., например, [154, 238])), которые отличаются от (11) и (13). В этом нет ничего удивительного: А. Бакри в [26] придерживался выражения (2) и, следовательно, вынужден был отказаться от описания прецессии спина выражениями (11), (13), поскольку в противном случае он вынужден был бы признать справедливость (3).

В то же время А. Чакрабартти [89, 91, 93], используя результаты [126], получил выражения для ПТ и ЛП, совпадающие с (11) и (13), и, следовательно, подтвердил адекватность (3). В недавно вышедшей монографии [239] (см. также значительно более раннюю работу [31] некоторых из авторов [239]) этот вопрос рассмотрен очень подробно. В работе [239] методом БМТ были получены формулы для ЛП и ПТ, причем выражение для ЛП совпадает с (11), а выражение для ПТ, если его привести к лабораторной ИСО, совпадает с (3).

Таким образом, результаты экспериментов по измерению прецессии спина трактуются по-разному. Те авторы, которые ошибочно связывают резонансную частоту переходов между орбитальными уровнями электронов в магнитном поле с циклотронной частотой ω_c , описывают ПТ выражением (2) (см., например, [27, 213, 226, 227, 235–237]). Другие авторы, которые связывают резонансную частоту переходов с квантовой частотой $\omega_0 = \omega_c/\gamma$ [89, 91, 93] или корректно используют уравнение БМТ [125, 239], описывают ПТ выражением (3).

Следует отметить, что измерение аномальной части магнитного момента мюонов производилось также и при движении мюонов по винтовой траектории в однородном магнитном поле (на длине траектории 6 м) [234]. При этом влияние ПТ на прецессию спина также учитывалось.

Подводя итоги этого раздела можно заключить, что наиболее предпочтительным является рассмотренный выше метод регистрации ПТ с помощью механических гироскопов при их орбитальном движении, поскольку в экспериментах с заряженными элементарными частицами квантово-механические явления отчасти затрудняют интерпретацию результатов измерений.

3. О мнимых парадоксах и заблуждениях, связанных с рассмотрением прецессии Томаса

Рассмотрение некоторых вопросов, связанных с ПТ (или ВВ), иногда приводит к серьезным недоразумениям,

которые в действительности связаны с неадекватным пониманием ряда сложных аспектов СТО, к которым, в частности, относится и ПТ. Поскольку эти вопросы регулярно обсуждаются в литературе и в ходе дискуссий, мы считаем целесообразным с методической точки зрения рассмотреть основные из этих недоразумений и дать им корректное физическое объяснение. Некоторые из таких недоразумений сформулированы (или легко могут быть сформулированы исходя из оригинальных работ) в виде физических "парадоксов", которые, на первый взгляд, подвергают сомнению справедливость СТО. Как будет показано ниже, в действительности эти "парадоксы" являются мнимыми. Мы выйдем принципиальные ошибки, которые привели к формулировке ряда таких "парадоксов". Приведем здесь три из них¹¹.

1. Парадокс Бакри (сформулирован А. Бакри [26]).

Пусть в ИСО S тело движется прямолинейно с постоянным по величине и направлению ускорением \mathbf{a} . Естественно, в системе S не будет наблюдаться ПТ. Однако в некоторой другой инерциальной системе S' , которая движется со скоростью \mathbf{v} относительно S , причем \mathbf{a} и \mathbf{v} взаимно ортогональны или по крайней мере непараллельны, в соответствии с (2) должна наблюдаться ПТ. А. Бакри исходя из данного парадокса заключает, что выражение (2) несправедливо для прямолинейного движения, но справедливо для криволинейного.

2. Парадокс Неганова.

Этот парадокс, который связан с ВВ, нетрудно сформулировать на основании работ Б.С. Неганова [240–243]. Рассмотрим произвольный треугольник скоростей в случае, когда тело движется относительно некоторой ИСО сначала со скоростью v_1 , потом со скоростью v_2 , а затем со скоростью v_3 , которые образуют треугольник (см. [79, 80]). В конце полного цикла тело возвращается в исходную точку, при этом оно поворачивается на некоторый угол, т.е. имеет место прецессия — в данном случае ВВ. Величина полного поворота тела за один цикл является инвариантом относительно произвольно выбранной ИСО, однако величина локальных поворотов тела в точках, где меняется его скорость, зависит от скорости инерциальной системы, в которой находится наблюдатель. Отсюда автор работ [240–243] делает вывод о нарушении принципа относительности и существовании некоторой избранной ИСО, связанной с "мировым эфиром" или физическим вакуумом, в которой все локальные повороты одинаковы. Таким образом, подвергается сомнению справедливость СТО. Отметим, что поскольку Неганов рассматривает не плавное, а скачкообразное изменение скорости тела, то, строго говоря, этот парадокс касается не только ПТ, а более общего случая — ВВ.

3. Парадокс Мокану.

Этот парадокс был сформулирован А. Унгаром [244] (см. также его работы [245–251]) на основании работы К. Мокану [252] следующим образом: суммарный результат двух последовательных преобразований Лоренца из системы отсчета S в систему S' и затем в систему S'' уже не является преобразованием Лоренца в

¹¹ Отметим, что хотя все эти мнимые парадоксы связаны с применением некорректного выражения (2), однако в качественном отношении, по смыслу, они не изменились бы, если бы их авторы исходили из других выражений для ПТ.

случае, когда скорости движения S' относительно S и S'' относительно S' не параллельны¹². Из этого факта К. Мокану делает вывод о несправедливости СТО и, в частности, электродинамики Максвелла.

Перейдем к рассмотрению скрытых ошибок, которые заключаются в самой постановке данных парадоксов.

Ошибочность парадокса Бакри можно доказать следующим образом. Как показано в [3, 129, 130], ПТ объясняется относительностью понятия криволинейного поступательного движения системы материальных точек. Если в одной ИСО, S , скорости всех точек тела в момент времени t одинаковы, то в другой ИСО, S' , в момент t' при ускоренном движении тела они будут различными. Наличие последнего эффекта свидетельствует о том, что в СТО в отличие от классической механики не существует криволинейного поступательного движения твердого тела. Ошибка Бакри заключается именно в том, что он пытается приписать твердому телу криволинейное поступательное движение в произвольной ИСО.

Отметим, что в случае криволинейного движения скорость твердого тела постоянно меняет свое направление и соответствующим выбором ИСО можно исключить ПТ только в некоторый момент времени. Здесь имеет место аналогия с релятивистским парадоксом Зенона, рассмотренным в нашей работе [9]. Напомним, что если заменить неинерциальную вращающуюся систему отсчета мгновенно сопровождающей ИСО, то результаты соответствующих расчетов демонстрируют отсутствие эффекта Саньяка [6–9], что противоречит здравому смыслу. Ошибочность такого подхода заключается в том, что указанная выше замена некорректна: следует рассматривать множество ИСО, которые сопровождают вращающуюся систему отсчета в различные моменты времени [9]. Если устремить разность временных интервалов между соседними ИСО к нулю и осуществить непрерывный переход от одной ИСО к другой, то можно корректно рассчитать величину эффекта Саньяка. Точно так же моментальное обнуление ПТ с помощью выбора подходящей ИСО приводит к неправильным выводам — здесь также следует рассматривать множество ИСО, которые сопровождают криволинейное движение твердого тела в различные моменты времени. В этом и заключается аналогия между парадоксом Бакри и релятивистским парадоксом Зенона.

Можно дать и другое объяснение парадокса Бакри. Обусловленный ПТ угловой поворот тела можно однозначно вычислить только в том случае, когда оно в процессе кругового или в общем случае эллиптического движения вернется в исходную точку (так называемая циклическая эволюция). В случае, когда траектория тела не является замкнутой, вычисление величины рассматриваемого углового поворота проводится с точностью до некоторой постоянной величины. Некоторая неопределенность при отсутствии циклической эволюции, вообще говоря, характерна для геометрических (топологических) фаз [136, 255–263], к числу которых относится ПТ [129, 130]. Аналогичная ситуация имеет место и для эффекта Ишлинского в классической механике: угол дополнительного, связанного с коническим движением

объекта поворота гирокомпыа строго вычисляется в случае возвращения в исходную точку [131, 132]. В рассматриваемом же Бакри случае равномерно ускоренное тело никогда не возвратится в исходную точку.

Предельно ясное объяснение ошибки Неганова дается в работе А.А. Логунова [28] (см. также его монографии [29, 30]), где рассматривается зависимость величины ПТ от угла между силой, действующей на частицу, и скоростью частицы, причем направление последней зависит от выбора ИСО, в которой находится наблюдатель: "... В том случае, когда сила направлена в некоторой ИСО по направлению скорости частицы, прецессия спина отсутствует. Но параллельность векторов силы \mathbf{F} и скорости \mathbf{v} нарушается даже при галилеевских преобразованиях, не говоря уже о лоренцевских преобразованиях от одной ИСО к другой. Поэтому эффект прецессии, равный нулю для наблюдателя в одной ИСО, будет отличен от нуля для наблюдателя, находящегося в некоторой другой ИСО. Является ли это обстоятельство неравноправностью различных ИСО? Конечно, нет. Все дело в том, что самой постановкой физической задачи мы уже фиксировали класс ИСО тем, что направили действие силы \mathbf{F} вдоль направления скорости движения частицы. Равноправность ИСО имела место до момента выбора ИСО, в которой мы приложили силу \mathbf{F} и направили ее вдоль скорости частицы".

