Май 2006 г. *Том 176, № 5*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Энергия взаимодействия электрических мультиполей на плоскости и аппроксимация электрического поля проводников полями точечных мультиполей

В.П. Казанцев, О.А. Золотов, М.В. Долгополова

С помощью комплексного представления электрического потенциала получены соотношения, определяющие энергию взаимодействия электрических мультиполей на плоскости, весьма полезные при решении вариационным методом задач об электрическом поле в системе параллельных круговых проводов.

PACS numbers: 03.50 De, 41.20.Cv

Содержание

1. Введение

Электростатические задачи на плоскости возникают, когда нужно определять электрическое поле, зависящее лишь от двух декартовых координат, например для системы параллельных бесконечных проводящих и диэлектрических цилиндров, в которых электрические характеристики системы зависят лишь от двух декартовых координат плоскости, перпендикулярной образующим цилиндров. Самим цилиндрам, моделирующим реальные физические тела, на плоскости в этом случае соответствуют области, представляющие собой пересечения плоскости с цилиндрами. Эти области определяются физическими параметрами, характерными для материалов цилиндров и неизменными вдоль цилиндров. Ниже здесь мы рассмотрим проводящие цилиндры. Им будут соответствовать проводящие области на плоскости (плоские проводники).

Понятия о мультиполях возникают при разложении в ряд Тейлора электрического потенциала ограниченной в пространстве системы зарядов [1–3] на расстояниях, значительно превышающих размеры системы. При этом такое разложение в декартовой системе координат не очень удобно, поскольку содержит много подобных, по сути дела, слагаемых, приведение которых осуществляется путем перехода к разложению по сферическим функциям в сферической системе координат. Проблема приведения подобных слагаемых возникает и при разложении электрического потенциала в декартовой системе координат на плоскости. Эта проблема решается при переходе к разложению в ряд Лорана комплексного потенциала финитной системы зарядов [4].

При аппроксимации электрического поля [5] важны соотношения, определяющие энергию взаимодействия аппроксимирующих систем зарядов, в частности выражения для энергии взаимодействия точечных мультиполей. В литературе по электродинамике приводятся выражения только для энергии взаимодействия точечных мультиполей низших порядков [1–3]. Здесь получены формулы для энергий взаимодействия мультиполей произвольных порядков на плоскости и на их основе построены вариационные схемы аппроксимации электрического поля системы параллельных круговых проводов.

2. Мультипольные разложения в электростатике на плоскости

Для электростатических задач на плоскости зачастую удобно использовать понятия комплексных мультиполей, возникающих естественным образом при разложении по степеням комплексной переменной z комплексного потенциала $\Pi_1(z)$ [6] системы зарядов $\mathrm{d}\lambda^{(1)}(z)$

$$\Pi_1(z) = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\int \ln\left(\frac{z-\tilde{z}}{R}\right)\mathrm{d}\lambda^{(1)}(\tilde{z})\,.$$

Если $|\tilde{z}-z_1| < |z-z_1|$, то

$$\ln\left(\frac{z-\tilde{z}}{R}\right) = \ln\left(\frac{z-z_1}{R}\right) - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\tilde{z}-z_1}{z-z_1}\right)^n,$$

В.П. Казанцев, О.А. Золотов, М.В. Долгополова. Красноярский государственный университет, физический факультет,
660041 Красноярск, Свободный просп. 79, Российская Федерация
Тел. (3912) 44-56-03. Факс (3912) 44-87-81
E-mail: zolotov@krasu.ru

Статья поступила 28 июля 2005 г.,
после доработки 20 ноября 2005 г.

