

Интересный доклад.

никове директора института. И началась огромная работа по созданию института: подбор кадров, определение тематики исследований, поиск помещения для института, его обустройство, создание конструкторского бюро и т.д. В очень короткий срок ИРЭ АН СССР стал ведущим институтом в области радиофизики, радиотехники и электроники не только в нашей стране, но и в мире.

Владимир Александрович был не только директором института, но и инициатором, руководителем и непосредственным исполнителем многих выдающихся научно-технических проектов, в результате проведения которых были получены уникальные научные результаты. Все, кто работал с Владимиром Александровичем, отмечали, что он обладал исключительной эрудицией, научной интуицией, умением проникать в суть проблемы и "чудовищной работоспособностью".

На момент избрания Владимира Александровича действительным членом АН СССР и начала создания ИРЭ ему исполнилось 45 лет. Впереди был еще 51 год активной и успешной творческой жизни.

Список литературы

1. Путья Т В и др. *Александр Петрович Котельников. 1865–1944* (М.: Наука, 1968)
2. Котельников В А "О пропускной способности "эфира" и проволоки в электросвязи", в сб. *Всесоюзный энергетический комитет. Материалы к I Всесоюз. съезду по вопросам технической реконструкции дела связи и развития слаботочной промышленности. По радиосекции* (М.: Управление связи РККА, 1933) с. 1–19

3. Витушкин А Г, в сб. *Математические события XX века* (Ред. комиссия: В И Арнольд и др.) (М.: ФАЗИС, 2003)
4. Шеннон К *Работы по теории информации и кибернетике* (М.: ИЛ, 1963)
5. Abdul J *Proc. IEEE* **65** 1585 (1967)
6. Luke H D *IEEE Comm. Mag.* **37** (4) 106 (1999)
7. Котельников В А *Научно-технический сборник Ленинградского электротехнического института связи* (11) (1936)
8. Котельников В А *Научно-технический сборник Ленинградского электротехнического института связи* (14) (1936)
9. Быховский М А, в сб. *Творцы российской радиотехники. Жизнь и вклад в мировую науку* (Сер. История электросвязи и радиотехники, Вып. 3, Под ред. М А Быховского) (М.: Эко-Трендз, 2005) с. 67
10. Dudley H *Bell Labs Record* **17** 122 (1939)
11. Андреев Н Н и др. *Радиотехника* (8) 8 (1998)
12. Удалов Н Н *Радиотехника* (11) 37 (1998)
13. Зиновьев А Л *Электросвязь* (9) 3 (1998)
14. Соколов А В, Филиппов Л И *Радиотехника* (8) 48 (1998)
15. Флейшман Б С *Конструктивные методы оптимального кодирования для каналов с шумами* (М.: Изд-во АН СССР, 1963)
16. Котельников В А, в сб. *Радиотехнический сборник* (М.-Л.: Госэнергоиздат, 1947)
17. Котельников В А *Теория потенциальной помехоустойчивости* (М.-Л.: Госэнергоиздат, 1956); репр. изд. (М.: Радио и связь, 1998)
18. Калачев К Ф *В кругу третьем: Воспоминания и размышления о работе Марфинской лаборатории в 1948–1951 годах* (М.: Машмир, 2001)

PACS numbers: 84.40.–x, 89.70.+c

Приложение

ВСЕСОЮЗНЫЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ КОМИТЕТ

Материалы к I Всесоюзному съезду по вопросам технической реконструкции дела связи и развития слаботочной промышленности.

ПО РАДИОСЕКЦИИ

О пропускной способности "эфира" и проволоки в электросвязи *

Инж. В.А. Котельников

Как в радио-, так и в проволочной технике для каждой передачи требуется не одна какая-либо частота, а целый диапазон частот. Это ведет к тому, что одновременно может работать лишь ограниченное количество радиостанций (передающих разные программы). По одной паре проводов также нельзя передавать сразу больше определенного количества передач, так как нельзя, чтобы полоса частот одной передачи перекрывала полосу другой, — такое перекрытие привело бы к взаимным помехам.

Чтобы увеличить пропускную способность "эфира" и проволоки (а это имело бы колоссальное практическое значение, в особенности в связи с бурным развитием радиотехники и таких передач, как телевидение), нужно

* Статья 1933 г. воспроизводится по изданию, осуществленному к 70-летию теоремы Котельникова и 95-летию Владимира Александровича Котельникова Институтом радиотехники и электроники Московского энергетического института (МЭИ) (технического университета) в 2003 г. под руководством директора ИРЭ МЭИ (ТУ) Н.Н. Удалова, с незначительными изменениями: запись формул дана в формате, принятом в УФН, постраничная нумерация сносок заменена сплошной, орфография и синтаксис приведены в соответствие с современными нормами. Стиль автора сохранен.

как-то сократить диапазон частот, требуемый для данной передачи, не вредя ее качеству, или изобрести способ разделения передач не по частотному признаку, как это делалось до сих пор, а по какому-нибудь другому¹.

По настоящее время никакие ухищрения в этих направлениях не позволяли, даже теоретически, увеличить пропускную способность "эфира" и проволоки в большей степени, чем это позволяет сделать передача "на одной боковой полосе".

Поэтому возникает вопрос: возможно ли вообще это сделать? Или же все попытки в этом направлении будут равносильны попыткам построить *perpetuum mobile*?

Этот вопрос в настоящее время имеет актуальное значение в радиотехнике ввиду с каждым годом все увеличивающейся "тесноты в эфире". И сейчас особенно важно в нем разобраться в связи с планированием научно-исследовательских работ, так как при планировании важно знать, что возможно и что совершенно невозможно сделать, чтобы направить силы в нужном направлении.

В настоящей работе разбирается этот вопрос и доказываемся, что для телевидения и передачи изображений со всеми полутенями, а также для телефонной передачи существует вполне определенная, минимально необходимая полоса частот, которую, не вредя качеству передачи и скорости, нельзя никакими средствами уменьшить; а также доказываемся, что для этих передач нельзя увеличить пропускную способность ни эфира, ни проволоки путем применения разного рода нечастотных селекций или других каких-либо способов (исключая, конечно, селекцию по направлению при помощи направленных антенн). Максимально возможная пропускная способность для этих передач может быть получена при передаче "на одной боковой полосе", и она является в настоящее время принципиально вполне достижимой.