Отметим здесь, что парадокс Бакри и парадокс Неганова тесно связаны: они оба базируются на игнорировании зависимости результатов локальных измерений от ИСО, в которой находится наблюдатель.

Парадокс Мокану объясняется неправильным пониманием его автором преобразований Лоренца, к которым он относит только бусты. Как было показано еще Л. Томасом [1, 2], последовательность непараллельных бустов не является чистым бустом, а содержит еще вращение, которое, однако, является элементом группы Лоренца. Но К. Мокану, причисляя к преобразованиям Лоренца только бусты, делает ошибочный вывод о незамкнутости множества преобразований Лоренца и отсюда — о неверности теории относительности.

Основной вывод из обзора литературы следующий. Ситуация как с теоретическими вычислениями выражения для ПТ, так и с интерпретацией результатов экспериментов по измерению прецессии спина заряженной частицы с аномальным магнитным моментом является сложной и запутанной. Это не могло не сказаться на отношении некоторых исследователей к данной проблеме. Одни, используя не вполне определенную ситуацию, пытаются вывести свои оригинальные, причем, как правило, неадекватные выражения для ПТ, чем еще более осложняют данную проблему. Другие используют эту ситуацию для разработки поражающих на первый взгляд воображение парадоксов, которые, по сути, направлены на дискредитацию СТО. Третьи, более осторожные, вообще обходят вопрос о количественном выражении для ПТ, компенсируя это большим числом громоздких формул, не имеющих прямого отношения к данному вопросу, и пространными качественными рассуждениями (см., например, [118, 244–251, 264–268]). Так, в семи работах А. Унгара [244–250], написанных на довольно высоком научном уровне и занимающих в общей сложности 112 журнальных страниц, и недавно опубликованной обширной монографии [251], подводятся итог его многолетних исследований по вопросам,

¹² Близкие рассуждения приводятся также в работах К. Мокану [253, 254].

связанным с ПТ, ни разу не приводится выражение для ПТ. Лишь в одной [177] из семи работ Н. Салингароса [120–123, 177, 265–267] представлено приближенное выражение (4) для ПТ, которое, как было отмечено в разделе 2.1, справедливо при любом методе рассмотрения данного вопроса.

Между тем уже более сорока лет назад был опубликован ряд работ, в которых дано корректное выражение для ПТ. Некоторые методы расчета, позволяющие получить корректное выражение для ПТ, разработаны еще раньше — более семидесяти лет назад. В разделе 4 мы кратко рассмотрим работы, в которых было получено в явном или неявном виде (или могло бы быть получено при отказе от приближения $v \ll c$) корректное выражение для ПТ (3).

4. Выводы корректного выражения прецессии Томаса

Как было отмечено в разделах 1, 2, корректное выражение для ПТ фактически впервые было получено В.И. Ритусом [80]. В явном виде формула (3) приводится в работах Я.А. Смородинского [82], где используется геометрия Лобачевского в пространстве скоростей, и А. Чакрабартти [84]. А. Зоммерфельд [34], Х. Крамерс [66] и А.Д. Галанин [68] ранее фактически подошли к этому выражению, но, возможно, увидев его несовпадение с формулой Томаса (1) (нельзя также исключить, что их интересовали исключительно вопросы квантовой механики), ограничились лишь первым приближением по v^2/c^2 . Отметим, что в серии работ А. Чакрабартти [84, 89–93] практически был реализован без всяких приближений подход Крамерса. Во всех этих подходах явно или неявно используется векторный (бивекторный) характер углов поворота и бустов в СТО. Автор настоящей статьи пришел к формуле (3), используя теорему Ишлинского.

Очень важно также выяснить причину получения Л.Х. Томасом [2] и К. Мёллером [78] некорректных выражений (1) и (2), поскольку это привело к появлению большого числа ошибочных работ.

4.1. Метод Вигнера – Стаппа – Ритуса

В работах Э. Вигнера [69–73], написанных в период с 1939 г. по 1957 г. (часть этих работ переведена на русский язык [74]), рассмотрено явление, названное впоследствии вращением Вигнера, которое заключается в том, что если частица со спином, имеющая ненулевую скорость, получила дополнительный импульс под прямым углом к прежней скорости, то меняется не только направление ее скорости, но и ориентация спина.

В 1956 г. Г. Стапп [79], используя результаты Вигнера, получил важное уравнение, описывающее поворот спина элементарной частицы для случая, когда ее начальная скорость относительно лабораторной ИСО v_1 претерпевает два скачкообразных изменения — v_2 и v_3 , — но после второго изменения вновь становится равной v_1 . Тогда, разумеется, в отличие от случая орбитального движения, координата частицы в общем случае не возвращается в исходное состояние, но применительно к повороту спина это не имеет значения. В дальнейшем уравнение [79] получило известность как "уравнение треугольника скоростей", но более точным было бы наименование "уравнение для треугольника в пространстве скорос-

тей". Приведем его в обозначениях, принятых в настоящей статье:

$$\sin |\Phi| = |[\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2]| \frac{1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3}{(1 + \gamma_1)(1 + \gamma_2)(1 + \gamma_3)}, \quad (15)$$

где Φ — угол поворота спина частицы после возвращения ее скорости в исходное состояние, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — лоренц-факторы, соответствующие скоростям v_1, v_2, v_3 .

Из уравнения (15) можно получить корректное выражение для ПТ (3), но Стапп, по-видимому, не ставил такой задачи. Однако он нашел соотношения между углами при вершинах треугольника в пространстве скоростей и локальными поворотами спина частицы при каждом изменении ее скорости. Эти соотношения в дальнейшем вызвали ряд недоразумений. Дело в том, что, как было отмечено в разделе 3, только суммарный угол поворота спина после возвращения скорости частицы в исходное состояние является инвариантным при переходе из одной ИСО в другую, величины же локальных углов поворота зависят от ИСО, в которой находится наблюдатель. Непонимание последнего факта привело к возникновению ряда парадоксов, связанных с ПТ (см., например, парадокс Неганова в разделе 3).

Более общий случай данного явления, когда угол между исходной скоростью частицы и дополнительным импульсом является произвольным, был рассмотрен в известной работе В.И. Ритуса [80] (1961 г.). Поскольку, как было отмечено во введении, ПТ является частным случаем ВВ, то, когда величина дополнительного импульса стремится к нулю, а его направление ортогонально к прежней скорости, очевидно, что соответствующие выражения для ВВ в этом, предельном случае должны перейти в корректное выражение для ПТ. К сожалению, ни Э. Вигнер, ни Г. Стапп, ни В.И. Ритус в свое время этот частный случай не рассмотрели, поскольку вопрос о ПТ не входил в широкий круг задач их работ. Авторы ряда работ (см., например, [269]) вообще не связывают ВВ с эффектом ПТ.

Недавно В.И. Ритус по просьбе автора ознакомился с рукописью статьи и проявил интерес к данному вопросу. В частности, он показал, что корректное выражение для ПТ может быть получено из выражений (32) и (36) работы [80]¹³. Здесь же отметим, что работа [80] и по сей день не утратила значения. В частности, ее результаты используются в [271] для расчета релятивистского вращения суммарного спина двух элементарных частиц.

4.2. Метод Я.А. Смородинского (геометрия Лобачевского)

Вычисление, приводящее к выражению (3), впервые доведено до конца Я.А. Смородинским [82], который рассматривает пространство скоростей и показывает (следуя Зоммерфельду), что в СТО оно является пространством Лобачевского. Поэтому треугольники скоростей оказываются псевдосферическими. Рассматривая вращающийся волчок, Смородинский показывает, что поворот оси волчка в первом приближении равен площади треугольника, образованного скоростями волчка в два момента времени: t и $t + dt$, которая, как следует из

¹³ Этот вопрос подробно рассмотрен в работе Ритуса [270].

геометрии Лобачевского, равна

$$\mathbf{S} = \frac{\gamma}{1+\gamma} [\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}] dt. \quad (16)$$

Таким образом, волчок под действием ускорения $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ прецессирует с угловой скоростью

$$\boldsymbol{\Omega}_T = -\frac{\gamma}{1+\gamma} [\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}], \quad (17)$$

откуда следует выражение (3).

4.3. Метод Чакрабарти

Фактически в работах А. Чакрабарти представление преобразований Лоренца шестивектором аналогично методу Крамерса. Однако Чакрабарти начинает с конечных преобразований Лоренца, приводящих к *вращению Вигнера*:

$$R = \Lambda_{(\Delta p)} \Lambda_{(p)}^{-1},$$

где p — 4-импульс частицы, Λ — преобразование Лоренца, а $\Lambda_{(p)}$ — собственное преобразование Лоренца:

$$\Lambda_{(p)} p = (m, 0).$$

Для параметризации преобразований Лоренца Чакрабарти вводит бивектор $J_i = \varepsilon_{ijk} M_{jk}$, $K_i = M_{0i}$ и рассматривает действие преобразований Лоренца на вектор собственного момента \mathbf{S} , приходя при бесконечно малых преобразованиях (за счет ускорения) к формуле

$$\delta \mathbf{S} = \frac{\gamma}{1+\gamma} [\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}}] \times \mathbf{S}, \quad (18)$$

соответствующей выражению (3).

