

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Узлы и зацепления распределений параметров порядка в сильно коррелированных системах

А.П. Протогенов

Рассматриваются результаты работ по изучению когерентных распределений параметров порядка, которые определяют области существования различных фазовых состояний в двухкомпонентной модели Гинзбурга–Ландау. С использованием формулировки этой модели в терминах калибровочно-инвариантных параметров порядка — поля единичного вектора $\mathbf{n}$, плотности ρ^2 и импульса частиц $\mathbf{c}$ — в этих работах показано, что некоторые универсальные свойства фаз и конфигураций полей определяются топологическими характеристиками, связанными с инвариантом Хопфа Q и его обобщениями. При достаточно малых значениях плотности ее распределение в форме колец может быть предпочтительнее распределения в виде полосок. В фазе с индексом $L < Q$ взаимного зацепления конфигураций полей $\mathbf{n}$ и $\mathbf{c}$ возникает выигрыш в свободной энергии при переходе в неоднородное токовое состояние. Обсуждается универсальный механизм разрушения корреляций при уменьшении характерных значений плотности ρ^2 . Вторая часть обзора посвящена анализу результатов работ, в которых заузленные конфигурации изучались в рамках моделей неабелевой теории поля. Подробно обсуждаются основные свойства квазиклассических конфигураций в теории Янга–Миллса и в модели Скирма, а также их связь с заузленными распределениями.

PACS numbers: 02.40. – k, 11.15. – q, 11.27. + d, 74.20.De

Содержание

1. Введение (689).
 2. Свободная энергия (690).
2.1. Точное отображение. 2.2. Возможные фазовые состояния.
 3. Границы свободной энергии (693).
3.1. Модель Скирма – Фаддеева. 3.2. Токовые состояния.
 4. Свойства фазовых состояний (695).
4.1. Устойчивость узлов. 4.2. Плотность как константа связи.
4.3. Кольца против полосок. 4.4. Тороидные состояния.
4.5. Планарные явления в 3D-пространстве. 4.6. Оптимальное допирование.
 5. Неабелева калибровочная теория (701).
5.1. Монополи, мероны и узлы в теории Янга – Миллса. 5.2. Узлы как основные состояния. 5.3. Скирмионы и узлы. 5.4. Голономия Полякова. 5.5. Дуальная картина. 5.6. Некоторые особенности SU(3)-полей.
 6. Заключительные замечания (712).
 7. Приложение. Выигрыш в свободной энергии в токовом состоянии (714).
- Список литературы (714).

А.П. Протогенов. Институт прикладной физики РАН,
603950 Нижний Новгород, ул. Ульянова 46, Российская Федерация
Тел. (8312) 164-899
E-mail: alprot@appl.sci.nnov.ru

Статья поступила 26 декабря 2005 г.

1. Введение

Критические явления в низкоразмерных сильно коррелированных системах обнаруживают удивительную универсальность кооперативного поведения. В планарных системах на основе окислов меди эта универсальность проявляется в качественно похожем поведении различных классов соединений. Одной из обращающих на себя внимание особенностей сред, в которых сильные локальные взаимодействия частиц конкурируют с делокализованными возбуждениями, является возникновение квазиодномерных распределений зарядовых степеней свободы. Низкоразмерные структуры в распределении зарядовых и спиновых степеней свободы существуют, в частности, в фазовом состоянии, из которого возможен переход в состояние высокотемпературной сверхпроводимости.

Возможность перехода позволяет обратиться к такой модели для описания отмеченных фаз, которая содержит соревнующиеся фазовые состояния как частные предельные случаи. При изучении подобного рода общих проблем некоторое понимание может быть достигнуто на основе теории среднего поля Гинзбурга – Ландау с подходящим выбором параметра порядка. Ключевым вопросом в этом универсальном подходе является определение способа, с помощью которого параметр порядка кодирует состав и одновременно пространственные распределения зарядовых и спиновых степеней свободы в различных фазовых состояниях. Решение этой проблемы

приводит к контролируемой теории среднего поля для сильно взаимодействующих систем.

Учитывая прогресс, достигнутый в решении похожих задач в неабелевой теории поля и в физике конденсированного состояния, представляется целесообразным отдать предпочтение двухкомпонентной модели Гинзбурга–Ландау. В теории электрослабого взаимодействия двухкомпонентный параметр порядка имеет смысл хиггсовского дублета стандартной модели. В нейтральных системах многокомпонентный параметр порядка широко используется для описания различных фаз в спинорных бозе-эйнштейновских конденсатах. В электронных системах с минимально возможным значением спина электрона две компоненты комплексного параметра порядка позволяют описать ориентационные и скалярные степени свободы электронных возбуждений.

Во многом универсальность получаемых результатов, как мы увидим в разделах 2–4, определяется размерностью параметра порядка, равной в нашем случае двум. Только в этом случае у нас появляется возможность использовать инвариант Хопфа для классификации трехмерных конфигураций единичного вектора $\mathbf{n}$, описывающего в длинноволновом пределе распределение спиновых степеней свободы, и корректно рассмотреть фазы с различной степенью делокализации заряда. Инвариант Хопфа описывает степень зацепления или заузленности одномерного многообразия нитей, на котором определено поле единичного вектора $\mathbf{n}$.

Целью настоящего обзора является обсуждение недавних результатов, относящихся к рассматриваемой проблеме, полученных в физике конденсированного состояния и теории поля в рамках обобщенной $O(3)$ -сигма-модели. После точного отображения двухкомпонентной модели Гинзбурга–Ландау сигма-модель оказывается дополненной слагаемым Фаддеева [1], обеспечивающим стабильность конфигураций параметров порядка. В обзоре рассматриваются результаты работ, в которых характеристики степени зацепления или заузленности квазиодномерных полевых конфигураций использовались для описания универсального поведения сильно коррелированных систем.

Изучение поведения клубка запутанных нитей является самостоятельной задачей, которая привлекает внимание благодаря нескольким причинам. Во-первых, ассоциированный с зацеплениями на малых расстояниях топологический порядок существует на фоне беспорядка, обусловленного произвольным расположением отдельных частей системы запутанных вихревых нитей. Тем самым, в отличие от свойств точечной частицы, свойства клубка определяются поведением его фрагментов в ультрафиолетовом и инфракрасном пределах. Компромисс асимптотик обеспечивает вследствие сосуществования в узле сильных локальных корреляций и делокализованных мод конечный размер и энергетический масштаб квазиодномерной структуры.

Сечение трехмерного клубка плоскостью порождает в двумерном пространстве неоднородное распределение фазовых состояний с упорядоченным или случайным распределением электронных степеней свободы, принадлежащих сердцевине нити и областям вне ее. Такое проектирование является естественным определением планарных явлений. Мы можем рассматривать его и как способ вложения физики двумерных явлений в объемлющее трехмерное пространство, и как реализацию планар-

ных состояний, существующих в объеме, на поверхности кристалла. В результате разреза в плоскости появляется самогенерируемое стекловое спиновое состояние с хорошо определенной ролью беспорядка, благодаря топологическому механизму разделения фаз. Ответ на вопрос о малом параметре в этом соревновании фазовых состояний зависит от соотношения фазовых объемов состояний и во многом определяется значением степени упаковки нитей в узле.

Во-вторых, такая мягкая среда, как клубок зацепленных и заузленных нитей, является актуальным объектом изучения не только физики конденсированного состояния [2], но и, например, молекулярной биологии в связи с проблемой сверхспирализации ДНК. В случае превращения константы связи сигма-модели в функцию, определяющую распределение плотности, появление конфигурации в виде киральной двойной спирали как решения уравнений движения является общим свойством модели. И в этой области рабочий параметр, который характеризуется идеальной конфигурацией данного типа узла [3], оказывается пропорциональным степени упаковки нитей в клубке.

Для удобства материал обзора разделен на две части. В первой части (разделы 2–4) рассматриваются результаты работ, в которых изучались свойства полевых конфигураций в $O(3)$ -сигма-модели и их вклад в свободную энергию. Вторая часть обзора (раздел 5) посвящена изложению некоторых результатов, полученных в неабелевой теории поля, которые имеют отношение к проблемам физики конденсированного состояния. В приложение включено изложение технических вопросов, уточняющих содержание некоторых разделов обзора. С точки зрения содержания, используемых средств и приложений настоящий обзор опирается на результаты, вошедшие в ранее опубликованные обзорные статьи [4–9], которые посвящены изучению сильно коррелированных систем.

2. Свободная энергия

Свободная энергия для двухкомпонентной калибровочно-инвариантной модели Гинзбурга–Ландау имеет вид

$$F = \int d^3x \left[\sum_{\alpha} \frac{1}{2m_{\alpha}} \left| \left(\hbar \partial_t + i \frac{2e}{c} A_k \right) \Psi_{\alpha} \right|^2 + \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi} + V(\Psi_1, \Psi_2) \right]. \quad (2.1)$$

Выражение (2.1) использовалось ранее для изучения двухщелевой сверхпроводимости [10] и проблем высокотемпературной сверхпроводимости в различных контекстах [11–15]. Потенциальная энергия $V(\Psi_1, \Psi_2)$ состоит из следующих слагаемых [16]:

$$V(\Psi_1, \Psi_2) = \sum_{\alpha} \left[-b_{\alpha} |\Psi_{\alpha}|^2 + \frac{d_{\alpha}}{2} |\Psi_{\alpha}|^4 \right] + c |\Psi_1|^2 |\Psi_2|^2 + f(\Psi_1 \Psi_2^* + \text{c.c.}) + h(\Psi_1^2 \Psi_2^{*2} + \text{c.c.}). \quad (2.2)$$

Здесь b_{α} , d_{α} , c , f и h — константы. Эта часть свободной энергии может содержать дополнительные слагаемые. В частности, обсуждение следствий от включения в (2.2)

слагаемого Лифшица $\Psi_1(\hbar\partial_k + i(2e/c)A_k)\Psi_2^* + \text{с.с.}$ для описания киральных фаз содержится в работе [17].

Выражение (2.1) содержит семь степеней свободы, две из которых — общая длина ρ вектора $\Psi_\alpha = \sqrt{2m_x}\rho|\chi_\alpha|\exp(i\phi_\alpha)$, где $|\chi_1|^2 + |\chi_2|^2 = 1$, и сумма фаз $\phi_1 + \phi_2$ полей Ψ_α — связаны со скалярным сектором теории, а пять степеней свободы, т.е. две независимые компоненты единичного трехмерного вектора $n^a = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta)$ и три компоненты поля плотности тока $\mathbf{a} = i[\chi_1\nabla\chi_1^* - \text{с.с.} + (1 \rightarrow 2)]$, относятся к степеням свободы, связанным с ориентацией спина. Здесь $|\chi_1| = \cos\vartheta/2$, $|\chi_2| = \sin\vartheta/2$, $\varphi = \phi_1 - \phi_2$. Внутреннее калибровочное поле $\mathbf{A}$ и его собственная энергия $(\text{rot}\mathbf{A})^2/8\pi$ определяют вклад зарядовых степеней свободы. Чтобы выделить при описании в явном виде скалярные и ориентационные степени свободы, в выражении (2.1) нужно перейти к калибровочно-инвариантным переменным так, как это сделано в работе [10].

2.1. Точное отображение

В работе [10] показано, что существует точное отображение модели (2.1) в следующий расширенный $(3+0)$ -мерный вариант нелинейной $O(3)$ -сигма-модели:

$$F = F_n + F_\rho + F_c + F_{\text{int}} = \int d^3x \left[\frac{1}{4} \rho^2 (\partial_k \mathbf{n})^2 + (\partial_k \rho)^2 + \frac{1}{16} \rho^2 \mathbf{c}^2 + (F_{ik} - H_{ik})^2 + V(\rho, n_1, n_3) \right]. \quad (2.3)$$

Свободная энергия в (2.3) определяется скаляром ρ^2 , полем единичного вектора $n^a = \bar{\chi}\sigma^a\chi$ и полем импульса $\mathbf{c} = \mathbf{J}/\rho^2 = \mathbf{a} - \mathbf{A}$, где полный ток $\mathbf{J}$ содержит парамагнитную ($\mathbf{a} = i[\chi_1\nabla\chi_1^* - \text{с.с.} + (1 \rightarrow 2)]$) и диамагнитную ($-\mathbf{A}$) части. Здесь $\bar{\chi} = (\chi_1^*, \chi_2^*)$ и σ^a — матрицы Паули. При записи выражения (2.3) использованы обозначения $F_{ik} = \partial_i c_k - \partial_k c_i$ и $H_{ik} = \mathbf{n}[\partial_i \mathbf{n} \times \partial_k \mathbf{n}] = \partial_i a_k - \partial_k a_i$, а также безразмерные единицы длины $L = (\xi_1 + \xi_2)/2$ с длиной когерентности $\xi_\alpha = \hbar/\sqrt{2m b_\alpha}$ (в случае одинаковых масс $m_\alpha = m$), импульса $\hbar/L$ — в качестве единицы измерения импульса $\mathbf{c}$, единицы плотности $c^2/(512\pi e^2 L^2)$ частиц в расчете на единицу массы (при используемой параметризации Ψ_α) и единицы энергии γ/L с $\gamma = (c\hbar/e)^2/512\pi$. При получении (2.3) использовались [10] калибровочно-инвариантное тождество

$$|\partial\chi_1|^2 + |\partial\chi_2|^2 - \frac{\mathbf{a}^2}{4} = \frac{1}{4} (\partial\mathbf{n})^2$$

и соотношение Мермина – Хо [18]

$$(\text{rot}\mathbf{a})_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} H_{jk}.$$

В формулировке (2.3) функционал Гинзбурга – Ландау зависит от калибровочно-инвариантных параметров порядка ρ^2 , $\mathbf{c}$ и $\mathbf{n}$, которые характеризуют пространственные распределения электронных степеней свободы с током или без него. Функции χ_α задают ориентацию единичного вектора $\mathbf{n}$, который описывает в длинноволновом пределе свойства магнитного порядка. Кроме того, функции χ_α определяют величину парамагнитной части тока. Плотность кинетической энергии $(1/16)\rho^2\mathbf{c}^2$ и плотность поверхностной энергии F_{ik}^2 вносят вклад в

токовую часть F_c свободной энергии. Диамагнитное взаимодействие $-2F_{ik}H_{ik}$ полей $\mathbf{a}$ и $\mathbf{c}$ определяет значение энергии F_{int} .

Рассматриваемое формально, первое слагаемое в правой части (2.3) имеет вид энергии гейзенберговского антиферромагнетика, записанной в длинноволновом пределе. Чтобы лучше понять роль каждого слагаемого в свободной энергии и физический смысл компонент двухкомпонентного параметра порядка, необходимо пояснить, как и какие слагаемые гамильтониана

$$H = P \left[-t \sum_{\langle ij \rangle, \sigma} (c_{i\sigma}^+ c_{j\sigma} + \text{h.c.}) \right] P + J \sum_{\langle ij \rangle} \left(\mathbf{S}_i \mathbf{S}_j - \frac{1}{4} n_i n_j \right) \quad (2.4)$$

t – J -модели, являющейся стандартной при изучении различных фазовых состояний в допированных антиферромагнитных диэлектриках, определяют физический смысл переменных и форму модели (2.3). В выражении (2.4) $\mathbf{S}_i = c_{i\alpha}^+ \boldsymbol{\sigma}_{\alpha\beta} c_{i\beta}/2$, $n_{i,\sigma} = c_{i\sigma}^+ c_{i\sigma}$ и $P = \prod_i (1 - n_{i,\uparrow} n_{i,\downarrow})$. Устранение дважды оккупированных на узлах состояний, имеющих противоположно ориентированные спины, из гильбертового пространства состояний с помощью проектора Гюцвилера P превращает кинетическую энергию в (2.4) в слагаемое, которое существенно отличается от обычного квадратичного по фермионным операторам кинетического слагаемого в ферми-системах. С точки зрения теории среднего поля [9], сформулированной в терминах парных корреляционных функций операторов ψ_α и h_i , при факторизации $c_{i\sigma} = h_i^+ \psi_\alpha$ зарядовых и спиновых степеней свободы электронного оператора $c_{i\sigma}$ с помощью $SU(2)$ -дублетов

$$\psi_\uparrow = \begin{pmatrix} f_\uparrow \\ f_\uparrow^+ \end{pmatrix}, \quad \psi_\downarrow = \begin{pmatrix} f_\downarrow \\ -f_\downarrow^+ \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix},$$

как корреляционная функция $\chi_{ij} = \sum_\sigma \langle f_{i\sigma}^+ f_{j\sigma} \rangle$, описывающая перескок между узлами i и j , так и корреляционная функция $\Delta_{ij} = \langle f_{i\uparrow} f_{j\downarrow} - f_{i\downarrow} f_{j\uparrow} \rangle$, описывающая спаривание, подлежат определению из двух взаимозависимых уравнений самосогласования [19]. Эти корреляционные функции определяют вклад двух слагаемых, находящихся под корнем выражения

$$E_k = \sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta_k^2}$$

для спектра возбуждений. В этом заключается отличие от классической теории Бардина – Купера – Шриффера (БКШ), в которой часть, связанная с ξ_k , считается известной. В выражении (2.3) единичный вектор $\mathbf{n} = \bar{\chi}\boldsymbol{\sigma}\chi$, направленный в некоторую произвольную точку, указывает на соотношение между корреляциями, связанными с перескоком, и корреляциями, определяемыми спариванием электронных степеней свободы.

$SU(2)$ -симметричная матричная переменная

$$U_{ij} = \begin{pmatrix} -\chi_{ij}^+ & \Delta_{ij} \\ \Delta_{ij} & \chi_{ij} \end{pmatrix} = U_{ij}^{\text{d(sf)}} \exp(i\mathbf{a}_{ij}\boldsymbol{\sigma})$$

калибровочной теории сильных корреляций [9] определяется распределением амплитуд $U_{ij}^{\text{d(sf)}}$ перескока и спаривания соответственно в d -симметричном сверхпроводящем (U_{ij}^{d}) состоянии и в $U(1)$ -симметричной фазе с шахматным упорядочением потоков калибровочного поля $\mathbf{a}_{ij}$ через элементарную ячейку (U_{ij}^{sf}). Мы будем

предполагать, что для анализа, проведенного в настоящем обзоре, исходным является фазовое состояние с альтернативой циркуляций $U(1)$ -калибровочного поля $\mathbf{a}_{ij}$. Более сложный анализ, касающийся $SU(2)$ -симметричной фазы [9] с потоком калибровочного поля, равным π (см. раздел 5), базируется на эффективном лагранжиане $\mathcal{L}_{SU(2)} = (1/g^2) \text{Tr} F_{\mu\nu}^2$ теории Янга–Миллса, который возникает после интегрирования по фермионам $\psi_{i\sigma}$.

Обратим внимание на то, что двухкомпонентный параметр порядка функционала Гинзбурга–Ландау возникает также в теории с отталкиванием между частицами [20] при наличии в импульсном пространстве зеркального нестинга и существования одного (из двух возможных) отрицательного собственного значения интегрального оператора в уравнении самосогласования для аномальной корреляционной функции. Появление в этом случае дополнительных к связанному состоянию квазистационарных делокализованных состояний указывает на то, что возможно фазовое состояние, в котором этими модами пренебречь нельзя и в котором присутствуют сильные флуктуации кинетического слагаемого в энергии. В рассматриваемом подходе (см. также работу [20]) существенно неоднородное распределение фазовых состояний обусловлено антиферромагнитно коррелированными циркуляциями орбитальных токов с большим суммарным импульсом фермионных пар. В этом состоит отличие от случаев куперовских пар с их нулевым суммарным импульсом и состояния Фулде–Феррелла–Ларкина–Овчинникова, в котором возбуждения имеют малый суммарный импульс.

Собственная энергия H_{ik}^2 внутреннего магнитного поля $H_i = 1/2 \varepsilon_{iks} H_{ks}$ в длинноволновом пределе пропорциональна квадрату среднего значения $\langle 0 | \mathbf{S}_1 [\mathbf{S}_2 \times \mathbf{S}_3] | 0 \rangle$ степени спиновой неколлинеарности на трех узлах квадратной решетки. Магнитное поле появляется в результате того, что электрон удаляется из четвертого узла некоторых элементарных ячеек в резервуар допантов. Возникающие киральные распределения спиновых степеней свободы являются базисными для формирования квазиодномерных спиновых и зарядовых структур, которые рассматриваются в разделах 3, 4. В общем случае вклад таких структур в свободную энергию определяется значением слагаемого $(H_{ik} - F_{ik})^2$, которое содержит перекрестный член $-2H_{ik}F_{ik}$, отвечающий за взаимную связь токов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{c}$.

Модуляция обменного интеграла, задаваемая скалярным полем $\rho(x, y, z)$ и описывающая в (2.3) спиновую жесткость ρ^2 , зависит от уровня допирования. Действительно, в приближении среднего поля спиновая жесткость ρ^2 связана с плотностью ρ_h^2 положительно заряженных вакантных мест следующим соотношением: $\rho^2 + \rho_h^2 = 1$ [21]. В $U(1)$ - и $SU(2)$ -теориях допированных моттовских диэлектриков это соотношение для операторов заряженных бозонов без спина и нейтральных фермионов со спином $1/2$ обсуждается в обзоре [9].

Плотности энергии H_{ik}^2 и F_{ik}^2 локализованы на границах областей с ненулевой спиновой плотностью. Если $\rho^2 \lesssim 1$, то плотность дырок ρ_h^2 существует на пространстве, являющемся дополнительным по отношению к пространству определения спиновой плотности. С учетом этого обстоятельства и характера структуры распределений спиновых степеней свободы на решетке (см. рис. 4 в [5, с. 14]) в работе [22] был предложен низкоразмерный аналог голографического принципа. Его приме-

нение в планарных системах приводит к заключению, что распределение состояний с разрушенным антиферромагнитным порядком имеет квазиодномерный граничный характер.

Выражение (2.3) удобно для анализа различных фазовых состояний на фазовой диаграмме "уровень допирования–температура". Исходя из конфигураций поля $\mathbf{n}$ можно перечислить [9] теории среднего поля для фаз, характеризующихся развитыми квантовыми флуктуациями. Поэтому в дальнейшем анализе мы будем опираться на это выражение для свободной энергии, полагая его наиболее подходящим для описания распределений зарядовых и спиновых степеней свободы. Спиновый сектор теории описывается с помощью CP^1 -представления нелинейной $O(3)$ -сигма-модели, которое близко по форме к функционалу Гинзбурга–Ландау (2.1). Сравнивая различные формы представления модели Гинзбурга–Ландау, отметим [9], что вихревые конфигурации полей Ψ_α в модели (2.1) эквивалентны текстурным поля $\mathbf{n}$ в терминах модели (2.3). Обратим также внимание на то, что используемый анзац для компонент Ψ_α имеет смысл факторизации продольных ρ и поперечных χ_α степеней свободы. В сверхпроводящем состоянии существенную роль играет композиция спиновых и зарядовых степеней свободы.

2.2. Возможные фазовые состояния

В мягком варианте, $\rho \neq \text{const}$, расширенной модели $\mathbf{n}$ -поля (2.3) множители первого слагаемого в правой части (2.3) описывают влияние распределения спиновой жесткости ρ^2 на конфигурации поля $\mathbf{n}$ и распределения квадрата $(\partial_k \mathbf{n})^2$ обратной характерной длины изменения поля спиновой плотности на конфигурации поля ρ . О характере влияния поля $\mathbf{c}$ на конфигурации полей $\mathbf{n}$ и ρ можно судить, рассматривая уравнения движения:

$$[\mathbf{n} \times \Delta \mathbf{n}] + \frac{2}{\rho} (\partial_k \rho) [\mathbf{n} \times \partial_k \mathbf{n}] + \frac{8}{\rho^2} (\partial_i H_{ik}) (\partial_k \mathbf{n}) - \frac{2}{\rho^2} F_{ik} [\partial_i \mathbf{n} \times \partial_k \mathbf{n}] + \frac{4}{\rho^2} \partial_i \{ F_{ik} [\mathbf{n} \times \partial_k \mathbf{n}] \} = 0, \quad (2.5)$$

$$\Delta \rho + \left[b - \frac{1}{4} (\partial_k \mathbf{n})^2 - \frac{1}{16} \mathbf{c}^2 \right] - d \rho^3 = 0, \quad (2.6)$$

$$\partial_k F_{ki} - \partial_k H_{ki} - \frac{\rho^2}{32} c_i = 0. \quad (2.7)$$

При записи уравнений (2.5)–(2.7) ради простоты предполагалось, что потенциальная энергия равна $V = -b\rho^2 + (d/2)\rho^4$.