Для таких же передач, как телеграфия или же передача изображений и телевидения без полутеней и т.п., в которых передаваемый объект может меняться непрерывно, а принимая лишь определенные, наперед известные значения, показывается, что необходимая для них полоса частот может быть уменьшена во сколько угодно раз, не вредя ни качеству передачи, ни скорости, за счет увеличения мощности и усложнения аппаратуры. Один из методов такого уменьшения полосы частот указывается в этой работе и показывается, какое увеличение мощности для этого необходимо.

Таким образом, предела для пропускной способности "эфира" и проволоки для передач такого вида теоретически не имеется, дело лишь в техническом выполнении.

Доказательство этих положений в этой работе ведется вне зависимости от метода передачи на основании следующего: во всех видах электросвязи передатчик может передавать, а приемник принимать лишь некоторую функцию времени, которая не может быть вполне произвольной, так как частоты, из которых она состоит и на которые она может быть разложена, должны заключаться в определенных пределах. При радиопередаче такой функцией является сила тока в передающей антенне, которая и воспринимается приемником более или менее точно; при проволочной же передаче это будет

электродвижущая сила в начале линии. В обоих случаях передаваемые функции будут состоять из частот ограниченного диапазона, так как, во-первых, очень высокие и очень низкие частоты не дойдут до приемника по условиям распространения, и, во-вторых, частоты, выходящие за пределы определенного узкого диапазона, обычно нарочно уничтожаются, чтобы не мешать другим передачам.

Эта необходимость передавать при помощи функций времени, состоящих из ограниченного диапазона частот, уже приводит, как это будет ниже показано, к вполне определенному ограничению пропускной способности.

Для доказательства высказанных положений займемся изучением функций, состоящих из определенного диапазона частот.

Функции, состоящие из частот от 0 до f_1

Теорема I. Любую функцию $F(t)$, состоящую из частот от 0 до f_1 периодов в секунду, можно представить рядом

$$F(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} D_k \frac{\sin \omega_1 [t - k/(2f_1)]}{t - k/(2f_1)}, \quad (1)$$

где k — целое число; $\omega_1 = 2\pi f_1$; D_k — постоянные, зависящие от $F(t)$.

И наоборот, любая функция $F(t)$, представленная рядом (1), состоит лишь из частот от 0 до f_1 периодов в секунду.

Доказательство. Любая функция $F(t)$, удовлетворяющая условиям Дирихле (конечное число максимумов, минимумов и точек разрыва на любом конечном отрезке) и интегрируемая в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, что всегда в электротехнике имеет место, может быть представлена интегралом Фурье^{2,3}

$$F(t) = \int_0^{\infty} C(\omega) \cos \omega t d\omega + \int_0^{\infty} S(\omega) \sin \omega t d\omega, \quad (2)$$

т.е. как сумма бесконечного количества синусоидальных колебаний с частотами от 0 до ∞ и амплитудами $C(\omega) d\omega$ и $S(\omega) d\omega$, зависящими от частоты. Причем

$$\begin{aligned} C(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) \cos \omega t dt, \\ S(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) \sin \omega t dt. \end{aligned} \quad (3)$$

В нашем случае, когда $F(t)$ состоит лишь из частот от 0 до f_1 , очевидно

$$\begin{aligned} C(\omega) &= 0, \\ S(\omega) &= 0 \end{aligned}$$

при

$$\omega > \omega_1 = 2\pi f_1,$$

и поэтому $F(t)$ может быть представлена согласно уравнению (2) так:

$$F(t) = \int_0^{\omega_1} C(\omega) \cos \omega t d\omega + \int_0^{\omega_1} S(\omega) \sin \omega t d\omega. \quad (4)$$

¹ Это, правда, можно сделать иногда направленными антеннами, но мы сейчас будем лишь рассматривать случай, когда антеннами это сделать почему-либо нельзя.

² См., например, Смирнов *Курс высшей математики* т. II, изд. 1931 г., стр. 427.

³ В дальнейшем мы также рассматриваем только функции, удовлетворяющие условиям Дирихле.

Функции же $C(\omega)$ и $S(\omega)$, как и всякие другие, на участке

$$0 < \omega < \omega_1$$

могут быть представлены всегда рядами Фурье, причем эти ряды могут, по нашему желанию, состоять из одних косинусов или одних синусов, если мы возьмем за период двойную длину участка, т.е. $2\omega_1$ ⁴. Таким образом:

$$C(\omega) = \sum_0^{\infty} A_k \cos \frac{2\pi}{2\omega_1} k\omega \quad (5a)$$

и

$$S(\omega) = \sum_0^{\infty} B_k \sin \frac{2\pi}{2\omega_1} k\omega. \quad (5b)$$

Введем следующие обозначения:

$$D_k = \frac{A_k + B_k}{2},$$

$$D_{-k} = \frac{A_k - B_k}{2}, \quad (6)$$

тогда формулы (5a) и (5b) можно переписать так:

$$C(\omega) = \sum_{-\infty}^{+\infty} D_k \cos \frac{\pi}{\omega_1} k\omega,$$

$$S(\omega) = \sum_{-\infty}^{+\infty} D_k \sin \frac{\pi}{\omega_1} k\omega. \quad (7)$$

Подставляя теперь выражения (7) в формулу (4), мы после некоторых преобразований и интегрирования (см. приложение I) получим уравнение (1), т.е. докажем первую часть теоремы I.

Для доказательства второй части теоремы рассмотрим частный случай $F(t)$, когда спектр частот, из которого она состоит, заключен в пределах от 0 до f_1 и выражается уравнениями (7), в которых все D_k , кроме одного, равны нулю. Такая $F(t)$, очевидно, будет состоять из одного члена ряда (1). Значит, и наоборот: если $F(t)$ состоит из одного, любого члена ряда (1), то весь ее спектр заключен в пределах от 0 до f_1 . А поэтому и сумма из любых отдельных членов ряда (1), т.е. сам ряд (1), будет состоять из частот, заключенных в пределах от 0 до f_1 , что и требовалось доказать.

Все члены ряда (1) подобны и отличаются лишь сдвигом по времени и множителями D_k . Один из членов, имеющий индекс k , изображен на рис. 1, он

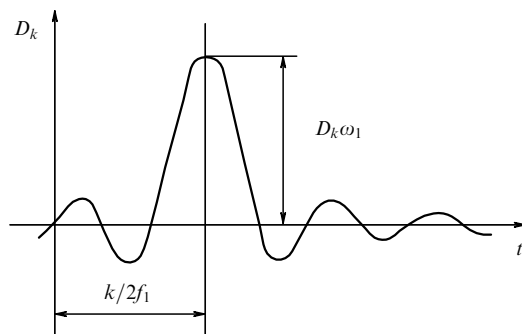


Рис. 1

имеет максимум при $t = k/(2f_1)$ и постепенно уменьшающуюся амплитуду в обе стороны.

