

## МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

# Пространственная конфигурация света при последовательных нелинейно-оптических преобразованиях

А.В. Белинский, А.В. Исаева, Е.В. Макеев, А.А. Новиков

*Представлены результаты аналитического и компьютерного прогноза пространственно-спектральной конфигурации излучения, генерируемого в слоистом нелинейном кристалле при последовательных двух-ступенчатых процессах параметрического рассеяния и генерации суммарной частоты. Намечены пути получения аналитических оценок, в том числе для решения задачи поиска фазового синхронизма. Приведены весьма причудливые пространственно-частотные спектры.*

PACS numbers: 42.25.Bs, 42.65.-k, 42.65.Ky

## Содержание

1. Введение (543).
  2. Параметрические бифотоны (544).
  3. Параметрическое усиление в поле низкочастотной накачки (544).
  4. Анализ расчетного соотношения для амплитуды моды состояния (547).
  5. Конфигурация спектров излучения в пространстве (548).
  6. Заключение (550).
- Список литературы (550).

## 1. Введение

Успехи современной нелинейной квантовой оптики позволяют придумывать и реализовывать такие удивительные и подчас экзотические процессы, о которых до недавнего времени было трудно даже мечтать. Один из ярких примеров из этой области мы хотели бы представить читателям.

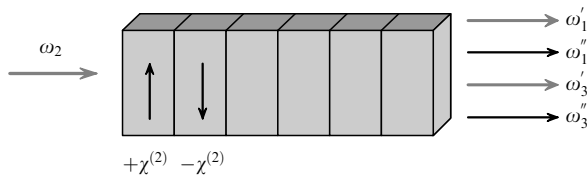
Рождение нелинейной квантовой оптики обычно связывают с удвоением частоты света [1]. Красный луч рубинового лазера с длиной волны 694,2 нм направляли в прозрачный кристалл кварца, а из него выходил ультрафиолетовый луч с длиной волны 347,1 нм. При этом лазерные "красные" фотонные пары преобразовывались в одиночные ультрафиолетовые фотоны второй гармоники. Примерно через 15 лет было установлено, что при этом происходит своеобразное упорядочивание потока

фотонов лазера [2, 3]. Поскольку из лазерного пучка "выхватываются" пары фотонов, флуктуационные пики интенсивности сглаживаются. Иными словами, сгустки фотонов прореживаются. Дробовой шум детектирования такого излучения может быть подавлен. Это — удивительный результат, поскольку довольно долго считалось, что дробовой шум определяет предельную точность измерительных фотоэлектрических приборов, представляя собой так называемый стандартный квантовый предел. Дело в том, что при постоянной интенсивности света, освещающего детектор, природа дробового шума связана со случайностью отрыва фотоэлектронов из фотокатода, т.е. фотодетектор имеет некий минимальный уровень шума (см., например, [4]).

Существование процесса удвоения частоты света обуславливает и возможность обратного процесса [5]. И, действительно, этот процесс был реализован также в кристаллах в так называемом параметрическом рассеянии света [6], при котором одиночные фотоны "разваливаются" на фотонные пары. Поведение последних не просто удивительно, а даже парадоксально. Объединенные общим моментом рождения фотоны каждой пары, как близнецы, даже будучи разделенными, сохраняют точную взаимосвязь. Если, например, один из фотонов пары будет зарегистрирован измерительным прибором, то квантовое состояние второго изменится моментально (!), хотя они могут находиться при этом на огромном расстоянии друг от друга, поскольку, согласно общепринятому мнению, подтвержденному экспериментально, редукция происходит мгновенно (конечно, в пределах возможностей экспериментаторов). Фотоны пары могут разлететься на несколько километров друг от друга, но "информация" о результате детектирования первого фотона мгновенно изменяет квантовое состояние второго. Можно ли при этом говорить о сверхсветовой скорости передачи информации при помощи параметрического рассеяния света? По-видимому, нет. Дело в том, что для функционирования линии связи между удаленными наблюдателями пар фотонов помимо детекторов

А.В. Белинский, А.В. Исаева, Е.В. Макеев, А.А. Новиков.  
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,  
физический факультет,  
119992 Москва, Воробьевы горы, Российская Федерация  
Тел. (495) 939-30-93  
E-mail: belinsky@inbox.ru, makeev@newmail.ru

Статья поступила 8 августа 2005 г.,  
после доработки 16 января 2006 г.



**Рис. 1.** Схема процесса последовательного параметрического преобразования света в периодической структуре, состоящей из доменов, оптические оси которых направлены в противоположные стороны, что формально эквивалентно изменению знака коэффициента квадратичной нелинейности  $\chi^{(2)}$ . Монохроматический коллимированный лазерный пучок накачки с круговой частотой излучения  $\omega_2$  распадается на пучки с частотами  $\omega_1'$  и  $\omega_1''$ , удовлетворяющими соотношению (2). Каждый из этих пучков, взаимодействуя с лазерным, дает излучение с суммарной частотой, т.е.  $\omega_3' = \omega_2 + \omega_1'$  и  $\omega_3'' = \omega_2 + \omega_1''$ .

необходим еще и "телефон", поскольку, не имея сведений о результате детектирования первого фотона, наблюдатель второго видит фактически случайный сигнал (см., например, [7] и цитируемую там литературу).

Удвоение частоты света можно рассматривать как частный случай сложения частот двух пучков:

$$\omega_1 + \omega_2 \rightarrow \omega_3 = \omega_1 + \omega_2. \quad (1)$$

Равенство (1) следует из закона сохранения энергии при слиянии двух фотонов в один. Аналогично, в параметрическом рассеянии:

$$\omega_2 \rightarrow \omega_1' + \omega_1'' = \omega_2. \quad (2)$$

Можно ли оба процесса последовательно реализовать в одном и том же кристалле? Принципиально можно, но очень трудно. Дело в том, что скорости всех распространяющихся пучков должны быть одинаковыми, иначе одни пучки будут обгонять другие и эффективность нелинейного преобразования резко упадет. Но явление дисперсии должно препятствовать выполнению этого так называемого условия фазового синхронизма. Кроме того, различие фазовых скоростей в разных направлениях обуславливается анизотропией кристаллов. Тем не менее последовательное взаимодействие возможно. В монокристаллах его исследовали авторы работ [8–10]. В работе [10], в частности, сделан вывод, что последовательное преобразование может быть весьма эффективным. Однако использование периодически слоистых кристаллических структур дает дополнительные степени свободы и большие возможности, хотя и усложняет теоретическое решение задачи [11] (рис. 1). Пространственная конфигурация спектров излучения при этом принимает весьма причудливые формы, описание которых и является предметом настоящей статьи.