Отметим, что аналогичный вывод адекватного выражения для ПТ проведен В. Бэйлисом [104] и Гамильтоном [105].

4.4. Прецессия Томаса как следствие теоремы Ишлинского

Метод вычисления выражения для ПТ, предложенный автором настоящей статьи [129, 130, 272], основан на доказанной в начале 1950-х годов А.Ю. Ишлинским теореме о телесном угле [131, 132] (см. также [133–136]), которую можно сформулировать следующим образом [135]. Если некоторая ось, выделенная в твердом теле, имеющем три степени свободы, описала в процессе движения тела замкнутую коническую поверхность и проекция угловой скорости тела на эту ось была равна нулю, то после возвращения оси в исходное положение тело оказывается повернутым вокруг нее на угол, численно равный телесному углу описанного конуса. Поступательное движение оси при этом не имеет никакого значения.

В 1959 г. Пенроуз [138] и Террел [137] показали, что световые кванты, пришедшие одновременно к наблюдателю, были испущены различными точками объекта в различное время — точки, расположенные дальше от наблюдателя, испустили кванты раньше, чем более близкие к нему точки. По этой причине возникает эффект компенсации лоренцевского сокращения, и в случае, когда размеры объекта много меньше расстояния до него, изображение объекта выглядит не искаженным, а только повернутым на некоторый угол.

Если объект движется прямолинейно со скоростью v , то выражение, связывающее угол Θ' , задающий некоторое направление на объекте в связанной с объектом системе отсчета, и угол Θ , под которым это направление наблюдается в лабораторной ИСО, определяется известными формулами, описывающими релятивистскую аберрацию, и имеет вид [141, 273]

$$\sin \Theta = \frac{\sqrt{1-v^2/c^2} \sin \Theta'}{1 + (\cos \Theta')(v/c)}. \quad (19)$$

Неподвижный наблюдатель видит объект повернутым на угол аберрации $\Delta\Theta = \Theta - \Theta'$. Пусть объект движется прямолинейно в плоскости, которая ортогональна прямой, соединяющей объект и наблюдателя, а ось, задающая направление, также лежит в данной плоскости, т.е. $\Theta' = 90^\circ$. Исходя из (19) получим

$$\Delta\Theta = \Theta - 90^\circ, \quad \cos(\Delta\Theta) = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\gamma}. \quad (20)$$

Пусть объект движется в рассматриваемой плоскости по круговой траектории, причем по-прежнему $\Theta' = 90^\circ$. Тогда видимое неподвижным наблюдателем направление оси будет изменяться, изображение объекта будет вращаться, и за один оборот объекта ось опишет конус с углом $2\Delta\Theta$ при вершине. Величина телесного угла, заключенного внутри конуса, численно равна площади, ограниченной на сфере единичного радиуса образующей конуса, вершина которого совпадает с центром сферы [274]. Отсюда нетрудно получить выражение, связывающее величину телесного угла Ξ с углом при вершине конуса:

$$\Xi = 4\pi \sin^2\left(\frac{\Delta\Theta}{2}\right) = 2\pi[1 - \cos(\Delta\Theta)] = 2\pi\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right). \quad (21)$$

Из выражения (3) следует, что за один оборот по окружности угол поворота тела вследствие ПТ составит

$$\alpha = 2\pi \frac{\Omega_T}{\omega} = 2\pi\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right). \quad (22)$$

Сравнивая (21) и (22), получим, что $\alpha \equiv \Xi$, т.е. угол поворота тела, обусловленный ПТ, численно равен телесному углу, который согласно теореме Ишлинского описала связанная с твердым телом ось при его движении по круговой траектории в случае, когда реальное изменение угла его ориентации равно изменению наблюдаемого в лабораторной ИСО угла поворота релятивистски движущегося по криволинейной траектории тела. Таким образом, ПТ можно интерпретировать как следствие формального применения теоремы Ишлинского к телесному углу, соответствующему изменению наблюдаемого поворота изображения твердого тела при его движении по криволинейной траектории относительно неподвижного наблюдателя. Это, по-видимому, наиболее простой и наглядный метод вычисления ПТ.

Таким образом, угловая скорость собственного вращения $\omega - \Omega_T$ при стремлении γ к бесконечности уменьшается.

4.5. Анализ причин получения Л.Х. Томасом и К. Мёллером некорректного выражения для прецессии Томаса

В разделе 2.1 мы привели десять различных выражений для ПТ, из которых только одно является корректным.

Подробно проанализировать причины ошибок, приведших к появлению всех некорректных выражений, весьма затруднительно, поскольку это потребовало бы значительного увеличения объема статьи (причины некоторых, наиболее грубых ошибок кратко указаны в разделе 2.1). Наиболее важно выяснить причины получения Л.Х. Томасом [2] и К. Мёллером [78] некорректных выражений (1) и (2), поскольку это привело к возникновению подавляющего большинства ошибочных работ по ПТ (как было отмечено в разделе 2.1, в некоторых работах (2) приводится с обратным знаком, что соответствует выражению (1)).

Прежде всего отметим, что применение теоремы о телесном угле само по себе не гарантирует корректного вычисления выражения для ПТ. Так, в работах [144, 150] этот подход привел к некорректному выражению для ПТ (1). Причина ошибки [144, 150] заключается в том, что авторы указанных работ применили теорему Ишлинского (иногда именуемую теоремой Гамильтона – Ишлинского [136]) для вычислений не в реальном трехмерном пространстве, а в четырехмерном пространстве Минковского. По этой же причине, по-видимому, возникла ошибка и в основополагающей работе Л.Х. Томаса [2], в которой Л.Х. Томас, не приводя промежуточных вычислений, указывает, что он использовал теорему Родригеса – Гамильтона в четырехмерном пространстве Минковского. Поскольку, как показано в нашей работе [136], последняя теорема близка по смыслу к теореме Ишлинского о телесном угле [131, 132], то, вероятно, Л.Х. Томас так же, как и авторы [144, 150], зависил величину ПТ в γ раз и поэтому получил некорректное выражение (1).

Можно предположить, что К. Мёллер, который впервые спустя 25 лет после публикации работы Л.Х. Томаса [2] предпринял попытку вывода точного, без разложения по малому параметру v^2/c^2 , выражения для ПТ [78], стараясь получить близкий результат, пришел к выражению (2), которое отличается от (1) только знаком. Однако, как будет показано ниже, ошибка К. Мёллера имеет другую причину.

Этому вопросу, в частности, посвящена работа В.И. Ритуса [270], подготовленная в настоящее время к печати. Не имеет смысла излагать все результаты работы [270]¹⁴, поскольку читатель сможет в ближайшее время ознакомиться с ней на страницах УФН, однако с любезного разрешения В.И. Ритуса ниже будет кратко сформулирован результат [270], касающийся данного вопроса. Прежде всего отметим, что К. Мёллер в [78] при расчетах ПТ использует три ИСО: S — лабораторная ИСО, S' — мгновенно сопровождающая ИСО, в которой частица со спином покоится в момент времени t , и S'' — мгновенно сопровождающая ИСО, в которой частица покоится в момент времени $t + dt$. Как показано в [270], К. Мёллером не допущено ошибок почти до конца его вычислений, т.е. вплоть до выражения (2.64) в его монографии [78]:

$$\Omega = -(\gamma - 1) \frac{\mathbf{v} \times d\mathbf{v}}{v^2}, \quad (23)$$

где в обозначениях [78] Ω — некоторый вектор, совпадающий с направлением точечного компаса — материальной частицы со спином, причем $|\Omega|$ — угол поворота спина, \mathbf{v} — вектор скорости частицы относительно лабораторной ИСО S . В выражении (23) фигурирует дифференциал вектора скорости частицы $d\mathbf{v}$, который определен К. Мёллером в его монографии [78] как $d\mathbf{v} = \mathbf{w} - \mathbf{v}$, где \mathbf{w} — вектор скорости ИСО S'' относительно ИСО S' . Как показано в [270], если бы К. Мёллер подставил указанную величину $d\mathbf{v}$ в (23) (по нумерации [78] — (2.64)), то он получил бы корректное выражение (3). Однако в дальнейшем К. Мёллер использует другое выражение для дифференциала вектора скорости: $d\mathbf{v} = \mathbf{v} dt$, в результате чего приходит к некорректному выражению (2). Может сложиться впечатление, что К. Мёллер в [78] допустил грубую расчетную ошибку. Однако, как показано в [270], ошибка носит концептуальный характер — в [78] нарушена последовательность переходов из одной ИСО в другую.

Иногда указывают, что К. Мёллер в [78] имел в виду не прецессию спина, а прецессию осей координат системы отсчета, связанной с движущейся частицей. Однако в его монографии [78, с. 45] несколько раз четко указано, что он имеет в виду прецессию оси точечного компаса по отношению лабораторной ИСО.