Теорема II. Любую функцию $F(t)$, состоящую из частот от 0 до f_1 , можно непрерывно передавать с любой точностью при помощи чисел, следующих друг за другом через $1/(2f_1)$ секунд. Действительно, измеряя величину $F(t)$ при $t = n/(2f_1)$ (n — целое число), мы получим:

$$F\left(\frac{n}{2f_1}\right) = D_n \omega_1. \quad (8)$$

Так как все члены ряда (1) для этого значения t обращаются в нули, кроме члена с $k = n$, который, как это легко можно получить, раскрывши неопределенность, будет равняться $D_n \omega_1$. Таким образом, через каждую $1/(2f_1)$ -ю секунду мы сможем узнавать очередное D_k . Передавая эти D_k по очереди через каждые $1/(2f_1)$ секунд, мы сможем по ним согласно уравнению (1) почленно восстановить $F(t)$ с любой точностью.

Теорема III. Можно непрерывно и равномерно передавать произвольные числа D_k со скоростью N чисел в секунду при помощи функции $F(t)$, имеющей слагаемые на частотах больших $f_1 = N/2$ сколь угодно малыми.

Действительно, будем по получению каждого числа строить функцию $F_k(t)$ такую, что

$$\text{при } t < \frac{k}{2f_1} - T \quad F_k(t) = 0,$$

$$\text{при } \frac{k}{2f_1} - T < t < \frac{k}{2f_1} + T$$

$$F_k(t) = D_k \frac{\sin \omega_1(t - k/(2f_1))}{t - k/(2f_1)}, \quad (9)$$

$$\text{при } t > \frac{k}{2f_1} + T \quad F_k(t) = 0,$$

и передавать их сумму $F(t)$. Если бы $T = \infty$, то полученная функция $F(t)$ состояла бы исключительно из частот меньших f_1 , так как мы получили бы тогда ряд (1), но, к сожалению, такие бесконечные ряды членов строить невозможно, поэтому будем ограничиваться конечными T . Докажем, что чем больше T , тем амплитуды на частотах $f > f_1$ будут становиться меньше и могут быть сделаны сколь угодно малыми. Для этого найдем амплитуды $C(\omega)$ и $S(\omega)$ для функции (9) подстановкой ее в уравнение (3). Получим:

$$C(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{k/(2f_1)-T}^{k/(2f_1)+T} D_k \frac{\sin \omega_1(t - k/(2f_1))}{t - k/(2f_1)} \cos \omega t dt, \quad (10)$$

$$S(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{k/(2f_1)-T}^{k/(2f_1)+T} D_k \frac{\sin \omega_1(t - k/(2f_1))}{t - k/(2f_1)} \sin \omega t dt.$$

После интегрирования (см. приложение II) будем иметь

$$C(\omega) = \frac{D_k}{\pi} \cos \omega \frac{k}{2f_1} [\text{Si } T(\omega + \omega_1) - \text{Si } T(\omega - \omega_1)], \quad (11)$$

$$S(\omega) = \frac{D_k}{\pi} \sin \omega \frac{k}{2f_1} [\text{Si } T(\omega + \omega_1) - \text{Si } T(\omega - \omega_1)].$$

⁴ См. Смирнов *Курс высшей математики* т. II, изд. 1931 г., стр. 385.

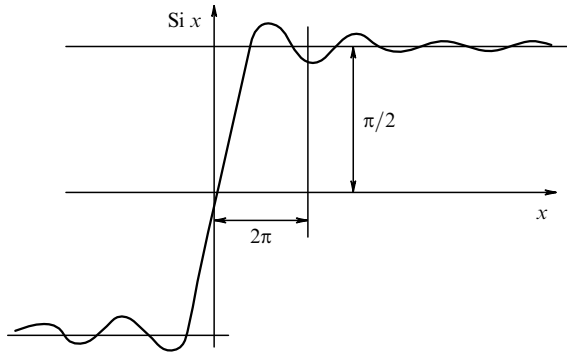


Рис. 2.

В этом выражении Si обозначает интегральный синус, т.е. функцию

$$\text{Si } x = \int_0^x \frac{\sin y}{y} dy. \tag{12}$$

Значения этой функции вычислены и имеются в таблицах⁵, на рис. 2 она изображена графически.

Как видно из рисунка, Si x при $x \rightarrow \pm\infty$ стремится к $\pm\pi/2$.

Рассмотрим значение квадратной скобки в выражении (11). На рисунке 3а дано графическое изображение ее

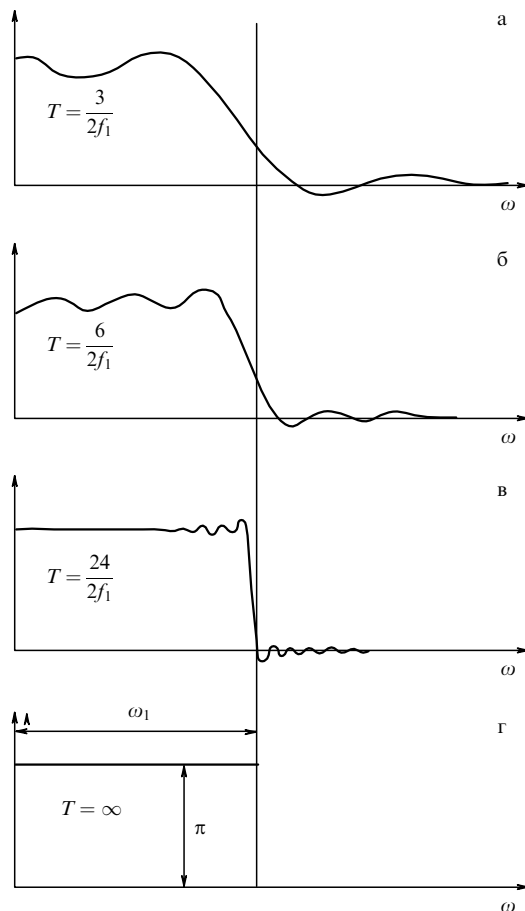


Рис. 3.

при $T = 3/(2f_1)$, на рис. 3б — при $T = 6/(2f_1)$, на рис. 3в — при $T = 24/(2f_1)$ и на рис. 3г — при $T = \infty$.