## 2. Параметрические бифотоны

Формальное описание последовательного преобразования света начнем с параметрического преобразования, при котором частоты взаимодействующих пучков света связаны соотношением (2). При этом кванты излучения накачки с частотой  $\omega_2$  распадаются на сигнальный ( $\omega_1'$ ) и холостой ( $\omega_1''$ ) фотоны, т.е. происходит преобразование частоты вниз — от большей к меньшим.

Предположим вначале, что имеется всего три плоских монохроматических моды излучения: мода накачки, характеризуемая операторами рождения  $\hat{a}_2^\dagger$  и уничтожения  $\hat{a}_2$  фотона, сигнальная мода ( $\hat{a}_1'^\dagger, \hat{a}_1'$ ) и холостая мода ( $\hat{a}_1''^\dagger, \hat{a}_1''$ ). Тогда оператор  $\hat{a}_2 \hat{a}_1'^\dagger \hat{a}_1''^\dagger$  переводит однофотонную моду накачки  $|1\rangle_2$  и вакуум  $|0\rangle_1$  сигнальной и холостой мод в бифотон:  $\hat{a}_2 \hat{a}_1'^\dagger \hat{a}_1''^\dagger |1\rangle_2 |0\rangle_1 |0\rangle_1 = |0\rangle_2 |1\rangle_1 |1\rangle_1$ . Эрмитово-сопряженный оператор  $\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1' \hat{a}_1''$  производит обратное преобразование. Эти два взаимосопреженных оператора, домноженные на постоянные коэффициенты, образуют гамильтониан параметрического взаимодействия.

В реальной ситуации взаимодействующие световые пучки, конечно, являются многомодовыми и имеют определенную пространственную конфигурацию и конечную ширину спектра. Поэтому, разложив световые пучки на плоские монохроматические моды, затем их надо просуммировать. При этом эффективный гамильтониан взаимодействия в среде с квадратичной нелинейностью  $\chi^{(2)}$  можно представить в виде [13–16]

$$\hat{\mathcal{H}} = -\frac{1}{2} \int_V \chi^{(2)}(\omega_2, \omega_1', \omega_1'', \mathbf{r}) \hat{E}_2^{(+)}(t, \mathbf{r}) \times \hat{E}_1'^{-}(t, \mathbf{r}) \hat{E}_1''^{-}(t, \mathbf{r}) d^3r + \text{э.с.}, \quad (3)$$

где интегрирование ведется по объему кристалла  $V$ , э.с. означает эрмитово-сопряженное слагаемое, а положительно-частотный оператор поля накачки

$$\hat{E}_2^{(+)}(t, \mathbf{r}) = i \sum_{\mathbf{k}_2} \sqrt{\hbar \omega_2 \left( \frac{2\pi}{L^3} \right)} \hat{a}_{\mathbf{k}_2} \exp [i(\mathbf{k}_2 \mathbf{r} - \omega_2 t)] \quad (4)$$

представляет собой сумму всевозможных плоских мод в кубе квантования  $L^3$  (см., например, [17]), характеризуемых волновыми векторами  $\mathbf{k}_2$  и соответствующими операторами уничтожения фотона  $\hat{a}_{\mathbf{k}_2}$ .

Аналогично, отрицательно-частотные операторы сигнального и холостого полей равны

$$\hat{E}_1'^{-}(t, \mathbf{r}) = -i \sum_{\mathbf{k}_1} \sqrt{\hbar \omega_1' \left( \frac{2\pi}{L^3} \right)} \hat{a}_{\mathbf{k}_1}^\dagger \exp [-i(\mathbf{k}_1 \mathbf{r} - \omega_1' t)]. \quad (5)$$

Здесь над величинами, имеющими индекс 1, необходимо расставить или по одному штриху, если описывается сигнальная мода, или по два штриха при описании холостой.

Теперь мы можем перейти к рассмотрению последовательного взаимодействия, схематически представленного на рис. 1. Поскольку частоты  $\omega_3'$  и  $\omega_3''$  превышают частоту накачки  $\omega_2$ , этот процесс называют параметрическим усилением в поле низкочастотной накачки, в отличие от параметрического рассеяния, представляющего собой преобразование частоты вниз, когда  $\omega_1'$  и  $\omega_1''$  меньше  $\omega_2$ .

## 3. Параметрическое усиление в поле низкочастотной накачки

Итак, рассмотрим пространственные эффекты в последовательных трехчастотных процессах. При этом взаимодействующие частоты удовлетворяют соотноше-

ниям:

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \omega'_1 + \omega''_1, \\ \omega_2 + \omega'_1 &= \omega'_3, \\ \omega_2 + \omega''_1 &= \omega''_3. \end{aligned} \quad (6)$$

Первый процесс представляет собой параметрическое усиление (или распад) в поле высокочастотной накачки, при котором генерируются пучки с частотами  $\omega'_1$  и  $\omega''_1$ . В последующих двух процессах происходит генерация пучков с суммарными частотами  $\omega'_3$  и  $\omega''_3$ .

Первый и второй процессы в (6) так же, как первый и третий, являются последовательными, в то время как второй и третий процессы — одновременными. Гамильтониан взаимодействия при этом в общем виде можно записать по аналогии с гамильтонианом, описывающим рождение двухфотонного света (3):

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}} &= -\frac{1}{2} \sum_{m,n} \int_V d^3\mathbf{r} [\chi^{(2)}(\omega_2, \omega'_{1m}, \omega''_{1n}, \mathbf{r}) \times \\ &\times \hat{E}_2^{(+)}(t, \mathbf{r}) \hat{E}_1'^{(-)}(t, \mathbf{r}) \hat{E}_1''^{(-)}(t, \mathbf{r}) + \\ &+ \chi^{(2)}(\omega_2, \omega'_{1m}, \omega'_{3n}, \mathbf{r}) \hat{E}_2^{(+)}(t, \mathbf{r}) \hat{E}_1'^{(-)}(t, \mathbf{r}) \hat{E}_3'^{(-)}(t, \mathbf{r}) + \\ &+ \chi^{(2)}(\omega_2, \omega''_{1m}, \omega''_{3n}, \mathbf{r}) \hat{E}_2^{(+)}(t, \mathbf{r}) \hat{E}_1''^{(-)}(t, \mathbf{r}) \hat{E}_3''^{(-)}(t, \mathbf{r})] + \text{э.с.}, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{E}_x^{(+)}(t, \mathbf{r}) &= i \sum_{\mathbf{k}_x} \sqrt{\hbar\omega_x \left(\frac{2\pi}{L^3}\right)} \hat{a}_x \exp[i(\mathbf{k}_x\mathbf{r} - \omega_x t)], \quad (8a) \\ \hat{E}_x^{(-)}(t, \mathbf{r}) &= -i \sum_{\mathbf{k}_x} \sqrt{\hbar\omega_x \left(\frac{2\pi}{L^3}\right)} \hat{a}_x^\dagger \exp[-i(\mathbf{k}_x\mathbf{r} - \omega_x t)]. \end{aligned} \quad (8b)$$

Первое слагаемое в гамильтониане взаимодействия (7) соответствует первому процессу в (6), а второе и третье слагаемые — второму и третьему процессам в (6) соответственно. В приближении коллинеарных плоских взаимодействующих мод этот процесс изучался в [11, 12]. Пространственно ограниченная гауссова накачка рассматривалась применительно к параметрическим взаимодействиям в ряде работ (см., например, [9, 16, 18–20]), однако только для монокристаллических нелинейных сред.