и вне некоторого круга с центром в точке z_1, внутри которого лежат все заряды, имеет место разложение

$$\Pi_1(z) = -\frac{\lambda_0^{(1)}}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{z - z_1}{R}\right) + \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^{(1)}}{n(z - z_1)^n}, \quad (1)$$

где

$$\lambda_n^{(1)} = \int (z - z_1)^n \, \mathrm{d}\lambda^{(1)}(z). \quad (2)$$

Величину $\lambda_n = \lambda_{n\mathrm{r}} + \mathrm{i}\lambda_{n\mathrm{i}}$ будем называть комплексным мультипольным моментом n-го порядка ограниченной на плоскости системы зарядов $\mathrm{d}\lambda^{(1)}(z)$ относительно точки z_1. В частности, величина $\lambda_0^{(1)}$ определяет полный заряд системы; $\mathrm{Re}\,\lambda_1^{(1)} = \lambda_{1\mathrm{r}}^{(1)}$ — это проекция дипольного момента относительно точки z_1 системы зарядов $\mathrm{d}\lambda^{(1)}(z)$ на ось x; $\mathrm{Im}\,\lambda_1^{(1)} = \lambda_{1\mathrm{i}}^{(1)}$ — проекция дипольного момента относительно точки z_1 системы зарядов $\mathrm{d}\lambda^{(1)}(z)$ на ось y.

Допустим теперь, что на плоскости имеются две системы зарядов, находящихся внутри непересекающихся окружностей с центрами в точках z_1 и z_2. Энергию взаимодействия таких систем зарядов можно представить с помощью формул взаимности Грина [2] как

$$W_{12} = \mathrm{Re} \int \Pi_2(z) \, \mathrm{d}\lambda^{(1)}(z) = \mathrm{Re} \int \Pi_1(z) \, \mathrm{d}\lambda^{(2)}(z),$$

где $\Pi_2(z)$ — комплексный потенциал второй системы зарядов. В некотором содержащем систему зарядов $\mathrm{d}\lambda^{(2)}(z)$ круге с центром в точке z_2 потенциал $\Pi_1(z)$ — аналитическая функция, поэтому ее можно записать в виде ряда Тейлора:

$$\Pi_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \partial_z^k \Pi_1(z) \Big|_{z=z_2} (z - z_2)^k.$$

Подставив это разложение $\Pi_1(z)$ в выражение для энергии взаимодействия W_{12}, получим

$$W_{12} = \mathrm{Re} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \, \partial_z^k \, \Pi_1(z) \Big|_{z=z_2} \lambda_k^{(2)}. \quad (3)$$

С учетом представления (1) перепишем это соотношение в виде

$$W_{12} = \mathrm{Re}\Bigg(-\frac{\lambda_0^{(1)}\lambda_0^{(2)}}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{z_2 - z_1}{R}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 k} \frac{(-1)^k \lambda_0^{(1)} \lambda_k^{(2)}}{(z_2 - z_1)^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 n} \frac{\lambda_n^{(1)} \lambda_0^{(2)}}{(z_2 - z_1)^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{2\pi\varepsilon_0 n! k!} \frac{(-1)^k \lambda_n^{(1)} \lambda_k^{(2)}}{(z_2 - z_1)^{n+k}} \Bigg). \quad (4)$$

Величину

$$W_{00}(z_1, z_2) = -\mathrm{Re} \frac{\lambda_0^{(1)} \lambda_0^{(2)}}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{z_2 - z_1}{R}\right)$$

можно интерпретировать как энергию взаимодействия двух точечных зарядов $\lambda_0^{(1)}$ и $\lambda_0^{(2)}$, расположенных в точках z_1 и z_2, а величину

$$W_{nk}(z_1, z_2) = \mathrm{Re} \frac{(n+k-1)!}{2\pi\varepsilon_0 n! k!} \frac{(-1)^k \lambda_n^{(1)} \lambda_k^{(2)}}{(z_2 - z_1)^{n+k}} \quad (5)$$

— как энергию взаимодействия двух точечных мультиполей $\lambda_n^{(1)}$ и $\lambda_k^{(2)}$, находящихся в точках z_1 и z_2.

Интересно, что сила, действующая со стороны первой системы зарядов на вторую, может быть найдена путем дифференцирования по z_1 комплексной величины W_{12}:

$$F_x - \mathrm{i}F_y = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{2\pi\varepsilon_0 n! k!} \frac{(-1)^k \lambda_n^{(1)} \lambda_k^{(2)}}{(z_2 - z_1)^{n+k+1}}. \quad (6)$$

Отдельные слагаемые этой суммы можно интерпретировать как силу, действующую со стороны первого мультиполя на второй.