Из уравнений (2.5)–(2.7) видно, что конкуренция параметров порядка ρ , $\mathbf{n}$ и $\mathbf{c}$ может быть причиной совместного существования фазовых состояний с различным упорядочением зарядовых и спиновых степеней свободы. Перечислим предельные случаи модели (2.3) в неоднородных ($\mathbf{n} \neq \text{const}$) ситуациях.

1. Состояние при $\mathbf{n} \neq \text{const}$, $\mathbf{c} = 0$ и $\rho = \text{const}$.
2. Состояние при квазиодномерном распределении плотности ρ^2 и при $\mathbf{c} = 0$.
3. Неоднородное сверхпроводящее состояние при $\mathbf{c} \neq 0$, $\rho = \text{const}$.
4. Общий случай: присутствуют все параметры порядка и $\rho \neq \text{const}$.

В случае $\mathbf{n} = \text{const}$, $\mathbf{c} \neq 0$ и $\rho \neq \text{const}$ мы имеем классическую однокомпонентную модель Гинзбурга–Ландау с потенциалом $\mathbf{A}$ внешнего магнитного поля.

Перечисленные состояния изучались в недавно опубликованных работах. В разделе 3 мы подробно рассмотрим каждый случай из приведенного списка.

3. Границы свободной энергии

3.1. Модель Скирма–Фаддеева

Рассмотрим первый из перечисленных в разделе 2.2 случаев. В этом пределе свободная энергия равна

$$F = \int d^3x [g_1(\partial_k \mathbf{n})^2 + g_2(\mathbf{n}[\partial_i \mathbf{n} \times \partial_k \mathbf{n}])^2]. \quad (3.1)$$

Мы предположили, что в рассматриваемой фазе постоянное значение $\rho = \rho_0$ может быть найдено из минимума потенциала V , и ввели обозначение g_i для констант связи. Детальному изучению свойств модели (3.1) посвящены работы [23–29].

С помощью замены $x \rightarrow x/R$ нетрудно увидеть, что первое слагаемое в (3.1) пропорционально характерному размеру R конфигураций поля $\mathbf{n}$, а второе слагаемое обратно пропорционально этому масштабу (в разделах 3.2 и 4.1–4.4 мы уточним это заключение). Поэтому энергия (3.1) имеет минимум, равный $2\sqrt{g_1 g_2}$, который достигается при $R = \sqrt{g_2/g_1}$.

Таким образом, конечное значение энергии и пространственного масштаба клубка нитей определяются его ультрафиолетовой характеристикой — константой связи g_2 . Отсюда становится понятным также, почему второе слагаемое в модели (3.1) позволяет обойти запрет Деррика [30] на существование трехмерных статических конфигураций с конечным размером. В отсутствие этого слагаемого минимальному значению свободной энергии отвечают конфигурации поля с $R \rightarrow 0$. Как уже отмечалось в разделе 2.1, в длинноволновом пределе это трехчастичное слагаемое характеризует среднюю степень неколлинеарности $\langle 0 | \mathbf{S}_1 [\mathbf{S}_2 \times \mathbf{S}_3] | 0 \rangle$ в ориентации трех спинов, находящихся в узлах ячейки квадратной решетки.

В работах [27–29] было показано, что нижняя граница энергии в модели (3.1),

$$F \geq 32\pi^2 |Q|^{3/4}, \quad (3.2)$$

определяется инвариантом Хопфа [31, 32]

$$Q = \frac{1}{16\pi^2} \int d^3x \varepsilon_{ikl} a_i \partial_k a_l = \frac{1}{8\pi^2} \int d^3x \mathbf{a} [\nabla \times \mathbf{a}]. \quad (3.3)$$

Напомним, что калибровочный потенциал a_i в выражении (3.3) параметризует среднюю степень неколлинеарности ориентаций соседних спинов следующим образом: $H_{ik} = \mathbf{n}[\partial_i \mathbf{n} \times \partial_k \mathbf{n}] \equiv \partial_i a_k - \partial_k a_i$. Тот факт, что $F_{\min} \sim |Q|^{3/4}$ при $\alpha = 3/4 < 1$, означает стабильность конфигураций с большим значением Q по отношению к распаду на распределения с меньшим значением инварианта Хопфа. Подробный анализ проблемы для больших значений Q содержится в работе [33].

Зависимость $F_{\min} \sim |Q|^{3/4}$ (3.3) с использованием граничных условий $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ на пространственной бесконечности была подтверждена [24–26] численными расчетами конфигураций поля $\mathbf{n}$. Такое граничное условие означает, что пространство $\mathbf{R}^3$ определения поля $\mathbf{n}$ эффективно компактифицируется в трехмерную сферу $\mathbf{S}^3$. Тем самым поле единичного вектора $\mathbf{n}$ осуществляет отображение сферы $\mathbf{S}^3$ в пространство его значений, принадлежащих двумерной сфере $\mathbf{S}^2$.

Пусть вектор $\mathbf{n}$ направлен в некоторую произвольную точку двумерной сферы. Нас будет интересовать следующий вопрос: что является прообразом этой точки в пространстве $\mathbf{S}^3$? Или другими словами, какое многообразие точек из области определения вектора $\mathbf{n}(x, y, z)$ дает вклад в след вектора $\mathbf{n}$ на двумерной сфере? Поскольку пространство $\mathbf{S}^3$ компактно и его размерность на единицу больше размерности сферы $\mathbf{S}^2$, то прообразами точек на сфере $\mathbf{S}^2$ являются замкнутые и, вообще говоря, зацепленные линии на сфере $\mathbf{S}^3$. Целое число Q не может быть степенью отображения, так как базовое и целевое пространства имеют разные размерности. Инвариант Хопфа Q (3.3) описывает степень зацепления или заузленности линий на сфере $\mathbf{S}^3$. Он принадлежит множеству целых чисел $\mathbf{Z}$, которому равна рассматриваемая гомотопическая группа, $\pi_3(\mathbf{S}^2) = \mathbf{Z}$. В частности, для двух однократно зацепленных окружностей $Q = 1$, для одного из простейших узлов — трилистника — $Q = 6$ и т.д. (рис. 1).

По проблемам, связанным с теорией узлов и ее многочисленными приложениями, существуют обширная литература [34, 35], а также сетевые ресурсы [36–42], к которым может обратиться заинтересовавшийся этой областью читатель.

Обратим внимание на то, что инвариант Хопфа не может быть записан как интеграл от некоторой плотности, которая является локальной по полю $\mathbf{n}$. Подынтегральное выражение определяется потенциалом a и напряженностью H калибровочного поля. Если воспользоваться терминами дифференциальной геометрии, то

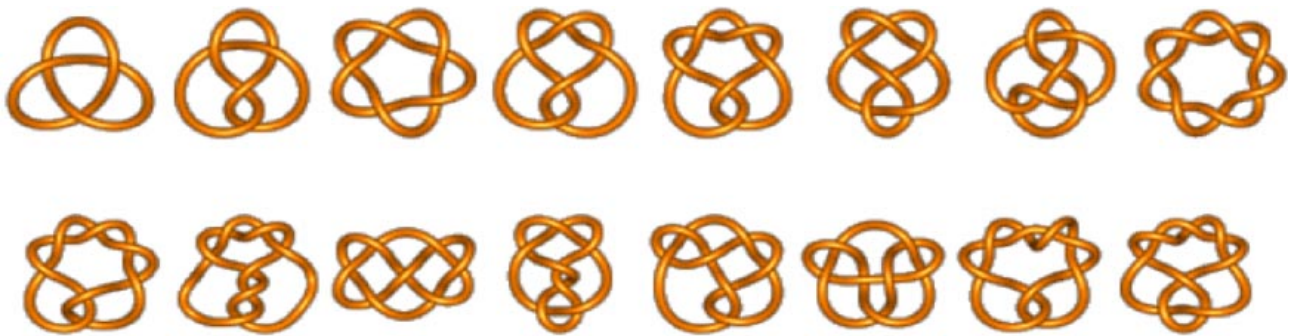


Рис. 1. Примеры простейших заузленных конфигураций.

можно записать

$$Q \sim \int_{S^3} H \wedge a.$$

Кроме того, 2-форма H из-за тривиальности ($H^2(S^3) = 0$) второй кохомологической группы S^3 -сферы $H^2(S^3)$ является точной. Это означает, что она всюду может быть выражена через потенциал как $H = da$.

Таким образом, все конфигурации поля $\mathbf{n}$ разбиваются на классы в соответствии со значениями инварианта Хопфа, который, в свою очередь, согласно соотношению (3.2) определяет иерархию локальных минимумов свободной энергии. Обратим внимание на то, что зацепленные или заузленные квазиодномерные конфигурации можно пронумеровать с помощью инварианта Хопфа только в случае косет-пространства $SU(2)/U(1) = CP^1 = S^2$, поскольку гомотопическая группа $\pi_3(CP^M) = 0$ при $M > 1$ тривиальна [43].

3.2. Токовые состояния

Рассмотрим распределения полей с отличным от нуля током $\mathbf{J}$, считая, что $\rho = \text{const}$. В этом случае свободная энергия имеет вид

$$F = F_n + F_c + F_{\text{int}} = \int d^3x \left\{ [(\partial_k \mathbf{n})^2 + H_{ik}^2] + \left(\frac{1}{4} \mathbf{c}^2 + F_{ik}^2 \right) - 2F_{ik}H_{ik} \right\}. \quad (3.4)$$

Знак минус в энергии взаимодействия F_{int} полей $\mathbf{c}$ и $\mathbf{n}$ отражает диамагнетизм ($\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{A}$) рассматриваемого состояния. Благодаря этому взаимодействию константа связи g_2 у слагаемого H_{ik}^2 модели (3.1), нормированная в выражении (3.4) на единицу, эффективно уменьшается из-за конкуренции токов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{c}$ так, что состояние с импульсом $\mathbf{c} \neq 0$ имеет энергию меньшую, чем минимальное значение в неравенстве (3.2).

Чтобы найти точную нижнюю границу свободной энергии в состоянии при $\mathbf{c} \neq 0$, мы будем использовать следующее вспомогательное неравенство:

$$F_n^{5/6} F_c^{1/2} \geq (32\pi^2)^{4/3} |L|, \quad (3.5)$$

где число

$$L = \frac{1}{16\pi^2} \int d^3x \varepsilon_{ikl} c_l \partial_k a_l \quad (3.6)$$

определяет степень взаимного зацепления [44–47] токовых линий и линий магнитного поля $\mathbf{H} = [\nabla \times \mathbf{a}]$. Доказательство неравенства (3.5) приведено в приложении. Индекс взаимного зацепления L так же, как и Q , является интегралом движения [45, 47] в баротропном состоянии.

Инвариант Хопфа Q и индекс взаимного зацепления L являются матричными элементами симметричной матрицы [44]

$$K_{\alpha\beta} = \frac{1}{16\pi^2} \int d^3x \varepsilon_{ikl} a_i^\alpha \partial_k a_l^\beta = \begin{pmatrix} Q & L' \\ L & Q' \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

характеризующей основанные на зацеплениях корреляции спиновых и зарядовых степеней свободы. В этой

матрице ($L = L'$) при $a_i^1 \equiv a_i$ и $a_i^2 \equiv c_i$ интеграл может быть определен также с помощью асимптотического числа зацеплений [44].

Обратим внимание на существенное для дальнейшего обстоятельство. Вектор импульса $\mathbf{c} = \mathbf{J}/\rho^2$, будучи нормированным на плотность, в отличие от единичного вектора $\mathbf{n}$, принадлежит некомпактному многообразию. Это приводит к тому, что определяемые с его помощью числа Хопфа в (3.7), вообще говоря, не являются целыми: $L, Q' \notin \mathbb{Z}$. В сверхпроводящем токовом состоянии, в котором абелева $U(1)$ -калибровочная симметрия нарушена и заряд не сохраняется, числа L и Q' играют роль непрерывных интерполяционных параметров, соединяющих рассматриваемую сжимаемую и несжимаемую ($K_{\alpha\beta} \in \mathbb{Z}$) фазы. С этой точки зрения сверхпроводящие состояния с $K_{\alpha\beta} \in \mathbb{Z}$ и $K_{\alpha\beta} \notin \mathbb{Z}$ принадлежат одному и тому же классу универсальности [48].

Для нахождения нижней границы функционала (3.5) мы будем опираться помимо неравенства (3.5) на неравенство Шварца–Коши–Буняковского

$$F_{\text{int}} \leq 2\|F_{ik}\|_2 \times \|H_{ik}\|_2 \leq 2F_c^{1/2} F_n^{1/2}. \quad (3.8)$$

Здесь $\|F_{ik}\|_2 \equiv [\int d^3x F_{ik}^2]^{1/2}$. Отметим, что равенство в правой части выражения (3.8) достигается в ультрафиолетовом пределе, когда размер зацепленных вихревых конфигураций достаточно мал. Подставляя граничное значение F_{int} в (3.4), получаем

$$F \geq F_{\min} = (F_n^{1/2} - F_c^{1/2})^2. \quad (3.9)$$

Конфигурация Хопфа с $Q = 1$, при которой в неравенстве (3.2) достигается нижний предел, представляет собой два зацепленных кольца с радиусами R [49] и $(F_n)_{\min} = 2\pi^2 R^3 (8/R^2 + 8/R^4)|_{R=1} = 32\pi^2$. Мы будем предполагать, что и в нашем случае $\mathbf{c} \neq 0$ существуют конфигурации, для которых справедливо равенство в выражении (3.5).

Обратим внимание на важное обстоятельство, которое мы более подробно обсудим в разделе 4.1. При малых значениях ρ и, следовательно, при больших значениях поля $\mathbf{c}$, поскольку все величины, входящие в (3.5) одного порядка, мы сталкиваемся с неустойчивостью зацепленных конфигураций относительно малых отклонений, что приводит к ограничению значений F_c сверху.

Учитывая это замечание, при подстановке в правую часть (3.9) соотношения $F_c^{1/2} = (32\pi^2)^{4/3} F_n^{-5/6} |L|$ для нижней границы F_c и $F_n = 32\pi^2 |Q|^{3/4}$ мы получим для состояний с $Q \neq 0$

$$F \geq 32\pi^2 |Q|^{3/4} \left(1 - \frac{|L|}{|Q|} \right)^2. \quad (3.10)$$

Из соотношения (3.10) видно, что для всех чисел $L < Q$ энергия основного состояния меньше, чем в модели (3.1), для которой справедливо неравенство (3.2). Причина уменьшения энергии может быть понята из сравнения величин, входящих в выражение (3.4). Даже в условиях существования значительного парамагнитного вклада $\mathbf{a}$ в ток $\mathbf{J}$ диамагнитное взаимодействие в сверхпроводящем состоянии для всех классов состояний с $L < Q$ уменьшает в (3.4) собственную энергию F_c тока и часть энергии F_n , связанной с динамикой поля $\mathbf{n}$. В рассматриваемом состоянии полный импульс $\mathbf{c}$ не равен

нулю. В этом отношении неоднородное состояние с током аналогично состоянию, предложенному в работах [50, 51]. Отметим, однако, что эта аналогия весьма ограничена, так как функционал Гинзбурга – Ландау для состояния Ларкина – Овчинникова – Фулде – Феррела, несмотря на присутствие более высоких степеней по производным, отличается [52, 53] от исходного выражения настоящего обзора.

4. Свойства фазовых состояний

4.1. Устойчивость узлов

Рассмотрим проблему устойчивости [29] стандартного отображения Хопфа $S^3 \rightarrow S^2$ при $Q = 1$:

$$\mathbf{n}\sigma = \psi^\dagger \sigma_3 \psi, \quad (4.1)$$

где

$$\psi = (1 - i\sigma)(1 + i\sigma)^{-1}. \quad (4.2)$$

В тороидальной системе координат

$$x + iy = \frac{\sinh u}{\cosh u + \cos \beta} \exp(i\alpha), \quad z = \frac{\sin \alpha}{\cosh u + \cos \beta}, \quad (4.3)$$

$$0 \leq u < \infty, \quad 0 < \alpha < 2\pi, \quad 0 < \beta < 2\pi,$$

$$\tan \frac{n_1}{n_2} = \alpha - \beta, \quad n_3 = 1 - 2 \tanh u. \quad (4.4)$$

Из приведенных выражений следует [54], что все пространство расслаивается на торы $u = \text{const}$, а любая вихревая линия наматывается на тор, делая при $Q = 1$ один виток.

В случае произвольного значения Q отображение Хопфа Φ может быть описано следующим образом. Пусть произвольной точке на сфере S^3 соответствует пара комплексных чисел (z^0, z^1) , удовлетворяющих условию $z^a \bar{z}_a = 1$, где $\bar{z}_0 = \bar{z}^0$ и $\bar{z}_1 = \bar{z}^1$. Отображение Хопфа определяет соответствие между этой точкой (точнее между точками на трехмерной сфере, принадлежащими замкнутой кривой) и точкой из пространства $CP^1 = S^2$, имеющего однородные координаты z^0, z^1 . Энергия такого отображения Φ на сфере S^3 с радиусом R постоянна и при $Q = 1$ равна $F = 16\pi^2(R + R^{-1}) \geq 32\pi^2$.

Оба слагаемых в последнем выражении стационарны по отношению к вариациям полей. Другими словами, Φ является решением уравнений движения при всех значениях радиуса R . Ограничение свободной энергии снизу указывает на то, что, вообще говоря, следует ожидать неустойчивости решения при достаточно большом масштабе R . Поскольку неустойчивость заузленных конфигураций поля $\mathbf{n}$ при достаточно большом R имеет существенное значение при дальнейшем изложении, рассмотрим ее более подробно.

Энергия $F[\Phi + \delta\Phi]$ для отображения Хопфа $\Phi + \delta\Phi$ выражается в виде

$$F[\Phi + \delta\Phi] = F[\Phi] + \int_M d^3x E[\delta\Phi, \partial_i \delta\Phi],$$

где $E[\delta\Phi, \partial_i \delta\Phi]$ — квадратичная по своим аргументам функция, область M в данном случае соответствует

сфере. Нас будет интересовать возможность существования отрицательных собственных значений квадратичной формы $\delta F = \int_M d^3x E[\delta\Phi, \partial_i \delta\Phi]$.

Переменные z^a преобразуются под действием операторов из фундаментального представления группы $U(2)$. Отображение Хопфа Φ инвариантно относительно действия $U(2)$ в том смысле, что $\Phi(z^a)$ и $\Phi(U_b^a z^b)$ эквивалентны при $SO(3)$ -преобразованиях целевого пространства S^2 . Следовательно, группа $U(2)$ также действует на целевом пространстве при отображении Φ , т.е. она действует и на пространстве возмущений $\delta\Phi$. Поэтому мы можем разложить пространство возмущений по неприводимым представлениям группы $U(2)$ и рассматривать возмущение следующим образом.

Возмущенное поле отображает z^a в точку пространства CP^1 с однородными координатами $z^a + \theta^a$, где

$$\theta^a = T_{mn\dots r}^{ab\dots d} \bar{z}_b \dots \bar{z}_d z^m \dots z^r,$$

$T_{mn\dots r}^{ab\dots d}$ — постоянный инфинитезимальный тензор. В терминах единичного вектора $\mathbf{n}(z^a, \bar{z}_a)$ отображение Хопфа Φ выражается как

$$n_1 + n_2 = 2z^0 \bar{z}_1, \\ n_3 = z^1 \bar{z}_1 - z^0 \bar{z}_0,$$

а обсуждаемые возмущения равны $\delta n_a(z^a, \bar{z}_a)$, где

$$\delta n_1 + i\delta n_2 = 2(\bar{z}_1)^2 \omega - 2(z^0)^2 \bar{\omega}, \\ \delta n_3 = -2\bar{z}_0 \bar{z}_1 \omega - 2z^0 z^1 \bar{\omega},$$

$$\omega = \bar{z}\theta^0 - z^0\theta^1.$$

Для нескольких первых мод изменения энергии δF определяются следующим образом.

1. Если $\theta^a = t^a$ постоянно, то $\delta F = 4\pi^2(t^a \bar{t}_a)(2/R - R)$. Эти моды "положительны" при $R < \sqrt{2}$ и отрицательны при $R > \sqrt{2}$. Таким образом, отображение Хопфа, действительно, оказывается неустойчивым при $R > \sqrt{2}$.

2. Если $\theta^a = t^{ab} \bar{z}_b$ при асимметричной матрице t^{ab} , то $\delta F = 0$, т.е. в этом случае мы имеем нулевую моду.

3. Если $\theta^a = t_m^a z^m$ при $t_a^a = 0$ и $\bar{t}_m^a = t_m^a$, то $\delta F = 128\pi^2(t_a^b \bar{t}_b^a)/(3R)$. Такие возмущения положительны при всех R .

Таким образом, мы видим, что возмущение отображения Хопфа содержит отрицательную моду при $R > \sqrt{2}$.

Рассмотрим однопараметрическое семейство конфигураций с $Q = 1$, которое содержит отображение Хопфа и одну из отрицательных мод. Это семейство полей Φ_λ с положительным параметром λ геометрически может быть описано [29] следующим образом. Обозначим через P стереографическую проекцию $S^3 \rightarrow R^3$, а операцию растяжения на пространстве R^3 с постоянным масштабным множителем $\lambda > 0$ обозначим как D_λ . Семейство полей Φ_λ определим следующим образом: $\Phi_\lambda := \Phi \circ P^{-1} \circ D_\lambda \circ P$. Энергия этих полей равна

$$F_\lambda[\Phi_\lambda] = \frac{64\pi^2 \lambda R}{(\lambda + 1)^2} + \frac{8\pi^2(\lambda^2 + 1)}{\lambda R}.$$

При $\lambda = 1$ мы имеем уже известный результат $F_1 = 16\pi^2(R + R^{-1})$.

Из вычисления значения λ , при котором энергия $F_\lambda[\Phi_\lambda]$ имеет минимум, следует, что если $R < \sqrt{2}$, то

минимум существует при отображении Хопфа с $\lambda = 1$. Если же $R > \sqrt{2}$, то минимум $F_\lambda[\Phi_\lambda]$ достигается, когда λ является одним из корней уравнения

$$\lambda^2 + 2(1 - \sqrt{2}R)\lambda + 1 = 0.$$

В последнем случае минимальное значение энергии равно $F_{\lambda \min} = 32\sqrt{2}\pi^2 - 16\pi^2/R$. Это решение, вместо того, чтобы быть распределенным по всему пространству S^3 , локализуется в окрестности некоторой выделенной точки — базовой точки стереографической проекции. В пределе $R \rightarrow \infty$ мы имеем конфигурации с энергией $F_{\min}(R \rightarrow \infty) = 32\sqrt{2}\pi^2$ и $Q = 1$ на пространстве R^3 . Эти конфигурации состоят из обратной P^{-1} -стереографической проекции $R^3 \rightarrow S^3$ и из следующим за ней отображением Хопфа Φ .

В качестве примера конфигураций с $Q \geq 1$ рассмотрим поля, которые отображают (z^0, z^1) в точку с однородными координатами $[(z^0)^m/|z^0|^{m-1}, (z^1)^n/|z^1|^{n-1}]$. Для отображения Хопфа $m = 1, n = 1$. При $m > 1, n > 1$ инвариант Хопфа и энергия равны [29]:

$$Q = mn,$$

$$F = 8\pi^2 R + 4\pi^2(m^2 + n^2)\left(R + \frac{2}{R}\right).$$

Если энергию F минимизировать по радиусу R , то мы получим

$$F_{\min} = 8\pi^2 \sqrt{2(m^2 + n^2)(2 + m^2 + n^2)}$$

при

$$R = \left(\frac{2}{1 + 2/(m^2 + n^2)}\right)^{1/2}.$$

Из последнего выражения видно, что характерный размер оптимальных конфигураций с $Q > 1$ слегка увеличивается, поскольку принадлежит интервалу $1 < R < \sqrt{2}$.