Накачку положим заданной, классической, цилиндрической, гауссовой и монохроматической:

$$\hat{E}_2^{(-)} = E_2 \exp\left[-\left(\frac{r_\perp}{r_2}\right)^2 - i(k_2 z - \omega_2 t)\right], \quad (9)$$

где  $E_2 = E_0 i \sqrt{\hbar\omega_2(2\pi/L^3)}$  — комплексная амплитуда накачки,  $r_2$  — радиус перетяжки (при этом длина перетяжки предполагается существенно большей длины кристалла),  $\omega_2$  — частота накачки,  $k_2$  — соответствующее ей волновое число.

Отметим, что, хотя накачка монохроматическая, параметрически рассеянные пучки  $1'$  и  $1''$  — широкополосные, поэтому в гамильтониане (7) появляется дополнительная двойная сумма по  $m$  и  $n$ .

Решение уравнения Шрёдингера

$$i\hbar \frac{d|\varphi\rangle}{dt} = \hat{H}|\varphi\rangle \quad (10)$$

формально можно записать в виде

$$|\varphi(t)\rangle = \hat{U}|\varphi\rangle, \quad (11)$$

где  $|\varphi(t)\rangle$  — вектор состояния поля. В данной задаче унитарный оператор эволюции  $\hat{U}$  можно рассчитать, пользуясь методом теории возмущений. Во втором порядке теории возмущений он имеет вид (см., например, [20])

$$\hat{U} = \hat{I} + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt' \hat{H}(t') + \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \hat{H}(t') \hat{H}(t''), \quad (12)$$

где  $\hat{I}$  — единичный оператор. Из условия нормировки

$$\langle\varphi(t)|\varphi(t)\rangle \equiv \langle\varphi(t_0)|\varphi(t_0)\rangle \quad (13)$$

имеем

$$\int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \hat{H}(t') \hat{H}(t'') = \frac{1}{2} \left[ \int_{t_0}^t dt' \hat{H}(t') \right]^2, \quad (14)$$

где  $t_0$  и  $t$  — моменты времени включения и выключения накачки. При  $t_0 \rightarrow -\infty$  и  $t \rightarrow \infty$  интегрирование по  $t$  дает  $\delta$ -функцию:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \exp(i\omega t) = 2\pi\delta(\omega). \quad (15)$$

Если на входе нелинейного кристалла имеется вакуум, то последнее слагаемое в (12) переводит его в однофотонные состояния  $|1\rangle'_3$  и  $|1\rangle''_3$ . При определении интенсивностей этих состояний, типа  $\langle\varphi(t)|\hat{a}_3^\dagger a_3|\varphi(t)\rangle$ , порядок малости по нелинейности будет четвертым, хотя в формуле (12) мы ограничились лишь вторым порядком малости. Тем не менее превышения точности расчета по теории возмущений не будет, так как более высокие порядки разложения (12) (третий и четвертый) вклада в интенсивность поля на частотах  $\omega_3$  в четвертом порядке малости по интенсивности не дадут. Действительно, четвертый порядок по интенсивности может появиться, например, при сочетании первого и третьего порядков малости по амплитуде, но в первом порядке по амплитуде состояние поля на частотах  $\omega_3$  — вакуумное, и интенсивность получится нулевой. То же самое произойдет и при сочетании нулевого и четвертого порядков амплитуды.

Интегрирование по времени гамильтониана (7) дает следующий результат:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \hat{H}(t') &= \frac{2\pi^3}{L^3} \left\{ \sum_{m,n} \exp\left[-(\mathbf{k}'_{\perp 1m} + \mathbf{k}''_{\perp 1n})^2 \frac{r_2^2}{4}\right] \times \right. \\ &\times F(\Delta k_1) \chi^{(2)}(\omega_2, \omega'_{1m}, \omega''_{1n}) \sqrt{\omega'_{1m} \omega''_{1n}} \delta(\Delta\omega_1) \hat{a}_{1m}' \hat{a}_{1n}'' + \\ &+ \sum_{m,n} \exp\left[-(\mathbf{k}'_{\perp 1m} - \mathbf{k}'_{\perp 3n})^2 \frac{r_2^2}{4}\right] \times \\ &\times F(\Delta k_2) \chi^{(2)}(\omega_2, \omega'_{1m}, \omega'_{3n}) \sqrt{\omega'_{1m} \omega'_{3n}} \delta(\Delta\omega_2) \hat{a}'_{1m} \hat{a}'_{3n} + \\ &+ \sum_{m,n} \exp\left[-(\mathbf{k}''_{\perp 1m} - \mathbf{k}''_{\perp 3n})^2 \frac{r_2^2}{4}\right] \times \\ &\times F(\Delta k_3) \chi^{(2)}(\omega_2, \omega''_{1m}, \omega''_{3n}) \sqrt{\omega''_{1m} \omega''_{3n}} \delta(\Delta\omega_3) \hat{a}''_{1m} \hat{a}''_{3n} \left. \right\} + \\ &+ \text{э.с.}, \end{aligned} \quad (16)$$

где для  $M = l/l_c$  периодических слоев

$$F(\Delta k) = \int_0^l dz \chi^{(2)}(z) \exp(iz\Delta k) = \frac{\chi_0^{(2)}}{\Delta k} \left\{ 1 - [-\exp(i\Delta k l_c)]^M \right\} \tan\left(\frac{\Delta k l_c}{2}\right), \quad (17)$$

$l$  — длина кристалла,  $l_c$  — длина слоя. Здесь учли, что в слоистом нелинейном кристалле коэффициент связи  $\chi^{(2)}$  зависит от  $z$ . При интегрировании использовано следующее соотношение:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^2\mathbf{r}_{\perp} \exp\left(-\frac{\mathbf{r}_{\perp}^2}{r_2^2} - i\mathbf{k}_{\perp}\mathbf{r}_{\perp}\right) = \pi r_2^2 \exp\left(-\frac{k_{\perp}^2 r_2^2}{4}\right), \quad (18)$$

в котором бесконечные пределы интегрирования справедливы при поперечном размере нелинейной среды существенно большем диаметра перетяжки накачки.