При повороте второй системы зарядов как целого на угол α согласно определению (2) произойдет изменение мультипольных моментов

$$\tilde{\lambda}_k^{(2)} = \exp(\mathrm{i}k\alpha) \, \lambda_k^{(2)},$$

а вместе с ними и энергии (4). Определив производную от энергии по α для угла $\alpha = 0$ и взяв ее со знаком минус, найдем момент сил

$$M = \mathrm{Im}\Bigg(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{(-1)^k \lambda_0^{(1)} \lambda_k^{(2)}}{(z_2 - z_1)^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{2\pi\varepsilon_0 n! (k-1)!} \frac{(-1)^k \lambda_n^{(1)} \lambda_k^{(2)}}{(z_2 - z_1)^{n+k}} \Bigg), \quad (7)$$

действующих со стороны первой системы зарядов на вторую.

3. Аппроксимация электрических полей проводящих кругов полями их характеристических мультиполей

Рассмотрим систему проводящих непересекающихся кругов $|z - z_p| < a_p$ на комплексной плоскости. В работе [4] показано, что каждая область комплексной плоскости имеет систему типичных именно для нее характеристических мультиполей — базисных распределений зарядов по границе области. В частности, для p-го круга [4]

$$\sigma_0^{(p)}(z) = \frac{1}{2\pi a_p}; \quad \sigma_{k\mathrm{r}}^{(p)}(z) = \frac{\cos k\theta_p}{\pi a_p^{k+1}};$$
$$\sigma_{k\mathrm{r}}^{(p)}(z) = \frac{\sin k\theta_p}{\pi a_p^{k+1}}; \quad \theta_p = \arg(z - z_p). \quad (8)$$

В приближении, когда поля кругов заменяются полями конечного числа их характеристических мультиполей, выбираем

$$\sigma^{(p)}(z) = \lambda_0^{(p)} \sigma_0^{(p)}(z) + \sum_{k=1}^{N_p} \left[\lambda_{k\mathrm{r}}^{(p)} \sigma_{k\mathrm{r}}^{(p)}(z) + \lambda_{k\mathrm{i}}^{(p)} \sigma_{k\mathrm{i}}^{(p)}(z) \right]. \quad (9)$$

Тогда собственную энергию зарядов p-го круга можно найти с помощью соотношения [4]

$$W_{pp} = \frac{\lambda_0^{(p)\,2}}{4\pi\varepsilon_0} \ln \frac{R}{a_p} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{k=1}^{N_p} \frac{1}{k a_p^{2k}} \left(\lambda_{kr}^{(p)\,2} + \lambda_{ki}^{(p)\,2} \right). \quad (10)$$

Энергию взаимодействия зарядов p-го и q-го кругов рассчитываем по формуле (4), заменяя в ней индексы 1 и 2 на p и q и ограничивая суммирование по n и k числами N_p и N_q. Энергию зарядов всех кругов получаем как сумму соответствующих энергий

$$W = \sum_{p=1}^{P} W_{pp} + \sum_{p=1}^{P} \sum_{q>p}^{P} W_{pq}, \quad (11)$$

где P — полное число кругов.

Решение основной задачи электростатики для системы проводящих кругов во внешнем электрическом поле может быть получено на основе вариационного принципа Томсона [7], утверждающего, что истинные распределения зарядов по границам кругов отвечают минимуму электростатической энергии. Если из этой энергии исключить слагаемое, соответствующее постоянной энергии зарядов — источников внешнего поля, то в процессе решения задачи необходимо минимизировать энергетический функционал

$$L = W + W_{\text{вз}}\,, \tag{12}$$

где $W_{\text{вз}}$ — энергия взаимодействия аппроксимирующих зарядов с внешним полем. Если обозначить комплексный потенциал внешнего поля $\Pi(z)$, то можно записать

$$W_{\text{вз}} = \operatorname{Re}\sum_{p=1}^{P}\sum_{k=0}^{N_p}\frac{1}{k!}\lambda_k^{(p)}\partial_z^k\,\Pi(z)\bigg|_{z=z_p}. \tag{13}$$