4.2. Плотность как константа связи

Состояние с нарушенным антиферромагнитным порядком на границе областей, где $(\partial_k \rho)^2 \neq 0$, является фоном, на котором осуществляется переход в неоднородную сверхпроводящую фазу с $F_{ik} \neq 0$. Обсуждение свойств этого перехода при изменении плотности ρ^2 нам удобно провести начиная со сверхпроводящего состояния при $\rho = \text{const}$. В этой фазе характерное значение плотности ρ_0^2 играет роль управляющего параметра системы.

Пусть параметр ρ_0 изменяется в некотором интервале. Так как все слагаемые в выражении (2.3) одного порядка, то при увеличении ρ_0 импульс s и, следовательно, индекс взаимного зацепления L уменьшаются. Возрастание ρ_0 означает, что концентрация вакантных мест, так называемых дырок, уменьшается. В этом случае при достаточно малом L выигрыш в свободной энергии в (3.10) на фоне большого значения $32\pi^2|Q|^{3/4}$ убывает.

При уменьшении ρ_0 возникает следующий эффект. Радиус $\mathcal{R}$ компактификации $R^3 \rightarrow S^3$, будучи пропорциональным $R \sim g_1^{-1/2} \sim \rho_0^{-1}$ (см. (2.3) и обсуждение, следующее за (3.1)), возрастает до тех пор, пока не превысит

некоторого критического значения R_{cr} . Как мы видели в разделе 4.1, при $\mathcal{R} > R_{\text{cr}} = \sqrt{2}$ отображение Хопфа неустойчиво [29] относительно малых возмущений зацепленных конфигураций поля. В результате $U(2)$ -симметрия, которая связана с отображением Хопфа, оказывается спонтанно нарушенной. Это означает, что топологические конфигурации поля $\mathbf{n}$ и $\mathbf{s}$ вместо того, чтобы распределяться по всему пространству S^3 , собираются около некоторой точки (базовой точки стереографической проекции $R^3 \rightarrow S^3$) и коллапсируют в локализованные структуры [29]. Таким образом, мы видим, что существует оптимальное значение ρ_0 и, следовательно, значения характерного импульса s и отношения $|L|/|Q|$, при которых возникает наибольший выигрыш при переходе в сверхпроводящее состояние. Более подробно эти проблемы обсуждаются в разделах 4.3–4.6.

4.3. Кольца против полосок

Рассмотрим состояния вне сверхпроводящей фазы (вторая строка списка предельных случаев раздела 2.2). В этом мягком варианте модели функционал (2.3) принимает вид

$$F = \int d^3x \left[\frac{1}{4} \rho^2 (\partial_k \mathbf{n})^2 + (\partial_k \rho)^2 + H_{ik}^2 - b\rho^2 + \frac{d}{2} \rho^4 \right]. \quad (4.5)$$

В выражении (4.5) фазе с некоторым характерным значением ρ_0 соответствует положительная константа b .

Из многочисленных экспериментов хорошо известно, что в фазовом состоянии с разрушенным из-за допирования антиферромагнитным порядком квазиодномерные распределения плотности заряда $\rho_h^2 = 1 - \rho^2$ имеют форму полосок. Квазиодномерные конфигурации поля ρ в (4.5), действительно, более выгодны, поскольку благодаря градиентному слагаемому $(\partial_k \rho)^2$ проигрыш в свободной энергии для них является наименьшим. Вследствие того, что для замкнутых конфигураций градиентный проигрыш на концах отсутствует, распределение плотности в форме колец по сравнению с другими квазиодномерными конфигурациями распределения плотности дает наименьший вклад в энергию.

Сравним вклад в свободную энергию (4.5) от квазиодномерных распределений плотности ρ^2 в форме колец и полосок и сопоставим результаты вычислений [22] с экспериментальными данными. Выберем в качестве пробных функций конфигурации поля ρ в форме колец и полосок:

$$\rho = \rho_0 \exp \left[-\frac{(r - r_0)^2}{2R_0^2} \right] \quad (4.6)$$

и

$$\rho = \rho_0 \exp \left(-\frac{x^2}{2L_x^2} \right) \begin{cases} 1, & |y| \leq L_y, \\ \exp \left[-\frac{(|y| - L_y)^2}{2L_x^2} \right], & |y| > L_y. \end{cases} \quad (4.7)$$

Здесь $\rho_0 = \sqrt{b/d}$, r_0 — радиус кольца, R_0 — его ширина, $2L_y = 2\pi r_0$ — длина полоски, $L_x = R_0$ — ее ширина. Так как конфигурации (4.6) и (4.7) не зависят от третьей координаты, то мы будем считать, что размер вдоль нее ограничен длиной L_z , а также полагать, что $R_0 < r_0$ и $L_x < L_y$.

Вычисление энергии (2.5) с учетом (2.6) и (2.7) дает следующий результат [22] для вклада в свободную энергию от кольца F_r и полосы F_{xy} :

$$F_r = \pi \rho_0^2 L_z \frac{\bar{r}_0}{R_0} \left(1 + \frac{R_0^2}{\xi^2} \right), \quad (4.8)$$

$$F_{xy} = \pi \rho_0^2 L_z \frac{\bar{r}_0}{R_0} \left(1 + \frac{R_0^2}{\xi^2} + \frac{R_0}{\bar{r}_0} + \left(n_0 - \frac{3}{4} b \right) \frac{R_0^3}{\bar{r}_0} \right). \quad (4.9)$$

Здесь $\bar{r}_0 = \sqrt{\pi} r_0$, $\xi^{-2} = 2[n_0 - (1 - 1/\sqrt{8})b]$, n_0 — некоторое характерное значение "множителя" $(\partial_k \mathbf{n})^2$ в (4.8), которое по порядку величины равно $c_1 R_0^{-2}$, тогда как $b = c_2 R_0^{-2} \delta T$, где $c_i \sim 1$ и $\delta T = (T_c - T)/T_c$.

Для оптимальной ширины $R_0 = \xi$ (при $R_0 \ll r_0$) разность свободных энергий $\Delta F = F_{xy} - F_r$ в единицах $\pi \rho_0^2 L_z$ имеет вид

$$\Delta F = 1 + c_1 - c_2 \delta T.$$

Из этого выражения следует, что при $(1 + c_1)/c_2 < 1$ в области температур

$$\left(1 - \frac{1 + c_1}{c_2} \right) < \frac{T}{T_c} < 1,$$

примыкающей к критической температуре T_c перехода в состояние со спиновой псевдощелью, предпочтение следует отдать кольцам. В этом состоянии корреляционная длина $\xi \sim R_0 \sim 10 \text{ \AA}$. В области температур

$$T < T_c \left(1 - \frac{1 + c_1}{c_2} \right),$$

далеких от T_c , основными конфигурациями являются полосы. Как известно, приближаться к T_c , поддерживая постоянную температуру, можно за счет увеличения уровня допирования. Именно при такой постановке эксперимента недавно были получены [55, 56] свидетельства существования кольцеобразных зарядовых структур в недодопированных фазовых состояниях.

Рассмотрим зависимость критической температуры T_c от уровня допирования. Для этого представим отношение F_r к F_{xy} следующим образом:

$$\frac{F_r}{F_{xy}} = \frac{1}{1 + BR_0/\bar{r}_0}, \quad (4.10)$$

где

$$B = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{n_0 - 3/4 b}{n_0 - (1 - 1/\sqrt{8})b} \right] = \frac{3}{4} \frac{n_0 - 0,68 b}{n_0 - 0,65 b}.$$

Отсюда следует, что при $B < 0$ конфигурации в виде полосок являются энергетически более выгодными по сравнению с кольцеобразными конфигурациями в интервале $0,65 < n_0/b < 0,68$, где $F_{xy} < F_r$.

Нормируя плотность ρ_0^2 на число N допируемых частиц с помощью условия $N = 2\pi r_0 \xi L_z m \rho_0^2$, получим соотношение между параметрами n_0 и b , которое запишем в виде $x = b/\sqrt{n_0 - 0,65b}$, где $x = Nd/(\sqrt{2}m\pi L_z r_0)$. Отсюда для границ рассмотренного выше интервала, когда $n_0 \sim b \sim \delta T$, имеем $T(p) = T_c(1 - Ap^2)$ с константой $A = (c_1 - 0,65 c_2)/c_2^2$ и степенью допирования $p =$

$= xR_0 = \sqrt{2}NR_0^2/(2\pi r_0 L_z)$. В последнем выражении множитель $R_0^2/(2\pi r_0 L_z)$ определяет степень заполнения 3D-пространства квазиодномерными конфигурациями с нарушенным антиферромагнитным порядком.

Таким образом мы видим, что на фазовой диаграмме "уровень допирования – температура" внутри области, соответствующей фазовому состоянию с разрушенным антиферромагнитным порядком, существует место для зарядовых структур в форме полосок. Отношение вкладов в свободную энергию от колец и полосок зависит от отношения корреляционного масштаба $R_0 \sim \xi$ к характерной длине r_0 нитеобразных конфигураций неоднородного поля обменного взаимодействия. От значения этого параметра, геометрический смысл которого обсуждается в разделе 4.4, зависит величина выигрыша в свободной энергии для замкнутых (при $B > 0$) квазиодномерных конфигураций.

4.4. Торондные состояния

Замкнутые квазиодномерные конфигурации в форме колец и полосок в модели (2.3) с плотностью свободной энергии

$$f = (\partial_k \rho)^2 + V_{\text{eff}}(\rho) + (F_{ik} - H_{ik})^2,$$

где

$$V_{\text{eff}} = -b_{\text{eff}} \rho^2 + \frac{d}{2} \rho^4$$

и

$$b_{\text{eff}} = b - \frac{1}{16} \mathbf{c}^2 - \frac{1}{4} (\partial_k \mathbf{n})^2,$$

существуют в различных фазовых состояниях [57, 58]. В фазе, где $b_{\text{eff}} < 0$, $\rho_{\min} = 0$. Из выражения для эффективной потенциальной энергии V_{eff} следует, что неоднородные распределения полей имеют место только в случае $b_{\text{eff}} > 0$. С изменением уровня допирования при приближении к фазовому состоянию с $b_{\text{eff}} > 0$ доля квазиодномерных конфигураций с замкнутыми концами возрастает. В фазе с $b_{\text{eff}} > 0$ возможны [58] квазиодномерные конфигурации с длиной l , которая удовлетворяет условию $l\rho_{\min} = 2\pi l$.

В основном состоянии с импульсом $\mathbf{c} = 0$ значение $\rho_{\min}$ амплитуды поля Хиггса в основном состоянии определяется вкладом $(1/4)(\partial_k \mathbf{n})^2$ характерных конфигураций поля $\mathbf{n}$. В этом случае распределения в форме колец, как мы видели в разделе 4.5, являются типичными конфигурациями поля ρ [22]. Для больших значений параметра соизмеримости $l\rho_{\min}$ ($l\rho_{\min} > 2\pi$) в основном состоянии существуют замкнутые квазиодномерные конфигурации поля ρ . Для более коротких ($0 < l\rho_{\min} < 2\pi$) конфигураций поля ρ в основном состоянии можно найти квазиодномерные распределения поля в виде полосок.

Итак, в магнито-неоднородных фазовых состояниях мы сталкиваемся с внутренней иерархической многомасштабной структурой, определяемой плотностью, которая оказывается критичной для описания свойств этих фаз. Мы видим также, что состояние с конечным значением поля импульса $\mathbf{c}$ характеризуется конкурирующими параметрами порядка $\mathbf{n}$, $\mathbf{c}$, между которыми

существуют нелокальные корреляции из-за эффекта запутывания их квазиодномерных распределений¹.

Этот вывод совпадает с одним из главных утверждений работы [60] о том, что неоднородные токовые состояния не могут быть описаны стандартным образом в терминах функционала Гинзбурга–Ландау с одним векторным параметром порядка. В нашем случае существование неоднородных токовых состояний в теории Гинзбурга–Ландау обеспечивается нелинейной связью нескольких параметров порядка. К аналогичному заключению можно прийти исходя из решеточного описания токовых состояний [9] в шахматно-упорядоченных потоковых фазах, рассматривая зарядовые и спиновые степени свободы электронов в модели (2.4) в приближении среднего поля. Фазы с током [61–69] и так называемые состояния d-density wave [70–75], т.е. фазы с модуляцией плотности тока (при суммарной плотности тока, равной нулю), представляют собой примеры реализаций тороидных состояний [60, 61, 76].

Основная особенность модели (2.3) — компактность поля $\mathbf{n}$, которая приводит к его одномерным распределениям в форме узлов и к дискретному характеру спектра (3.2). В этом отношении рассматриваемое явление подобно эффекту Березинского–Костерлица–Таулеса, являясь его 3D-аналогом.

В этом разделе мы сконцентрируем внимание на анализе общей ситуации, в которой присутствуют все неоднородные параметры порядка. Напомним, что в случае $\mathbf{c} \neq 0$ и $\rho \neq \text{const}$ характерный размер узла R в минимуме энергии $F_{\mathbf{n}}$ пропорционален ρ^{-1} . С увеличением уровня допирования $\rho_{\text{н}}^2$, т.е. с уменьшением ρ^2 , радиус $R \sim 1/\rho$ возрастает до тех пор, пока не достигнет своего критического размера $R_{\text{cr}} = \sqrt{2}$. В разделе 4.1 было показано, что начиная с этого значения радиуса формирующие узел конфигурации поля $\mathbf{n}$ становятся неустойчивыми [29] относительно возмущений, связанных с изменением масштаба. Это свойство является ключевым при сравнении различных вкладов в свободную энергию в неоднородных токовых состояниях с достаточно малым значением ρ^2 .

Для того чтобы описать распределения сильно коррелированных зарядовых и спиновых степеней свободы при достаточно малой плотности ρ^2 , мы можем ввести малый параметр $\alpha = R_0/R$, где R_0 — корреляционная длина распределений поля $\mathbf{n}$ и $\mathbf{c}$. Геометрически радиус R_0 представляет собой толщину нитей, на которых определены конфигурации полей. Типичное значение R_0 составляет порядка 10 Å, т.е. равно трем-четырем постоянным решеткам. Характерный размер R имеет смысл [76] эффективного радиуса токовых корреляций. Параметр Гинзбурга в этом случае гораздо меньше

единицы, что оправдывает использование приближения среднего поля (2.3).

Предположим, что $R_0 < R < R_{\text{cr}}$, и сравним уменьшение свободной энергии (2.3) из-за диамагнитного взаимодействия $-2F_{ik}H_{ik}$ с ее возрастанием вследствие неоднородного распределения плотности с $(\partial_k \rho)^2 \neq 0$. В то время как вклад диамагнитного слагаемого $-2F_{ik}H_{ik}$ составляет величину порядка c_0/R_0^3 , где c_0 — характерное значение поля импульса $\mathbf{c}$, вклад слагаемого $(\partial_k \rho)^2$ можно оценить как $1/(RR_0)^2$. Выигрыш в энергии, обусловленный $-2F_{ik}H_{ik}$, очевидно, также должен быть больше проигрыша, связанного с другими положительными слагаемыми в выражении (2.3), т.е. с поверхностным слагаемым $F_{ik}^2 \sim c_0^2/R_0^2$ и плотностью энергии тока $\rho^2 \mathbf{c}^2 \sim F_{ik}^2(R_0/R)^2$.

Объединяя эти неравенства, мы видим, что если при $\alpha = (R_0/R)^2 \ll 1$ значение импульса удовлетворяет неравенству

$$\frac{\alpha}{R_0} < c_0 < \frac{1}{R_0}, \quad (4.11)$$

то даже в состоянии с неоднородным распределением плотности ρ^2 свободная энергия может быть меньше, чем при $\mathbf{c} = 0$ и $\rho = \text{const}$. Это связано с эффективным уменьшением вклада парамагнитного слагаемого H_{ik}^2 .

Параметр $\alpha = R_0^2/R^2$ пропорционален отношению объема, занятого клубком из запутанных нитей, к объему пространства, в котором размещается клубок. Другими словами, α имеет смысл степени упаковки нитей в трехмерном клубке с характерным размером R и является искомым малым параметром в рассматриваемой ситуации, когда все константы связи равны единице. Этот параметр входит в отношение свободных энергий (4.10) и в выражение для зависимости температуры $T(\rho)$ от степени допирования. В случае $\mathbf{n} = \text{const}$ параметр α пропорционален κ^{-2} , где $\kappa = \lambda/\xi$ — параметр Гинзбурга–Ландау, λ — лондоновская длина.

Чтобы найти условия существования состояния с энергией, которая меньше, чем при $\mathbf{c} = 0$, и импульсом из интервала (4.11), сравним выигрыш c_0/R_0^3 в плотности свободной энергии, связанный со слагаемым $-2F_{ik}H_{ik}$, с вкладом слагаемого $(\partial_k \rho)^2$. Проигрыш в полной свободной энергии составляет величину порядка R_z/R_0^2 . Здесь R_z — вертикальный размер узла. Таким образом, энергия конденсации, равная $-64\pi^2 Q^{3/4}(L/Q)$ при $\rho = \text{const}$ и $L \ll Q$, в неоднородном случае уменьшается. Оценка наименьшего значения выигрыша $-\Delta F$ в свободной энергии для достаточно плоских узлов с $R_0 < R_z < R < R_{\text{cr}}$ дает $\Delta F \simeq (64\pi^2/Q^{1/4})\alpha$. Мы видим, что энергия заузленных конфигураций в неоднородных токовых состояниях может быть меньше, чем в состоянии при $\mathbf{c} = 0$.

Для достаточно малого уровня допирования, $\rho_{\text{н}}^2 = 1 - \rho^2 \ll 1$, спиновая плотность ρ^2 велика и размер узла R настолько мал, что $\alpha \lesssim 1$. Уменьшение степени α упаковки нитей в узле с возрастанием $\rho_{\text{н}}$ сопровождается переходом в состояние, в котором среди планарных проекций $\rho(x, y)$ полевые конфигурации в форме замкнутых квазиодномерных распределений оказываются предпочтительными [22]. Будут ли граничные зарядовые состояния вблизи краев диэлектрических островов формировать бесконечный перколяционный кластер зависит от значения плотности дырок $\rho_{\text{н}}^2$. Этот вопрос более подробно обсуждается в разделе 4.5.

¹ При динамическом описании в $(2+1)\text{D}$ -системах нелокальное взаимодействие между электронами описывается с помощью статистических калибровочных полей Черна–Саймонса a_α^i , которые порождают сильные корреляции фаз фермионных квантовых состояний на больших расстояниях. Матрица переплетения k_{ij} мировых линий в действии Черна–Саймонса

$$S = \frac{k_{ij}}{4\pi} \int_{\mathcal{M}} d^3x \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} a_\alpha^i \partial_\beta a_\gamma^j$$

в этом случае пропорциональна [59] матрице $K_{\alpha\beta}$ (3.7), описывающей степень заузленности или зацепления одномерных конфигураций полей в $(3+0)\text{D}$ -свободной энергии (2.3).

Пусть уровень допирования недостаточен для возникновения протяженного связанного кластера. В соответствии с предложением Гинзбурга мы будем называть это состояние со спонтанным сверхдиамагнетизмом тороидным состоянием [76, 77]. Фазовое состояние, в котором упорядочение контуров с диамагнитным поверхностным током характеризуется полярным вектором T , меняющим знак при обращении времени, может быть связано с упорядочением локальных тороидных моментов.

Тороидный момент определяется следующим образом [78–80]:

$$\mathbf{a} = \text{rot rot } \mathbf{T}. \quad (4.12)$$

Используя определение тороидного момента (4.12) и тождество [18]

$$(\text{rot } \mathbf{a})_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ikl} \mathbf{n} [\partial_k \mathbf{n} \times \partial_l \mathbf{n}], \quad (4.13)$$

тороидный момент можно выразить через киральную плотность $\mathbf{n} [\partial_k \mathbf{n} \times \partial_l \mathbf{n}]$ в виде

$$T_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{16\pi^2} \int d^3 r' \left[\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \int d^3 r'' \frac{\mathbf{n} [\partial_k \mathbf{n} \times \partial_l \mathbf{n}]}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|} \right]. \quad (4.14)$$

Электро- и магнитостатические характеристики объединены в выражении (4.14) в виде свертки двух множителей. Первый из них имеет вид закона Био–Савара, а второй определяется кулоновской функцией Грина. Вектор $\mathbf{T}$ характеризует распределение полоидальной компоненты тока на торе [79, 80]. Магнитное поле этого тока локализовано внутри тора.

Для локализованной в точке степени неколлинеарности $\mathbf{n} [\partial_k \mathbf{n} \times \partial_l \mathbf{n}] = \varepsilon_{kij} \delta(\mathbf{r})$ распределений спина тороидный момент имеет вид

$$T_i(\mathbf{r}) = \frac{\varepsilon_{kij}}{16\pi^2} \int d^3 r' \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')_k}{r' |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\varepsilon_{kij} x_k}{8\pi r}. \quad (4.15)$$

Если киральная плотность

$$\mathbf{n} [\partial_k \mathbf{n} \times \partial_l \mathbf{n}] = \frac{\varepsilon_{kij}}{2\pi R} \delta(z) \delta(r - R)$$

спиновых распределений локализована в плоскости $z = 0$ на кольце с радиусом R , то тороидный момент равен $T_i(r, z = 0) = \varepsilon_{kij} (x_i/r) t(r)$, где $t(r)$ — функция, имеющая максимум при $r = R$, при $r \gg R$ $t(r) \sim r^{-2}$.

В тороидном состоянии диамагнитная восприимчивость χ' определяется [76] радиусом R электронных токовых корреляций таким образом, что $\chi' = \chi_L/\alpha$, где $\chi_L = -e^2 k_F / (12\pi^2 m c^2)$ — диамагнитная восприимчивость Ландау для невзаимодействующих электронов. Для пористых узлов с $\alpha \ll 1$ диамагнитная восприимчивость χ' может быть сравнима с идеальной $\chi_{id} = -1/4\pi$: $\chi' \sim -(10^{-3} - 10^{-2})$, тогда как для обычных диамагнитных материалов $|\chi'| \leq 10^{-4} \ll |\chi_{id}|$. Аномально большая диамагнитная восприимчивость обусловлена большим радиусом R токовых корреляций. Следует также отметить, что условие [81] $\chi_L \sim -e^2 n r^2 / (m c^2) > -1/4\pi$, которое формально эквивалентно неравенству $r < r_D = c/\omega_p$, отражает граничный (поверхностный) характер рассматриваемых явлений. Здесь n — средняя электронная плотность, r_D — радиус Дебая и $\omega_p = (4\pi e^2 n / m)^{1/2}$ — плазменная частота.

Тороидное состояние характеризуется нулевым суммарным магнитным моментом кластера, нулевым значением суммарного потока магнитного поля и отличным от нуля векторным потенциалом $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (3(\mathbf{nT})\mathbf{n} - \mathbf{T})/r^3$. Так же, как и поле диполя, векторный потенциал имеет проекцию на направление $\mathbf{T}$, которая пропорциональна d -симметричному полиному Лежандра.

Место тороидного состояния в классификации возможных состояний в кристаллах определяется его симметричными свойствами. Из общего числа 122 магнитных классов тороидное состояние свойственно только системам, принадлежащим 31 подклассу магнитной симметрии, в которых может существовать вектор $\mathbf{T}$ [81]. Внутри этого подкласса имеется, естественно, 10 классов, не содержащих преобразования инверсии направления всех токов. В этих классах возможно проявление пирозлектрического эффекта.