Наибольшая эффективность процесса достигается при выполнении условия фазового квазисинхронизма

$$\Delta k l_c = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots, \quad (19)$$

поскольку  $F(\Delta k)$  в (17) при этом максимально.

Теперь можно записать выражение для вектора квантового состояния излучения на частотах  $\omega'_3$  и  $\omega''_3$  при отсутствии затравочного поля на частотах  $\omega'_1$ ,  $\omega''_1$  и  $\omega'_3$ ,  $\omega''_3$ :

$$\begin{aligned} |\varphi_3\rangle &= \frac{1}{(i\hbar)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \hat{H}(t') \int_{-\infty}^{t'} dt \hat{H}(t) |0\rangle = \\ &= \frac{1}{2(i\hbar)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt \hat{H}(t) \int_{-\infty}^{\infty} dt \hat{H}(t) |0\rangle = \\ &= -\frac{2\pi^6}{L^6} r_2^4 E_2^2 \left\{ \sum_{m,n,p} \exp\left(-(\mathbf{k}'_{\perp 1m} + \mathbf{k}''_{\perp 1n})^2 \frac{r_2^2}{4}\right) \times \right. \\ &\times F(k_2 - k'_{z1m} - k''_{z1n}) \times \\ &\times \chi^{(2)}(\omega_2, \omega'_{1m}, \omega''_{1n}) \sqrt{\omega'_{1m} \omega''_{1n}} \delta(\omega_2 - \omega'_{1m} - \omega''_{1n}) \times \\ &\times \left[ \exp\left(-(\mathbf{k}'_{\perp 1m} - \mathbf{k}'_{\perp 3p})^2 \frac{r_2^2}{4}\right) F(k_2 + k'_{z1m} - k'_{z3p}) \times \right. \\ &\times \chi^{(2)}(\omega_2, \omega'_{1m}, \omega'_{3p}) \sqrt{\omega'_{1m} \omega'_{3p}} \delta(\omega_2 + \omega'_{1m} - \omega'_{3p}) |1\rangle'_{3p} + \\ &+ \exp\left(-(\mathbf{k}''_{\perp 1m} - \mathbf{k}''_{\perp 3p})^2 \frac{r_2^2}{4}\right) F(k_2 + k''_{z1m} - k''_{z3p}) \times \\ &\times \chi^{(2)}(\omega_2, \omega''_{1m}, \omega''_{3p}) \sqrt{\omega''_{1m} \omega''_{3p}} \times \\ &\left. \left. \times \delta(\omega_2 + \omega''_{1m} - \omega''_{3p}) |1\rangle''_{3p} \right\}. \quad (20) \end{aligned}$$

С точки зрения компьютерного расчета, отметим, что выбор объема квантования существенно влияет на время вычислений, поскольку шаг счета по  $k$  равен  $2\pi/L$ . Поле на границе объема квантования должно существенно спадать, поэтому длина ребра куба квантования  $L$ , по крайней мере в поперечном направлении, должна превышать диаметр накачки.

Заменим суммы по  $m$  и  $n$  интегралами:

$$\begin{aligned} |\varphi_3\rangle &= -\frac{r_2^4 E_2^2}{32} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} d^{(3)}\mathbf{k}'_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^{(3)}\mathbf{k}''_1 \exp\left(-(\mathbf{k}'_{\perp 1} + \mathbf{k}''_{\perp 1})^2 \frac{r_2^2}{4}\right) \times \\ &\times F(k_2 - k'_{z1} - k''_{z1}) \times \\ &\times \chi^{(2)}(\omega_2, \omega'_1, \omega''_1) \sqrt{\omega'_1 \omega''_1} \delta(\omega_2 - \omega'_1 - \omega''_1) \times \\ &\times \sum_p \left[ \exp\left(-(\mathbf{k}'_{\perp 1} - \mathbf{k}'_{\perp 3p})^2 \frac{r_2^2}{4}\right) F(k_2 + k'_{z1} - k'_{z3p}) \times \right. \\ &\times \chi^{(2)}(\omega_2, \omega'_1, \omega'_{3p}) \sqrt{\omega'_1 \omega'_{3p}} \delta(\omega_2 + \omega'_1 - \omega'_{3p}) |1\rangle'_{3p} + \\ &+ \exp\left(-(\mathbf{k}''_{\perp 1} - \mathbf{k}''_{\perp 3p})^2 \frac{r_2^2}{4}\right) F(k_2 + k''_{z1} - k''_{z3p}) \times \\ &\left. \times \chi^{(2)}(\omega_2, \omega''_1, \omega''_{3p}) \sqrt{\omega''_1 \omega''_{3p}} \delta(\omega_2 + \omega''_1 - \omega''_{3p}) |1\rangle''_{3p} \right]. \quad (21) \end{aligned}$$

Выразим штрихованные  $k_z$  необыкновенных волн через соответствующие  $\omega$  для ориентации оптической оси кристалла вдоль оси  $y$ :

$$k_z = \sqrt{\left(\frac{n_e \omega}{c}\right)^2 - k_x^2 - \left(\frac{n_o}{n_o} k_y\right)^2}, \quad (22)$$

где  $c$  — скорость света в вакууме, а показатели преломления необыкновенной  $n_e$  и обыкновенной  $n_o$  волн входят в формулы Селлмейера [21]:

$$n_x^2 = a_x + \frac{b_x \omega^2}{(2\pi c)^2 + c_x \omega^2} - d_x \left(\frac{2\pi c}{\omega}\right)^2. \quad (23)$$

Здесь  $a_x, b_x, c_x, d_x$  — константы для выбранного нелинейного кристалла при определенной температуре,  $\alpha = o, e$ . В дальнейшем при расчетах коэффициенты  $a_x, b_x, c_x, d_x$  были взяты для кристалла ниобата лития [22].