Как видно из этих рисунков, квадратная скобка в выражении (11) с увеличением T стремится к пределам рис. 3г, т.е.

$$\text{при } \omega > \omega_1 \quad [] = 0,$$

$$\text{при } \omega < \omega_1 \quad [] = \pi.$$

Это также видно и непосредственно из выражения (11), так как при увеличении T увеличивается как бы масштаб при ω и Si делается очень быстро затухающим.

Таким образом, полученная сумма из $F_k(t)$ будет иметь амплитуды на частотах $f > f_1$ сколь угодно малы, если взять T достаточно большим.

По принятой функции $F(t)$ легко восстановить передаваемые числа D_k . Так как при $t = n/(2f_1)$ все члены равны нулю за исключением члена, для которого $k = n$, последний же равен $D_n \omega$. Поэтому

$$F\left(\frac{n}{2f_1}\right) = D_n \omega.$$

Таким образом, мы из нашей функции, измеряя ее значение при $t = k/(2f_1)$, будем в состоянии получить через каждую $t = 1/(2f_1)$ -ю секунду значение нового D_k , в секунду же получим $N = 2f_1$ передаваемых чисел, что и требовалось доказать.

Функции, состоящие из частот от f_1 до f_2

Докажем теорему.

Теорема IV. Любая функция $F(t)$, состоящая из частот от f_1 до f_2 , может быть представлена так:

$$F(t) = F_1(t) \cos \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t + F_2(t) \sin \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t, \tag{13}$$

где $\omega_1 = 2\pi f_1$, $\omega_2 = 2\pi f_2$, а $F_1(t)$ и $F_2(t)$ есть некоторые функции, состоящие из частот от 0 до $f = (f_2 - f_1)/2$. И наоборот: если в уравнении (13) $F_1(t)$ и $F_2(t)$ есть любые функции, состоящие из частот от 0 до $f = (f_2 - f_1)/2$, то $F(t)$ состоит из частот от f_1 до f_2 .

Если $F(t)$ состоит лишь из частот от f_1 до f_2 , то, очевидно, $C(\omega)$ и $S(\omega)$ для такой функции могут быть представлены так:

$$C(\omega) = S(\omega) = 0 \text{ при } \omega > \omega_2 \text{ или } \omega < \omega_1,$$

$$\left. \begin{aligned} C(\omega) &= \sum_0^{\infty} A_k \cos \frac{\pi k}{2(\omega_2 - \omega_1)} (\omega - \omega_1) \\ S(\omega) &= \sum_0^{\infty} B_k \sin \frac{\pi k}{2(\omega_2 - \omega_1)} (\omega - \omega_1) \end{aligned} \right\} \text{при } \omega_1 < \omega < \omega_2,$$

или, опять вводя обозначения

$$\begin{aligned} D_k &= \frac{A_k + B_k}{2}, \\ D_{-k} &= \frac{A_k - B_k}{2}, \end{aligned} \tag{6}$$

мы получим

$$\begin{aligned} C(\omega) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} D_k \cos \frac{\pi}{\omega_2 - \omega_1} k(\omega - \omega_1), \\ S(\omega) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} D_k \sin \frac{\pi}{\omega_2 - \omega_1} k(\omega - \omega_1) \end{aligned} \tag{14}$$

при $\omega_1 < \omega < \omega_2$

⁵ См., например, E. Jahuke und F. Emde *Funktionentafeln mit Formeln und Kurven*.

и

$$C(\omega) = S(\omega) = 0 \text{ при } \omega > \omega_2 \text{ или } \omega < \omega_1. \quad (14)$$

Подставляя уравнения (14) в уравнение (2), мы получим после интегрирования и некоторого преобразования (см. приложение III):

$$F(t) = \left[2 \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n D_{2n} \frac{\sin(\omega_2 - \omega_1)/2 \{t - k/(f_2 - f_1)\}}{t - k/(f_2 - f_1)} \right] \times \\ \times \cos \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t + \\ + \left[2 \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n D_{2n+1} \frac{\sin(\omega_2 - \omega_1)/2 \{t - (k + 1/2)/(f_2 - f_1)\}}{t - (k + 1/2)/(f_2 - f_1)} \right] \times \\ \times \sin \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t, \quad (15)$$

или, обозначая

$$F_1(t) = 2 \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n D_{2n} \frac{\sin(\omega_2 - \omega_1)/2 [t - k/(f_2 - f_1)]}{t - k/(f_2 - f_1)}, \quad (16)$$

$$F_2(t) = 2 \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n D_{2n+1} \times \\ \times \frac{\sin(\omega_2 - \omega_1)/2 [t - (k + 1/2)/(f_2 - f_1)]}{t - (k + 1/2)/(f_2 - f_1)} \quad (17)$$

и принимая во внимание, что согласно теореме I $F_1(t)$ и $F_2(t)$ должны обязательно состоять из спектра частот от 0 до $f = (f_2 - f_1)/2$, так как ряды (16) и (17) отличаются от ряда (1) лишь обозначением, можно считать первую часть теоремы IV доказанной.

Так как рядами (16) и (17) можно, согласно теореме I, представить любые функции $F_1(t)$ и $F_2(t)$, если они состоят из частот от 0 до $f = (f_2 - f_1)/2$, и так как на коэффициенты D_k , входящие в эти ряды, не наложены никакие условия, то, очевидно, верна и вторая часть теоремы IV.

Докажем теперь две теоремы, которые являются обобщением теорем II и III.

Теорема V. Любую функцию $F(t)$, состоящую из частот от f_1 до f_2 , можно непрерывно передавать с любой точностью при помощи чисел, передаваемых друг за другом через $1/[2(f_2 - f_1)]$ секунд.

Действительно, при $t = k/(f_2 + f_1)$ (k — целое число) мы согласно формуле (13) получим:

$$F\left(\frac{k}{f_2 + f_1}\right) = F_1\left(\frac{k}{f_2 + f_1}\right), \quad (18)$$

так как при этом значении t косинус равен 1, а синус — 0. Когда же $t = (k + 1/2)/(f_2 + f_1)$, мы получим

$$F\left(\frac{k + 1/2}{f_2 + f_1}\right) = F_2\left(\frac{k + 1/2}{f_2 + f_1}\right)$$

по аналогичным соображениям.

Таким образом, через каждую $1/(f_2 + f_1)$ -ю секунду мы будем в состоянии узнавать по одному значению $F_1(t)$

и $F_2(t)$, по этим значениям мы сможем воспроизводить и сами функции $F_1(t)$ и $F_2(t)$, так как согласно теореме II по так часто следующим числам можно воспроизводить функции, состоящие из частот от 0 до $(f_2 + f_1)/2$, функции же $F_1(t)$ и $F_2(t)$ состоят лишь из частот от 0 до $(f_2 - f_1)/2$.