Симметрия сред с ненулевой плотностью тороидного момента допускает существование магнитоэлектрического эффекта [82]. Вектор $\mathbf{T}$ в этом случае дуален антисимметричной компоненте магнитоэлектрического тензора. Среды с магнитоэлектрическим эффектом могут не обладать тороидным моментом, поскольку среды с $\mathbf{T} \neq 0$ образуют подмножество совокупности 58 классов, которые могут иметь магнитоэлектрический эффект. С точки зрения теории представлений пространственных магнитных групп в тороидном состоянии возможны различные структуры, а именно: антитороидные, неколлинеарные, разупорядоченные и т.д.

Условиям для реализации [81] тороидного состояния легко удовлетворить

- вблизи неоднородностей;
- в системах с сильными электронными корреляциями;
- в случае антиферромагнитного состояния, формирующаяся на фоне которого тороидная фаза является наиболее вероятным состоянием;
- при наличии содействующих условий в присутствии заряженных и магнитных примесей, т.е. дырок и динамических неколлинеарных спиновых распределений в нашем случае;
- при сильном спин-орбитальном взаимодействии, которое также способствует появлению эффектов, связанных с тороидным упорядочением.

4.5. Планарные явления в 3D-пространстве

В условиях, когда все константы взаимодействия в (2.3) равны единице², главным объектом исследования становятся геометрические свойства и топология заузленных одномерных многообразий области определения параметра порядка, дающей основной вклад в свободную энергию. Одним из результатов этого подхода является возникновение геометрического параметра $\alpha = (R_0/R)^2 < 1$, характеризующего степень упаковки нитей в узле. Существование минимального значения поля ρ^2 , играющего роль текущей константы в выражении (2.3), т.е. минимального значения $\alpha_{\min} = (R_0/R_{cr})^2$, аналогично существованию нетривиального решения для сверхпроводящей щели в двухкомпонентной модели [83], которое возникает, в отличие от решения в рамках

² В этом состоит одна из причин, почему обсуждаемую проблему нельзя пока решить даже численно.

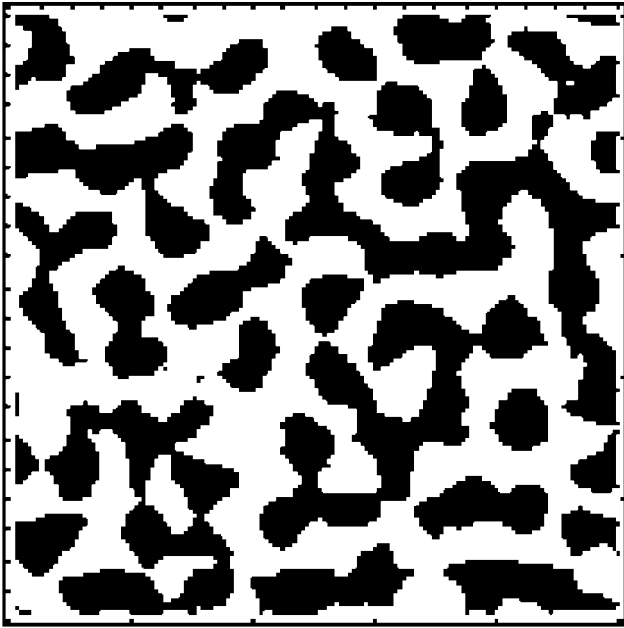


Рис. 2. Двумерное распределение фазовых состояний в сечении клубка заузленных квазиодномерных 3D-конфигураций параметров порядка.

модели БКШ, начиная с конечного значения константы взаимодействия.

Геометрические свойства одномерных многообразий в трехмерном пространстве естественно изучать [84, 85], рассматривая геометрию случайных планарных изображений, получающихся в результате разреза 3D-узла. Некоторое представление о распределении [85, 86] расслоенных фазовых состояний, которое возникает в сечении, можно получить из рис. 2.

Выберем такой текущий параметр $\rho^2 \sim 1/R^2$, при котором $\alpha_{\min} < \alpha \ll 1$, и спроектируем дополнительные к узлам пространства, которые натянута на узлы (так называемые поверхности Зейферта), на плоскость xu . В теории узлов поверхности Зейферта являются эффективным средством для нахождения алгебраических характеристик узлов. В рассматриваемом случае поверхности Зейферта используются для визуализации распределений физических степеней свободы.

Для определенности рассмотрим узел-трилистник, являющийся узлом с $Q = 6$. Дополнительным пространством к нему является трижды перекрученная и склеенная лента, а также поверхность Зейферта в виде тора с дыркой³ (рис. 3). Как уже подчеркивалось, зарядовые степени свободы распределены начиная с края дополнительного пространства для узлов. Пусть площадь той части области, которая связана с проекцией поверхности Зейферта на плоскость, невелика по сравнению с площадью проекции узла. Для существенно плоского узла [87] с $R_z < R < R_{cr}$ граничная область представляет собой кольцо, которое является проекцией на плоскость этих одномерных краевых конфигураций. Для узла, вытянутого при $R < R_z < R_{cr}$ вдоль оси z ,

краевая линия эквивалентна полоске длиной порядка R_0 , равной масштабу спроектированной на плоскость дырки на торе. Суммируя мы видим, что выигрыш в свободной энергии в неоднородном тороидном состоянии достигается при распределениях плотности заряда в плоскости в форме колец.

Изучение таких конфигураций зарядовой плотности основано на измерениях локальной плотности состояний с помощью туннельной микроскопии. Формирование распределений плотности состояний в форме колец недавно было открыто в экспериментах [56] по изучению запутанных лабиринтообразных структур квазиодномерных распределений плотности заряда в планарных соединениях $\text{Ca}_{2-x}\text{Na}_x\text{CuO}_2\text{Cl}_2$ при умеренном уровне допирования x .

4.6. Оптимальное допирование

При достаточно малом уровне допирования размер узла R настолько мал, что $\alpha \lesssim 1$. Уменьшение степени α упаковки нитей в узле с возрастанием ρ_n сопровождается переходом в состояние, в котором среди планарных проекций $\rho(x, y)$ полевые конфигурации в форме замкнутых квазиодномерных распределений оказываются предпочтительными [22]. Будет ли фазовое состояние при $\alpha_{cr} < \alpha \ll 1$ и конечном импульсе c_0 электронных пар [50, 51] сверхпроводящим или окажется промежуточным состоянием со спонтанным сверхдиамагнетизмом [76, 81], возможно, зависит от связности совокупности планарных токовых кластеров (см., например, [88]), сформированных проекциями поверхностей Зейферта на плоскость.

Естественно полагать [89], что появление предварительно формирующихся пар в недодопированном состоянии и фазовая когерентность в сверхпроводящей фазе — независимые явления. Рассмотрим, начиная с картины предварительно сформированных пар, некоторые особенности фазовой когерентности, обусловленные явлениями перколяции [90], с использованием упомянутых структур плотности заряда. С увеличением плотности дырок ρ_n^2 размер кольцеобразных токовых распределений возрастает настолько, что оказываются возможными появление двумерного связного токового кластера и переход в состояние с импульсом $c \neq 0$ при выигрыше в свободной энергии. Найдем уровень допирования p_{best} , при котором температура перехода в сверхпроводящее состояние максимальна.

Если бы мы не приняли во внимание распределения зарядовых степеней свободы на границах нитевидных конфигураций поля $\mathbf{n}$ в узле, то мы имели бы дело с 2D-перколяционной проблемой с хорошо известным [88] результатом $p_{cr} = 0,5$ для критического значения плотности в задаче о перколяции по звеньям. Существенное отличие экспериментально наблюдаемой величины $p_{\text{best, exp}} = 0,16$ от этого значения представляет собой удобный тест для проверки справедливости рассматриваемого подхода.

С целью проведения такой проверки мы будем опираться на недавние экспериментальные результаты [56]. С помощью сканирующего туннельного микроскопа [56] было обнаружено, что в среде квазиодномерных конфигураций с возрастанием плотности зарядовых состояний в недодопированной области доля нитевидных распределений поля в форме кольцеобразных структур возрастает с увеличением уровня допирования.

³ Переплетение нити трилистника, вытянутого вдоль временной оси, можно рассматривать в динамическом $(2+1)\text{D}$ -случае как результат действия b_1^3 на квантовые состояния оператора b_1 группы кос.

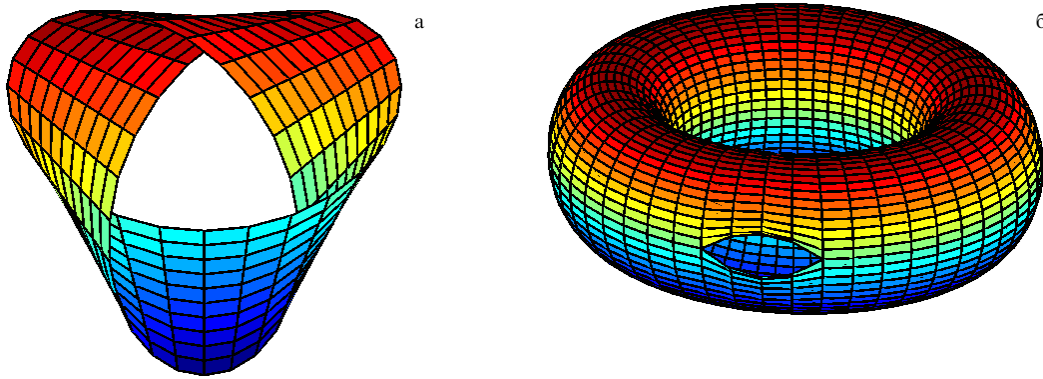


Рис. 3. Поверхности, натянутые на плоский (а) и вытянутый вдоль оси z (б) трилистник.

Используя пробные функции, мы убедились, что в рамках модели (2.3) такие конфигурации действительно оказываются предпочтительными при возрастании уровня допирования. Интерпретация результатов измерения характера распределений спиновых степеней свободы в недодопированных состояниях на основе данных по рассеянию нейтронов также основывается на предположении о квазиодномерных наномасштабных распределениях в плоскостях зарядовых кластеров в форме тонких колец.

Пусть краевые токи распределены вдоль границ кольцевых диэлектрических областей таким образом, что толщина кольца отличается от его диаметра, как это следует из результатов эксперимента [56], на величину порядка $\alpha^{1/2} = R_0/R \simeq 0,1$. Геометрический конфайнмент позволяет отнести вклад внутренних (по отношению к кольцеобразным зарядовым конфигурациям) спиновых распределений степеней свободы к нормировочному фону. Поэтому для порога возникновения связанного кластера, сформированного идеальным распределением в виде колец, мы имеем существенно меньшее значение, $p_{\text{best}} = 0,5 - \pi\alpha^{1/2} = 0,186$, по сравнению со стандартным $p_{\text{cr}} = 0,5$. Для токовой ячейки в форме шестиугольника $p_{\text{best}} = 0,179$. Этот пример указывает на то, что сравнительно небольшие отклонения формы элементарной токовой ячейки от идеальной кольцеобразной формы могут привести к сближению значения p_{best} и экспериментально наблюдаемого значения $p_{\text{best, exp}} = 0,16$. Если вместо диэлектрического кластера в форме круга взять квадрат, ограниченный зарядовыми распределениями в форме полосок, то мы получим $p_{\text{best}} = 0,5 - 4\alpha^{1/2} = 0,1$.

Изучение общих свойств фазовых состояний в высокотемпературных сверхпроводниках, принадлежащих различным классам соединений, например $\text{Y}_{1-x}\text{Ca}_x\text{Ba}_2\text{Cu}_3\text{O}_6$ или $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{Cu}_4$, показывает, что зависимость критической температуры от дырочной концентрации хорошо аппроксимируется [91, 92] кривой $T_c/T_{c, \text{max}} = 1 - 82,6(p - 0,16)^2$ при $p = x/2$. Параболическая зависимость $T_c(p)$ имеет нули при $p_{\text{min}} \approx 0,05$, $p_{\text{max}} \approx 0,27$ и достигает максимума при $p_{\text{best}} = 0,16$. В оптимально допированных соединениях на основе таллия, например в $\text{Tl}_{0,5}\text{Pb}_{0,5}\text{Sr}_2\text{Ca}_{0,8}\text{Y}_{0,2}\text{Cu}_2\text{O}_7$, $p_{\text{best}} = 0,15$. Результаты исследований некоторых других классов высокотемпературных сверхпроводников дают близкие значения. Отметим также, что недодопированная псевдошелевая фаза с развитыми зарядовыми и спиновыми

флуктуациями появляется на фоне сверхпроводящего состояния в вышеупомянутых классах соединений при хорошо определенной [93] дырочной концентрации $p \approx 0,19$.

5. Неабелева калибровочная теория

5.1. Монополи, мероны и узлы в теории Янга–Миллса

До сих пор рассматривалась нерелятивистская $(3 + 0)\text{D}$ -модель с решениями уравнений движения в виде квазиодномерных заузленных полевых конфигураций. Релятивистской теорией, содержащей узлы [1, 94], является калибровочная теория Янга–Миллса. Различные способы смещения лоренцевских индексов и индексов внутренних степеней свободы потенциалов неабелевой калибровочной теории позволяют единым образом описывать [94] точечные монопольные конфигурации и протяженные объекты в форме узлов. В ультрафиолетовой области теория описывается стандартным действием Янга–Миллса

$$S = \frac{1}{g^2} \int d^4x \text{Tr} \mathbf{F}_{\mu\nu}^2, \quad (5.1)$$

где

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu + [\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_\nu], \quad (5.2)$$

g — затравочная константа связи.

Наиболее полный анзац [94–96] для параметризации $\text{SU}(2)$ -потенциалов $\mathbf{A}_\mu = A_\mu^a \tau^a / 2i$, где τ^a — матрицы Паули, имеет следующий вид:

$$A_\mu^a = C_\mu n^a + \sigma \partial_\mu n^a + (1 + K) \varepsilon_{abc} n^c \partial_\mu n^b. \quad (5.3)$$

Калибровочно фиксированные четырехмерные $\text{SU}(2)$ -связности $\mathbf{A}_\mu$ содержат шесть степеней свободы [94]: две поперечные поляризации $\text{U}(1)$ -потенциалов C_μ , две независимые компоненты поля единичного вектора n^a и две скалярные функции σ , K . Скаляры σ и K удобно объединить в комплексное поле $\phi = \sigma + iK$, входящее в мультиплет (C_μ, ϕ) , который преобразуется подобно мультиплету в абелевой модели Хиггса. Мультиплет (C_μ, ϕ) обладает тем свойством, что при $\text{SU}(2)$ -калибровочных преобразованиях с параметром $\alpha^a = \alpha n^a$ функциональная форма A_μ^a остается прежней.

После вычисления напряженности, равной

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} = \mathbf{n} \{ G_{\mu\nu} - [1 - (\sigma^2 + K^2)] H_{\mu\nu} \} + (D_\mu \sigma \partial_\nu \mathbf{n} - D_\nu \sigma \partial_\mu \mathbf{n}) + (D_\mu K [\partial_\nu \mathbf{n} \times \mathbf{n}] - D_\nu K [\partial_\mu \mathbf{n} \times \mathbf{n}]), \quad (5.4)$$

и варьирования действия (5.1) по полям $C_\mu, \phi, \mathbf{n}$ получим уравнения движения

$$\mathbf{n} \nabla_\mu \mathbf{F}_{\mu\nu} = 0, \quad (5.5)$$

$$\partial_\nu \mathbf{n} \nabla_\mu \mathbf{F}_{\mu\nu} = 0, \quad (5.6)$$

$$[\partial_\nu \mathbf{n} \times \mathbf{n}] \nabla_\mu \mathbf{F}_{\mu\nu} = 0, \quad (5.7)$$

$$(D_\nu \sigma + D_\nu K \mathbf{n}) \nabla_\mu \mathbf{F}_{\mu\nu} = 0, \quad (5.8)$$

которые пропорциональны уравнениям Янга–Миллса $\nabla_\mu \mathbf{F}_{\mu\nu} = 0$, вычисленным с использованием потенциалов (5.3). Здесь $D_\mu = \partial_\mu + i C_\mu$ и ∇_μ — соответственно U(1)- и SU(2)-ковариантные производные, $G_{\mu\nu} = \partial_\nu C_\mu - \partial_\mu C_\nu$, $H_{\mu\nu} = \mathbf{n} [\partial_\mu \mathbf{n} \times \partial_\nu \mathbf{n}]$.

Чтобы увидеть, что плотность функции Лагранжа L содержит структуру, которая может привести к появлению слагаемого F_n в выражении (2.3), ограничимся случаем $C_\mu = \sigma = 0$. Тогда

$$L = \frac{2}{g^2} \{ \delta_{\mu\nu} (\partial_\lambda \mathbf{n})^2 - (\partial_\mu \mathbf{n}) (\partial_\nu \mathbf{n}) \} \partial^\mu K \partial^\nu K - \frac{1}{g^2} \{ \mathbf{n} [\partial_\mu \mathbf{n}, \partial_\nu \mathbf{n}] \}^2 (K^2 - 1)^2. \quad (5.9)$$

Из выражения (5.9) следует, что благодаря факторизации кинетического и потенциального слагаемых множители в фигурных скобках у членов правой части, соответствующие кинетической и потенциальной энергиям, играют роль текущих констант связи для поля K , и наоборот. Поэтому при условии $\mathbf{n} \neq \mathbf{r}/r$ после усреднения по полям K возникает возможность получить первые два слагаемые в (2.3).

Требование, которое заключается в том, чтобы в каждой точке с координатами, определяемыми радиус-вектором $\mathbf{r}$, вектор $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ отслеживал направление на эту точку, существенно фиксирует динамику поля $\mathbf{n}$. В этом случае проблема значительно упрощается. Действительно, в таком "ежистом" варианте $A_k^a = \varepsilon^{akc} n^c (K + 1)/r$ и

$$\{ \delta_{\mu\nu} (\partial_\lambda \mathbf{n})^2 - (\partial_\mu \mathbf{n}) (\partial_\nu \mathbf{n}) \} = \frac{\delta_{\mu\nu}}{r^2}, \quad (\mathbf{n} [\partial_\mu \mathbf{n}, \partial_\nu \mathbf{n}])^2 = \frac{1}{r^4}.$$

Плотность функции Лагранжа и уравнение движения для скалярного поля $K(r, t)$ принимают вид

$$L = \frac{2}{g^2 r^2} (\partial_\mu K)^2 - \frac{1}{g^2 r^4} (K^2 - 1)^2, \quad (5.10)$$

$$r^2 \square K = K(K^2 - 1), \quad \square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial r^2}. \quad (5.11)$$

Сингулярное решение уравнений движения $K = 0$ приводит к монополю конфигурации Ву–Янга [97] $A_k^a = \varepsilon^{akc} n^c / r$. Плавные распределения поля $\mathbf{n}$, использованные в выражении для потенциала $A_i^a = \varepsilon_{abc} \partial_i n^b n^c$, в этом случае описывают конденсацию монополей.

Простейшим решением уравнений (5.11) является меронная конфигурация [98] $K = t/\sqrt{t^2 - r^2}$. Будучи решением уравнений движения, мерон характеризуется топологическим зарядом, равным $1/2$, и логарифмически

расходящимся действием. Многомерные распределения поля K изучены в работах [98–101]. При этом использовался цилиндрически симметричный анзац [102, 103], который содержится в (5.3) в случае $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$. Общим свойством решений уравнения (5.11) является наличие сингулярностей поля K на замкнутых поверхностях, находящихся на конечном расстоянии от начала координат $\mathbf{r} = 0$ [101]. Наличие таких сингулярностей делает невозможным рассмотрение инфракрасного предела в ситуации, когда цветовые степени свободы поля $\mathbf{n}$ коллинеарны радиус-вектору $\mathbf{r}$.

Противоположный предельный случай соответствует рассмотрению ориентационной динамики поля $\mathbf{n}$ при фиксации скалярных степеней свободы поля K . Изучение возможных фазовых состояний [57, 58, 104, 105] в теории Янга–Миллса в этом случае может быть проведено с помощью функционального интегрирования по абелеву хиггсовскому мультиплету и последующего градиентного разложения вильсоновского эффективного действия для параметра порядка $\mathbf{n}$. Эта проблема изучалась в работах [106–109], в которых установлено, что полное эффективное действие для низкоэнергетических степеней свободы $\mathbf{n}$ в теории Янга–Миллса будет содержать известные нам из (2.3) два слагаемых в выражении

$$L = \frac{\mu^2}{2} (\partial_\mu \mathbf{n})^2 - \frac{\alpha}{4} (\mathbf{n} [\partial_\mu \mathbf{n}, \partial_\nu \mathbf{n}])^2. \quad (5.12)$$

Здесь μ — массовый масштаб и α — эффективная константа связи. Кроме первого, отсутствовавшего в безмассовой теории (5.1) массивного слагаемого, который определяет динамику $\mathbf{n}$ -поля на больших расстояниях, при учете младших петлевых диаграмм в выражении (5.12) появляются также дополнительные слагаемые, содержащие [106–109] производные вида $(\partial_\mu \mathbf{n})^4$ и $(\partial^2 \mathbf{n} \partial^2 \mathbf{n})$. Причем, поскольку

$$(\mathbf{n} \partial_\mu \mathbf{n} \times \partial_\nu \mathbf{n})^2 = (\mathbf{n})^4 + (\partial_\mu \mathbf{n} \partial_\nu \mathbf{n})^2,$$

то нет оснований ожидать, что оба слагаемых в этом выражении должны иметь одинаковые константы связи после перенормировок.

Появление гипотезы работы [94] об инфракрасном пределе теории Янга–Миллса в форме (5.12) было мотивировано стремлением получить желаемую гамильтонову структуру действия, что требует отсутствия третьей и более высоких производных по времени. Как было показано в работах [106–109], ковариантная ренормгруппа не заботится о гамильтоновой интерпретации окончательного результата — желаемое упрощение портится из-за появления слагаемых с производными вида $(\partial_\mu \mathbf{n})^4$ и $(\partial^2 \mathbf{n} \partial^2 \mathbf{n})$. При этом общий вывод о существовании заузленных солитоноподобных конфигураций поля $\mathbf{n}$ как важных инфракрасных степеней свободы теории Янга–Миллса остается в силе.

Наиболее простой анализ случая $\mathbf{n} \neq \mathbf{r}/r$ с неизвестной функцией K можно провести, подставляя последнее слагаемое в (5.3) в уравнения самодуальности. Для рассматриваемой низкой симметрии [28]:

$$G = \text{diag} [O(2)_1 \otimes O(2)_S],$$

где $O(2)_1$ и $O(2)_S$ — группы вращений соответственно вокруг осей N_3 и z , эти уравнения, которые отличаются от

уравнений в сферически симметричном [110, 111] и аксиально-симметричном [102, 103] случаях, имеют вид [112]

$$[\partial_\tau \mathbf{n}, \partial_k \mathbf{n}] = \frac{1}{2} \varepsilon_{kms} [\partial_m \mathbf{n}, \partial_s \mathbf{n}], \quad (5.13)$$

$$\partial_\tau K \partial_k \mathbf{n} - \partial_k K \partial_\tau \mathbf{n} = \frac{1}{2} \varepsilon_{kms} \{\partial_m K \partial_s \mathbf{n} - \partial_s K \partial_m \mathbf{n}\}, \quad (5.14)$$

где $\tau = it$ — евклидово время. Так как гомотопическая группа $\pi_4(\mathrm{SU}(2)) = \mathbb{Z}_2$ нетривиальна [113], существует, по крайней мере, один нетривиальный класс конфигураций полей K и $\mathbf{n}$.

5.2. Узлы как основные состояния

Предложение интерпретировать $\mathrm{SU}(2)$ -вакуумные конфигурации калибровочного поля в терминах узлов было высказано в работах [59, 114]. Рассмотрим основанный на идее абелевой проекции подход этих работ.

Абелево проектирование было введено [104, 105] для того, чтобы при подходящем выборе калибровки разложить неабелево калибровочное поле на его нейтральные и заряженные компоненты. В простейшей форме абелево проектирование включает в себя выбор некоторой наблюдаемой $X(x)$, например экспоненты Полякова, которая преобразуется при калибровочных преобразованиях как $g^\dagger(x) X(x) g(x)$, что можно использовать для диагонализации $X(x)$. Это можно сделать плавным образом, если матрица g не имеет совпадающих собственных значений. Остающаяся калибровочная свобода есть $U(1)^r$, где r — ранг калибровочной группы. Степени свободы в такой калибровке ассоциируются с r нейтральными бозонами.