Минимизацию энергетического функционала L можно проводить по $\lambda_k^{(p)}$ при разных условиях, зависящих от исследуемой задачи. Так, при решении задачи о емкостных коэффициентах системы параллельных круговых проводов следует положить

$$\operatorname{Re}\Pi(z)\bigg|_{|z-z_p|\,\leqslant\, a_p} = U_p\,, \tag{14}$$

где вещественные U_p — постоянные потенциалы проводников, и проводить минимизацию энергетического функционала по значениям всех мультипольных моментов.

При решении задачи о дипольных поляризуемостях системы кругов следует положить

$$\Pi(z)\bigg|_{|z-z_p|\,\leqslant\, a_p} = E_p^* z\,, \tag{15}$$

где постоянные комплексные величины E_p^* определяют однородные электрические поля $E_p^* = E_{p\,x} - \mathrm{i}E_{p\,y}$, в которых находятся отдельные проводящие круги. Минимизировать энергетический функционал следует по $\lambda_k^{(p)}$ при условиях нейтральности кругов $\lambda_0^{(p)} = 0$.

В задаче о системе проводящих незаряженных кругов во внешнем электрическом поле следует принять $\lambda_0^{(p)} = 0$ и проводить минимизацию по мультиполям $\lambda_k^{(p)}$ более высоких, чем нулевой, порядков. Во всех задачах будут получаться системы линейных уравнений относительно мультипольных моментов кругов, решениям которых будут отвечать минимизированные значения энергетического функционала $L_{\text{м}}$. По сходимости этих величин можно оценивать качество аппроксимации. Проиллюстрируем предложенную вариационную схему решения основной задачи электростатики для системы проводящих кругов примерами.

4. Проводящий круг во внешнем электрическом поле

Вполне естественно рассмотреть сначала простейший пример задачи о проводящем незаряженном круге $|z| < a$ в электрическом поле с комплексным потенциалом $\Pi(z)$. Энергетический функционал (12) в этом случае примет вид

$$L^{(N)} = \sum_{k=1}^{N}\left\{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 k a^{2k}}\,\lambda_k\lambda_k^* + \frac{1}{2k!}\left[\lambda_k\partial_z^k\Pi(z)\Big|_{z=0} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \lambda_k^*\left(\partial_z^k\Pi(z)\big|_{z=0}\right)^*\right]\right\}. \tag{16}$$

Минимизируя $L^{(N)}$, находим

$$\lambda_k = -\frac{2\pi\varepsilon_0 a_p^{2k}}{(k-1)!}\left(\partial_z^k\Pi(z)\big|_{z=0}\right)^*. \tag{17}$$

Обозначим последовательность аппроксимирующих потенциалов зарядов круга $\tilde{\Pi}^{(N)}(z)$. Для него на основании (1) запишем

$$\tilde{\Pi}^{(N)}(z) = -\sum_{k=1}^{N}\frac{a_p^{2k}}{k!z^k}\left(\partial_z^k\Pi(z)\big|_{z=0}\right)^*. \tag{18}$$

Точное решение задачи получаем в пределе $N \to \infty$

$$\tilde{\Pi}(z) = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_p^{2k}}{k!z^k}\left(\partial_z^k\Pi(z)\big|_{z=0}\right)^* =$$
$$= \left[\Pi(0) - \Pi\left(\frac{a^2}{z^*}\right)\right]^*. \tag{19}$$

Второе равенство здесь следует из формулы разложения в степенной ряд комплексного потенциала внешнего поля в круге $|z| < a$. Это равенство весьма полезно для решения конкретных задач, поскольку $\Pi(z)$ — произвольная аналитическая функция.