Сделаем замену переменных  $k_z \rightarrow \omega$  в выражении (21) и проинтегрируем его по  $\omega$ . Отсюда получим амплитуду состояния  $|1\rangle'_3$  с выбранным волновым вектором  $\mathbf{k}'_3$ :

$$\begin{aligned} A'_3 &= -\frac{r_2^4 E_2^2}{32} \chi^{(2)}(\omega_2, \omega'_3 - \omega_2, 2\omega_2 - \omega'_3) \times \\ &\times \chi^{(2)}(\omega_2, \omega'_3 - \omega_2, \omega'_3) (\omega'_3 - \omega_2) \sqrt{\omega'_3 (2\omega_2 - \omega'_3)} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} d^2\mathbf{k}'_{\perp 1} \int_{-\infty}^{\infty} d^2\mathbf{k}''_{\perp 1} \times \\ &\times \left[ \exp\left\{-[(\mathbf{k}'_{\perp 1} + \mathbf{k}''_{\perp 1})^2 + (\mathbf{k}'_{\perp 1} - \mathbf{k}'_{\perp 3})^2] \frac{r_2^2}{4}\right\} \times \right. \\ &\times \left. \left| \frac{dk'_{z1}}{d\omega'_1} \right|_{\omega'_1=\omega'_3-\omega_2} \left| \frac{dk''_{z1}}{d\omega''_1} \right|_{\omega''_1=2\omega_2-\omega'_3} \right. \times \\ &\times F(k_2 - k'_{z1} |_{\omega'_1=\omega'_3-\omega_2} - k''_{z1} |_{\omega''_1=2\omega_2-\omega'_3}) \times \\ &\left. \left. \times F(k_2 + k'_{z1} |_{\omega'_1=\omega'_3-\omega_2} - k'_{z3} |_{\omega'_3}) \right]. \quad (24) \end{aligned}$$

Амплитуда моды однофотонного состояния (с двумя штрихами) будет такой же.

#### 4. Анализ расчетного соотношения для амплитуды моды состояния

Для аналитической оценки выражения (24) можно ввести следующие упрощающие предположения. Из всей совокупности возможных значений волновых векторов можно выбрать только те, которые соответствуют условиям квазисинхронизма (19), т.е. удовлетворяют системе нелинейных уравнений

$$\begin{aligned} & \sqrt{\left(\frac{(\omega_3 - \omega_2)n'_e}{c}\right)^2 - k_{x3}^2 - \left(\frac{n'_e}{n'_o} k_{y3}\right)^2} - \\ & - \sqrt{\left(\frac{\omega_3 n''_e}{c}\right)^2 - k_{x3}^2 - \left(\frac{n''_e}{n''_o} k_{y3}\right)^2} = -k_2 \pm \frac{\pi + 2\pi m}{l_c}, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{\left(\frac{(\omega_3 - \omega_2)n'_e}{c}\right)^2 - k_{x3}^2 - \left(\frac{n'_e}{n'_o} k_{y3}\right)^2} + \\ & + \sqrt{\left(\frac{(2\omega_2 - \omega_3)n''_e}{c}\right)^2 - k_{x3}^2 - \left(\frac{n''_e}{n''_o} k_{y3}\right)^2} = \\ & = k_2 \pm \frac{\pi + 2\pi n}{l_c}, \end{aligned} \quad (26)$$

и считать, что излучение на частоте  $\omega_3$  происходит только для этих значений. Здесь  $n'_x$  — показатель преломления на частоте  $\omega_3 - \omega_2$ ,  $n''_x$  — показатель преломления на частоте  $2\omega_2 - \omega_3$ , а  $n'''_x$  — на частоте  $\omega_3$ . Целые значения  $m$  и  $n$  можно положить равными нулю, так как величина  $F$  согласно (17) обратно пропорциональна  $\Delta k$ , и даже при равенстве одной из этих целых величин единице интенсивность спектральной компоненты будет на порядок меньше, чем при их нулевых значениях. Систему уравнений (25), (26) следует решать относительно  $k_{\perp 3} = \{k_{x3}, k_{y3}\}$  и  $\omega_3$ . Итак, интенсивность каждой такой спектральной компоненты определяется выражением

$$\begin{aligned} I(k_{\perp 3}, \omega_3) & \sim \omega_3(2\omega_2 - \omega_3)(\omega_3 - \omega_2)^2 \times \\ & \times [\chi^{(2)}(\omega_2, \omega_3 - \omega_2, 2\omega_2 - \omega_3) \chi^{(2)}(\omega_2, \omega_3 - \omega_2, \omega_3)]^2 \times \\ & \times \left| \frac{dk_z}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_3-\omega_2}^2 \left| \frac{dk_z}{d\omega} \right|_{\omega=2\omega_2-\omega_3}^2. \end{aligned} \quad (27)$$

Решение нелинейной системы уравнений (25), (26) в общем виде довольно громоздкое, однако специфика нашего случая позволяет получить компактное аналитическое решение.

Введем коэффициенты  $A, B, C, D, E$  и  $G$  следующими соотношениями

$$\begin{aligned} A & = \left(\frac{(\omega_3 - \omega_2)n'_e}{c}\right)^2, & B & = \left(\frac{(2\omega_2 - \omega_3)n''_e}{c}\right)^2, \\ C & = \left(\frac{\omega_3 n''_e}{c}\right)^2, & D & = \left(\frac{n'_e}{n'_o}\right)^2, \\ E & = \left(\frac{n''_e}{n''_o}\right)^2, & G & = \left(\frac{n'''_e}{n'''_o}\right)^2. \end{aligned} \quad (28)$$

Правые части уравнений (25) и (26) обозначим соответственно как

$$S = -k_2 \pm \frac{\pi + 2\pi m}{l_c}, \quad T = k_2 \pm \frac{\pi + 2\pi n}{l_c}. \quad (29)$$

Тогда система (25), (26) примет вид

$$\begin{aligned} \sqrt{A - x - Dy} - \sqrt{C - x - Gy} & = S, \\ \sqrt{A - x - Dy} + \sqrt{B - x - Ey} & = T, \end{aligned} \quad (30)$$

или

$$\begin{aligned} \sqrt{A - x - Dy} - S & = \sqrt{C - x - Gy}, \\ T - \sqrt{A - x - Dy} & = \sqrt{B - x - Ey}, \end{aligned} \quad (31)$$

где  $x = k_{x3}^2$ ,  $y = k_{y3}^2$ . Поскольку решения ищутся для действительных волновых чисел ( $S$  и  $T$  — действительны), то должны выполняться неравенства

$$\begin{aligned} \sqrt{A - x - Dy} & \geq S, \\ C - x - Gy & \geq 0, \\ \sqrt{A - x - Dy} & \leq T, \\ B - x - Ey & \geq 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Отсюда получим

$$\begin{aligned} A - Dy - 2S\sqrt{A - x - Dy} + S^2 & = C - Gy, \\ A - Dy - 2T\sqrt{A - x - Dy} + T^2 & = B - Ey. \end{aligned} \quad (33)$$

Обозначив  $Z = \sqrt{A - x - Dy}$  ( $Z \geq 0$ ), придем окончательно к линейной по  $Z$  и  $y$  системе