Сингулярности возникают, когда два или более собственных значения совпадают. Это приводит к точечноподобным сингулярностям, представляющим магнитные монополи, определенным по отношению к остаточной абелевой калибровочной группе. Более плавную (но не локальную) абелеву фиксацию калибровки можно ввести [104], взяв абелево поле как фон (например $\mathrm{SU}(2)$ -компоненту, пропорциональную $\tau_3 = \mathrm{diag}(1, -1)$) и налагая фоновое калибровочное условие на заряженные компоненты A_μ^{ch} калибровочного поля. Калибровочное условие можно сформулировать, минимизируя функциональный интеграл $\int |A_\mu^{\mathrm{ch}}|^2$ по калибровочным орбитам.

Абелево проектирование позволяет идентифицировать поле $\mathbf{n}(x)$ нелинейной $O(3)$ -сигма-модели с локальным цветовым направлением в $\mathrm{SU}(2)$ -калибровочной теории. Общие сомнения в справедливости такого подхода состоят в том, что из-за калибровочной инвариантности нельзя ожидать независимой динамики для магнитных переменных, ассоциированных с цветовым направлением. Из анализа возможностей следует необходимость введения дуальных переменных, которые рассматриваются в разделе 5.5. Более того, голстоуновские бозоны [114], которые связаны со спонтанным нарушением $O(3)$ -симметрии нелинейной сигма-модели в размерности $(3+1)$, нежелательны в неабелевой калибровочной теории без частиц.

Покажем, следуя работам [59, 115], что, тем не менее, поле $\mathbf{n}$, выразив его предварительно через CP^1 -переменные, можно связать с $\mathrm{SU}(2)$ -калибровочным полем, имеющим нулевое значение напряженности. Это приводит к интерпретации таких чисто вакуумных конфигура-

ций (в частной максимальной абелевой калибровке) в терминах узлов с инвариантом Хопфа, равным числу намоток калибровочных конфигураций. При этой идентификации $(\partial_\mu \mathbf{n}(x))^2 = 4|A_\mu^{\mathrm{ch}}|^2$. Рассмотрим эффективное низкоэнергетическое представление $\mathrm{SU}(2)$ -калибровочной теории с $(3+1)\mathrm{D}$ -действием, определенным в терминах поля единичного вектора $\mathbf{n}(x)$:

$$S = \int d^4x \left(\partial_\mu \mathbf{n}(x) \partial^\mu \mathbf{n}(x) - \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right). \quad (5.15)$$

Здесь напряженность калибровочного поля

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \mathbf{n}(x) (\partial_\mu \mathbf{n}(x) \wedge \partial_\nu \mathbf{n}(x)).$$

Пользуясь возможностью преобразования масштабов координат и действия, мы положили в (5.12) $\mu^2 = \alpha = 2$, а также обратились к компактным обозначениям дифференциальной геометрии. Поскольку производные $\partial_\mu \mathbf{n}(x)$ трехмерного единичного вектора перпендикулярны $\mathbf{n}(x)$, то $\partial_\mu \mathbf{n}(x) \wedge \partial_\nu \mathbf{n}(x)$ пропорционален $\mathbf{n}(x)$ с множителем пропорциональности, равным $2F_{\mu\nu}(x)$. Поэтому

$$F_{\mu\nu}^2 = \frac{1}{4} (\partial_\mu \mathbf{n}(x) \wedge \partial_\nu \mathbf{n}(x))^2.$$

Конечное значение энергии

$$E = \int d^3x \left[(\partial_i \mathbf{n}(x))^2 + \frac{1}{2} F_{ij}^2(x) \right] \geq c|Q|^{3/4} \quad (5.16)$$

требует, чтобы $\mathbf{n}(x)$ стремился к постоянному вектору на пространственной бесконечности. Значение константы $c = 16\pi^2 3^{3/8} \sim 238$ [28] было поправлено в работе [29].

Две степени свободы, связанные с полем $\mathbf{n}$, эквивалентны двум компонентам CP^1 -поля Ψ , определенным с точностью до общего масштабного комплексного множителя, равного по модулю единице. Это вытекает из следующего соотношения:

$$n^a(x) = \Psi^\dagger(x) \tau^a \Psi(x). \quad (5.17)$$

Абелева калибровочная инвариантность CP^1 -модели приводит к составному калибровочному полю

$$A_\mu(x) = -i\Psi^\dagger(x) \partial_\mu \Psi(x). \quad (5.18)$$

Прямым вычислением можно проверить, что 2-форма $F(x) = \mathbf{n}(x) (d\mathbf{n}(x) \wedge d\mathbf{n}(x))$ точно определяет 1-форму $A(x)$ абелева калибровочного поля соотношением $F(x) = dA(x)$. В терминах потенциала $A(x)$ плотность инварианта Хопфа равна $A(x) \wedge F(x)$. При вычислениях использовались следующие полезные соотношения: $\delta_{ij} \delta_{kl} + \tau_{ij}^a \tau_{kl}^a = 2\delta_{il} \delta_{jk}$ и $i\varepsilon_{abc} \tau_{ij}^b \tau_{kl}^c = \tau_{kj}^a \delta_{il} - \tau_{il}^a \delta_{jk}$.

В этой формулировке

$$S = \int d^4x \left(4(D_\mu \Psi)^\dagger(x) D^\mu \Psi(x) - \frac{1}{2} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) \right), \quad (5.19)$$

где $D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu(x)$ — ковариантная производная. Причем $\Psi^\dagger(x) D_\mu \Psi(x) = 0$ и $E = \int d^3x |(2D_t + B_i(x)) \Psi(x)|^2$ с $B_i = 1/2 \varepsilon_{ijk} F_{jk}$.

В следующем шаге переформулировки модели используется тот факт, что любой двухкомпонентный комплексный вектор с единичной длиной один к одному

соответствует элементу $g(x)$ группы $SU(2)$. Поэтому мы можем написать $\Psi(x) = g(x)\Psi_0$. Для удобства выберем $\Psi_0^\dagger = (1, 0)$, так что

$$n^a(x) = \frac{1}{2} \text{Tr} (\tau_3 g^\dagger(x) \tau_a g(x)). \quad (5.20)$$

Введем токи $J_\mu(x) \equiv i\tau_a J_\mu^a(x) \equiv g^\dagger(x) \partial_\mu g(x)$. Их можно интерпретировать как компоненты калибровочной $SU(2)$ -связности с нулевой напряженностью, т.е. $G(x) = dJ(x) + J(x) \wedge J(x) = 0$, где $J(x) \equiv J_\mu(x) dx_\mu$. Записывая в компонентах, имеем

$$G_{\mu\nu}^a(x) = \partial_\mu J_\nu^a(x) - \partial_\nu J_\mu^a(x) - 2(J_\mu^1(x)J_\nu^2(x) - J_\nu^1(x)J_\mu^2(x)) = 0.$$

Простое вычисление позволяет установить, что

$$A_\mu(x) = J_\mu^3(x), \quad \partial_\mu \Psi^\dagger(x) \partial^\mu \Psi(x) = J_\mu^a(x) J_\mu^a(x). \quad (5.21)$$

Нулевая напряженность неабелева поля приводит к тождеству

$$F_{\mu\nu}(x) = 2(J_\mu^1(x)J_\nu^2(x) - J_\nu^1(x)J_\mu^2(x)), \quad (5.22)$$

или

$$F(x) = dJ^3(x) = 2J^1(x) \wedge J^2(x) \quad (5.23)$$

в терминах $J^a \equiv J_\mu^a(x) dx_\mu$.

С помощью соотношения (5.22) теперь нетрудно показать [59, 115, 116], используя $J(x) = g^\dagger(x) dg(x)$, что инвариант Хопфа в точности равен числу намоток калибровочной функции $g(\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi^2} A(\mathbf{x}) \wedge F(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2\pi^2} J^3(\mathbf{x}) \wedge J^1(\mathbf{x}) \wedge J^2(\mathbf{x}) = \\ &= \frac{1}{24\pi^2} \text{Tr} (g^\dagger(\mathbf{x}) dg(\mathbf{x}))^3. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Напомним, что калибровочная функция $g(\mathbf{x})$ входит в соотношение $n^a(\mathbf{x})\tau^a = g(\mathbf{x})\tau_3 g^\dagger(\mathbf{x})$ и определяет $SU(2)$ -калибровочный потенциал $J(\mathbf{x})$ с нулевым значением напряженности. Левая часть в выражении (5.24) может, конечно, выражаться [106] также через плотность неабелева слагаемого Черна–Саймонса:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi^2} A(\mathbf{x}) \wedge F(\mathbf{x}) &= \\ &= -\frac{1}{8\pi^2} \text{Tr} \left(J(\mathbf{x}) \wedge dJ(\mathbf{x}) + \frac{2}{3} J(\mathbf{x}) \wedge J(\mathbf{x}) \wedge J(\mathbf{x}) \right). \end{aligned} \quad (5.25)$$

Чтобы увидеть, что статические решения модели (5.15) действительно представляют собой основные состояния классической теории Янга–Миллса в нелинейной максимально абелевой калибровке, рассмотрим соотношение

$$\begin{aligned} (D_\mu \Psi)^\dagger(x) D^\mu \Psi(x) &= \partial_\mu \Psi^\dagger(x) \partial^\mu \Psi(x) - A_\mu(x) A^\mu(x) = \\ &= J_\mu^1(x) J_\mu^1(x) + J_\mu^2(x) J_\mu^2(x). \end{aligned} \quad (5.26)$$

Соотношение (5.26) в отсутствие нейтральной компоненты $J_\mu^3(x)$ отражает в $SU(2)/U(1)$ природу действия модели (5.19), поскольку оба слагаемых в (5.19) записаны только в терминах $J_\mu^1(x)$ и $J_\mu^2(x)$. Так, например, энергия

статических конфигураций выражается только через заряженные компоненты неабелева калибровочного поля:

$$\begin{aligned} E &= \int d^3x \left(4(J_i^1(\mathbf{x}) J_i^1(\mathbf{x}) + J_i^2(\mathbf{x}) J_i^2(\mathbf{x})) + \right. \\ &\quad \left. + 2(J_i^1(\mathbf{x}) J_j^2(\mathbf{x}) - J_j^1(\mathbf{x}) J_i^2(\mathbf{x}))^2 \right). \end{aligned} \quad (5.27)$$

Первое слагаемое здесь в точности соответствует функционалу, определяющему максимальную абелеву калибровку посредством минимизации вдоль калибровочных орбит, оставляющих генерируемую с помощью τ_3 абелеву подгруппу незафиксированной [104]. Это утверждение остается справедливым и для полного функционала (5.27), который может быть также интерпретирован как фиксирующий калибровку функционал в случае нелинейной максимальной абелевой калибровки. До тех пор, пока три параметризации эквивалентны, мы вправе интерпретировать минимумы функционала для энергии в секторе с данным значением Q как калибровочно фиксированные чисто калибровочные связности (т.е. потенциалы с напряженностью, равной нулю) в секторе с числом намоток Q калибровочного поля.

Упомянувшиеся в этом разделе и разделе 5.1 трудности в интерпретации модели (5.15) как эффективного низкоэнергетического представления $SU(2)$ -калибровочной теории [94, 106, 117], по-видимому, связаны с тем [59], что разложение согласно теории возмущений вблизи состояния $A_\mu(x) = \partial_\mu \mathbf{n}(x) \wedge \mathbf{n}(x)$ (при $C_\mu = \sigma = K = 0$ в (5.3)) несправедливо, поскольку этому состоянию соответствует локальный максимум энергии и оно является неустойчивым.

Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим однопараметрическое семейство потенциалов вида $A_\mu(x) = q \partial_\mu \mathbf{n}(x) \wedge \mathbf{n}(x)$ с некоторой константой q . Рассчитанная напряженность поля

$$F_{\mu\nu}(\mathbf{x}) = q(q-2) \partial_\mu \mathbf{n}(\mathbf{x}) \wedge \partial_\nu \mathbf{n}(\mathbf{x}) \quad (5.28)$$

при $q=1$ не равна нулю. Энергия этого состояния, пропорциональная $q^2(q-2)^2$, действительно, имеет максимум при $q=1$. Поэтому это состояние является нестабильным.

С другой стороны, энергия фона исчезает не только в случае тривиального вакуума при $q=0$, но также при $q=2$. Последнее соответствует чисто калибровочному потенциалу J , который имеет топологический заряд, равный Q , определяемый интегралом по пространству от плотности неабелева слагаемого Черна–Саймонса. Умножая чисто калибровочные связности J на $q/2$, нетрудно найти значение интеграла от плотности неабелева слагаемого Черна–Саймонса при любом q . Этот интеграл равен $q^2(3-q)Q/4$. Соотношение между инвариантом Хопфа и неабелевым слагаемым Черна–Саймонса при $q=1$ установлено также в работе [106]. Заметим, что при $q=1$ интеграл дает половину от инварианта Хопфа. Поэтому в некотором смысле это фоновое распределение калибровочного потенциала находится на половине пути между двумя вакуумами.

Чисто калибровочный фон с $q=2$ полезен при решении задачи о разделении калибровочных полей по их различным топологическим секторам, поскольку малые флуктуации, параметризуемые с помощью функций C_μ , σ , K , не изменяют значения числа намоток. В этих условиях, которые можно было бы назвать условиями

фиксации калибровки по Фаддееву–Ниemi, разделение по различным топологическим секторам оказывается возможным в локализованной форме без необходимости обращения к асимптотикам калибровочного поля. Это наблюдение может привести к новому пониманию того, как обходиться с нетривиальной топологией неабелевых калибровочных теорий.

Таким образом, мы видим, что существует такая фиксация калибровки, при которой калибровочные вакуумы с различным числом намоток Q могут быть охарактеризованы с помощью неэквивалентных узлов. Топологическая [118] и конформная [119] теории поля позволяют найти соотношения между инвариантами для торических узлов $T(s, t)$ с $Q = st$ и характеристиками минимальных моделей $M(s, t)$ с центральным зарядом $c(s, t) = 1 - 6(s - t)^2/(st)$ в случае взаимно простых целых чисел s и t . Взаимосвязь с монополями и инстантонами [106, 120], которые, интерполируя между различными типами узлов, связывают вакуумы, мы обсудим в разделах 5.3–5.6.

5.3. Скирмионы и узлы

Построение, устанавливающее связь инстантонов с узлами [29], содержит соотношение между инстантонами и решением задачи Скирма [121, 122]. Поэтому для последовательного изложения с прояснением всех деталей мы сначала обсудим основные свойства скирмионов и их связь [123] с инстантонами. При этом удобно начать, следуя [124], с формулировки модели Скирма [121, 122], а затем перейти к обсуждению однопараметрического семейства моделей, которое включает в себя модели Скирма и Скирма–Фаддеева.

При использовании стандартных единиц измерения длины и энергии лагранжиан Скирма может быть записан как

$$L = \int d^3x \left\{ -\frac{1}{2} \text{Tr} (R_\mu R^\mu) + \frac{1}{16} \text{Tr} ([R_\mu, R_\nu][R^\mu, R^\nu]) \right\}. \quad (5.29)$$

Здесь введен ток $R_\mu = (\partial_\mu U)U^\dagger$, зависящий от произвольной матрицы U , которая принимает значения в группе $SU(2)$. Уравнения движения, следующие из (5.29), являются нелинейными уравнениями для матрицы $U(t, \mathbf{r})$ и имеют вид закона сохранения тока $\dot{R}^\mu = R^\mu + (1/4)[R^\nu, [R_\nu, R^\mu]]$:

$$\partial_\mu \left(R^\mu + \frac{1}{4} [R^\nu, [R_\nu, R^\mu]] \right) = 0. \quad (5.30)$$

При граничном условии $U(\mathbf{r}) \rightarrow \hat{I}_2$ при $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ конфигурацией, дающей минимальное значение энергии, является единичная квадратная матрица $U(\mathbf{r}) = \hat{I}_2$ для всех $\mathbf{r}$.

Киральная симметрия $(SU(2) \times SU(2))/Z_2 \simeq SO(4)$ лагранжиана Скирма отвечает преобразованиям $U \rightarrow O_1 U O_2$, где O_1 и O_2 — постоянные матрицы из группы $SU(2)$. Граничное условие $U(\infty) = \hat{I}_2$ спонтанно нарушает эту киральную симметрию, сводя ее к симметрии $SO(3)$, которая соответствует сопряжению $U \rightarrow O U O^\dagger$ с матрицей $O \in SU(2)$.

Чтобы связать рассматриваемые в этом обзоре переменные с переменными нелинейной теории пионов, в которой используется модель Скирма, запишем поле

$U(t, \mathbf{r})$ как $U = \sigma + i\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau}$. Здесь $\boldsymbol{\tau}$ — матрицы Паули, $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ обозначает триплет пионных полей. Функция σ описывает дополнительное поле, которое определяется пионным полем с помощью связи $\sigma^2 + \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\pi} = 1$. Это ограничение возникает, потому что $U \in SU(2)$. Как амплитуда, так и знак функции σ определяются требованием непрерывности поля и граничными условиями $\pi(\infty) = 0$, $\sigma(\infty) = 1$. В терминах пионного поля $\boldsymbol{\pi}$ изоспиновое преобразование имеет вид $\boldsymbol{\pi} \rightarrow M\boldsymbol{\pi}$, где матрица M является $SO(3)$ -матрицей, связанной с матрицей $O \in SU(2)$ следующим соотношением:

$$M_{ij} = \frac{1}{2} \text{Tr} (\tau_i O \tau_j O^\dagger).$$

Статические конфигурации поля $U(\mathbf{r})$ являются критическими точками функционала

$$E = \frac{1}{12\pi^2} \int d^3x \left\{ -\frac{1}{2} \text{Tr} (R_\mu R^\mu) - \frac{1}{16} \text{Tr} ([R_\mu, R_\nu][R^\mu, R^\nu]) \right\}, \quad (5.31)$$

который определяет энергию в модели Скирма. В этом выражении для удобства введен дополнительный множитель $1/12\pi^2$.

С учетом граничного условия матрица U в фиксированный момент времени реализует отображение $S^3 \mapsto S^3$, которое идентифицирует исходную сферу S^3 с $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$. Поскольку гомотопическая группа $\pi_3(S^3) = \mathbb{Z}$ нетривиальна, отображения между трехмерными сферами распадаются на гомотопические классы, характеризуемые целым числом

$$B = -\frac{1}{24\pi^2} \int d^3x \varepsilon_{ijk} \text{Tr} (R_i R_j R_k), \quad (5.32)$$

которое представляет собой степень отображения U . Поскольку число B является топологическим инвариантом, оно сохраняется при непрерывных деформациях поля U , включая его временную эволюцию. Сохраняющийся топологический заряд B был отождествлен Скирмом с барионным числом.

Наличие топологического заряда само по себе является недостаточным для существования стабильных статических конфигураций, так как нам необходимо еще удовлетворить требованиям теоремы Деррика [30]. Так же, как и в выражении (3.1), оба слагаемых в выражении для энергии (5.31) $E = E_2 + E_4$ содержат вторую и четвертую степень пространственных производных поля U . После преобразования пространственных координат $\mathbf{r} \rightarrow \lambda \mathbf{r}$ выражение для энергии принимает вид $E(\lambda) = \lambda E_2 + (1/\lambda) E_4$. Поскольку масштабное растяжение действует на оба слагаемых в противоположных направлениях, энергия достигает минимального значения при конечном значении $\lambda \neq 0$. Это означает, что любое распределение будет иметь хорошо определенный масштаб. Заметим, что для любого статического решения и, в частности, для скирмиона, который представляет собой в данном топологическом секторе конфигурацию с минимальной энергией, $E(\mu)$ должна иметь минимальное значение, когда $\mu = 1$ и вклады в энергию от квадратичного слагаемого и слагаемого четвертой степени по производным в точности равны друг другу.

Часто оказывается полезным геометрическое описание [125] энергии статических скирмионов. Как и в

нелинейной теории упругости, плотность энергии скирмионного поля зависит от локального растяжения, ассоциированного с отображением $U: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{S}^3$. В этом подходе удобно ввести тензор растяжений $D_{ij} = -(1/2) \text{Tr}(R_i) R_j$, определенный в каждой точке $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$. Выражение для D_{ij} представляет собой симметричную положительно определенную 3×3 -матрицу, которая может восприниматься как величина, описывающая индуцированную отображением U деформацию. Образ, полученный под действием U бесконечно малой сферы радиусом ε с центром в точке $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$, в главном порядке по ε представляет собой эллипсоид с главными осями $\varepsilon \lambda_1, \varepsilon \lambda_2, \varepsilon \lambda_3$, где λ_1^2, λ_2^2 и λ_3^2 — три неотрицательных собственных значения матрицы D_{ij} . Знаки λ_1, λ_2 и λ_3 выбраны так, чтобы произведение $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ было положительным (отрицательным), если U сохраняет (обращает) локальную ориентацию.

В терминах этих собственных значений энергия E и барионное число могут быть получены интегрированием соответствующих плотностей $\mathcal{E}$ и $\mathcal{B}$, равных

$$\mathcal{E} = \frac{1}{12\pi^2} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2), \quad (5.33)$$

$$\mathcal{B} = \frac{1}{2\pi^2} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3. \quad (5.34)$$

Из неравенства

$$(\lambda_1 \pm \lambda_2 \lambda_3)^2 + (\lambda_2 \pm \lambda_3 \lambda_1)^2 + (\lambda_3 \pm \lambda_1 \lambda_2)^2 \geq 0 \quad (5.35)$$

и выражения (5.33) вытекает, что $\mathcal{E} \geq \mathcal{B}$. Поэтому энергия в модели Скирма имеет следующую нижнюю границу [1]:

$$|E| \geq |B|. \quad (5.36)$$

Обратим внимание на то, что модель Скирма–Фаддеева (3.1) может быть получена из модели Скирма при ограничении значений поля его значениями на экваториальной сфере $\mathbb{S}^2$ обычного $SU(2)$ -целевого пространства. Соотношение между $\mathbf{n}$ -полем и матрицей U имеет вид $U = i n^a \tau^a$. При рассмотрении проблемы связи моделей, естественно, возникает вопрос о возможности существования такого однопараметрического семейства моделей, которое содержит модели Скирма и Скирма–Фаддеева как частные предельные случаи. Построение, устанавливающее связь указанных моделей, выглядит следующим образом [126].

Рассмотрим сначала с геометрической точки зрения ситуацию общего положения, в которой мы имеем дело с отображением Φ из трехмерного пространства с координатами x^k и метрикой g^{ik} в другое 3D-пространство с локальными координатами φ^a и метрикой H_{ab} . Плотность энергии Скирма $\mathcal{E} = \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_4$ такого отображения определена [125] в терминах дифференциалов $\partial_j \varphi^a$ отображения Φ :

$$\mathcal{E}_2 = g_2 \text{Tr} D, \quad \mathcal{E}_4 = \frac{1}{2} g_4 [(\text{Tr} D)^2 - \text{Tr} D^2], \quad (5.37)$$

где 3×3 -матрица D имеет вид

$$D_a^b = g^{jk} (\partial_j \varphi^c) H_{ac} (\partial_k \varphi^b), \quad (5.38)$$

а g_2 и g_4 — константы.

Пусть пространство, в котором осуществляется отображение, представляет собой трехмерную сферу $\mathbb{S}^3$,

оснащенную однопараметрическим семейством $U(2)$ -инвариантных метрик. Частным представителем этого семейства является стандартная $SO(4)$ -инвариантная метрика в случае, когда соответствующая система есть обычная $SU(2)$ -модель Скирма. Семейство метрик может быть описано следующим образом.