Например, пусть нейтральный проводящий круг $|z| < a$ находится во внешнем поле расположенного в точке $\tilde{z}$ $(|\tilde{z}| > a)$ точечного мультиполя Λ_n. Тогда с помощью соотношения (19) находим

$$\Pi(z) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 n}\,\frac{\Lambda_n}{(z-\tilde{z})^n};$$
$$\tilde{\Pi}(z) = \frac{(-1)^n}{2\pi\varepsilon_0 n}\,\frac{\Lambda_n^*}{\tilde{z}^{*n}}\left(1 - \frac{z^n}{(z - a^2/\tilde{z}^*)^n}\right). \tag{20}$$

Аналогично, если круг находится во внешнем поле точечного заряда, то

$$\Pi(z) = -\frac{\Lambda_0}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{z-\tilde{z}}{R}\right);\quad \tilde{\Pi}(z) = \frac{\Lambda_0}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{a^2 - \tilde{z}^*z}{\tilde{z}^*z}\right). \tag{21}$$

Отметим, что теперь задача о заряженном круге во внешнем электрическом поле не вызовет никаких затруднений, и перейдем к более сложному примеру.

5. Задача о двух одинаковых проводящих заряженных кругах

Пусть два проводящих круга с одинаковыми радиусами a и центрами, лежащими на оси x в точках $z_1 = l/2$ и $z_2 = -l/2$, имеют одинаковые заряды $\lambda_0^{(1)} = \lambda_0^{(2)} = \lambda_0^{(+)}/2$. Такие условия соответствуют задаче о емкости проводника, образованного соединением кругов, решение которой дает один из базисных потенциалов $\Pi^{(+)}(z)$. Второй базисный потенциал $\Pi^{(-)}(z)$ получаем, решая задачу о емкости конденсатора, образованного двумя кругами как обкладками. При этом следует положить $\lambda_0^{(1)} = -\lambda_0^{(2)} = \lambda_0^{(-)}$. Общее решение задачи о двух одинаковых проводящих заряженных зарядами $\lambda_0^{(1)}$ и $\lambda_0^{(2)}$ кругах получаем как суперпозицию базисных потенциалов:

$$\Pi(z) = (\lambda_0^{(1)} + \lambda_0^{(2)})\,\Pi^{(+)}(z) + \frac{1}{2}(\lambda_0^{(1)} - \lambda_0^{(2)})\,\Pi^{(-)}(z)\,.$$

Что касается задачи о емкости конденсатора, образованного двумя кругами как обкладками, то оно известно [6, 8] и может быть получено на основании соотношения (21), из которого можно заключить, что $\Pi^{(-)}(z)$ представляет собой суперпозицию потенциалов точечных зарядов, равных 1 и -1, расположенных в сопряженных точках относительно преобразований инверсии сразу для первого и второго кругов [6], т.е.

$$\Pi^{(-)}(z) = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{z-l/2+b}{z+l/2-b}\right);$$
$$b = \frac{l}{2} - \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 - a^2}.$$

При этом емкость рассматриваемого конденсатора $C^{(-)}$ будет равна

$$C^{(-)} = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln(a/b)}.$$

Чтобы получить полное решение задачи о двух одинаковых проводящих заряженных кругах, нужно найти $\Pi^{(+)}(z)$, для чего используем описанный выше основанный на принципе Томсона вариационный подход. Аппроксимируем $\Pi^{(+)}(z)$ суперпозицией потенциалов характеристических мультиполей кругов (8). Учитывая симметрию задачи, выбираем в формуле (9) $N_1 = N_2 = N$, $\lambda_0^{(1)} = \lambda_0^{(2)} = \lambda_0^{(+)}/2$,

$$\lambda_{k\mathrm{r}}^{(1)} = (-1)^k \lambda_{k\mathrm{r}}^{(2)} = \lambda_0^{(+)} a^k \Lambda_k;\quad \lambda_{k\mathrm{i}}^{(1)} = \lambda_{k\mathrm{i}}^{(2)} = 0\,. \qquad (22)$$

Для определения Λ_k минимизируем по этим параметрам электростатическую энергию (11), записывая для нее

$$W = \frac{\lambda_0^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(b + 2\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\Lambda} + \boldsymbol{\Lambda}\cdot\hat{B}\cdot\boldsymbol{\Lambda}\right), \qquad (23)$$