4.6. Иллюстрации кинематики прецессии Томаса

Рассмотрим чисто иллюстративный пример, соответствующий выражению (3), который наглядно демонстрирует, что ПТ может рассматриваться как проявление эффекта релятивистского замедления времени при движении по круговой орбите объекта, имеющего выделенную ось, которая сохраняет свою ориентацию в пространстве при $v \ll c$. Пусть по круговой траектории радиусом R с центром в точке O вращается против часовой стрелки с орбитальной угловой скоростью ω штанга длиной R , к которой прикреплены часы, имеющие малый по сравнению с R размер (рисунок). Поэтому

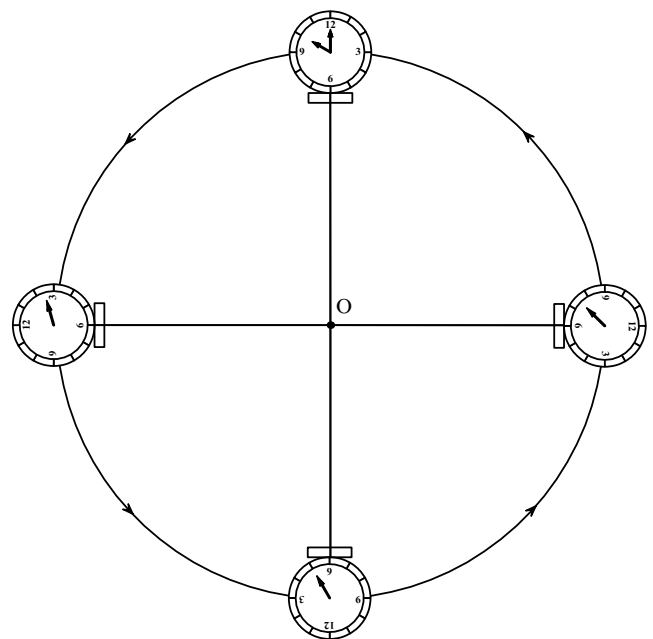


Рис. Изображение орбитального движения часов со скоростью $v \sim 0,55c$ ($\gamma = 6/5$).

¹⁴ Наиболее интересным результатом [270], с нашей точки зрения, является нахождение выражений для прямой связи параметров вращения Вигнера и ПТ.

основание часов всегда обращено к точке О. Ход часов регулируется таким образом, чтобы часовая стрелка совершала полный оборот за время $T = 2\pi/\omega$, т.е. стрелка вращается с угловой скоростью ω .

В случае, когда орбитальная скорость часов $v = R\omega$ существенно меньше скорости света, $\gamma - 1 \ll 1$, очевидно, что в каждый момент времени стрелка часов будет указывать на постоянное направление в пространстве, поэтому ее можно, в принципе, рассматривать как пространственный компас.

На рисунке изображено орбитальное движение часов для случая $\gamma = 6/5$, когда величина $v = R\omega$ сравнима со скоростью света. Из-за релятивистского замедления времени часы "отстают", вследствие чего, с точки зрения наблюдателя, находящегося в инерциальной лабораторной ИСО, часовая стрелка по мере движения часов по круговой орбите поворачивается вперед по ходу движения. За один оборот часов стрелка отклонится от первоначального положения на угол $2\pi(1 - 1/\gamma)$. В начальный момент стрелка часов указывала на "12" (см. рис.), т.е. находилась в вертикальном положении. После одного оборота часов вследствие релятивистского замедления времени часы "отстают" на 2 часа и стрелка указывает на "10", т.е. стрелка повернулась в направлении орбитального движения часов на угол 60° .

В гипотетическом случае $v = R\omega = c$ с точки зрения наблюдателя, находящегося в инерциальной лабораторной ИСО, часы останавливаются. В этом случае стрелка совершает один оборот в течение одного оборота часов по орбите и угол между стрелкой и траекторией часов остается постоянным. В частности, если в начале мысленного эксперимента стрелка была направлена по касательной к орбите, то она всегда будет оставаться в таком положении. Точно таким же образом ведет себя и спин фотона при его движении по криволинейной траектории. Как известно [275, 276], он всегда направлен либо вперед по движению (для правоциркулярных фотонов), либо назад (для левоциркулярных фотонов).

4.7. О влиянии прецессии Томаса на энергию и излучение материальной частицы со спином

Впервые то, что ПТ не приводит к изменению энергии электрона, было показано еще И.Е. Таммом [24]. В недавно вышедшей монографии [239] рассмотрен вопрос о том, является ли ПТ источником релятивистского электромагнитного излучения¹⁵. Ответ на этот вопрос не столь очевиден, так как члены, соответствующие ПТ, входят в суммарную мощность излучения электрона и его собственного магнитного момента. Данная задача в [239] рассматривается как с точки зрения классической теории излучения, так и с точки зрения квантовой теории смешанного излучения, причем оба решения полностью согласуются. Результаты проведенного в [239] анализа показывают, что ПТ не может рассматриваться как источник мощности релятивистского излучения. Следует учитывать, что наличие спина у электрона должно приводить к незначительной поправке к массе электрона [72], что должно незначительно влиять на мощность излучения. Но, как показано в [24, 239], сама ПТ никакого вклада в эффективную массу электрона не дает и, следовательно, ПТ как

релятивистский кинематический эффект никоим образом не может влиять на мощность излучения.

5. Заключение

Сформулируем основные результаты статьи. Вопрос о ПТ является отнюдь не простым: существует большое число различных выражений для ПТ (см. (1)–(10)). Кроме того, одно и то же выражение может интерпретироваться и корректно, и некорректно, в зависимости от того, в какой системе отсчета проводится вычисление ПТ и прецессия чего именно рассматривается — спина элементарной частицы (оси механического гироскопа) или осей координат связанной с частицей системы отсчета, а также от того, как задана эта система отсчета и по отношению к чему она прецессирует. Для определенности нами предложено всегда рассматривать ПТ спина элементарной частицы или оси механического гироскопа в лабораторной (неподвижной) ИСО. В этом случае нами показано, что корректным является выражение (3). Соответствующие эксперименты только косвенно позволяют подтвердить адекватность выражения (3), поскольку измерялась сумма ПТ и ЛП. Этим и объясняется, почему до сих пор оставалось неясным, какое из многочисленных выражений для ПТ является корректным. Небольшое число корректных работ В.И. Ритуса, Я.А. Смородинского, А. Чакрабарти, В. Бэйлиса, Д. Гамильтона, В.А. Бордовицына и С.В. Сорокина, М. Стрэндберга, Г.Б. Малыкина и Г.В. Пермитина [3, 80–84, 89–93, 104, 105, 125, 127, 129, 130] просто оказалось незамеченным на фоне нескольких сотен некорректных работ. По-видимому, большинство авторов при выводе выражения для ПТ ориентировалось на некорректное выражение для ПТ (2) из монографии К. Мёллера [78]. Отрицательную роль здесь сыграло и то обстоятельство, что в своих более поздних работах Я.А. Смородинский [149] фактически отказался от полученного им ранее в [81–83] выражения (3) и пришел к выражению из [78].

Основной результат статьи заключается в том, что нам удалось показать, что выражение (3) может быть получено, как минимум, четырьмя независимыми методами. Выяснена также причина, которая привела к появлению ошибки в основополагающей работе Л.Х. Томаса [2]. Кроме того, результаты новой работы В.И. Ритуса [270] выявляют причину возникновения в монографии К. Мёллера [78] ошибки, приведшей к некорректному выражению (2), на которое ориентировалось большинство авторов работ по ПТ. Вообще говоря, значение основополагающей работы В.И. Ритуса [80] для изучения вопросов, связанных ПТ и ВВ, трудно переоценить. Сразу же после опубликования [80] в 1960-е годы ее результаты применялись на практике наиболее продвинутыми исследователями. Так, А. Чакрабарти в важнейшей работе [84], в которой было получено корректное выражение для ПТ, использует результаты [80] по ПТ спина безмассовых частиц. К сожалению, многие исследователи либо не поняли результаты работы [80], либо вообще не были с ней знакомы. Можно утверждать, что это и послужило причиной появления большого числа некорректных работ по ПТ.

То, что вопрос о ПТ не является простым, говорит и история его возникновения и решения, рассказанная самим Л. Томасом в предисловии к работе [278]:

¹⁵ Ранее этот вопрос рассматривался в работах Ю. Швингера [176, 277].

"Я должен пояснить, как я впервые начал работать над проблемой вращающегося электрона.

Попробую рассказать, что я знал и делал очень давно. Надеюсь, что в своем рассказе смогу придерживаться именно того отрезка времени. Я хочу объяснить, что я знал тогда и как незначительны были мои знания.

Начну рассказ с того, что летом 1924 года я окончил Кембридж (Англия), получив блестящие оценки на экзамене по математике с особым отличием по прикладной математике. По результатам этих экзаменов я был удостоен аспирантской стипендии.

Моим научным руководителем в течение первого года аспирантуры был Р.Х. Фаулер, который формально не был профессором. Этот первый год он провел в лаборатории Бора в Копенгагене, а я в это время занимался своей собственной работой по различным проблемам квантовых теорий на основе принципа соответствия Бора.