Пусть, как и ранее, $z = (z_1, z_2)^T$ обозначает комплексный 2-вектор со связью $z^\dagger z = 1$. Совокупность таких векторов z формирует сферу $\mathbb{S}^3$. Стандартная метрика G на $\mathbb{S}^3$ соответствует квадрату интервала $ds^2 = dz^\dagger dz$. Для построения семейства метрик, параметризуемых действительным числом α , будем опираться на векторное поле ξ , получаемое из 1-формы $\omega = -iz^\dagger dz$ подниманием его индекса с помощью метрики в $ds^2 = dz^\dagger dz$. Тогда интервал для рассматриваемого семейства метрик H может иметь вид

$$ds^2 = dz^\dagger dz + \alpha (z^\dagger dz)(z^\dagger dz). \quad (5.39)$$

Так же, как G и ω , метрика H инвариантна относительно преобразований $z \mapsto \Lambda z$, где $\Lambda \in U(2)$.

Если при $\alpha < 1$ метрика (5.39) является положительно определенной, то в предельном случае $\alpha = 1$ она оказывается вырожденной, а при $\alpha = 1$ становится стандартной метрикой на пространстве $\mathbb{CP}^1 \simeq \mathbb{S}^2$. Другими словами, рассматриваемое однопараметрическое семейство включает в себя стандартную сферу $\mathbb{S}^3$ при $\alpha = 0$ и стандартную сферу $\mathbb{S}^2$ при $\alpha = 1$. Поэтому значения α из интервала $0 \leq \alpha \leq 1$ являются интерполяционными между системой Скирма и системой Скирма–Фаддеева.

Рассмотрим [126] лагранжиан $\mathcal{L}$ обобщенной модели Скирма, совместимой с выражением (5.31) для плотности энергии статических конфигураций. Пусть вектор z определяет $SU(2)$ -матрицу следующим образом:

$$U = \begin{pmatrix} z^1 & -z^{*2} \\ z^2 & z^{*1} \end{pmatrix}. \quad (5.40)$$

В терминах плотности тока $L_\mu = i L_\mu^a \tau_a = U^\dagger \partial_\mu U$, удовлетворяющей коммутационному соотношению $[L_\mu, L_\nu] = K_{\mu\nu} = i K_{\mu\nu}^a \tau^a$ с матрицами Паули τ^a , лагранжиан

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_4,$$

где

$$\mathcal{L}_2 = g_2 g^{\mu\nu} (L_\mu^a L_\nu^a - \alpha L_\mu^3 L_\nu^3), \quad (5.41)$$

$$\mathcal{L}_4 = \frac{1}{8} g_4 g^{\mu\nu} g^{\beta\gamma} [(1 - \alpha) K_{\mu\beta}^a K_{\nu\gamma}^a + \alpha K_{\mu\beta}^3 K_{\nu\gamma}^3]. \quad (5.42)$$

Глобальная $U(2)$ -симметрия с параметром θ соответствует преобразованию $U \mapsto \Omega U \Gamma$, где Γ есть $SU(2)$ -матрица, $\Omega = \exp(i\theta\sigma_3)$ — диагональная $SU(2)$ -матрица, сохраняющая $L_\mu^a L_\nu^a$ и L_μ^3 .

В случае $\alpha = 1$ мы получаем лагранжиан Скирма–Фаддеева. Один из способов убедиться в этом состоит в замене поля z полем единичного вектора $n^a = z^\dagger \tau^a z$. Тогда лагранжиан $\mathcal{L}$ при $\alpha = 1$ оказывается равным

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} g_2 (\partial_\mu \mathbf{n})^2 + \frac{1}{32} g_4 (\mathbf{n} [\partial_\mu \mathbf{n} \times \partial_\nu \mathbf{n}])^2, \quad (5.43)$$

т.е. является лагранжианом Скирма–Фаддеева.

Поля с конечной энергией удовлетворяют граничному условию $U \rightarrow U_0$ при $r \rightarrow \infty$, где U_0 — постоянная матрица. Эти поля классифицируются топологически с помощью числа накруток $B = \int B d^3x$, где $B = \varepsilon_{ikl} \text{Tr}(L_i L_k L_l) / (24\pi^2)$. В пределе $\alpha \rightarrow 1$ число B равно инварианту Хопфа Q для S^2 -значных полей $\mathbf{n}$.

Значения констант, как уже неоднократно подчеркивалось, отвечают выбору масштабов для измерения энергии и длины. Для удобства их выбора можно рассмотреть поле $z(x^k)$, соответствующее идентичному отображению сферы S^3 в себя. Энергия этого поля равна [126] $E = 2\pi^2[(3 - \alpha)g_2 + (3 - 2\alpha)g_4]$. Если положить $g_2 = 1/[4\pi^2(3 - \alpha)]$ и $g_4 = 1/[4\pi^2(3 - 2\alpha)]$, то поле $z(x^k)$ будет иметь энергию $E = 1$ при всех $\alpha \in [0, 1]$. Семейство скирмионных решений из этого интервала при различных значениях B подробно изучено в работе [126].

5.4. Голономия Полякова

Обсуждение связи заузленных конфигураций с инстантонами удобно начать с анализа вспомогательной задачи о получении скирмионного поля из инстантонов Янга–Миллса. Рассмотренная в разделе 5.3 взаимосвязь моделей Скирма и Скирма–Фаддеева позволит нам ответить на основной вопрос.

Схема получения полей Скирма из инстантонов включает в себя [123] вычисление экспоненты Полякова, т.е. голономии $SU(2)$ -инстантонных полей вдоль оси x^4 в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$:

$$U(\mathbf{r}) = \mathcal{T} \exp \int_{-\infty}^{+\infty} A_4(\mathbf{r}, x^4) dx^4, \quad (5.44)$$

где $\mathcal{T}$ обозначает операцию упорядочения по времени, A_μ — потенциал поля инстантона Янга–Миллса в $\mathbb{R}^4$. Поскольку компонента A_4 потенциала принимает значения в алгебре $SU(2)$, ее экспонента имеет значения в группе $SU(2)$, так что $U(\mathbf{r})$ реализует отображение $\mathbb{R}^3 \rightarrow SU(2)$, как это требуется для статического поля Скирма.

Рассматривая проблему более аккуратно, нам необходимо предположить, что оба предела интегрирования, $-\infty$ и $+\infty$, должны относиться к одной точке в S^4 , которая соответствует точке на бесконечности в $\mathbb{R}^4$. Голономия тогда берется вдоль замкнутой петли в S^4 и является почти калибровочно инвариантной. Оставшееся действие калибровочного преобразования $g(x)$ состоит в сопряжении $U(\mathbf{r})$ с помощью постоянного элемента $g(\infty)$. Это соответствует некоторому изоспиновому вращению поля Скирма. Граничное условие $U \rightarrow I_2$ при $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ удовлетворяется в такой схеме, поскольку в этом пределе размер петли в S^4 стремится к нулю.

Рассматривая вычисления практически, отметим, что из требования, чтобы голономия бралась вдоль замкнутой кривой, вытекает, что иногда в формулу (5.44) необходимо включать дополнительный множитель — функцию перехода, которая отправляет точку $+\infty$ назад к $-\infty$. Для инстантона в анзаце 'т Хофта [127] выражение (5.44) является полным, тогда как для анзаца [128] требуется дополнительный множитель -1 . В аксиальной калибровке, когда $A_4 = 0$, голономия полностью содержится в функции перехода на бесконечности.

Вообще говоря, нет необходимости обращаться к инстантонным конфигурациям поля Янга–Миллса:

выражение (5.44) остается справедливым для произвольного поля A_μ . Однако если мы ограничиваемся при рассмотрении инстантонами, то получается большое и конечномерное семейство полей Скирма U . Такие поля не являются точными решениями уравнений движения в модели Скирма, но некоторые из них могут хорошо аппроксимировать скирмионные распределения с минимальной энергией.

Если потенциал A_μ является самодуальным полем Янга–Миллса с инстантонным зарядом N , т.е. с индексом Понтрягина, равным

$$N = \frac{1}{8\pi^2} \int \text{Tr}(F_{\mu\nu}^* F_{\mu\nu}) d^4x,$$

где $F_{\mu\nu}^* = (1/2)\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$, то результирующее поле Скирма имеет барионное число $B = N$. Это можно проверить на частных примерах, а общий результат будет следовать из непрерывности. В терминах N конструкция позволяет получить из $8N$ -мерного пространства инстантонов с зарядом N $(8N - 1)$ -мерное семейство скирмионных полей. Один параметр теряется, так как из-за интегрирования по координате x^4 трансляция инстантона в направлении x^4 не изменяет поля Скирма.

Рассматриваемый как основной пример инстантон с зарядом 1, даваемый анзацем 'т Хофта

$$\rho(x) = 1 + \frac{\lambda^2}{|x - a|^2}$$

(при $A_\mu = (i/2)\tau_{\mu\nu}\partial_\nu \log \rho$) с масштабом λ и координатами центра $a = 0$, генерирует поле Скирма в "ежистой" форме: $U(\mathbf{r}) = \exp\{if(r)n^a\tau^a\}$, или $\pi^a = n^a \cos f(r)$ и $\sigma = \sin f(r)$, где функция

$$f(r) = \pi \left[1 - \left(1 + \frac{\lambda^2}{r^2} \right)^{-1/2} \right].$$

Инстантоны масштабно инвариантны. Поэтому произвольный параметр λ может быть выбран таким образом, чтобы минимизировать энергию результирующего поля Скирма. Соответствующие значения масштаба и энергии оказываются равными $\lambda^2 = 2,11$ и $E = 1/243$. Последнее значение только на 1 % выше энергии истинного скирмионного решения.

Главной трудностью при этой конструкции является вычисление голономии в связи с тем, что интегрирование в (5.44) упорядочено по пути. Чтобы вычислить экспоненту (5.44), упорядоченную по путям, нужно ввести величину $\hat{U}(\mathbf{r}, x^4)$ и решить матричное обыкновенное дифференциальное уравнение $\partial \hat{U} / \partial x^4 = A_4 \hat{U}$ вдоль действительной линии $x^4 \in (-\infty, \infty)$ с координатой $\mathbf{r}$, рассматриваемой как параметр, и начальным условием $\hat{U}(\mathbf{r}, -\infty) = \hat{I}_2$. Тогда скирмионное поле $U(\mathbf{r})$ может быть получено как конечная точка x^4 -потока: $U(\mathbf{r}) = \hat{U}(\mathbf{r}, \infty)$.

После детального обсуждения процедуры построения базисного решения в задаче о связи конфигурации Скирма с инстантоном нам нетрудно будет увидеть особенности конструкции в задаче о месте инстантона в проблеме Скирма–Фаддеева. При получении приближенной заузленной конфигурации с инвариантом Хопфа Q нужно просто применить [128] стандартное отображение Хопфа (см. (4.1)) к приближенным скирмионным конфигурациям.

Пусть $X^\mu = (t, x^j)$ есть обозначение для координат в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ и A_μ является $SU(2)$ -калибровочным потенциалом в $\mathbb{R}^4$ с топологическим зарядом N . Пусть также для фиксированной точки с координатами $x^j \in \mathbb{R}^3$ функция $U(x^j)$, являющаяся экспонентой Полякова (5.44), представляет собой скирмионную конфигурацию со значениями в калибровочной группе $SU(2)$. Применение на этом шаге отображения Хопфа из S^3 в S^2 дает S^2 -значное поле $\mathbf{n}(x^j)$. А именно, мы используем 2×2 -матрицу $U_{ab}(x^j)$ в выражении для стереографической проекции

$$W(x^j) = \frac{n_1 + in_2}{1 + n_3}, \quad (5.45)$$

полагая, что $W(x^j) = U_{21}(x^j)/U_{11}(x^j)$. Если калибровочный потенциал A_μ убывает подходящим образом при $|X| \rightarrow \infty$, что будет иметь место при рассмотрении ниже, то функция $W(x^j)$ удовлетворяет требуемому граничному условию $W(x^j) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$ и инвариант Хопфа для нее равен N .

В скирмионной системе энергия инвариантна относительно изоспиновых преобразований $U \mapsto A^{-1}UA$, где матрица $A \in SU(2)$ постоянна. Такие A обеспечивают нас тремя дополнительными параметрами, которые в скирмионном случае не затрагивают энергию. Так как A и $-A$ определяют то же самое преобразование, это параметрическое пространство есть $SO(3)$. Однако отображение Хопфа разрушает симметрию. Поэтому в общем случае преобразование $U \mapsto A^{-1}UA$ является существенным, например в случае $N = 2$ [29].

Описанная выше конструкция работает для любого калибровочного поля. Однако основное достоинство предложенной конструкции состоит в использовании инстантонов, что приводит к особо значимым конфигурациям. В частности, инстантоны в этом контексте могут рассматриваться как конфигурации, которые интерполируют между различными заузленными вакуумными конфигурациями поля $\mathbf{n}$. Существует простая формула (ср. [129]) для инстантонных решений при $N = 1, 2$, когда A_4 имеет вид

$$A_4 = \frac{i}{2} \Omega^{-1} (\partial_j \Omega) \tau_j, \quad (5.46)$$

где

$$\Omega(X) = \sum_{a=1}^{N+1} \frac{\lambda_a^2}{|X - X_a|^2}. \quad (5.47)$$

Здесь через X_a обозначены координаты различных точек в $\mathbb{R}^4$. Несмотря на то, что A_4 имеет полюсы в этих точках, эти полюсы можно удалить. Тогда конфигурация $\mathbf{n}(x^\mu)$ будет являться плавной функцией в $\mathbb{R}^3$. Этот анзац порождает N -инстантонное решение для любого $N \geq 1$, а при $N = 1$ и $N = 2$ дает все инстантоны в соответствующих топологических секторах.

Рассмотрим для простоты только сектор с $N = 1$. Специальный предел $\lambda_2 = |X_2| \rightarrow \infty$ в выражении (5.47) дает функцию 'т Хофта

$$\Omega(X) = 1 + \frac{\lambda_1^2}{|X - X_1|^2}. \quad (5.48)$$

Функция $\Omega(X)$ зависит от пяти действительных параметров (λ_1, X_1^μ) . Так как мы интегрируем по t , то без потери общности можно считать, что $t_1 = 0$. Располагая решением в центре трехмерного пространства, мы остаемся с одним параметром — масштабным множителем λ . В этом случае голономия может быть вычислена аналитически [123] и в результате мы получаем конфигурацию Хопфа

$$W = \frac{x + iy}{z - ir \cot f(r)} \quad (5.49)$$

с функцией

$$f(r) = \pi \left[1 - \frac{r}{\sqrt{r^2 + \lambda^2}} \right]. \quad (5.50)$$

Выражения (5.49) и (5.50) дают однопараметрическое семейство зацепленных конфигураций, которые являются аналогом "ежистой" конфигурации в модели Скирма. Энергия при подходящем выборе констант связи является тем же самым функционалом от f в двух системах. Мы уже знаем из рассмотрения модели Скирма (ср. [123, 130]), что энергия конфигурации $E(\lambda) = 0,428\lambda + 0,903/\lambda$ имеет минимальное значение $E = 1,243$ при $\lambda = 1,45$. Подробное изложение случая аксиально симметричных распределений при $N = 0$ содержится в работе [29].

5.5. Дуальная картина

Рассматривая для наглядности частный случай соотношения (5.3), мы факторизовали в (5.8) одну скалярную степень свободы и степени свободы, ассоциированные с полем $\mathbf{n}$, которые имеют магнитную интерпретацию. В этом разделе мы обсудим, следуя результатам работ [131, 132], факторизацию в ситуации общего положения, в которой существует дуальная структура между "магнитными" и "электрическими" переменными в теории Янга–Миллса на больших расстояниях. Предложенная в [131] декомпозиция степеней свободы, включающая кроме поля единичного вектора абелев скалярный мультиплет с двумя комплексными скалярными полями, допускает естественную электрическую интерпретацию. Магнитные переменные дают релятивистскую версию модели Гейзенберга. Такая факторизация реализует симметрию между электрическими и магнитными переменными и приводит к дуальной картине между соответствующими фазами теории. При этом факторизация степеней свободы оказывается согласованной с тем, что физический спектр состояний теории содержит удерживающие струны, которые связаны в устойчивые заузленные солитоны.

Разложение (5.3) [94, 95] влечет за собой необходимость использования поля единичного магнитного вектора. Однако струноподобные возбуждения калибровочной теории должны соответствовать переменным с электрической интерпретацией [105, 104]. В этом состоит причина введения в работе [131] нового анзаца для представления калибровочного поля, который отличается от (5.3). В предложенном в работе [131] варианте декомпозиции были введены два различных поля единичного вектора. Эти переменные входят в действие симметричным образом, что приводит к дуальной картине между ними.

Замена независимых переменных в случае четырехмерной $SU(2)$ -теории Янга – Миллса при использовании компактных переменных, которое приводит к структурам типа (5.11), содержит следующие шаги [131]. В максимальной абелевой калибровке [105, 104] картановская компонента A_μ^3 $SU(2)$ -поля ведет себя, как абелево калибровочное поле, в то время как поле $A_\mu^+ = A_\mu^1 + iA_\mu^2$ вместе с его комплексно-сопряженным партнером ведут себя при абелевых калибровочных преобразованиях как заряженные векторные поля. Два векторных околодиагональных поля A_μ^1 и A_μ^2 определяют двумерную плоскость в четырехмерном евклидовом пространстве-времени. Эта плоскость может быть параметризована с помощью ортонов e_μ^a , $a = 1, 2$, которые, удовлетворяя условиям ортонормированности $e_\mu^a e_\mu^b = \delta^{ab}$, определяют базис в плоскости.

С использованием переменных e_μ^a степени свободы у компонент A_μ^a можно факторизовать следующим образом:

$$A_\mu^a = M_b^a e_\mu^b. \quad (5.51)$$

Две околодиагональные компоненты потенциала A_μ^a описывают восемь степеней свободы. В правой части выражения (5.51) мы имеем девять степеней свободы, так как матрица M_b^a содержит четыре независимые компоненты и два нормированных вектора e_μ^a имеют пять независимых компонент. Однако существует также внутренняя $SO(2) \sim U(1)$ вращательная инвариантность между M_b^a и e_μ^a . А именно, если при фиксированном значении индекса μ мы вращаем векторы e_μ^a по правилу $e_\mu^a \rightarrow \mathcal{O}_b^a e_\mu^b$, то декомпозиция (5.51) остается неизменной при условии, что мы также преобразуем справа M_b^a с помощью той же матрицы $\mathcal{O}_b^a$. С учетом этой калибровочной инвариантности правая часть выражения (5.51) в действительности содержит восемь независимых полевых степеней свободы.

Введя комбинацию

$$\mathbf{e}_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_\mu^1 + ie_\mu^2), \quad (5.52)$$

которая удовлетворяет условиям

$$\mathbf{e}^2 = 0, \quad \mathbf{e}\mathbf{e}^+ = 1, \quad (5.53)$$

факторизованные степени свободы в (5.51) можно представить в виде

$$A_\mu^1 + iA_\mu^2 = i\psi_1 \mathbf{e}_\mu + i\psi_2 \mathbf{e}_\mu^+. \quad (5.54)$$

Здесь четыре матричных элемента M_b^a перераспределены в два комплексных скалярных поля ψ_1 и ψ_2 .

Диагональное $SU(2)$ -калибровочное преобразование дает

$$A_\mu^3 \equiv A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu \xi, \quad (5.55)$$

при этом оба поля, ψ_1 и ψ_2 , умножаются на общую фазу:

$$\psi_{1,2} \rightarrow \exp(i\xi) \psi_{1,2}, \quad (5.56)$$

а e_μ^a остается прежним. Эти выражения описывают обычное электрическое абелево калибровочное преобразование с электрически заряженными полями $\psi_{1,2}$.

С другой стороны, в результате действия внутренних $U(1)$ -вращений мы имеем

$$\mathbf{e}_\mu \rightarrow \exp(-i\zeta) \mathbf{e}_\mu \quad (5.57)$$

и

$$\psi_1 \rightarrow \exp(i\zeta) \psi_1, \quad \psi_2 \rightarrow \exp(-i\zeta) \psi_2. \quad (5.58)$$

При этом декомпозиция остается незатронутой, а составное векторное поле

$$C_\mu = i\mathbf{e} \partial_\mu \mathbf{e}^+ \quad (5.59)$$

преобразуется по закону

$$C_\mu \rightarrow C_\mu - \partial_\mu \zeta. \quad (5.60)$$

По этой причине C_μ может рассматриваться как калибровочное поле для внутренних вращений. В частности, преобразование (5.60) может интерпретироваться как аксиальноподобное или магнитное $U(1)$ -калибровочное преобразование.

Действительный антисимметричный тензор

$$G_{\mu\nu} = i(\mathbf{e}_\mu \mathbf{e}_\nu^+ - \mathbf{e}_\nu \mathbf{e}_\mu^+), \quad (5.61)$$

построенный с помощью комплексного вектора (5.52), инвариантен относительно электрических и магнитных преобразований. Его использование позволяет ввести электрические и магнитные комбинации вида

$$\mathcal{E}_k = G_{k0}, \quad \mathcal{B}_k = \frac{1}{2} \epsilon_{klm} G_{lm}. \quad (5.62)$$

В предложенном в работе [131] подходе два поля

$$\mathbf{u} = \vec{\mathcal{E}} + \vec{\mathcal{B}}, \quad \mathbf{v} = \vec{\mathcal{E}} - \vec{\mathcal{B}}. \quad (5.63)$$

являются независимыми трехкомпонентными единичными векторами. Учитывая (5.61), $\mathbf{e}_\mu$ можно выразить через векторы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{e}_\mu = \frac{\exp(i\phi)}{\sqrt{2}} \left(e_0, \frac{1}{2e_0} \{ \mathbf{u} \times \mathbf{v} + i(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \} \right). \quad (5.64)$$

Здесь ϕ — фаза нулевой компоненты поля $\mathbf{e}_\mu$. Условие нормировки (5.53) дает для модуля $e_0 = \sqrt{1 + \mathbf{u}\mathbf{v}}$. Магнитное калибровочное поле (5.59), выраженное через единичные векторы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, приобретает следующий вид:

$$C_\mu = \frac{1}{1 + \mathbf{u}\mathbf{v}} (\partial_\mu \mathbf{u} + \partial_\mu \mathbf{v}) [\mathbf{u} \times \mathbf{v}] + 2\partial_\mu \phi, \quad (5.65)$$

что идентифицирует ϕ как магнитную фазу.

Для того чтобы записать лагранжиан Янга – Миллса в новых терминах, определим два комплексных вектора

$$U_\mu = \exp(i\phi) \frac{\partial_\mu \mathbf{u} (\mathbf{v} + i[\mathbf{u} \times \mathbf{v}])}{\sqrt{1 - (\mathbf{u}\mathbf{v})^2}}, \quad (5.66)$$

$$V_\mu = \exp(i\phi) \frac{\partial_\mu \mathbf{v} (\mathbf{u} + i[\mathbf{u} \times \mathbf{v}])}{\sqrt{1 - (\mathbf{u}\mathbf{v})^2}} \quad (5.67)$$

и, полагая, что $\rho^2 = |\psi|^2$, определим трехкомпонентный единичный вектор

$$\mathbf{t} = \frac{1}{\rho^2} (\psi_1^*, \psi_2^*) \boldsymbol{\sigma} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}. \quad (5.68)$$

Этот вектор инвариантен относительно электрического калибровочного преобразования (5.56). Компонента t_3 инвариантна также относительно магнитного калибровочного преобразования, а две другие компоненты преобразуются следующим образом:

$$t_{\pm} = \frac{1}{2}(t_1 \pm it_2) \rightarrow \exp(\mp 2i\zeta) t_{\pm}. \quad (5.69)$$

Перепишем с использованием приведенных переменных и определений, следуя [131], лагранжиан Янга – Миллса с частично фиксированной калибровкой [104, 105] для околodiагональных компонент A_{μ}^a по отношению к диагональной картановской компоненте $A_{\mu} \equiv A_{\mu}^3$ калибровочного поля:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^a)^2 + \frac{1}{2}[(\partial_{\mu}\delta^{ab} - \varepsilon^{ab}A_{\mu})A_{\mu}^b]^2, \quad (5.70)$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$. Подстановка в (5.70) калибровочного поля, записанного в новых переменных, дает для лагранжиана с фиксированной калибровкой следующее выражение:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3, \quad \mathcal{L}_1 = \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + |D_{\mu}^{ab}\psi_b|^2 + \frac{1}{8}(|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2)^2, \quad (5.71)$$

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2}\rho^2(|\partial_{\mu}\mathbf{u}|^2 + |\partial_{\mu}\mathbf{v}|^2) + \frac{1}{2}\rho^2 t_{-}U_{\mu}V_{\mu} + \frac{1}{2}\rho^2 t_{+}U_{\mu}^{*}V_{\mu}^{*}, \quad (5.72)$$

$$\mathcal{L}_3 = \frac{1}{2}\rho^2 t_3 F_{\mu\nu} G_{\mu\nu}. \quad (5.73)$$

К выражениям (5.71)–(5.73) нужно добавить лагранжиан для духов, который необходим при вычислении радиационных поправок. В представлении (5.71) $D_{\mu}^{ab} = \delta^{ab}(\partial_{\mu} + iA_{\mu}) - i\sigma_3^{ab}C_{\mu}$ является $U(1) \times U(1)$ -ковариантной производной. Действительно, выражения (5.71)–(5.73) инвариантны относительно как электрической $U(1)$ -калибровочной группы $SU(2)$, так и внутренней магнитной группы $U(1)$.