Каждую из полученных таким образом функций можно как состоящую из частот 0 до $(f_2 - f_1)/2$ передавать, согласно теореме II, числами, следующими друг за другом через $1/(f_2 - f_1)$ секунд, а эти две функции одновременно можно передавать, очевидно, числами, следующими друг за другом через $1/[2(f_2 - f_1)]$ секунд, по этим числам восстанавливая сначала $F_1(t)$ и $F_2(t)$, мы по ним сможем по формуле (13) восстановить и саму $F(t)$.

Теорема VI. Можно непрерывно и равномерно передавать произвольные числа D_k со скоростью N чисел в секунду при помощи функции $F(t)$, имеющей слагаемые на частотах $f > f_2$ и $f < f_1$ сколь угодно малыми (т.е. практически их не имеющей), если

$$N = 2(f_2 - f_1). \quad (19)$$

Действительно, мы можем передавать согласно теореме III N чисел в секунду при помощи функций $F_1(t)$ и $F_2(t)$, причем каждая будет иметь слагаемые на частотах выше $(f_2 - f_1)/2$ сколь угодно малыми.

Эти же функции можно непрерывно передавать функцией $F(t)$, имеющей слагаемые на частотах $f > f_2$ и $f < f_1$ сколь угодно малыми. Действительно, по функциям $F_1(t)$ и $F_2(t)$ согласно уравнению (13) мы получим $F(t)$, передавая которую, мы, как указывалось выше, сможем по ней восстанавливать $F_1(t)$ и $F_2(t)$, а по ним и передаваемые числа.

Для доказательства последней теоремы, в которой будет говориться о невозможности передавать при помощи функции, состоящей из ограниченного диапазона частот, беспредельно многого, докажем следующую лемму.

Лемма. Нельзя при помощи M чисел передавать N произвольных чисел, если

$$M < N. \quad (20)$$

Предположим, что это сделать можно.

Тогда, очевидно, M чисел m_1, \dots, m_M есть какие-то функции N чисел n_1, \dots, n_N , т.е.

$$m_1 = \varphi_1(n_1, \dots, n_N), \\ m_2 = \varphi_2(n_1, \dots, n_N), \\ \dots \dots \dots \\ m_M = \varphi_M(n_1, \dots, n_N), \quad (21)$$

и мы, очевидно, должны, зная лишь M чисел m_1, \dots, m_M и, конечно, зная функции $\varphi_1, \dots, \varphi_M$, суметь восстановить по ним числа n_1, \dots, n_N .

Но это равносильно решению M уравнений (21) с N неизвестными, что сделать невозможно, если уравнений меньше, чем неизвестных, т.е. справедливо неравенство (20).

Теорема VII. Можно непрерывно передавать произвольные, следующие друг за другом равномерно числа со скоростью N чисел в секунду и M произвольных

функций $F_1(t), \dots, F_M(t)$ с диапазонами частот шириной $\Delta f_1, \dots, \Delta f_M$ при помощи непрерывно следующих друг за другом чисел со скоростью N' чисел в секунду и при помощи M' функций $F'_1(t), \dots, F'_{M'}(t)$ с диапазонами частот $\Delta f'_1, \dots, \Delta f'_{M'}$, если

$$N + 2 \sum_1^M \Delta f_k \leq N' + 2 \sum_1^{M'} \Delta f'_k. \quad (22)$$

И это никаким образом сделать нельзя, если

$$N + 2 \sum_1^M \Delta f_k > N' + 2 \sum_1^{M'} \Delta f'_k. \quad (23)$$

Первая часть этой теоремы доказывается на основании теорем V и VI.

Действительно, на основании теоремы V мы можем передавать наши N чисел в секунду и M кривых при помощи P чисел в секунду, если

$$P = N + 2 \sum_1^M \Delta f_k. \quad (24)$$

А эти P чисел в секунду можно отчасти передавать при помощи N' чисел в секунду, а отчасти по теореме VI при помощи кривых $F'_1(t), \dots, F'_{M'}(t)$, если справедливо равенство (22).

Вторую часть теоремы докажем от противного, исходя из леммы.

Пусть нам нужно передавать P произвольных чисел в секунду, это по теореме VI можно сделать, передавая N чисел в секунду и функции $F_1(t), \dots, F_M(t)$ с диапазонами частот $\Delta f_1, \dots, \Delta f_M$, если справедливо равенство (24).

А эти функции и числа, если была бы несправедлива вторая часть теоремы, можно было бы передавать при помощи функций $F'_1(t), \dots, F'_{M'}(t)$ и N' чисел в секунду. Последние же числа и функции можно согласно теореме V передавать при помощи P' чисел в секунду, если

$$P' = N' + 2 \sum_1^{M'} \Delta f'_k. \quad (25)$$

Другими словами, мы смогли бы непрерывно передавать P чисел в секунду при помощи P' чисел в секунду, хотя согласно равенствам (24) и (25) и неравенству (23)

$$P > P'.$$

Таким образом, предположение, что вторая часть теоремы VII не верна, приводит нас к недопустимому, согласно доказанной лемме, результату.

Пропускная способность при телефонной передаче

Разговор, музыка и другие объекты телефонной передачи являются произвольными функциями времени, состоящими из спектра частот, ширина которого вполне определена и зависит от того, насколько полно мы хотим передавать звук.

Передавая эту функцию по проволоке или по радио, мы превращаем ее в другую функцию времени, которую собственно уже и передаем. Причем эта последняя функция должна обязательно, согласно теореме VII, при непрерывной передаче иметь спектр частот шириной не меньшей, чем та полоса звуковых частот, которую мы хотим передать.

Таким образом, непрерывная телефонная передача не может занимать в эфире или в проволоке меньший диапазон частот, чем ширина спектра звуковых частот, требуемая для данной передачи. Это верно вне зависимости от способа передачи, и нельзя выдумать такого способа, который позволил бы занять при непрерывной передаче более узкий диапазон частот.

Такой минимальный спектр частот, как известно, может дать уже в настоящее время передача на одной боковой полосе.

Оговорка "при непрерывной передаче" имеет большое значение, так как можно, передавая с перерывами какие-нибудь звуки, скажем музыку, занимать меньший диапазон частот, чем ширина звукового спектра, которую мы при этом будем получать. Для этого достаточно записывать передаваемую музыку сначала на грампластинки, а затем передавать с них, вращая, скажем, вдвое медленнее, чем при записи. Тогда все частоты будут получаться вдвое меньше нормального и мы при передаче сумеем занять вдвое меньший диапазон частот. Восстанавливать такую передачу можно также посредством граммофона. Ясно, что такая передача не может увеличить пропускную способность, так как при ней "эфир" или проволока будут заняты все время, а передача будет идти с перерывами.