В конце года Фаулер устроил так, что я смог отправиться в Копенгаген в 1925–1926 году для работы в лаборатории Бора. Это было очень интересное время. Это был год, когда Шрёдингер, Гейзенберг и Дирак начали разрабатывать современную квантовую механику, в которой я в то время ничего не понимал, так как каких-либо статей по этому вопросу еще не существовало. Мои знания ограничивались более ранними работами Бора, особенно его теорией о спектре атомов водорода, согласно которой атомные состояния являются стационарными, кроме случая взаимодействия с излучением в соответствии с законом Планка. Далее последовало утверждение Зеемана, что линии поглощения в магнитном поле расщепляются, и теория Бора была распространена Зоммерфельдом на теорию относительности. Фок и Хартри получили радиальные волновые функции, определяющие спектры более сложных атомов.

Моя работа по спину была чистой случайностью. Гаудсмит и Уленбек¹⁶ только что высказали идею о спине и послали доктору Бору свою работу, из которой следовало, что электрон должен иметь свой собственный угловой момент. Бор и Крамерс как раз перед Рождеством обсуждали этот вопрос и пришли к выводу, что в действительности это не работает, так как для обнаруженного эффекта Зеемана нужно иметь в два раза больший угловой момент спина, чем для частиц в отсутствие магнитного поля. Это — аномальный эффект Зеемана, и структура спектра водорода не подходила ни под какое значение углового момента спина электрона.

Я, будучи довольно дерзким молодым человеком, в присутствии Бора сказал: "Почему бы кому-нибудь не просчитать это с релятивистской точки зрения?" Крамерс, который был знаком с более ранними работами де Ситтера¹⁷ о движении Луны, ответил: "Релятивистская поправка будет очень маленькой. Ты можешь этим заняться, я не буду". В те же выходные я стал над этим работать. У меня было то преимущество, что я посещал лекции Эддингтона¹⁸ по теории относительности и знал, как просчитать все математически. Я обнаружил, что

если смотреть по изменению направления оси вращения электрона, то должен быть очень значительный релятивистский эффект фактически в два раза. Сразу же после тех рождественских праздников я пришел с этой идеей и формулой к Крамерсу и Бору. Бор настоял на том, чтобы заметка с этим результатом была послана в журнал *Nature*¹⁹. Эта заметка, которая была моей второй или третьей статьей, была опубликована в апрельском номере *Nature* за 1926 год.

Я не был знаком с работами очень многих людей. Формула де Ситтера, которую я использовал, была теоретической релятивистской поправкой к классической теории движения Луны, для которого, как и сказал Крамерс, эта поправка действительно очень мала. Формула де Ситтера упоминается и описывается в книге Эддингтона, и это единственное, что я знал о ней. Книга Эддингтона в то время была только что издана. Только позднее я узнал, что де Ситтер вообще имеет к этому какое-то отношение. Идея спина почти в точности повторяет ту, которая была предложена Гаудсмитом и Уленбеком. Ранее, за год или два, она была высказана Кронигом²⁰, но Паули ее отверг, сказав, что все это чепуха. И Крониг больше к ней не возвращался. Такое действительно встречается очень часто. Людям старшего поколения трудно менять свои представления. Если кто-то выходит с новой идеей, то очень велика вероятность того, что к ней отнесутся с пренебрежением и отвергнут. Не позволяйте обмануть себя таким образом. Мне повезло, что я работал в лаборатории Бора, а Бор и Крамерс не были похожи на остальных.

Моя полная статья по этому вопросу была опубликована в январе 1927 года в журнале *Philosophical Magazine*²¹ уже после выхода начальных работ Дирака, Гейзенберга и Шрёдингера. В то время я не понял ни единого слова из их работы по квантовой механике. Того скудного понимания квантовой механики, которое у меня есть сейчас, я достиг только благодаря тому, что мне пришлось читать по ней лекции в 8 часов утра. У бедных аспирантов не было другого времени, так как почти все их время было посвящено обучению младших студентов".

Л.Х. Томас отмечает, что сначала аналогичный эффект начал изучаться в ОТО (см., например, [287]).

Отметим, что интерес к ПТ, помимо самого Л.Х. Томаса, в различное время проявляли Я.И. Френкель, И.Е. Тамм, А. Зоммерфельд, Х. Крамерс, Г. Хёнль, Х. Баба, А.Д. Галанин, А. Папапетроу, В.Л. Гинзбург, Г. Голдстейн, Н. Рамсей, К. Мёллер, Д. Бом, М.А. Тоннела, В.И. Ритус, Дж. Джексон, Я.А. Смородинский, И.Ю. Кобзарев, Я. Ааронов, Ч. Мизнер, К. Торн и Дж. Уилер, В.Б. Берестецкий, Е.М. Лифшиц и Л.П. Питаевский, А.А. Логунов.

Я благодарен памяти моей матери Х.Г. Озеранер (02.07.1919–02.12.2004), побудившей меня заняться этой интереснейшей физической проблемой.

Автор особо признателен В.И. Ритусу за подробное обсуждение работы [80], а также за возможность ознакомиться с результатами его работы [270] до ее опубликования и Н.Б. Нарожному за ряд полезных замечаний, позволивших существенно улучшить изложение мате-

¹⁶ [279, 280] (см. также [281, 282]). (Здесь и далее примечание Г.Б.М.)

¹⁷ [283].

¹⁸ [284].

¹⁹ [1].

²⁰ Еще до Р. Кронига идею существования спина у электрона высказали М. Абрагам [285] и А. Комптон [286].

²¹ [2].

риала и избежать ряда неточностей. Автор выражает благодарность Вл.В. Кочаровскому и Г.В. Пермитину за обсуждение результатов статьи, А.А. Логунову, Б.С. Неганову, А. Чакрабарти (А. Chakrabarti, Франция) и В.Ф. Чубу за обсуждение ряда вопросов, связанных с ПТ, В.Л. Гинзбургу за внимание к работе, М.И. Петелину за обсуждение ряда вопросов, связанных с движением релятивистских электронов в магнитном поле, Л.Г. Козиной за перевод воспоминаний Л.Х. Томаса на русский язык, П.А. Хандохино, П. Глорье и П. Мора (Р. Glogieux, Р. Mora, Франция), сотрудникам научных библиотек Института прикладной физики РАН, Научно-исследовательского радиотехнического института, Научно-исследовательского физико-технического института Нижегородского государственного университета и электронной библиотеки механико-математического факультета МГУ за помощь в поиске ряда работ, В.И. Поздняковой за помощь в работе. Работа частично поддержана грантами совета при Президенте РФ по поддержке ведущих научных школ НШ-1622.2003.2. и НШ-7738.2006.2.