Введем векторное поле

$$B_{\mu} = A_{\mu} + \frac{i}{2\rho^2}[\psi_a \hat{D}_{\mu}^{ab} \bar{\psi}_b - \bar{\psi}_a \hat{D}_{\mu}^{ab} \psi_b] \equiv A_{\mu} + \frac{i}{2\rho^2}J_{\mu}, \quad (5.74)$$

где $\hat{D}^{ab} = \delta^{ab}\partial_{\mu} - i\sigma_3^{ab}C_{\mu}$ является магнитной ковариантной производной, т.е. равна D_{μ}^{ab} с удаленным полем A_{μ} . При этом поле B_{μ} инвариантно относительно электрического $U(1)$ -калибровочного преобразования.

Используя определение (5.74), из (5.71)–(5.73) можно удалить электрическую $U(1)$ -калибровочную структуру, записав лагранжиан в терминах явно инвариантных величин B_{μ} и $\mathbf{t}$ следующим образом [131]:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}'_1 + \mathcal{L}'_2, \quad \mathcal{L}'_1 = \frac{1}{4}(H_{\mu\nu} + M_{\mu\nu} + K_{\mu\nu}t_3)^2 + \frac{1}{2}(\partial_{\mu}\rho)^2 + \rho^2(\nabla_{\mu}^{ij}t_j)^2 + \rho^2 B_{\mu}^2 + \frac{1}{8}\rho^4 t_3^2, \quad (5.75)$$

$$\mathcal{L}'_2 = \frac{1}{2}\rho^2(|\partial_{\mu}\mathbf{u}|^2 + |\partial_{\mu}\mathbf{v}|^2) + \frac{1}{2}\rho^2(t_{-}U_{\mu}V_{\mu} + t_{+}U_{\mu}^{*}V_{\mu}^{*} + t_3[H_{\mu\nu} + M_{\mu\nu} + K_{\mu\nu}t_3]G_{\mu\nu}). \quad (5.76)$$

Здесь

$$\nabla_{\mu}^{ij} = \delta^{ij}\partial_{\mu} + 2\varepsilon^{ij3}C_{\mu} \quad (5.77)$$

определяет действие магнитной ковариантной производной на вектор и

$$H_{\mu\nu} = \partial_{\mu}B_{\nu} - \partial_{\nu}B_{\mu}, \quad (5.78)$$

$$M_{\mu\nu} = \varepsilon^{ijk}t_i\nabla_{\mu}^{jl}t_l\nabla_{\nu}^{km}t_m, \quad (5.79)$$

$$K_{\mu\nu} = \partial_{\mu}C_{\nu} - \partial_{\nu}C_{\mu}. \quad (5.80)$$

Дуальная структура в (5.75), (5.76), выраженная в терминах электрической $\mathbf{t}$ и магнитных переменных $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, становится особенно прозрачной, если ограничиться статическими конфигурациями в основном состоянии, которые описываются следующим гамильтонианом

$$H = H_1 + H_2, \quad H_1 = \frac{1}{4}(H_{ij} + M_{ij} + K_{ij}t_3)^2 + \frac{1}{2}(\partial_i\rho)^2 + \rho^2(\nabla_i\mathbf{t})^2 + \rho^2 B_i^2 + \frac{1}{8}\rho^4 t_3^2, \quad (5.81)$$

$$H_2 = \frac{1}{2}\rho^2|\partial_i\mathbf{m}|^2 + \frac{1}{2}\rho^2(t_{+}Q_i^2 + t_{-}\bar{Q}_i^2 + t_3\varepsilon_{ijk}m_i[H_{jk} + M_{jk} + K_{jk}t_3]). \quad (5.82)$$

Здесь вектор $\mathbf{m}$ является принимающим действительные значения трехкомпонентным единичным вектором, компоненты которого в статическом пределе равны $m_i = -(i/2)\varepsilon_{ijk}G_{jk}$. Кроме (5.59) мы имеем дополнительный составной вектор $Q_i = i\mathbf{m}\partial_i\mathbf{e}$ вместе с его комплексно-сопряженным партнером. При магнитных калибровочных преобразованиях эти векторные поля являются заряженными, $Q_i \rightarrow \exp(i\zeta)Q_i$, но остаются инвариантными при электрических калибровочных преобразованиях. В статическом случае $\mathbf{m} = \mathbf{u} = \mathbf{v}$, $Q_i = U_i = V_i$. В этом пределе полная группа вращений $SO(4) = SU(2) \times SU(2)$ в евклидовом пространстве сужается до пространственной группы вращений $SO(3)$. Кроме того, в статическом пределе $K_{ij} = \mathbf{m}[\partial_i\mathbf{m} \times \partial_j\mathbf{m}]$.

Выражения (5.75), (5.76) или (5.81), (5.82) во многих отношениях похожи на (2.3), включая потенциальное слагаемое. Для векторного поля $\mathbf{t}$ мы имеем из (5.75), (5.76) следующее выражение для потенциальной энергии:

$$V(\mathbf{t}) = \frac{1}{8}\rho^4 t_3^2 + \frac{1}{2}\rho^2(t_{-}U_{\mu}V_{\mu} + t_{+}U_{\mu}^{*}V_{\mu}^{*} + t_3[H_{\mu\nu} + M_{\mu\nu} + K_{\mu\nu}t_3]G_{\mu\nu}). \quad (5.83)$$

То же самое относится к потенциальному слагаемому для вектора $\mathbf{m}$:

$$V(\mathbf{m}) = \varepsilon_{ijk}m_i[H_{jk} + M_{jk} + K_{jk}t_3]t_3. \quad (5.84)$$

Несмотря на то, что эти выражения выглядят как слагаемые, разрушающие глобальную, $SO(3)$ -вращательную инвариантность подсистем, связанных с векторными полями $\mathbf{t}$ и $\mathbf{m}$, тем не менее, мы имеем очевидную $SO(3)$ -ковариантность.

Логарифмические поправки в однопетлевом приближении приводят к тому, что функция ρ^2 приобретает в основном состоянии нетривиальное ненулевое среднее значение $\langle \rho^2 \rangle = \Lambda^2$. Это означает, что, благодаря двум последним слагаемым в (5.75), векторные поля B_μ и $\mathbf{t}$ становятся массивными. Дальнейшее исследование свойств лагранжиана (5.75), (5.76) связано с применением градиентного разложения, при котором одна из переменных рассматривается как определяющая фон "медленная" переменная, а затем изучается отклик оставшихся "быстрых" переменных на этом фоне.

Пусть в этом подходе Борна – Оппенгеймера электрическая переменная $\mathbf{t}$ быстро изменяется на фоне медленных магнитных переменных. Принимая во внимание вращательную симметрию в четырехмерном евклидовом пространстве, естественно считать, что $\langle \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{v} \rangle = 0$. Поэтому в нулевом приближении линейные по $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ слагаемые исчезают и лагранжиан (5.75), (5.76) упрощается до следующего выражения:

$$\mathcal{L} \approx \frac{1}{4} (H_{\mu\nu} + \mathbf{t} \partial_\mu \mathbf{t} \times \partial_\nu \mathbf{t})^2 + \Lambda^2 (\partial_\mu \mathbf{t})^2 + \Lambda^2 B_\mu^2 + \frac{1}{8} \Lambda^4 t_3^2 + \frac{1}{2} \Lambda^2 (t_+ S_+ + t_- S_-), \quad (5.85)$$

где

$$S_\pm = \langle \partial_\mu \mathbf{e} \partial_\mu \mathbf{e} \rangle. \quad (5.86)$$

Как мы видим, выражение (5.85) определяет динамику поля единичного вектора $\mathbf{t}$, взаимодействующего с массивным векторным полем B_μ . Потенциальное слагаемое является комбинацией массового t_3 -слагаемого и аналога внешнего магнитного поля, действующего на компоненты $t_\pm$. Такие слагаемые всегда присутствуют при $\Lambda^2 \neq 0$. Причем фон, связанный с полем $\mathbf{e}_\mu$, не является обязательно однородным. Обратим внимание также на то, что выражение (5.85) существенно поддерживает гипотезу о том, что в инфракрасном пределе электрическая фаза SU(2)-теории Янга – Миллса описывает динамику массивных заузленных солитонов.

Структура, связанная с полем единичного вектора, также возникает из приближения Борна – Оппенгеймера для дуальных магнитных переменных, если рассматривать их как быстрые переменные на фоне медленно меняющихся электрических переменных. Усредняя лагранжиан по $\mathbf{t}$ при условиях, что $\langle \mathbf{t} \rangle = 0$ и $\langle t_i^2 \rangle = \langle t_j^2 \rangle = \langle t_3^2 \rangle = 1/3$, в нулевом порядке мы имеем [131]

$$\mathcal{L} \approx \frac{1}{4} K_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{12} H_{\mu\nu}^2 + \Lambda^2 B_\mu^2 + \frac{1}{2} \Lambda^2 (|\partial_\mu \mathbf{u}|^2 + |\partial_\mu \mathbf{v}|^2) + \frac{1}{6} \Lambda^2 K_{\mu\nu} G_{\mu\nu}. \quad (5.87)$$

Если ограничиться в (5.87) статическими конфигурациями, то гамильтониан примет вид

$$H = \Lambda^2 (\partial_i \mathbf{m})^2 + \frac{1}{4} (\mathbf{m} \partial_i \mathbf{m} \times \partial_j \mathbf{m})^2 + \frac{1}{12} H_{ij}^2 + \Lambda^2 B_i^2 + \frac{1}{6} \Lambda^2 m_i \varepsilon_{ijk} \langle K_{jk} \rangle. \quad (5.88)$$

Мы видим, что точная SO(3)-глобальная симметрия оказывается нарушенной, если фоновый аналог внеш-

него магнитного поля $\varepsilon_{ijk} K_{jk}$ является нетривиальным. Потенциальное слагаемое опять удаляет безмассовые состояния из спектра. Сравнение с (5.85) обнаруживает также очевидную дуальность между электрическими и магнитными переменными. В частности, обе совокупности переменных ведут к описанию, которое содержит в спектре массивные заузленные солитоны.

5.6. Некоторые особенности SU(3)-полей

Одним из основных результатов работы [131], обсуждавшейся в разделе 5.5, является доказательство того, что в различных фазовых состояниях лагранжиан SU(2)-поля Янга – Миллса при замене переменных содержит структуры вида $\mathcal{L}_1 = (\partial_\mu \mathbf{n})^2$ и $\mathcal{L}_2 = (\mathbf{n} [\partial_\mu \mathbf{n} \times \partial_\nu \mathbf{n}])^2$. Их совместный вклад приводит к решениям в форме устойчивых струноподобных солитонов. Одной из мотиваций работы [131] являлось предположение о том, что такие возбуждения остаются в полной теории Янга – Миллса. Естественный вопрос, который возникает в этом подходе, следующий: как обобщить поле $\mathbf{n}$ и структуру $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ на группы с более высоким рангом? Например, на группу SU(3), имеющую важное значение в квантовой хромодинамике. Такая проблема рассматривалась в работах [132, 133].

Одним из результатов работ [132, 133] был вывод о том, что дуальность SU(2)-калибровочного поля не может быть буквально перенесена на случай группы с более высоким рангом. Причина состоит в том, что лагранжиан для "электрических" переменных оказывается более вовлеченным в процедуру замены параметризации SU(3)-поля Янга – Миллса по сравнению с лагранжианом для "магнитных" переменных. В результате появляются "электрические" переменные, для которых не существует "магнитных" партнеров. Оказывается, что при замене параметризации SU(3)-лагранжиан в отличие от лагранжиана SU(2)-поля Янга – Миллса не является инвариантным относительно преобразования $A_\mu^a \rightarrow -A_\mu^a$ своих некартановских компонент с индексом $a \neq 3, 8$. Поэтому в лагранжиане появляются дополнительные "электрические" угловые переменные.

Представленное в работе [132] SU(3)-обобщение дуальной параметризации поля Янга – Миллса позволяет выразить лагранжиан SU(3)-теории через три нейтральных скалярных поля ρ_a , два массивных векторных поля, три комплексных вектора $\mathbf{e}_\mu^a$ единичной длины, допускающих магнитную интерпретацию, и семь угловых электрических переменных.

Лагранжиан для "электрических" единичных векторов t^a ($a = 1, 2, 3$), определяемых угловыми переменными, в случае рассмотренного прямого произведения подгрупп SU(2)³ имеет при градиентном разложении следующий вид [132]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_e &= \mathcal{L}_{e1} + \mathcal{L}_{e2}, \\ \mathcal{L}_{e1} &= \frac{1}{12} \left(\sum_{a=1}^3 \left((t^a [\partial_\mu \mathbf{t}^a \times \partial_\nu \mathbf{t}^a]) - \tilde{\rho}_a^2 \sum_{b=1}^3 (\mathbf{t}^b [\partial_\mu \mathbf{t}^b \times \partial_\nu \mathbf{t}^b]) \right)^2 + \sum_{a=1}^3 \rho_a^2 (\partial_\mu \mathbf{t}^a)^2 \right), \\ \mathcal{L}_{e2} &= \frac{1}{12} \left(\frac{s_3}{s_2} \left(\sum_{a=1}^3 \frac{[\partial_\mu \mathbf{t}^a \times \mathbf{t}^a]_3 t_3^a}{4(1 - (t_3^a)^2)} + 3\partial_\mu \omega^a \right)^2 + V(\mathbf{t}^1, \mathbf{t}^2, \mathbf{t}^3) \right), \end{aligned} \quad (5.90)$$

где

$$\rho_a^2 \equiv A_v^a \bar{A}_v^a, \quad \tilde{\rho}_a^2 = \prod_{b \neq a} \frac{\rho_b^2}{\rho_1^2 \rho_2^2 + \rho_1^2 \rho_3^2 + \rho_2^2 \rho_3^2},$$

$$\frac{s_3}{s_2} = \frac{\rho_1^2 \rho_2^2 \rho_3^2}{\rho_1^2 \rho_2^2 + \rho_1^2 \rho_3^2 + \rho_2^2 \rho_3^2},$$

определяющая 1-форму угловая переменная ω^a — одна из упоминавшихся угловых переменных, $V(\mathbf{t}^1, \mathbf{t}^2, \mathbf{t}^3)$ — потенциальная часть.

Обратим также внимание на то, что в точной формулировке, т.е. до перехода к градиентному разложению, справедливо следующее утверждение [132]. Переменные, которые допускают "электрическую" интерпретацию, не порождают аналога лагранжиана для объекта, принимающего значения в фактор-пространстве $SU(3)/(U(1) \times U(1))$, а образуют выражение, базирующееся на формах Кириллова для прямого произведения групп $SU(2)^{\otimes 3}$. Некоторые предложения, связанные с использованием формализма форм Кириллова в случае фактор-пространства $SU(3)/(U(1) \times U(1))$, содержатся в работе [133].

Магнитные переменные при $SU(3)$ -декомпозиции входят в гамильтониан более простым образом. Например, гамильтониан при разложении по производным медленно меняющихся взаимно некоррелированных "электрических" переменных распадается на три копии модифицированного $SU(2)$ -гамильтониана "магнитных" переменных $\mathbf{m}^a$ и содержит структуры вида

$$\eta (\mathbf{m} [\partial_k \mathbf{m} \times \partial_l \mathbf{m}])^2 + \lambda (\partial_k \mathbf{m})^2 + \kappa \left(\frac{[\partial_k \mathbf{m} \times \mathbf{m}]_3 m_3}{1 - (m_3)^2} \right)^2 \quad (5.91)$$

для каждого магнитного единичного вектора $\mathbf{m}^a$. Здесь η , λ , κ — константы связи. Несмотря на то, что этот гамильтониан из-за присутствия последнего слагаемого отличается от рассмотренного выше $SU(2)$ -гамильтониана, он сохраняет основные свойства $SU(2)$ -примера. Возможность появления такого слагаемого в гамильтониане системы, имеющей струноподобные решения, обсуждалась в работе [134].

Подробное изучение случая $SU(3)$ связано не только с необходимостью детального анализа дуальной картины или известными феноменологическими причинами. Актуальной проблемой [135] является обобщение геометрической интерпретации инварианта Хопфа. Роль целевого пространства $F_1 = SU(2)/U(1) = CP^1 = S^2$, на которое производил отображение единичный вектор $\mathbf{n}(x, y, z)$, в случае группы $SU(3)$ играет пространство флагов [136–139] $F_2 = SU(3)/(U(1) \times U(1))$ или, как частный случай (см. ниже), комплексное проективное пространство $CP^2 = SU(3)/U(2) = SU(3)/(SU(2) \times U(1))$. Будучи однородным несимметричным компактным многообразием Келера, пространство флагов F_2 реализуется как множество верхних треугольных матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & w_1 & w_2 \\ 0 & 1 & w_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.92)$$

Элементы этой матрицы параметризованы тремя комплексными функциями w_1, w_2, w_3 . В случае симметричного пространства CP^2 $w_3 = 0$. Для сравнения напомним, что пространство CP^1 реализуется как множество мат-

риц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & w \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

с $w = \tan(\vartheta/2) \exp(-i\varphi)$, где ϑ и φ — параметризующие направление единичного вектора углы сферической системы координат. Размерности пространств F_2, CP^2 равны соответственно $\dim_{F_2} = 8 - 2 = 6$ и $\dim_{CP^2} = 8 - 4 = 4$. Используемая для пространства F_1 2-форма $H = da = (\mathbf{n} [d\mathbf{n} \times d\mathbf{n}])$ здесь заменяется 2-формой Кириллова в орбитной интерпретации этих пространств.

Одной из проблем является нахождение аналога зацепляющихся магнитных линий. Таким аналогом могут служить [135] прообразы циклов коразмерности 2. Напомним, что коразмерность равна разности размерностей объемлющего пространства и пространства вложения. Препятствием при обобщении конструкции Хопфа становится то, что 2-форма Ω для пространств F_2 и CP^2 удовлетворяет условию $d\Omega = 0$, т.е. является замкнутой, но не является точной [140]. Можно сказать, что Ω представляет собой элемент второй когомологической группы этих пространств. Это означает, что на пространстве флагов F_2 как на келеровом многообразии 1-форму, т.е. аналог калибровочного потенциала, можно ввести *только локально* [136]. Другими словами, прямое обобщение [141] выражения (3.3) возможно только в том случае, когда мы пренебрегаем отмеченным обстоятельством, которое проявляется в том, что на пространствах F_2 и CP^2 существуют особенности — критические точки [137], связанные с обращением функций w_i в нуль [142]. Обнадеживающим фактом, указывающим на возможность существования аналога инварианта Хопфа и одновременно на принципиальное различие пространств F_2 и CP^2 , является то, что гомотопическая группа $\pi_3(F_2) = \mathbb{Z}$ так же, как и $\pi_3(CP^1) = \mathbb{Z}$, нетривиальна, в то время как $\pi_3(CP^2) = 0$. Отметим также, что из-за нетривиальности $\pi_2(F_2) = \mathbb{Z}^2$ в теории существуют два различных фундаментальных монополя. Возможно, что использование результатов теории узлов в многомерных пространствах [143] поможет решить рассматриваемую проблему.

6. Заключительные замечания

В настоящем обзоре обсуждались результаты работ, в которых рассматривалась низкоэнергетическая динамика возбуждений в теории сильно коррелированных электронных систем и в неабелевой теории поля. Проблемы сильной связи, как и используемые подходы [144], в этих системах во многих отношениях аналогичны. Применение полученных результатов в хромодинамической феноменологии направлено в основном [145, 146] на сравнение вычисленной энергии статических заузленных конфигураций [23] с массой частиц, являющихся кандидатами в глюболы.

При анализе динамики спиновых степеней свободы в твердотельных системах основное внимание уделялось [15] изучению иерархии основных состояний. Мы сконцентрировались на результатах, полученных при изучении существенно неоднородных состояний в пространственно трехмерных системах, и на явлениях, связанных с зацеплениями квазиодномерных конфигураций полей. При этом предполагалось, что на пространственной бесконечности выполняются однородные граничные

условия: $\mathbf{n}(\infty) = (0, 0, 1)$. Если граничные условия отличаются от однородных [31, 32], то выражение для инварианта Хопфа усложняется. Мы рассмотрим это явление, следуя результатам работ [31, 32, 147, 148]. Но вначале обратим внимание на следующее обстоятельство.

Граничные условия, которые устанавливают характерные значения импульса $\mathbf{c}$ и значения топологических инвариантов L , Q , определяются не только значениями управляющего параметра ρ_0 модели и внешнего магнитного поля или частоты вращения системы. Их физический смысл и конкретные значения зависят также от пространственной размерности многообразия, на котором определена модель. В $(3+0)$ -мерном случае свободной энергии (2.3) инвариант Хопфа (3.3) аналогичен действию Черна–Саймонса $(k/4\pi) \int dt d^2x \varepsilon_{\mu\nu\lambda} a_\mu \partial_\nu a_\lambda$. Это абелево слагаемое в действии $(2+1)$ -мерных систем описывает зависимость вклада нелинейных мод в свободную энергию от статистического параметра k . В неабелевом $SU(N)$ -случае значение коэффициента сдвигается на значение ранга группы: $k \rightarrow k + N$. Коэффициент k в действии Черна–Саймонса имеет геометрический смысл числа переплетений мировых линий возбуждений. В частности, при перестановке полуфермионных возбуждений, так называемых семионов, и возвращении их в исходные позиции на плоскости мировые линии переплетаются дважды и $k = 2$. Для фермионов мировые линии не переплетены и $k = 1$ [149]. В классическом пределе бозонов, когда $k \gg 1$, входящее в действие Черна–Саймонса статистическое калибровочное поле a_μ отщепляется [5] от полей, описывающих состояния частиц. При $k = 2$ статистические корреляции нелинейных мод имеют характер притяжения, и для значений $k \sim 2$ их наибольший относительный вклад в энергию составляет несколько процентов [150, 151], что для характерных значений энергии $J \sim 0,1\text{--}1$ эВ составляет несколько десятков или сотен градусов. Принимая во внимание соотношение между размерностями систем при их динамическом и статистическом описании, заметим, что $(2+1)$ -мерный случай при $k = 2$ с незамкнутыми концами мировых линий возбуждений эквивалентен после отождествления концов компактному статистическому $(3+0)$ -мерному примеру зацепления Хопфа с $Q = 1$.