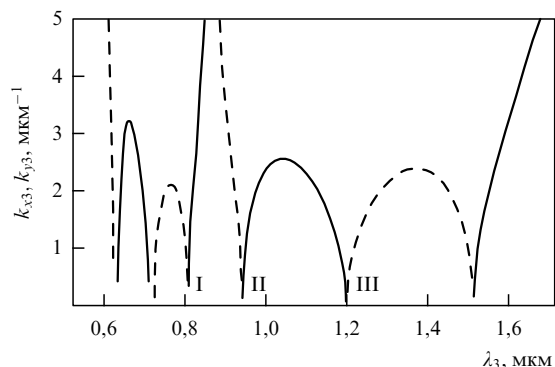
$$\begin{aligned} A - Dy - 2SZ + S^2 & = C - Gy, \\ A - Dy - 2TZ + T^2 & = B - Ey, \end{aligned} \quad (34)$$

которая имеет решение

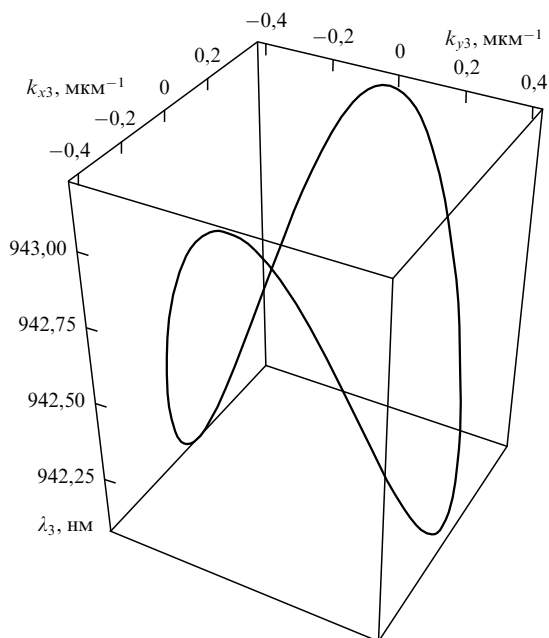
$$y = \frac{(A - B)/T - (A - C)/S + T - S}{(G - D)/S - (E - D)/T}. \quad (35)$$

Переходя затем к переменным  $x$  и  $y$  можно убедиться, что решение, когда обе эти величины положительны, а значит, величины  $k'_{x3}$  и  $k'_{y3}$  одновременно вещественны, существует лишь в нескольких узких частотных диапазонах.

На рисунке 2 изображены функции  $k'_{x3}(\lambda_3)$  и  $k'_{y3}(\lambda_3)$ , являющиеся решениями системы (25), (26) при длине волны лазерной накачки  $\lambda_2 = 1338$  нм. Хорошо видно, что действительное решение системы, определяемое пересечением графиков функций, существует только в нескольких узких областях длин волн  $\lambda_3$ . Это означает, что отнюдь не везде, а только в узких спектральных диапазонах можно наблюдать генерацию света. Из всех возможных длин волн  $\lambda_3$  — это значения вблизи 800, 940 и 1200 нм, что отражает тот факт, что излучение на заданной частоте имеет вполне определенную направленность. На рисунке 3 показана область решений системы (25), (26) в пространстве  $\{k'_{x3}, k'_{y3}, \lambda_3\}$  для второго диапазона — вблизи длины волны 940 нм. В



**Рис. 2.** Функции поперечных составляющих волнового вектора  $\mathbf{k}'_3 = \{k'_{x3}, k'_{y3}\}$  (штриховая и сплошная кривые), являющиеся действительными решениями системы уравнений (25), (26). Излучение генерируется на длинах волн  $\lambda_3$ , соответствующих пересечению штриховой и сплошной кривых (области I, II и III).



**Рис. 3.** Кривая, соответствующая решению нелинейной системы уравнений (25), (26) в диапазоне II (см. рис. 2) длин волн  $\approx 940$  нм. Кривая дает взаимосвязь между направлением генерируемого света и его длиной волны  $\lambda_3$ .

достаточно узком диапазоне длин волн, от 942 до 943 нм, значения проекций вектора  $k'_3$  изменяются от  $-0,4$  до  $0,4$   $\text{MKM}^{-1}$ , что дает величины пространственного угла около  $3,5^\circ$  относительно оси  $z$  для излучения на этой длине волны. Аналогичная оценка для длин волн в окрестности 800 нм дает направление строго вперед, т.е. угол  $0^\circ$  с осью  $z$ .

Итак, в первом приближении можно оценить спектр излучения на частоте  $\omega_3$ , однако ни форму спектра, ни ее зависимость от числа слоев периодически неоднородной среды оценить таким образом не удастся. Для этого требуется более точное вычисление интеграла по формуле (24). При этом заметим, что область интегрирования, в которой подынтегральное выражение отлично от нуля, определяется как экспонентой, стоящей под интегралом, так и функциями  $F$ .

Величины

$$\left| \frac{dk'_{z1}}{d\omega'_1} \right|_{\omega'_1=\omega'_3-\omega'_2} \quad \text{и} \quad \left| \frac{dk''_{z1}}{d\omega''_1} \right|_{\omega''_1=2\omega_2-\omega'_3}$$

изменяются незначительно в этой области, и поэтому могут быть вынесены за знак интеграла. Если ширина гауссовой функции

$$\exp \left\{ - [(\mathbf{k}'_{\perp 1} + \mathbf{k}''_{\perp 1})^2 + (\mathbf{k}'_{\perp 1} - \mathbf{k}''_{\perp 1})^2] \frac{r_2^2}{4} \right\}$$

существенно уже, чем ширина функций  $F$ , то экспонента может быть заменена  $\delta$ -функцией. Выразив подынтегральные функции через переменные интегрирования (при этом  $k_{\perp 3}$  и  $\omega_3$  выступают как параметры), получим для амплитуды поля

$$\begin{aligned} A'_3 = & -\frac{r_2^4 E_2^2}{32} \chi^{(2)}(\omega_2, \omega'_3 - \omega_2, 2\omega_2 - \omega'_3) \times \\ & \times \chi^{(2)}(\omega_2, \omega'_3 - \omega_2, \omega'_3)(\omega'_3 - \omega_2) \times \\ & \times \sqrt{\omega'_3(2\omega_2 - \omega'_3)} \left| \frac{dk'_{z1}}{d\omega'_1} \right|_{\omega'_1=\omega'_3-\omega_2} \left| \frac{dk''_{z1}}{d\omega''_1} \right|_{\omega''_1=2\omega_2-\omega'_3} \times \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} dk'_{x1} dk'_{y1} dk''_{x1} dk''_{y1} \delta(k'_{x1} + k''_{x1}) \delta(k'_{y1} + k''_{y1}) \times \\ & \times \delta(k'_{x1} - k'_{x3}) \delta(k'_{y1} - k'_{y3}) \times \\ & \times F_1(k'_{x1}, k'_{y1}, k''_{x1}, k''_{y1}) F_2(k'_{x1}, k'_{y1}, k''_{x1}, k''_{y1}), \end{aligned} \quad (36)$$