Список литературы

1. Thomas L H *Nature* **117** 514 (1926)
2. Thomas L H *Philos. Mag. Ser. 7* **3** 1 (1927)
3. Малыкин Г Б, Пермитин Г В "Томасовская прецессия", в кн. *Физическая энциклопедия* (Гл. ред. А М Прохоров) Т. 5 (М.: Большая Российская энциклопедия, 1998) с. 123
4. Jackson J D *Classical Electrodynamics* (New York: Wiley, 1962) [Джексон Дж *Классическая электродинамика* (М.: Мир, 1965)]
5. Sakurai J J, Tuan S F *Modern Quantum Mechanics* 2nd ed. (Ed. S F Tuan) (Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1994) p. 304
6. Малыкин Г Б *УФН* **167** 337 (1997)
7. Малыкин Г Б *УФН* **170** 1325 (2000)
8. Андропова И А, Малыкин Г Б *УФН* **172** 849 (2002)
9. Малыкин Г Б *УФН* **172** 969 (2002)
10. Anandan J *Phys. Rev. D* **24** 338 (1981)
11. Mashhoon V *Phys. Rev. Lett.* **61** 2639 (1988)
12. Schiff L I *Quantum Mechanics* 2nd ed. (New York: McGraw-Hill, 1955) [Шифф Л *Квантовая механика* (М.: ИЛ, 1959)]
13. Binder V "Berry's phase and fine structure", <http://www.quantics.com/alfa137MN6.pdf> (2002) (not published)
14. Vigoureux J-M *J. Opt. Soc. Am. A* **9** 1313 (1992)
15. Vigoureux J M, Grossel Ph *Am. J. Phys.* **61** 707 (1993)
16. Vigoureux J-M, van Labeke D *J. Mod. Opt.* **45** 2409 (1998)
17. Monzón J J, Sánchez-Soto L L *J. Opt. Soc. Am. A* **16** 2013 (1999)
18. Monzón J J, Sánchez-Soto L L *J. Opt. Soc. Am. A* **16** 2786 (1999)
19. Han D, Hardekopf E E, Kim Y S *Phys. Rev. A* **39** 1269 (1989)
20. Rodríguez V D, Barrachina R O *Phys. Rev. A* **62** 062716 (2000)
21. Mathur H *Phys. Rev. Lett.* **67** 3325 (1991)
22. Shankar R, Mathur H *Phys. Rev. Lett.* **73** 1565 (1994)
23. Frenkel J Z. *Phys. Z.* **37** 243 (1926) [Френкель Я И *Собрание избранных трудов* Т. 2 (М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1958) с. 460]
24. Tamm I Z. *Phys. Z.* **55** 199 (1929) [Тамм И Е *Собрание научных трудов* Т. 2 (М.: Наука, 1975) с. 5]
25. Thomsen G *Math. Z.* **29** 96 (1928)
26. Vacry H *Nuovo Cimento* **26** 1164 (1962)
27. Vacry H *Ann. Phys. Ser. 3* (Paris) **8** 197 (1962)
28. Логунов А А, Препринт № 98-85 (Протвино: ГИЦ РФ ИФВЭ, 1998)
29. Логунов А А *Лекции по теории относительности* (М.: Наука, 2002)
30. Логунов А А *Апри Пуанкаре и теория относительности* (М.: Наука, 2004)
31. Багров В Г, Бордовицын В А *Изв. вузов. Физика* (2) **67** (1980)
32. Тернов И М, Бордовицын В А *УФН* **132** 345 (1980)
33. Ternov I M, Bordovitsyn V A *Ann. Phys. Ser. 7* (Leipzig) **39** 295 (1982)
34. Sommerfeld A *Atombau und Spektrallinien* Bd. 1 (Braunschweig: F. Vieweg&Sohn, 1931) s. 707 [Зоммерфельд А *Строение атома и спектры* Т. 1 (М.: ГИТТЛ, 1956) с. 579]
35. Mathisson M Z. *Phys.* **67** 826 (1931)
36. Mathisson M Z. *Phys.* **69** 389 (1931)
37. Mathisson M *Math. Ann.* **107** 400 (1932)
38. Mathisson M *Acta Phys. Pol.* **6** 163 (1937)
39. Mathisson M *Acta Phys. Pol.* **6** 218 (1937)
40. Mathisson M *Proc. Camb. Philos. Soc.* **36** 331 (1940)
41. Bielecki A, Mathisson M, Weysenhoff J W *Bull. Int. Acad. Pol. Sci. Lett. Cl. Sci. Math. Natur A* **22** (1939)
42. Lubanski J *Acta Phys. Pol.* **6** 356 (1937)
43. Lubanski J K *Physica* **9** 310 (1942)
44. Weysenhoff J, Raabe A *Acta Phys. Pol.* **9** 7 (1947)
45. Weysenhoff J, Raabe A *Acta Phys. Pol.* **9** 19 (1947)
46. Weysenhoff J *Acta Phys. Pol.* **9** 26 (1947)
47. Weysenhoff J *Acta Phys. Pol.* **9** 34 (1947)
48. Weysenhoff J *Acta Phys. Pol.* **9** 46 (1947)
49. Sredniawa B *Acta Phys. Pol.* **9** 98 (1948)
50. Bhabha H J, Corben H C *Proc. R. Soc. London Ser. A* **178** 273 (1941)
51. Bhabha H J *Nature* **145** 819 (1940)
52. Bhabha H J *Phys. Rev.* **59** 100 (1941)
53. Corben H C *Nuovo Cimento* **20** 529 (1961)
54. Corben H C *Phys. Rev.* **121** 1833 (1961)
55. Hönl H, Papapetrou A Z. *Phys.* **112** 512 (1939)
56. Horváth J I *Acta Phys. Hung.* **4** 171 (1954)
57. Nagy K *Acta Phys. Hung.* **7** 325 (1957)
58. Bohm D, Vigier J-P *Phys. Rev.* **109** 1882 (1958)
59. Takabayasi T *Nuovo Cimento* **7** 118 (1958)
60. Halbwachs F, Hillion P, Vigier J-P *Nuovo Cimento* **10** 817 (1958)
61. Halbwachs F *Nuovo Cimento* **36** 832 (1965)
62. Good R H (Jr.) *Phys. Rev.* **125** 2112 (1962)
63. Nyborg P *Nuovo Cimento* **23** 47 (1962)
64. Yamasaki H *Prog. Theor. Phys.* **31** 322 (1964)
65. Dixon W G *Nuovo Cimento* **38** 1616 (1965)
66. Kramers H A *Physica* **1** 825 (1934); see also Kramers H A *Collected Scientific Papers* (Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1956) p. 683
67. Kramers H A *Quantum Mechanics* (Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1958) p. 234
68. Galanin A D *J. Phys. USSR* **6** 35 (1942)
69. Wigner E P *Ann. Math.* **40** 149 (1939)
70. Wigner E P Z. *Phys.* **124** 665 (1948)
71. Bargmann V, Wigner E P *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **34** 211 (1948)
72. Newton T D, Wigner E P *Rev. Mod. Phys.* **21** 400 (1949)
73. Wigner E P *Rev. Mod. Phys.* **29** 255 (1957)
74. Wigner E P *Symmetries and Reflections: Scientific Essays* (Cambridge, Mass.: MIT Press, 1970) [Вигнер Э *Инвариантность и законы сохранения* (М.: Едиториал УРСС, 2002)]
75. Ginzburg V L J. *Phys. USSR* **8** 33 (1944)
76. Гинзбург В Л *Труды ФИАН* **3** (2) 193 (1946)
77. Гинзбург В Л, Тамм И Е *ЖЭТФ* **17** 227 (1947); см. также Тамм И Е *Собрание научных трудов* Т. 2 (М.: Наука, 1975) с. 205
78. Møller C *The Theory of Relativity* (Oxford: Clarendon Press, 1952, 2nd ed. 1972) [Мёллер К *Теория относительности* (М.: Атомиздат, 1975)]
79. Stapp H P *Phys. Rev.* **103** 425 (1956)
80. Ригус В И *ЖЭТФ* **40** 352 (1961)
81. Смородинский Я А *ЖЭТФ* **43** 2217 (1962)
82. Смородинский Я А *Атомная энергия* **14** 110 (1963)
83. Smorodinskij Ya A *Fortschr. Phys.* **13** 157 (1965)
84. Chakrabarti A J. *Math. Phys.* **5** 1747 (1964)
85. Chakrabarti A J. *Math. Phys.* **12** 1813 (1971)
86. Chakrabarti A J. *Math. Phys.* **12** 1822 (1971)
87. Vacry A, Nuyts J *Nuovo Cimento* **37** 1702 (1965)
88. Balog J, Hráskó P *Found. Phys.* **11** 873 (1981)
89. Chakrabarti A J. *Thèse: L'Univ. Paris Ser. A* (102) (1965)
90. Chakrabarti A, Preprint No. A.71.1165(11) (Paris: Centre de Physique Theoretique de l'Ecole Polytechnique, 1965)
91. Chakrabarti A *Nuovo Cimento A* **43** 576 (1966); **5** 511 (1971)
92. Chakrabarti A, Preprint No. A.767.0187 (Palaiseau: Centre de Physique Theoretique de l'Ecole Polytechnique, 1987)
93. Chakrabarti A *Fortschr. Phys.* **36** 863 (1988)
94. Chakrabarti A *Nuovo Cimento* **18** 617 (1960)
95. Chakrabarti A *Nuovo Cimento A* **46** 604 (1968)
96. Chakrabarti A J. *Math. Phys.* **4** 1215 (1963)
97. Chakrabarti A J. *Math. Phys.* **4** 1223 (1963)
98. Chakrabarti A J. *Math. Phys.* **7** 949 (1966)