Это также не противоречит и теореме VII, так как там оговорено: "произвольную функцию" и "непрерывно" нельзя передавать, а при такой передаче мы можем передавать или с перерывами произвольную функцию, или непрерывно функцию не совсем произвольную, а имеющую уже известные перерывы.

Из теоремы VII также следует, что нельзя увеличить пропускную способность путем применения каких-нибудь селекций не частотного характера (не касаясь направленных антенн) или еще чем-нибудь подобным.

Действительно, если бы это можно было бы сделать, то, применяя эти способы, можно было бы с одного места передавать в другое, скажем, n телефонных передач одновременно со спектрами частот шириной Δf каждая, занимая для этого диапазон частот, меньший, чем $n\Delta f$.

Но при такой передаче напряженности поля (или токи в проволоке) от разных передач смешались бы в одну какую-то функцию времени со спектрами частот меньших $n\Delta f$, которая и будет восприниматься приемниками. Получится, что мы смогли передать n функций времени с диапазонами частот шириной Δf при помощи одной функции с диапазоном частот, меньшим, чем $n\Delta f$, что, согласно теореме VII, совершенно невозможно.

Из сказанного ясно, что для телефона увеличить пропускную способность эфира можно, лишь применяя направленные антенны или расширяя эксплуатируемый диапазон частот путем использования ультракоротких волн.

Передача изображений и телевидение со всеми полутениями

При передаче изображений и телевидении нужно передавать степень черноты каких-то N элементов в секунду, а это равносильно передаче произвольных чисел со скоростью N чисел в секунду. Если мы это хотим сделать при помощи функции времени, как это всегда и делается, то по теореме VII она должна занять диапазон частот, не меньший, чем $N/2$ периодов в секунду. Таким образом,

сразу видно, что полосу частот и тут сократить нельзя больше, чем это позволяет сделать передача на одной боковой полосе. Правда, для осуществления и этого могут встретиться большие технические трудности из-за фазовых искажений возможных при такой передаче.

Нельзя сократить полосу частот и при помощи какой-нибудь "групповой развертки изображений" (развертке не по отдельным элементам), так как и при такой развертке придется все же передать, правда, каким-то другим способом, степень почернения тех же N элементов в секунду, т.е. N произвольных чисел в секунду, что сделать никак с уменьшенным диапазоном частот нельзя.

Не смогут и тут помочь нечастотные методы селекций (не включая направленных антенн) по тем же основаниям, как и при телефонной передаче.

Телеграфная передача и передача изображений без полутеней или с ограниченным количеством их

При телеграфной передаче, а также при передаче изображений без полутеней или с вполне определенными заранее известными полутенями, мы имеем дело опять с передачей каких-то N элементов в секунду, что равносильно передаче N чисел в секунду, но величина этих элементов и, значит, чисел не может быть вполне произвольной, а должна иметь вполне определенные, наперед известные значения. Поэтому к этим передачам нельзя прямо применять выше выведенные теоремы, так как там говорится о передаче произвольных, наперед совершенно неизвестных чисел.

Действительно, для этих передач можно сократить необходимый диапазон частот во сколько угодно раз, а следовательно, по крайней мере теоретически, увеличить пропускную способность также в любое число раз.

Для этого можно поступать таким образом: скажем, мы хотим передавать со скоростью N элементов в секунду элементы, которые могут иметь значение либо 0, либо 1, и занять для этого диапазон частот всего лишь шириной $N/4$ (вместо $N/2$ по теореме VII). Для этого будем передавать два таких элемента посредством одного элемента (или числа), хотя бы согласно следующей таблице, где в графе I дано значение первого элемента, в графе II — второго, а в графе III — значение элемента, которым мы хотим их передать.

I	II	III
0	0	0
1	0	1
1	1	2
0	1	3

Таким образом мы сможем передавать N элементов в секунду, имеющих по два значения, при помощи $N/2$ элементов в секунду, могущих иметь по 4 значения, которые, согласно теореме VII, могут передаваться при помощи диапазона частот шириной $N/4$.

Практически такую замену двух элементов одним можно осуществить хотя бы по схеме рис. 4, где Φ_1 и Φ_2 — два фотоэлемента или два телеграфных аппарата, причем Φ_1 приводит в действие модулятор M_1 , посылающий в линию амплитуду, равную единице, Φ_2 же работает с модулятором M_2 , посылающим амплитуду, равную 3. При работе Φ_1 и Φ_2 сразу приводятся в действие оба

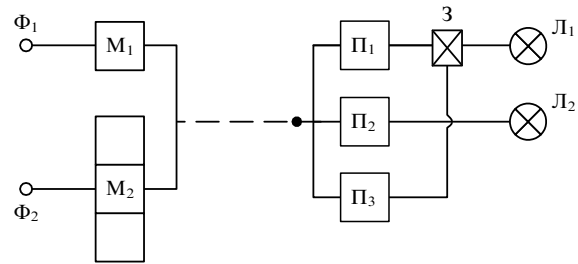


Рис. 4.

модулятора, и так как они включены на встречу, то посылается амплитуда, равная 2. На прием принимаемый сигнал поступает на три приемника, причем первый, Π_1 , начинает работать от амплитуды 1, второй, Π_2 , — от амплитуды 2 и третий, Π_3 , — от амплитуды 3. Первый приемник Π_1 приводит в действие L_1 , второй — L_2 , а третий при приходе амплитуды, равной трем, — запирает доступ от 1 приемника на L_1 . При помощи такой схемы мы получим указанное выше сокращение полосы частот.

При такой передаче ввиду того, что при ней становится необходимым различать вместо двух четыре градации принимаемых сигналов, необходимо, очевидно, будет увеличить мощность передатчика в $3^2 = 9$ раз, по сравнению с обычной передачей.

Возможно сократить аналогичным образом полосу частот и в n раз, передавая n элементов, могущих иметь по два значения, при помощи одного элемента, который должен для этого, очевидно, иметь 2^n значений (по числу комбинаций из n элементов, имеющих по два значения). Но для такой передачи необходимо увеличение мощности в $(2^n - 1)^2$ раз.