где

$$\begin{aligned} F_1 = & F(k_2 - k'_{z1}|_{\omega'_1=\omega'_3-\omega_2} - k''_{z1}|_{\omega''_1=2\omega_2-\omega'_3}), \\ F_2 = & F(k_2 + k'_{z1}|_{\omega'_1=\omega'_3-\omega_2} - k'_{z3}|_{\omega'_3}). \end{aligned}$$

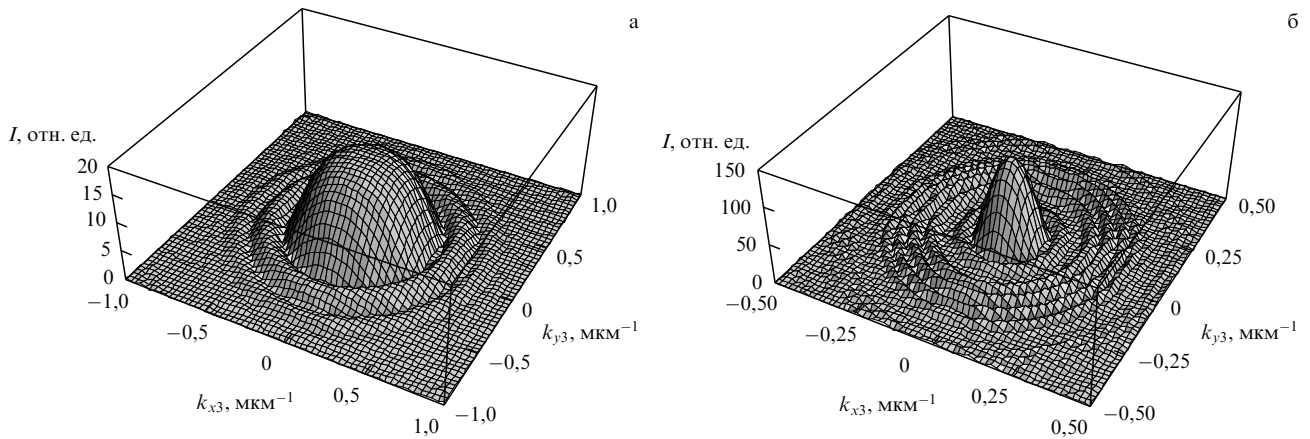
Введя функцию  $G = F_1 F_2$ , можно записать окончательное выражение

$$\begin{aligned} A'_3 = & -\frac{r_2^4 E_2^2}{32} \chi^{(2)}(\omega_2, \omega'_3 - \omega_2, 2\omega_2 - \omega'_3) \times \\ & \times \chi^{(2)}(\omega_2, \omega'_3 - \omega_2, \omega'_3)(\omega'_3 - \omega_2) \times \\ & \times \sqrt{\omega'_3(2\omega_2 - \omega'_3)} \left| \frac{dk'_{z1}}{d\omega'_1} \right|_{\omega'_1=\omega'_3-\omega_2} \left| \frac{dk''_{z1}}{d\omega''_1} \right|_{\omega''_1=2\omega_2-\omega'_3} \times \\ & \times G(k'_{x3}, k'_{y3}, -k'_{x3}, -k'_{y3}). \end{aligned} \quad (37)$$

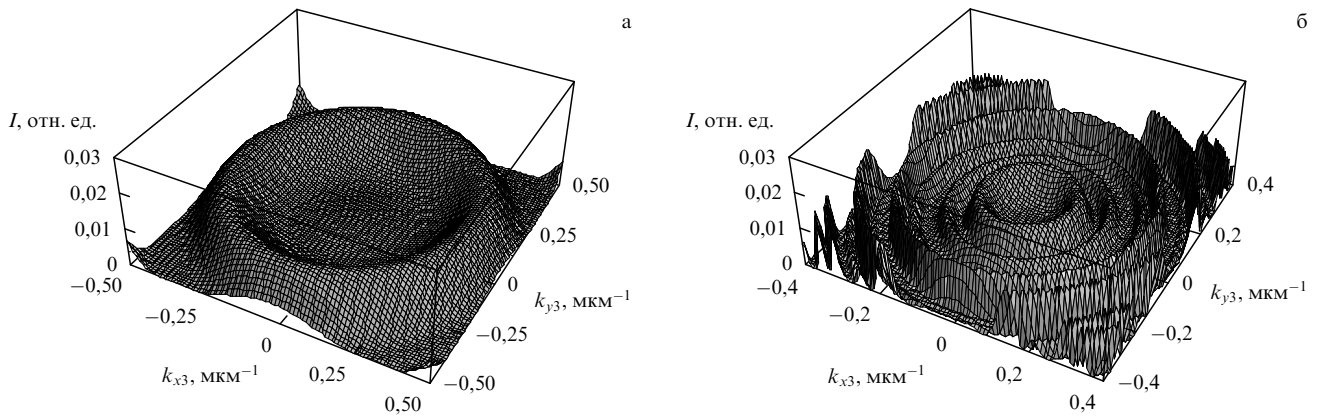
## 5. Конфигурация спектров излучения в пространстве

Пространственно-частотный спектр света на частоте  $\omega'_3$  определяется функцией  $G$  в формуле (37). На рисунке 4а представлен пространственный спектр излучения с длиной волны  $\lambda_3 = 805,2$  нм для 10 слоев. Видно, что излучение, в основном, направлено вдоль оси  $z$ , а его расходимость составляет  $1-2^\circ$ , т.е. будет наблюдаться яркое пятно в центре, окруженное ореолом слабо светящихся колец.

С другой стороны, на длине волны света  $\lambda_3 = 942,5$  нм (рис. 5) видим одно светящееся кольцо с более узкой направленностью,  $\approx 0,2^\circ$ . Сравните этот результат



**Рис. 4.** Интенсивность света  $I$  в зависимости от направления его распространения на длине волны  $\lambda_3 = 805,2$  нм при числе периодических слоев  $M = 10$  (а) и  $M = 100$  (б).