99. Chakrabarti A, Darzens C *Phys. Rev. D* **8** 586 (1973)
100. Dirac P A M *Proc. R. Soc. London Ser. A* **117** 610 (1928)
101. Dirac P A M *Proc. R. Soc. London Ser. A* **118** 351 (1928)
102. Foldy L L, Wouthuysen S A *Phys. Rev.* **78** 29 (1950)
103. de Vries E *Fortschr. Phys.* **18** 149 (1970)
104. Baylis W E *Am. J. Phys.* **48** 918 (1980)
105. Hamilton J D *Can. J. Phys.* **59** 213 (1981)
106. Payne W T *Am. J. Phys.* **20** 253 (1952)
107. Payne W T *Am. J. Phys.* **23** 526 (1955)
108. Payne W T *Am. J. Phys.* **27** 318 (1959)
109. Berg R A *J. Math. Phys.* **6** 34 (1965)
110. Kronsbein J *Am. J. Phys.* **35** 335 (1967)
111. Hestenes D *J. Math. Phys.* **8** 798 (1967)
112. Hestenes D *J. Math. Phys.* **8** 809 (1967)
113. Hestenes D *Am. J. Phys.* **39** 1013 (1971)
114. Terno D R *Phys. Rev. A* **67** 014102 (2003)
115. Vargas J G *Found. Phys.* **16** 1231 (1986)
116. Clifford W K *Am. J. Math.* **1** 350 (1878)
117. Clifford W K *Mathematical Papers by William Kingdon Clifford* (Ed. R Tucker) (London: MacMillan, 1882) paper XLIII
118. Urbantke H *Am. J. Phys.* **58** 747 (1990)
119. Salingaros N *J. Math. Phys.* **22** 226 (1981)
120. Ilamed Y, Salingaros N *J. Math. Phys.* **22** 2091 (1981)
121. Salingaros N *J. Math. Phys.* **23** 1 (1982)
122. Salingaros N, Dresden M *Adv. Appl. Math.* **4** 1 (1983)
123. Froelich J, Salingaros N *J. Math. Phys.* **25** 2347 (1984)
124. Baylis W E, Jones G J *Math. Phys.* **29** 57 (1988)
125. Бордовицын В А, Сорокин С В *Изв. вузов. Физика* (8) 125 (1983)
126. Bargmann V, Michel L, Telegdi V L *Phys. Rev. Lett.* **2** 435 (1959)
127. Strandberg M W P *Am. J. Phys.* **54** 321 (1986)
128. Strandberg M W P *Phys. Rev. A* **34** 2458 (1986)
129. Малыкин Г Б *УФН* **169** 585 (1999)
130. Малыкин Г Б *ПММ* **63** 775 (1999)
131. Ишлинский А Ю *Механика специальных гироскопических систем* (Киев: Изд-во АН УССР, 1952)
132. Ишлинский А Ю *Механика гироскопических систем* 2-е изд. (М.: Изд-во АН СССР, 1963)
133. Жбанов Ю К, Журавлев В Ф *Изв. АН СССР Сер. Механика тв. тела* (1) 9 (1978)
134. Журавлев В Ф *ПММ* **60** 323 (1996)
135. Журавлев В Ф *Основы теоретической механики* (М.: Физматлит, 1997)
136. Малыкин Г Б, Харламов С А *УФН* **173** 985 (2003)
137. Terrell J *Phys. Rev.* **116** 1041 (1959)
138. Penrose L *Proc. Camb. Philos. Soc.* **55** (1) 137 (1959)
139. Weisskopf V F *Physics in Twentieth Century* (Cambridge, Mass.: MIT Press, 1972) [Вайскопф В *Физика в двадцатом столетии* (М.: Атомиздат 1977)]
140. Болотовский Б М, в сб. *Эйнштейновский сборник 1980–1982* (Под ред. И Ю Кобзарева) (М.: Наука, 1985) с. 142
141. Болотовский Б М, в сб. *Эйнштейновский сборник 1986–1990* (Под ред. И Ю Кобзарева) (М.: Наука, 1990) с. 279
142. Field J, in *Fundamental Problems of High Energy Physics and Field Theory: Proc. of the XX Workshop on High Energy Physics and Field Theory, Russia, Protvino, June 24–26, 1997* (Eds I V Filimonova, V A Petrov) (Protvino: ИИЯИ, 1997) p. 214
143. Ben-Menahem S *J. Math. Phys.* **27** 1284 (1986)
144. Rhodes J A, Semon M D *Am. J. Phys.* **72** 943 (2004)
145. Рытов С М *ДАН СССР* **18** 263 (1938)
146. Рытов С М *Труды ФИАН СССР* **2** (1) 41 (1940)
147. Владимирский В В *ДАН СССР* **31** 222 (1941)
148. Кобзарев И Ю, в кн. *Физическая энциклопедия* (Гл. ред. А М Прохоров) Т. 3 (М.: Большая Российская энциклопедия, 1992) с. 493
149. Смородинский Я А, в кн. *Эйнштейновский сборник 1971* (Под ред. И Е Тамма, Г И Наана) (М.: Наука, 1972) с. 272
150. Пермитин Г В, Смирнов А И *ЖЭТФ* **119** 16 (2001)
151. Jackson J D *Classical Electrodynamics* 2nd ed. (New York: Wiley, 1975)
152. Jackson J D *Classical Electrodynamics* 3rd ed. (New York: Wiley, 1999)
153. Rohrlich F *Ann. Phys.* (New York) **22** 169 (1963)
154. Farago P S *Adv. Electron. Electron Phys.* **21** (1) 1 (1965)
155. Cushing J T *Am. J. Phys.* **35** 858 (1967)
156. Misner C W, Thorne K S, Wheeler J A *Gravitation* (San Francisco: W.H. Freeman, 1973) [Мизнер Ч, Торн К, Уилер Дж *Гравитация* Т. 1 (М.: Мир, 1977) с. 222]
157. Goedecke G H *Am. J. Phys.* **46** 1055 (1978)
158. Ben-Menahem A *Am. J. Phys.* **53** 62 (1985)
159. Nicolici H *Phys. Rev. A* **61** 032109 (2000)
160. Чуб В Ф *Изв. РАН. Сер. Механика тв. тела* (6) 3 (2002)
161. Садыков Н Р *ТМФ* **135** 280 (2003)
162. Садыков Н Р *ТМФ* **139** 491 (2004)
163. Zatkis H *J. Franklin Inst.* **269** 268 (1960)
164. Weihofen W H *Am. J. Phys.* **43** 39 (1975)
165. Hestenes D *J. Math. Phys.* **15** 1768 (1974)
166. Rowe E G P *Eur. J. Phys.* **5** 40 (1984)
167. Browne P F J *J. Phys. A: Math. Gen.* **10** 727 (1977)
168. Farach H A et al. *Am. J. Phys.* **47** 247 (1979)
169. Вергелес С Н *Лекции по теории гравитации* (М.: Изд-во МФТИ, 2001) с. 148
170. Ефремов А П *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике* (1) 119 (2004)
171. Ramsey N F *Phys. Rev.* **90** 232 (1953)
172. Schiff L I *Phys. Rev. Lett.* **4** 215 (1960)
173. Schiff L I *Nuovo Cimento* **17** 124 (1960)
174. Furry W H *Am. J. Phys.* **23** 517 (1955)
175. MacKenzie K R *Am. J. Phys.* **40** 1661 (1972)
176. Schwinger J *Am. J. Phys.* **42** 510 (1974)
177. Salingaros N *J. Math. Phys.* **25** 706 (1984)
178. Inglis D R *Phys. Rev.* **50** 783 (1936)
179. Dancoff S, Inglis D R *Phys. Rev.* **50** 784 (1936)
180. Farago P S *Am. J. Phys.* **35** 246 (1967)
181. Parker L *Am. J. Phys.* **37** 309 (1969)
182. Goldstein H *Classical Mechanics* (Cambridge, Mass.: Addison-Wesley, 1950) [Голдстейн Г *Классическая механика* (М.: Наука, 1975)]
183. Fisher G P *Am. J. Phys.* **40** 1772 (1972)
184. Corben H C *Am. J. Phys.* **61** 551 (1993)
185. Shelupsky D *Am. J. Phys.* **35** 650 (1967)
186. Зайцев Г А "О связи теории относительности и теории групп", в кн. Тоннела М А *Основы электромагнетизма и теории относительности* (М.: ИЛ, 1962) с. 447
187. Tonnelat M A *Les Principes de la Théorie Electromagnétique et de la Relativité* (Paris: Masson, 1959) [Тоннела М А *Основы электромагнетизма и теории относительности* (М.: ИЛ, 1962)]
188. Muller R A *Am. J. Phys.* **60** 313 (1992)
189. Lightman A P et al. *Problem Book in Relativity and Gravitation* (Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1975) [Лайтман А и др. *Сборник задач по теории относительности и гравитации* (М.: Мир, 1979)]
190. Perelstein E A, Perelstein M E *Found. Phys. Lett.* **8** 449 (1995)
191. Перельштейн М Э, Перельштейн Э А, Препринт № P2-94-472 (Дубна: ОИЯИ, 1994)
192. Козориз В И, Мусин Ю Р *ТМФ* **123** 75 (2000)
193. Урман Ю М *Изв. РАН. Сер. Механика тв. тела* (2) 10 (2001)
194. Лобанов А Е, Павлова О С *ТМФ* **121** 509 (1999)
195. Kobzarev I Yu, Zakharov V I *Ann. Phys.* (New York) **37** 1 (1966)
196. Shapiro I, in *Astrofisica e Cosmologia, Gravitazione Quanti e Relatività* (Firenze: Giunti Barbera, 1979) Sect. 3 [Шапиро И, в кн. *Астрофизика, кванты и теория относительности* (М.: Мир, 1982) с. 218]
197. Papapetrou A *Proc. R. Soc. London Ser. A* **209** 248 (1951)
198. Померанский А А, Сеньков Р А, Хриплович И Б *УФН* **170** 1129 (2000)
199. Rastall P *Can. J. Phys.* **44** 3109 (1966)
200. Thirring H *Phys. Z.* **19** 33 (1918)
201. Lense J, Thirring H *Phys. Z.* **19** 156 (1918)
202. Thirring H *Phys. Z.* **19** 204 (1918)
203. Thirring H *Phys. Z.* **22** 29 (1921)
204. Einstein A *Sitzungsber. preuß Acad. Wiss.* **47** 831 (1915) [Эйнштейн А *Собрание научных трудов* Т. 1 (М.: Наука, 1965) с. 439]
205. Lange V *Phys. Rev. Lett.* **74** 1904 (1995)
206. Leverrier U *J. Ann. Observ. Imper.* (Paris) **5** 19 (1859)
207. Гинзбург В Л *ЖЭТФ* **30** 213 (1956)
208. Miller L, Ph.D. Thesis (Cambridge, Mass.: MIT, 1971)
209. Van Patten R A, Everitt C W *Celest. Mech.* **13** 429 (1976)
210. Ерошенко Ю Н (Сост.) *УФН* **168** 590 (1998); см. также [211]
211. 1999 Headlines Archive, <http://science.nasa.gov/newhome/headlines/>