Различие $(3+0)$ - и $(2+1)$ -мерных ситуаций обусловлено различием топологии областей определения поля $\mathbf{n}$ [31, 32, 147, 148]. При вычислении статистической суммы как в слоистых системах в статическом случае (2.3), когда система периодична по одной из пространственных переменных, так и в планарных системах одна из трех координат — переменная Мацубары — является периодической. Это означает, что вместо сферы S^3 , каковой стала область определения поля $\mathbf{n}$ после компактификации пространства R^3 , мы имеем дело с трехмерным тором $T^{2 \times 1} = S^2 \times S^1$, или $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$, и соответствующими классами отображений. Содержание инварианта Хопфа в этом случае оказывается более богатым [31, 32, 147, 148]. Для трехмерного тора T^3 инвариант Хопфа определен по модулю $2q$, где q — наибольший общий делитель чисел $\{q_1, q_2, q_3\} \in \mathbb{Z}$ — имеет смысл числа скирмионов. Здесь q_i — степень отображения $T^2 \rightarrow S^2$, где T^2 есть сечение T^3 с фиксированной i -й координатой. Четыре целых числа $\{q_i, Q\}$, где величина Q определена по модулю $2q$, обеспечивают нас полной

гомотопической классификацией [148] отображений $T^3 \rightarrow S^2$ с $\pi_1[\text{Map}_q(S^2 \rightarrow S^2)] = \mathbb{Z}_{2q}$ и фиксированной степенью q [31, 32, 147]. Выражение для инварианта Хопфа в случае тора T^3 имеет вид [147]:

$$Q = \frac{1}{16\pi^2} \sum_{i=0}^3 Q_i, \quad (6.1)$$

$$Q_3 = \int d^3x \varepsilon^{\mu\nu\lambda} a_\mu \partial_\nu a_\lambda, \quad (6.2)$$

$$Q_2 = \int_{x_\mu=0} d^2x \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu \beta_\mu a_\lambda, \quad (6.3)$$

$$Q_1 = \int_{x_{\mu,\nu}=0} dx \varepsilon^{\mu\nu\lambda} (\Delta_\nu \beta_\mu \partial_\lambda \beta_\mu - \beta_\mu \partial_\lambda \beta_\nu), \quad (6.4)$$

$$Q_0 = 2\pi [n_1 \beta_1 + n_2 \beta_2 + n_3 \beta_3 + n_1 \Delta_1 (\beta_2 + \beta_3) + n_2 \Delta_2 (\beta_1 + \beta_3) + n_3 \Delta_3 (\beta_1 + \beta_2)]_{\mathbf{x}=(0,0,0)}. \quad (6.5)$$

Здесь использованы следующие обозначения. Функции $\beta_1(y, z)$, $\beta_2(x, z)$, $\beta_3(x, y)$ участвуют в определении граничных условий на гранях трехмерного параллелепипеда со сторонами L_1 , L_2 , L_3 в соответствующих направлениях. Например, граничное условие по оси x для двухкомпонентной функции z , параметризующей единичный вектор $\mathbf{n}(x, y, z)$ соотношением $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{n}\sigma = 2zz^\dagger - 1$, имеет вид: $z(x = L_1, y, z) = \exp[i\beta_1(y, z)] z(x = 0, y, z)$. Аналогичные граничные условия по осям y и z определяются с помощью функций $\beta_2(x, z)$, $\beta_3(x, y)$. Функции β_μ удовлетворяют соотношению $\varepsilon^{\mu\nu\lambda} \Delta_\mu \beta_\nu = 2\pi n_\lambda$ и определены через $\exp(i\beta_\mu)$, т.е. $\beta_\mu \equiv \beta_\mu + 2\pi$. В выражении (6.5) $\Delta_\mu \beta_\nu \equiv \beta_{\nu|_{x_\mu=L_\mu}} - \beta_{\nu|_{x_\mu=0}}$ и n_ν является целочисленным вектором, характеризующим отображения $T^2 \rightarrow S^2$, где T^2 есть сечение T^3 с фиксированной i -й координатой.

Геометрический смысл модифицированного инварианта Хопфа (6.1) — целого числа из интервала $\{0, 2q - 1\}$ — прежний. Он представляет собой индекс зацепления прообразов двух произвольных точек отображения $T^3 \rightarrow S^2$. Случаи $T^{2 \times 1}$ и T^3 характеризуются физически различными граничными условиями, которые изменяются при варьировании параметров, например при увеличении угловой скорости вращения сверхтекучей фазы в He^3 [31, 32]. Обсуждение граничных условий и других проблем, связанных с влиянием зацеплений квазиодномерных конфигураций на явления в теории поля и в физике конденсированного состояния, содержится в нецитированных в настоящем обзоре работах А.И. Ниemi, Р.С. Уорда, У.М. Чо, Е. Бабаева и других авторов, которые можно найти в Лос-Аламосском электронном архиве препринтов.

В заключение выражаю глубокую благодарность Л.Д. Фаддееву за многочисленные полезные обсуждения и П. Фулде за обсуждения и замечания, а также за гостеприимство в Институте физики сложных систем в Дрездене, где была написана большая часть настоящего обзора. Мне было полезно и приятно обсуждать рассмотренные проблемы также с А.Г. Абановым, В.И. Арнольдом, В.И. Белявским, С.А. Бразовским, Л.Н. Булавским, В.А. Вербусом, Г.Е. Воловиком, Ю.М. Гальпериним, Б.А. Дубровиным, Н.Н. Кировой, Ю.В. Копаевым, В.Е. Кравцовым, Е.А. Кузнецовым, А.И. Ларкиным, А.Г. Литваком, В.А. Мироновым, М.И. Монастырским, С.Г. Овчинниковым, А.К. Погребковым, В.А. Рубако-

вым, Г.М. Фрайманом, Д.И. Хомским, А.М. Цвеликом, S. Davis, S.M. Girvin, A. Kundu, Yu Lu, N. Nagaosa, S.R. Shenoy, H. Takagi, Y.-S. Wu, которым я выражаю глубокую благодарность за советы и замечания.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант 06-02-16561а) и программой РНП 2.1.1 (грант № 2369).

7. Приложение. Выигрыш в свободной энергии в токовом состоянии

Для доказательства неравенства (3.5) используется следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} |L| &< \|c\|_6 \|H\|_{6/5} \leq 6^{1/6} \|\nabla \times c\|_2 \|H\|_{6/5} \leq \\ &\leq 6^{1/6} \|\nabla \times c\|_2 \|H\|_1^{2/3} \|H\|_2^{1/3} \leq \\ &\leq (32\pi^2)^{-4/3} F_c^{1/2} F_n^{2/3} F_n^{1/6} = (32\pi^2)^{-4/3} F_c^{1/2} F_n^{5/6}. \quad (7.1) \end{aligned}$$

Здесь $\|H\|_p \equiv (\int d^3x |H|^p)^{1/p}$. На первом и третьем шагах мы использовали неравенство Гёльдера: $\|fg\| \leq \|f\|_p \|g\|_q$ с $1/p + 1/q = 1$. Второй шаг при условии $\nabla c = 0$ предполагает, что имеет место неравенство Ладыженской [152]: $\|c\|_6 \leq 6^{1/6} \|\nabla \times c\|_2$. Четвертый шаг в последовательности неравенств возникает после сравнения слагаемых $\|\nabla \times c\|$ и $\|H\|$ со слагаемыми F_n и F_c . Последнее равенство показывает также отдельные вклады от n - и c -частей свободной энергии в окончательный результат. Если положить $a = c$, то мы возвращаемся к результату Вакуленко и Капитанского [27] (см. также [153]).

Совершенно аналогично, пользуясь цепочкой неравенств Гёльдера и Ладыженской, можно найти, что

$$F_n^{1/2} F_c^{5/6} \geq (16\pi^2)^{4/3} |L'|.$$

Отличие коэффициента в этом неравенстве от коэффициента в выражении (3.5) возникает из-за множителя $1/4$ при первом слагаемом свободной энергии F_c .

Список литературы

- Faddeev L D, Preprint No. IAS-75-QS70 (Princeton, NJ: Institute for Advanced Study, 1975); *Lett. Math. Phys.* **1** 289 (1976)
- Katritch V et al. *Nature* **384** 142 (1996)
- Stasiak A, Katritch V, Kauffman L H (Eds) *Ideal Knots* (Ser. on Knots and Everything, Vol. 19) (Singapore: World Scientific, 1998); Kawachi A *A Survey of Knot Theory* (Basel: Birkhäuser Verlag, 1996)
- Wilczek F (Ed.) *Fractional Statistics and Anyon Superconductivity* (Singapore: World Scientific, 1990)
- Протогенов А П *УФН* **162** (7) 1 (1992)
- Dagotto E *Rev. Mod. Phys.* **66** 763 (1994)
- Brenig W *Phys. Rep.* **251** 153 (1995)
- Tsuei C C, Kirtley J R *Rev. Mod. Phys.* **72** 969 (2000)
- Lee P A, Nagaosa N, Wen X-G *Rev. Mod. Phys.* **78** 17 (2006); cond-mat/0410445
- Babaev E, Faddeev L D, Niemi A J *Phys. Rev. B* **65** 100512 (2002)
- Kugel K I, Pogosov W V, Rakhmanov A L *Physica C* **339** 10 (2000)
- Mel'nikov A S et al., cond-mat/0001186
- Белявский В И, Копаев Ю В *ЖЭТФ* **127** 45 (2005)
- Белявский В И, Копаев Ю В, Смирнов М Ю *ЖЭТФ* **128** 525 (2005)
- Исаев Л С, Протогенов А П *ЖЭТФ* **123** 1297 (2003)
- Воловик Г Е, Горьков Л П *ЖЭТФ* **88** 1412 (1985)
- Минеев В П, Самохин К В *ЖЭТФ* **105** 747 (1994)
- Mermin N D, Ho T-L *Phys. Rev. Lett.* **36** 594 (1976)
- Anderson P W *Phys. Rev. Lett.* **96** 017001 (2006)
- Белявский В И, Копаев Ю В *УФН* **176** 457 (2006)
- Ioffe L B, Wiegmann P B *Phys. Rev. Lett.* **65** 653 (1990)
- Isaev L S, Protogenov A P *Phys. Rev. B* **69** 012401 (2004)
- Faddeev L, Niemi A J *Nature* **387** 58 (1997)
- Gladikowski J, Hellmund M *Phys. Rev. D* **56** 5194 (1997)
- Battye R A, Sutcliffe P M *Phys. Rev. Lett.* **81** 4798 (1998)
- Nietarinta J, Salo P *Phys. Lett. B* **451** 60 (1999)
- Вакуленко А Ф, Капитанский Л В *ДАН СССР* **246** 840 (1979)
- Kundu A, Rybakov Yu P *J. Phys. A: Math. Gen.* **15** 269 (1982)
- Ward R S *Nonlinearity* **12** 241 (1999); hep-th/9811176
- Derrick G H J. *Math. Phys.* **5** 1252 (1964)
- Ruutu V M H et al. *Письма в ЖЭТФ* **60** 659 (1994)
- Makhlin Yu G, Misirpashaev T Sh *Письма в ЖЭТФ* **61** 48 (1995)
- Lin F, Yang Y *Commun. Math. Phys.* **249** 273 (2004)
- Atiyah M *The Geometry and Physics of Knots* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990)
- Sossinsky A *Knots: Mathematics with a Twist* (Cambridge: Harvard Univ. Press, 2002)
- The KnotPlot site, <http://www.pims.math.ca/knotplot/>
- Ropers knots page, <http://www.realknots.com/>
- Mathematical knots, <http://www.cs.ubc.ca/nest/imager/contributions/scharein/knot-theory/>
- The knot theory MA3F2 page, <http://www.maths.warwick.ac.uk/~bjs/MA3F2-page.html>
- Trefoil knot pages, <http://www.jcu.edu/math/ictcm99/animations/knot.htm>; <http://www.unca.edu/~mcmclur/java/LiveMathematica/trefoil.html>
- Knots, links, braids, <http://www.win.tue.nl/~aeb/at/algtop-5.html>
- Knots and surfaces, <http://www.ai.sri.com/~goldwate/math/knots/>
- Abanov A G, Wiegmann P B, hep-th/0105213
- Arnold V I, Khesin B A *Topological Methods in Hydrodynamics* (Applied Mathematical Sciences, Vol. 125) (New York: Springer-Verlag, 1998) Ch. 3
- Moffatt H K J. *Fluid Mech.* **35** 117 (1969)
- Горди́н В А, Петвиашвили В И *ЖЭТФ* **95** 1711 (1989)
- Захаров В Е, Кузнецов Е А *УФН* **167** 1137 (1997)
- Read N, Green D *Phys. Rev. B* **61** 10267 (2000)
- Камчатнов А М *ЖЭТФ* **82** 117 (1982)
- Ларкин А И, Овчинников Ю Н *ЖЭТФ* **47** 1136 (1964)
- Fulde P, Ferrell R A *Phys. Rev.* **135** A550 (1964)
- Buzdin A I, Kachkachi H *Phys. Lett. A* **225** 341 (1997)
- Houzet M, Buzdin A *Europhys. Lett.* **50** 375 (2000)
- Kuznetsov E A, Mikhailov A V *Phys. Lett. A* **77** 37 (1980)
- Kohsaka Y et al. *Phys. Rev. Lett.* **93** 097004 (2004)
- Kohsaka Y et al. *Physica C* **388**–**389** 283 (2003)
- Поляков А М *ЖЭТФ* **68** 1975 (1975)
- Niemi A J *Phys. Rev. D* **67** 106004 (2003)
- van Baal P *Nucl. Phys. B: Proc. Suppl.* **108** 3 (2002); hep-th/0109148
- Волков Б А и др. *ЖЭТФ* **81** 729 (1981)
- Волков Б А и др. *ЖЭТФ* **81** 1904 (1981)
- Kotliar G *Phys. Rev. B* **37** 3664 (1988)
- Affleck I, Marston J B *Phys. Rev. B* **37** 3774 (1988); Marston J B, Affleck I *Phys. Rev. B* **39** 11538 (1989)
- Nersesyan A, Luther A, Preprint FTT-9 (Tbilisi: Institute of Physics, 1988)
- Nersesyan A A, Vachnadze G E J. *Low Temp. Phys.* **77** 293 (1989)
- Nersesyan A A, Japaridze G I, Kimeridze I G J. *Phys.: Condens. Matter* **3** 3353 (1991)
- Hsu T C, Marston J B, Affleck I *Phys. Rev. B* **43** 2866 (1991)
- Halperin B I, Rice T, in *Solid State Physics* Vol. 21 (Eds F Seitz, D Turnbull, H Ehrenreich) (New York: Academic Press, 1968) Ch. 1, p. 115
- Schulz H J *Phys. Rev. B* **39** 2940 (1989)
- Varma C M *Phys. Rev. Lett.* **83** 3538 (1999)
- Varma C M *Phys. Rev. B* **55** 14554 (1997)
- Wen X-G, Lee P A *Phys. Rev. Lett.* **76** 503 (1996)
- Lee P A et al. *Phys. Rev. B* **57** 6003 (1998)
- Nayak C *Phys. Rev. B* **62** 4880 (2000)
- Chakravarty S et al. *Phys. Rev. B* **63** 094503 (2001)
- Волков Б А, Горбачевич А А, Копаев Ю В *ЖЭТФ* **86** 1870 (1984)
- Волков Б А, Гинзбург В Л, Копаев Ю В *Письма в ЖЭТФ* **27** 221 (1978)
- Дубовик В М, Тосунян Л А *ЭЧАЯ* **14** 1193 (1983)
- Dubovik V M, Tugushev V V *Phys. Rep.* **187** 145 (1990)
- Миллер М А *УФН* **142** 147 (1984); *Изв. вузов. Радиопизика* **29** 991 (1986)
- Ginzburg V L et al. *Solid State Commun.* **50** 339 (1984)
- Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Электродинамика сплошных сред* (М.: Наука, 1982) с. 249

83. Liu W V, Wilczek F *Phys. Rev. Lett.* **90** 047002 (2003)
84. Adler R J *The Geometry of Random Fields* (Chichester: J. Wiley, 1981)
85. Worsley K J *Chance* **9** 27 (1996)
86. Schmalian J "Are there gels in the quantum world?", Talk at *Aspen Intern. Workshop: Frontiers in Correlated Matter, Aspen, CO, USA, 5–8 August 2004*; http://frontiers.physics.rutgers.edu/qcrit3_files/schmallvision.pdf
87. Metzler R et al. *Phys. Rev. Lett.* **88** 188101 (2002); cond-mat/0110266
88. Гантмахер В Ф *Электронны в неупорядоченных средах* (М.: Физматлит, 2003) с. 160
89. Emery V J, Kivelson S A *Nature* **374** 434 (1995)
90. Mihailovic D, Kabanov V V, Müller K A *Europhys. Lett.* **57** 254 (2002)
91. Tallon J L et al. *Phys. Rev. B* **51** R12911 (1995)
92. Tallon J L et al. *Phys. Rev. Lett.* **79** 5294 (1997)
93. Boebinger G S et al. *Phys. Rev. Lett.* **77** 5417 (1996)
94. Faddeev L, Niemi A J *Phys. Rev. Lett.* **82** 1624 (1999); *Phys. Lett. B* **449** 214; **464** 90 (1999)
95. Cho Y M *Phys. Rev. D* **21** 1080 (1980); **23** 2415 (1981); **62** 074009 (2000); *Phys. Rev. Lett.* **44** 1115 (1980)
96. Cho Y M *Phys. Rev. Lett.* **46** 302 (1981)
97. Wu T T, Yang C N, in *Properties of Matter Under Unusual Conditions; in Honor of Edward Teller's 60th Birthday* (Eds H Mark, S Fernbach) (New York: Interscience Publ., 1969) p. 349
98. De Alfaro V, Fubini S, Furlan G *Phys. Lett. B* **65** 163 (1976)
99. De Alfaro V, Fubini S, Furlan G *Phys. Lett. B* **72** 203 (1977)
100. Jacobs L, Rebbi C *Phys. Rev. D* **18** 1137 (1978)
101. Protogenov A P *Phys. Lett. B* **87** 80 (1979)
102. Protogenov A P *Phys. Lett. B* **67** 62 (1977)
103. Witten E *Phys. Rev. Lett.* **38** 121 (1977)
104. 't Hooft G *Nucl. Phys. B* **153** 141 (1979); **190** 455 (1981)
105. Polyakov A M *Nucl. Phys. B* **120** 429 (1977)
106. Langmann E, Niemi A J *Phys. Lett. B* **463** 252 (1999); hep-th/9905147
107. Bae W S, Cho Y M, Kimm S W *Phys. Rev. D* **65** 025005 (2002); hep-th/0105163
108. Shabanov S V *Phys. Lett. B* **463** 263 (1999); hep-th/9907182; hep-th/0004135
109. Gies H *Phys. Rev. D* **63** 125023 (2001)
110. Belavin A A et al. *Phys. Lett. B* **59** 85 (1975)
111. 't Hooft G *Phys. Rev. D* **14** 3432 (1976)
112. Isaev L S, Protogenov A P, in *Proc. of Intern. Workshop Nonlinear Physics: Theory and Experiment. III, Lecce, Italy, 2004*
113. Witten E *Phys. Lett. B* **117** 324 (1982)
114. van Baal P, Wipf A *Phys. Lett. B* **515** 181 (2001); hep-th/0105141
115. Dittmann L, Heinzl T, Wipf A *Nucl. Phys. B: Proc. Suppl.* **106–107** 649 (2002); hep-lat/0110026
116. Jackiw R, Nair V P, Pi S-Y *Phys. Rev. D* **62** 085018 (2000); hep-th/0004084
117. Cho Y M, Lee H, Pak D G, hep-th/9905215
118. Witten E *Commun. Math. Phys.* **121** 351 (1989)
119. Hikami K, Kirillov A N *Phys. Lett. B* **575** 343 (2003); hep-th/0308152
120. Ward R S, hep-th/0108082
121. Skyrme T H R *Proc. R. Soc. London Ser. A* **260** 127 (1961)
122. Skyrme T H R *Nucl. Phys.* **31** 556 (1962)
123. Atiyah M F, Manton N S *Phys. Lett. B* **222** 438 (1989)
124. Manton N, Sutcliffe P *Topological Solitons* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004)
125. Manton N S *Commun. Math. Phys.* **111** 469 (1987)
126. Ward R S *Phys. Rev. D* **70** 061701 (2004); hep-th/0407245
127. 't Hooft G (unpublished)
128. Ward R S *Nonlinearity* **14** 1543 (2001); hep-th/0108082
129. Jackiw R, Nohl C, Rebbi C *Phys. Rev. D* **15** 1642 (1977)
130. Atiyah M F, Manton N S *Commun. Math. Phys.* **153** 391 (1993)
131. Faddeev L, Niemi A J *Phys. Lett. B* **525** 195 (2002); hep-th/0101078
132. Болохов Т А, Фаддеев Л Д *ТМФ* **139** 276 (2004)
133. Faddeev L, Niemi A J *Phys. Lett. B* **449** 214; **464** 90 (1999); hep-th/9907180
134. Nasir S, Niemi A J, hep-th/0106009
135. Faddeev L *Philos. Trans. R. Soc. London Ser. A* **359** 1399 (2001)
136. Kondo L-I, Taira Y *Prog. Theor. Phys.* **104** 1189 (2000); hep-th/9911242
137. Picken R F *J. Math. Phys.* **31** 616 (1990)
138. Perelomov A M *Phys. Rep.* **146** 135 (1987)
139. Boya L J, Perelomov A M, Santander M *J. Math. Phys.* **42** 5130 (2001)
140. Karabali D, Nair V P, Randjbar-Daemi S, hep-th/0407007
141. Shabanov S V *J. Math. Phys.* **43** 4127 (2002); hep-th/0202146
142. Atiyah M, Witten E *Adv. Theor. Math. Phys.* **6** 1 (2003); hep-th/0107177
143. Ranicki A *High-dimensional Knot Theory. Algebraic Surgery in Codimension 2* (New York: Springer, 1998)
144. Bär O, Imboden M, Wiese U-J *Nucl. Phys. B* **686** 347 (2004); cond-mat/0310353
145. Buniy R V, Kephart T W *Phys. Lett. B* **576** 127 (2003)
146. Buniy R V, Kephart T W *Int. J. Mod. Phys. A* **20** 1252 (2005); hep-ph/0408025
147. Abanov A G, частное сообщение
148. Pontrjagin L *Rec. Math. Moscou* (9(51)) 331 (1941)
149. Polyakov A M *Mod. Phys. Lett. A* **3** 325 (1988)
150. Abramyan L A, Protogenov A P, Verbus V A *Письма в ЖЭТФ* **69** 839 (1999)
151. Протогенов А П *Письма в ЖЭТФ* **73** 292 (2001)
152. Ladyzhenskaya O A *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow* 2nd ed. (New York: Gordon and Breach, 1969)
153. Рыбаков Ю П *Вестник РУДН. Сер. Мат.* **2** (2) 35 (1995)

Knots and links in the order parameter distributions of strongly correlated systems

A.P. Protogenov

*Institute of Applied Physics, Russian Academy of Sciences,
ul. Ul'yanova 46, 603950 Nizhniy Novgorod, Russian Federation
Tel. (7-8312) 164-899
E-mail: alprot@appl.sci-nnov.ru*

Research on the coherent distribution of order parameters determining phase existence regions in the two-component Ginzburg–Landau model is reviewed. A major result of this research — obtained by formulating this model in terms of gauged order parameters (the unit vector field $\mathbf{n}$, the density ρ^2 , and the particle momentum $\mathbf{c}$) — is that some of the universal phase and field configuration properties are determined by topological features related to the Hopf invariant Q in its usual or generalized form. For sufficiently low densities, a ring-shaped density distribution may be favored over stripes. For a $L < Q$ phase (L being the mutual linking index of the $\mathbf{n}$ and $\mathbf{c}$ field configurations) a gain in free energy occurs when a transition to a nonuniform current state takes place. A universal mechanism accounting for decorrelation with increasing charge density is discussed. The second part of the review is concerned with what non-Abelian field theory has to say on the topic of knotted configurations. The key properties of quasi-classical configurations arising in Yang–Mills theory and the Skyrme model are discussed in detail, and the relation of these configurations to knotted distributions is scrutinized.

PACS numbers: **02.40. – k**, **11.15. – q**, **11.27. + d**, **74.20.De**

Bibliography — 153 references

Received 26 December 2005

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **176** (7) 689–715 (2006)

Physics–Uspekhi **49** (7) (2006)