При передаче изображений с определенным количеством заданных наперед полутеней каждый элемент должен иметь несколько, скажем m (для этого случая $m > 2$), значений. Для сокращения полосы частот при такой передаче в n раз можно заменить n передаваемых элементов одним, который должен иметь возможность принимать m^n значений (по числу возможных комбинаций из n элементов, имеющих m возможных значений каждый). Мощность при этом, очевидно, необходимо будет увеличить в $[(m^n - 1)^2 / (m - 1)^2]$ раз.

Как видно, такое уменьшение полосы частот требует колоссального увеличения мощности.

Кроме того, приведенные здесь способы будут очень плохи при передаче на коротких волнах из-за фадингов**.

Для проволочной связи уменьшение таким способом полосы частот может иметь практическое значение уже и сейчас, так как мощности, там необходимые, малы и нет быстрых изменений силы приема.

Приложение I

Подставляя выражение (7) в уравнение (4), мы получим:

$$F(t) = \int_0^{\omega_1} \sum_{-\infty}^{+\infty} D_k \cos \frac{\pi}{\omega_1} k \omega \cos \omega t d\omega + \\ + \int_0^{\omega_1} \sum_{-\infty}^{+\infty} D_k \sin \frac{\pi}{\omega_1} k \omega \sin \omega t d\omega =$$

** От англ. fading — замирание (сигнала). (Примеч. Н.В. Котельниковой.)

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{-\infty}^{+\infty} D_k \int_0^{\omega_1} \left(\cos \frac{\pi}{\omega_1} k \omega \cos \omega t + \sin \frac{\pi}{\omega_1} k \omega \sin \omega t \right) d\omega = \\
 &= \sum_{-\infty}^{+\infty} D_k \int_0^{\omega_1} \left(\cos \omega \left(t - \frac{\pi}{\omega_1} k \right) \right) d\omega,
 \end{aligned}$$

или, интегрируя и заменяя в круглой скобке ω_1 на $2\pi f_1$, получим

$$F(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} D_k \frac{\sin \omega_1 (t - k/(2f_1))}{t - k/(2f_1)}.$$

Приложение II

В

$$C(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{k/(2f_1)-T}^{k/(2f_1)+T} D_k \frac{\sin \omega_1 (t - k/(2f_1))}{t - k/(2f_1)} \cos \omega t dt$$

делаем подстановку

$$t = u + \frac{k}{2f_1}, \quad dt = du,$$

тогда

$$\begin{aligned}
 C(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-T}^T D_k \frac{\sin \omega_1 u}{u} \cos \omega \left(u + \frac{k}{2f_1} \right) du = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-T}^T D_k \frac{\sin \omega_1 u \cos \omega u}{u} \cos \omega \frac{k}{2f_1} du + \\
 &+ \frac{1}{\pi} \int_{-T}^T D_k \frac{\sin \omega_1 u \sin \omega u}{u} \sin \omega \frac{k}{2f_1} du.
 \end{aligned}$$

Функция, стоящая под вторым интегралом, при переходе через нуль меняет свой знак, оставаясь по величине той же, поэтому второй интеграл равен нулю.

Функция же под первым интегралом не меняется при замене u на $-u$, и поэтому пределы этого интеграла можно взять от 0 до T , помножив при этом интеграл на два. Значит,

$$C(\omega) = \frac{2D_k}{\pi} \cos \omega \frac{k}{2f_1} \int_0^T \frac{\sin \omega_1 u \cos \omega u}{u} du,$$

или

$$\begin{aligned}
 C(\omega) &= \frac{D_k}{\pi} \cos \omega \frac{k}{2f_1} \left[\int_0^T \frac{\sin(\omega_1 + \omega) u}{u} du - \right. \\
 &\left. - \int_0^T \frac{\sin(\omega - \omega_1) u}{u} du \right].
 \end{aligned}$$

Заменяя в первом интеграле

$$(\omega_1 + \omega) u = y,$$

а во втором

$$(\omega - \omega_1) u = y,$$

получим

$$\begin{aligned}
 C(\omega) &= \frac{D_k}{\pi} \cos \omega \frac{k}{2f_1} \left[\int_0^{(\omega+\omega_1)T} \frac{\sin y}{y} dy - \right. \\
 &\left. - \int_0^{(\omega-\omega_1)T} \frac{\sin y}{y} dy \right].
 \end{aligned}$$

Стоящие в скобках интегралы не берутся. Это, очевидно, будут какие-то функции верхнего предела. Принято эти функции называть интегральными синусами. Введя это понятие, получим:

$$C(\omega) = \frac{D_k}{\pi} \cos \omega \frac{k}{2f_1} \left[\text{Si } T(\omega + \omega_1) - \text{Si } T(\omega - \omega_1) \right].$$

Продельвая совершенно то же с $S(\omega)$, мы получим уравнение (11).

Приложение III

Подставляя уравнения (14) в уравнение (2), получим

$$\begin{aligned}
 F(t) &= \int_{\omega_1}^{\omega_2} \sum_{-\infty}^{+\infty} D_k \cos \frac{\pi k (\omega - \omega_1)}{\omega_2 - \omega_1} \cos \omega t d\omega + \\
 &+ \int_{\omega_1}^{\omega_2} \sum_{-\infty}^{+\infty} D_k \sin \frac{\pi k (\omega - \omega_1)}{\omega_2 - \omega_1} \sin \omega t d\omega.
 \end{aligned}$$

Пределы взяты от ω_1 и ω_2 , потому что

$$C(\omega) = S(\omega) = 0$$

при

$$\omega < \omega_1 \quad \text{или} \quad \omega > \omega_2.$$

После тригонометрических преобразований

$$\begin{aligned}
 F(t) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} D_k \int_{\omega_1}^{\omega_2} \cos \left[\omega \left(t - \frac{\pi k}{\omega_2 - \omega_1} \right) + \frac{\pi k \omega_1}{\omega_2 - \omega_1} \right] d\omega = \\
 &= \sum_{-\infty}^{+\infty} D_k \frac{\sin \left[\omega_2 \left[t - \frac{\pi k}{(\omega_2 - \omega_1)} \right] + \frac{\pi k \omega_1}{(\omega_2 - \omega_1)} \right]}{t - \pi k / (\omega_2 - \omega_1)} - \\
 &- \frac{\sin \left[\omega_1 \left[t - \frac{\pi k}{(\omega_2 - \omega_1)} \right] + \frac{\pi k \omega_1}{(\omega_2 - \omega_1)} \right]}{t - \pi k / (\omega_2 - \omega_1)}.
 \end{aligned}$$

Заменяя разность синусов на произведение и проведя упрощения, получим:

$$\begin{aligned}
 F(t) &= 2 \sum_{-\infty}^{+\infty} D_k \cos \left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t - \frac{\pi}{2} k \right) \times \\
 &\times \frac{\sin \left[(\omega_2 - \omega_1) / 2 \left\{ t - k / [2(f_2 - f_1)] \right\} \right]}{t - k / [2(f_2 - f_1)]},
 \end{aligned}$$

или, группируя члены с четными и нечетными k вместе, получим уравнение (15).