212. Rich A, Wesley J C *Rev. Mod. Phys.* **44** 250 (1972)
213. Field J H, Picasso E, Combley F "Tests of fundamental physical theories from measurements of free charged leptons", Preprint PRINT-78-0479 (Geneva: CERN, 1978) [Филд Дж, Пикассо Э, Комбли Ф *УФН* **127** 553 (1979)]
214. Смородинский Я А *УФН* **39** 325 (1949)
215. Louisell W H, Pidd R W, Crane H R *Phys. Rev.* **94** 7 (1954)
216. Schupp A A, Pidd R W, Crane H R *Phys. Rev.* **121** 1 (1961)
217. Wesley J C, Rich A *Phys. Rev. A* **4** 1341 (1971)
218. Fisher G P *Am. J. Phys.* **39** 1528 (1971)
219. Rabi I I *Z. Phys.* **49** 507 (1928)
220. Landau L D *Z. Phys.* **64** 629 (1930) [Ландау Л Д *Собрание трудов Т. 1* (М.: Наука, 1969) с. 47]
221. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Квантовая механика. Нерелятивистская теория* 4-е изд. (М.: Наука, 1989) с. 532
222. Гапонов А В *ЖЭТФ* **39** 326 (1960)
223. Гапонов А В, Петелин М И, Юлпатов В К *Изв. вузов. Радиофизика* **10** 1414 (1967)
224. "Гиротрон", в кн. *Физическая энциклопедия* (Гл. ред. А М Прохоров) Т. 1 (М.: Большая Российская энциклопедия, 1998) с. 489
225. Братман В Л, Гинзбург Н С, в кн. *Физическая энциклопедия* Т. 3 (М.: Большая Российская энциклопедия, 1992) с. 24
226. Mendlowitz H, Case K M *Phys. Rev.* **97** 33 (1955)
227. Carracci M *Nuovo Cimento* **7** 524 (1958)
228. Fradkin D M, Good R H *Rev. Mod. Phys.* **33** 343 (1961)
229. Fradkin D M, Good R H *Nuovo Cimento* **22** 643 (1961)
230. Haar R R, Curtis L J *Am. J. Phys.* **55** 1044 (1987)
231. Байер В Н *УФН* **105** 441 (1971)
232. Michel L *Nuovo Cimento Suppl.* **14** 95 (1959)
233. Белов В В "Баргмана – Мишеля – Телегди уравнение", в кн. *Математическая физика. Энциклопедия* (Под ред. Л Д Фаддеева) (М.: Большая Российская энциклопедия, 1998) с. 38
234. Chaprak G et al. *Nuovo Cimento* **37** 1241 (1965)
235. Vasyr H C.R. *Acad. Sci. (Paris)* **252** 3414 (1961)
236. Vasyr H C.R. *Acad. Sci. (Paris)* **253** 389 (1961)
237. Vasyr H *Phys. Lett.* **5** 37 (1963)
238. Meister H J *Z. Phys.* **166** 468 (1962)
239. Багров В Г и др. *Теория излучения релятивистских частиц* (Под ред. В А Бордовицына) (М.: Физматлит, 2002)
240. Неганов Б С, Препринт № Е4-89-827 (Дубна: ОИЯИ, 1989)
241. Неганов Б С, Препринт № Д2-92-446 (Дубна: ОИЯИ, 1992)
242. Neganov B S *Hadr. J.* **14** 377 (1991)
243. Неганов Б С, Препринт № Р2-98-127 (Дубна: ОИЯИ, 1998)
244. Ungar A A *Found. Phys.* **19** 1345 (1989)
245. Ungar A A *Found. Phys. Lett.* **1** 57 (1988)
246. Ungar A A *Am. J. Phys.* **59** 824 (1991)
247. Ungar A A *Found. Phys.* **19** 1345 (1989)
248. Ungar A A *Appl. Math. Lett.* **1** 403 (1988)
249. Ungar A A *Result. Math.* **16** 168 (1989)
250. Ungar A A *Result. Math.* **17** 149 (1990)
251. Ungar A A *Beyond the Einstein Addition Law and Its Gyroscopic Thomas Precession. The Theory of Gyrogroups and Gyrovectors Spaces* (Fundamental Theories of Physics, Vol. 117) (Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2001)
252. Mocanu C I *Arch. Electrotech.* **69** 97 (1986)
253. Mocanu C I *Electrodinamica Hertziană a Corpurilor în Miscare (la Viteze Relativiste)* (Bucuresti: Editura Acad. Republicii Soc. România, 1985)
254. Mocanu C I *Found. Phys. Lett.* **5** 443 (1992)
255. Berry M V *Proc. R. Soc. London Ser. A* **392** 45 (1984)
256. Виницкий С И и др. *УФН* **160** (6) 1 (1990)
257. Berry M *Phys. Today* **43** (12) 34 (1990)
258. Anandan J *Nature* **360** 307 (1992)
259. Клышко Д Н *УФН* **163** (11) 1 (1993)
260. Боднарчук В И, Давтян Л С, Корнеев Д А *УФН* **166** 185 (1996)
261. Малыкин Г Б *Оптика и спектроскопия* **81** 474 (1996)
262. Малыкин Г Б *Изв. вузов. Радиофизика* **40** 265 (1997)
263. Малыкин Г Б, Позднякова В И *УФН* **174** 303 (2004)
264. Varone S R *Phys. Rev. D* **8** 3492 (1973)
265. Salingaros N *J. Math. Phys.* **27** 157 (1986)
266. Salingaros N A *J. Math. Phys.* **28** 492 (1987)
267. Salingaros N A *J. Math. Phys.* **29** 1265 (1988)
268. Han D, Kim Y S, Son D *Class. Quantum Grav.* **4** 1777 (1987)
269. Aravind P K *Am. J. Phys.* **65** 634 (1997)
270. Ригус В И *УФН* (в печати)
271. Lednicky R, Lyuboshitz V L, Lyuboshitz V V *Phys. Rev. A* **69** 034102 (2004)
272. Малыкин Г Б *Изв. РАН. Сер. Механика тв. тела* (4) 187 (2000)
273. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Механика* (М.: Наука, 1958)
274. Выгодский М Я *Справочник по элементарной математике* (М.: Наука, 1982)
275. Ахизер А И, Берестецкий В Б *Квантовая электродинамика* 4-е изд. (М.: Наука, 1981)
276. Берестецкий В Б, Лифшиц Е М, Питаевский Л П *Квантовая электродинамика* (М.: Наука, 1989) с. 41
277. Schwinger J *Am. J. Phys.* **42** 507 (1974)
278. Thomas L H, in *High Energy Spin Physics — 1982* (AIP Conf. Proc., No. 95, Ed. G M Bunce) (New York: American Institute of Physics, 1983) p. 4
279. Uhlenbeck G E, Goudsmit S *Nature* **117** 514 (1926)
280. Goudsmit S, Uhlenbeck G E *Physica* **5** 266 (1925)
281. Uhlenbeck G E *Phys. Today* **29** (6) 43 (1976)
282. Goudsmit S A *Phys. Today* **29** (6) 40 (1976)
283. de Sitter W *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **76** 699; **77** 155 (1916); **78** 3 (1917); *Proc. Acad. Amsterdam* **19** 1217; **20** 229, 1309 (1917) [частично переведено: де Ситтер В, в кн. *Альберт Эйнштейн и теория гравитации* (Под ред. Е С Куранского) (М.: Мир, 1979)]
284. Eddington A S *The Mathematical Theory of Relativity* 2nd ed. (Cambridge: The Univ. Press, 1923) [Эддингтон А С *Теория относительности* (Л.-М.: ГТТИ, 1934)]
285. Abraham M *Ann. Phys. (Leipzig)* **10** 105 (1903)
286. Compton A H *Philos. Mag.* **41** 279 (1921)
287. Weyl H *Raum, Zeit, Materie* 5th ed. (Berlin: Springer-Verlag, 1923) [Вейль Г *Пространство, время, материя. Лекции по общей теории относительности* (М.: Янус, 1996)]

Thomas precession: correct and incorrect solutions

G.B. Malykin

Institute of Applied Physics, Russian Academy of Sciences,
ul. Ul'yanova 46, 603950 Nizhni Novgorod, Russian Federation
Tel. (7-8312) 16-48 70
E-mail: malykin@ufp.appl.sci-nnov.ru

There is a wide range of opinion and a long-standing controversy in the literature regarding the expression for the Thomas precession (TP) frequency. In this paper it is shown that the correct result was in fact obtained as early as almost forty years ago by some authors but remained unnoticed among the multitude of incorrect results. A number of TP-related physical paradoxes, mostly devised to disprove the special theory of relativity, are shown to be incorrect. Various methods for obtaining the correct expression are discussed, and an error analysis of the major incorrect expressions is performed.

PACS numbers: **01.65.** + **g**, **03.30.** + **p**, **03.65.** Vf

Bibliography — 287 references

Received 23 August 2005, revised 16 May 2006

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **176** (8) 865–882 (2006)

Physics – Uspekhi **49** (8) (2006)