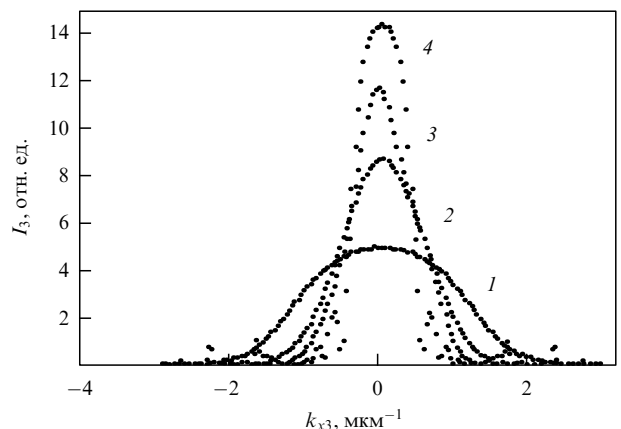
**Рис. 5.** Интенсивность света  $I$  в зависимости от направления его распространения на длине волны  $\lambda_3 = 942,5$  нм при числе периодических слоев  $M = 10$  (а) и  $M = 100$  (б).

также с результатом, представленным на рис. 3, где диапазон возможных значений  $k_3$  заключен в сравнительно небольшом интервале.

Интересно также проанализировать, как влияет увеличение числа слоев кристаллической структуры на пространственный спектр излучения (см. рис. 4 и 5). Структура спектра усложняется — появляется большое число осцилляций, а максимумы становятся острее. Таким образом, с ростом числа слоев следует ожидать, с одной стороны, более четкой картины, а с другой, — обогащения спектра. Так, в первом случае (см. рис. 4) кольца, окаймляющие центральное пятно, станут ярче, кроме того, и кольца, и само пятно проявятся четче. Во втором случае (см. рис. 5) ширина кольца также сузится, но сильнее проявятся окаймляющие кольца, которые прежде не были хорошо видны. Причина этого эффекта состоит в том, что идеально жесткий фазовый синхронизм, строго говоря, возможен лишь при бесконечно большом числе слоев. Уменьшение числа слоев приводит к тому, что условие фазового синхронизма становится более мягким. Соответственно пространственная конфигурация генерируемого излучения и его направленность оказываются более плавными и размытыми.

Влияние пространственной конфигурации накачки аналогично. Чем больше ее поперечные размеры, тем более узконаправленным будет излучение. С уменьше-

нием радиуса накачки генерируемое излучение "расплывается" в пространстве. Это явно следует из итогового соотношения (24), в котором экспонента, включающая радиус накачки, входит под знак интеграла в виде свертки с функцией, описывающей пространственное



**Рис. 6.** Результаты численных расчетов пространственного распределения интенсивности сигнала на частоте  $\omega_3$  при различных значениях радиуса накачки  $r$ : кривая 1 —  $r = 2$  мм, 2 —  $r = 4$  мм, 3 —  $r = 6$  мм, 4 —  $r = \infty$ .

распределение излучения при плоской накачке. Характер зависимости пространственной конфигурации генерируемого излучения от радиуса накачки иллюстрируется на рис. 6. По оси абсцисс отложено значение проекции  $k_{x3}$  волнового вектора  $\mathbf{k}_3$ , при этом значение его проекции на ось  $y$  выбрано равным нулю ( $k_{y3} = 0$ ).

## 5. Заключение

Итак, несмотря на, казалось бы, безнадежную сложность задачи, удалось практически полностью решить ее аналитически. Компьютер потребовался лишь на финальной стадии построения спектров. Такой, довольно редкий для нелинейной оптики выпавший нам счастливый шанс и побудил нас поделиться этими результатами с читателями. Надеемся, что представленные результаты будут интересны не только для специалистов, но и для широкого круга людей, интересующихся физикой.

Мы благодарны А.С. Чиркину и А.Н. Фалковой за помощь в работе. Работа поддержана грантом INTAS № 01-2097.

## Список литературы

1. Franken P A et al. *Phys. Rev. Lett.* **7** 118 (1961)
2. Stoler D *Phys. Rev. Lett.* **33** 1397 (1974)
3. Chmela P, Horák R, Peřina J J. *Opt. Acta* **28** 1209 (1981)
4. Ахманов С А, Дьяков Ю Е, Чиркин А С *Введение в статистическую радиофизику и оптику* (М.: Наука, 1981)
5. Louisell W H *Coupled Mode and Parametric Electronics* (New York: Wiley, 1960)
6. Giordmaine J A, Miller R C *Phys. Rev. Lett.* **14** 973 (1965)
7. Белинский А В *УФН* **173** 905 (2003)
8. Tang C L *Phys. Rev.* **182** 367 (1969)
9. Клышко Д Н, Назарова Н И *ЖЭТФ* **58** 878 (1970)
10. Аракелян С М и др. *ЖТФ* **44** 1253 (1974)
11. Чиркин А С и др. *Квантовая электрон.* **30** 847 (2000)
12. Morozov E Yu, Chirkin A S J. *Opt. A* **5** 233 (2003)
13. Клышко Д Н *УФН* **154** 133 (1988)
14. Белинский А В, Клышко Д Н *ЖЭТФ* **105** 487 (1994)
15. Pittman T V et al. *Phys. Rev. A* **53** 2804 (1996)
16. Белинский А В *Вестн. МГУ. Сер. 3. Физ. Астрон.* № 3 34 (1999)
17. Лоудон Р *Квантовая теория света* (М.: Мир, 1976)
18. Ito N, Inaba H *Opto-Electronics* **2** 81 (1970)
19. Бабин А А и др. *Квантовая электрон.* **3** 101 (1976)
20. Клышко Д Н *Фотоника и нелинейная оптика* (М.: Наука, 1980)
21. Nelson D F, Miculyak R M J. *Appl. Phys.* **45** 3688 (1974)
22. Kitaeva G K et al. *Appl. Phys. B* **66** 201 (1998)

## Spatial configuration of light at consecutive nonlinear optical transformations

A.V. Belinsky, A.V. Isaeva, E.V. Makeev, A.A. Novikov  
 Physics Department, M.V. Lomonosov Moscow State University,  
 Vorob'evy gory, 119992 Moscow, Russian Federation  
 Tel. (7-495) 939-3093  
 E-mail: belinsky@inbox.ru, makeev@newmail.ru

Analytical and computer predictions are presented on the spatial and spectral configurations of radiation at sum frequency generation produced by means of consecutive parametric processes in a layered nonlinear crystal. How to obtain analytical estimates, including those for solving the phase-matching problem, is outlined, and some very weird spatial frequency spectra are discussed.

PACS numbers: 42.25.Bs, **42.65.-k**, 42.65.Ky

Bibliography — 22 references

Received 8 August 2005, revised 16 January 2006

*Uspekhi Fizicheskikh Nauk* **176** (5) 543–550 (2006)

*Physics—Uspekhi* **49** (5) (2006)