Выводы

1) Ввиду имеющейся уже в настоящее время "тесноты в эфире" и в связи с дальнейшим бурным развитием радиотехники, в особенности с развитием коротковолновых телефонных передач и передач изображений, вопрос об изыскании способов увеличения пропускной способности эфира должен быть поставлен перед научно-исследовательскими институтами во всей остроте.

Вопрос об увеличении пропускной способности проволоки имеет также большое экономическое значение. Поэтому этот вопрос следует тоже изучать.

2) Так как нельзя никакими способами, как, например, сужением полосы частот отдельных передач, примене-

нием каких-либо методов для разделения передач с накладывающимися друг на друга частотами и т.п., увеличить пропускную способность эфира или проволоки при передаче изображений и телефона больше, чем это позволяет сделать обычная передача с одной боковой полосой, то все попытки в этих направлениях следует оставить как неосуществимые.

3) Для телеграфа и передачи изображений без полутеней или с ограниченным количеством их пропускную способность можно теоретически повысить беспрельдно, но это связано с большим увеличением мощности и усложнением аппаратуры. Поэтому надо думать, что такое сужение полосы частот может в ближайшее время найти применение лишь в проволочной связи, где над этим вопросом следует работать.

4) Необходимо для первой категории передач (телефон и передача изображений с полутенями) направить все усилия на разработку методов приема и передачи на одной боковой полосе как методов, позволяющих максимально возможно использовать эфир и проволоку.

Цель разработки — усовершенствовать и упростить аппаратуру, очень сложную в настоящее время.

5) Необходимо изучить вопрос об увеличении пропускной способности эфира при помощи направленных антенн как приемных, так и передающих.

6) Необходимо увеличить диапазон эксплуатируемых в эфире частот путем загрузки, где возможно, ультракоротких волн, а также изучением этого диапазона частот.

7) Необходимо изучать вопрос об увеличении стабильности частоты радиостанций, что позволит уплотнить эфир.

PACS numbers: 89.70.+c, 95.85.Bh, 96.30.Ea

Роль В.А. Котельникова в становлении радиофизики и радиотехники

Н.А. Арманд

1. Введение

Писать о роли В.А. Котельникова в развитии радиофизики и радиотехники не так просто. Это связано как с многообразием направлений, к становлению и развитию которых он "приложил руку", так и с научными результатами, часть которых была получена более 70 лет тому назад и с современной точки зрения представляется "очевидной". Сложность связана также с тем, что Владимир Александрович не был "любителем" публиковаться. В частности, его знаменитая теорема не была толком опубликована вовсе, а классическая работа по потенциальной помехоустойчивости была издана лишь в 1956 г., спустя 10 лет после ее выполнения.

2. Теорема

В 1932–1933 гг. 25-летний инженер В.А. Котельников задался мыслью о том, можно ли без искажений передавать сигнал в полосе частот меньшей, чем это позволяет передача "на одной боковой полосе". В современном представлении это означает возможность прохождения сигналов без искажения через канал, спектральная пропускная способность которого меньше спектральной ширины сигнала. Нам это представляется абсурдным, но

в то время (1933 г.), когда проблемы спектральной фильтрации были не до конца понятны инженерам, подобная постановка вопроса представлялась разумной. В связи с этим следует вспомнить споры того времени о том, что представляет собой амплитудно-модулированный сигнал: синусоидальное колебание с медленно изменяющейся амплитудой или набор спектральных компонент. Результаты исследований В.А. Котельникова были подготовлены в виде доклада "О пропускной способности "эфира" и проволоки в электро-связи" к I Всесоюзному съезду по вопросам технической реконструкции дела связи и развития слаботочной промышленности. Съезд не состоялся, но подготовленные к нему материалы были изданы [1], что и явилось официальным подтверждением приоритета В.А. Котельникова в доказательстве знаменитой теоремы отсчетов.

На самом деле работа содержала семь теорем, но все они являлись в той или иной степени развитием основной теоремы, которая гласит, что любая функция $f(t)$ с ограниченным спектром ширины B представима в виде ряда

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n}{2B}\right) \operatorname{sinc}(2\pi Bt - n\pi), \quad \operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

По существу теорема утверждает, что любая функция полностью представима совокупностью своих отсчетов, выбираемых в дискретные моменты времени $t_n = n/2B$. Если излучить сверхкороткие импульсы с амплитудами, равными отсчетам функции в указанные дискретные моменты, то приемник, имеющий фильтр нижних частот со спектральной шириной B , сформирует колебания вида $\operatorname{sinc}(x)$ и сумма этих колебаний вновь даст неискаженную функцию $f(t)$. Указанная процедура передачи сигнала и его приема поясняется на рис. 1. Поскольку фильтр нижних частот приемника должен иметь ширину полосы не меньшую спектральной ширины сигнала, то попытки уменьшения этой полосы при неискажаемой передаче сигнала подобны попыткам создания *perpetuum mobile*, о чем и предупреждал автор работы [1] при постановке задачи.

Интересно отметить, что Владимир Александрович в 1936 г. пытался опубликовать свою теорему в журнале *Электричество*. Однако в публикации ему было отказано со ссылкой на перегруженность портфеля журнала и на узкий интерес его статьи. Знали бы инициаторы отказа, о чем они говорят! На самом деле теорема имеет более широкое значение по сравнению с задачей, приведшей к ее доказательству. По существу, она указала путь представления непрерывных функций в цифровом виде и тем самым стала одним из теоретических фундаментов цифровой техники, бурно развивающейся в последние десятилетия. При постановке вопроса о представлении непрерывной функции в цифровом виде в первую очередь возникает вопрос о том, как часто следует выбирать значения функции, чтобы достаточно точно отразить ее вид. Первый и наивный ответ гласит: чем чаще, тем лучше. Это означает, что для неискаженной передачи любого сообщения необходимо использовать достаточно частые выборки. Но в системах связи мы имеем дело с сигналами с ограниченной шириной спектра. Такие сигналы не могут изменяться во времени как угодно быстро. Поэтому выборки сигнала, взятые за слишком короткий интервал времени, могут оказаться