где

$$b = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{R^2}{al}\right),\quad b_m = \frac{(-1)^m}{m}\,\delta^m,$$
$$B_{mm} = \frac{2}{m} + 2\,\frac{(2m-1)!}{m!^2}\,\delta^{2m},$$
$$B_{mn} = 2(-1)^{n+m}\,\frac{(n+m-1)!}{n!m!}\,\delta^{n+m},\quad \delta = \frac{a}{l}\,. \qquad (24)$$

При любых значениях $\boldsymbol{\Lambda}$ согласно вариационному принципу Томсона величина W будет больше значения истинной энергии $W_{\text{и}}$, выражаемой через емкость соединенных цилиндров $C^{(+)}$ и внешний конформный радиус A [7] области, внешней к двум кругам, как

$$W_{\text{и}} = \frac{\lambda_0^2}{2C^{(+)}} = \frac{\lambda_0^2}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R}{A}\,.$$

Используя неравенство

$$W_{\text{и}} < \min W = \frac{\lambda_0^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(b - \mathbf{b}\cdot\hat{B}^{-1}\cdot\mathbf{b}\right),$$

для внешнего конформного радиуса находим

$$A > \frac{a}{\sqrt{\delta}}\exp\left(\mathbf{b}\cdot\hat{B}^{-1}\cdot\mathbf{b}\right). \qquad (25)$$

По степени близости правой части неравенства (25) к истинному значению A будем судить о качестве аппроксимации истинного поля пробным.

Запишем неравенство (25) для первых порядков приближений:

$$A > A_0 = \frac{a}{\sqrt{\delta}}\,,\quad A > A_1 = \frac{a}{\sqrt{\delta}}\exp\left(\frac{\delta^2}{2(1+\delta^2)}\right), \qquad (26)$$

$$A > A_2 = \frac{a}{\sqrt{\delta}}\exp\left(\frac{2\delta^2+\delta^4+3\delta^6}{4(1+\delta^2+3\delta^4+\delta^6)}\right), \qquad (27)$$

$$A > A_3 = \\ = \frac{a}{\sqrt{\delta}}\exp\left(\frac{\delta^2(11\delta^{10}+12\delta^8+50\delta^6+11\delta^4+3\delta^2+6)}{12(\delta^{12}+6\delta^{10}+7\delta^8+11\delta^6+3\delta^4+\delta^2+1)}\right). \qquad (28)$$

Этим неравенствам будут соответствовать значения

$$\boldsymbol{\Lambda} = -\hat{B}^{-1}\cdot\mathbf{b}\,, \qquad (29)$$

а именно:

$$\boldsymbol{\Lambda}_0 = 0\,,\quad \boldsymbol{\Lambda}_1 = -\left(\frac{\delta}{2(1+\delta^2)}\right),$$
$$\boldsymbol{\Lambda}_2 = \frac{\left(\delta(1+2\delta^4);\ -\delta^2(1-\delta^2)\right)}{2(\delta^6+3\delta^4+\delta^2+1)}\,, \qquad (30)$$
$$\boldsymbol{\Lambda}_3 = \frac{1}{2D(\delta)}\begin{pmatrix}\delta+2\delta^5+9\delta^7+3\delta^{11}\\ -\delta^2(1-\delta^2+6\delta^6-3\delta^8)\\ \delta^3(1-2\delta^2-3\delta^4+\delta^6)\end{pmatrix},$$

$$D(\delta) = \delta^{12}+6\delta^{10}+7\delta^8+11\delta^6+3\delta^4+\delta^2+1\,. \qquad (31)$$

Как и следовало ожидать, с ростом порядка аппроксимации аналитические формулы, определяющие $\boldsymbol{\Lambda}_N$ и $(\mathbf{b}\cdot\hat{B}^{-1}\cdot\mathbf{b})_N$ усложняются. Так, если при $N=3$ они еще вмещаются в строку, то при $N=4$ для их записи строки уже не хватает. Например,

$$\left(\mathbf{b}\cdot\hat{B}^{-1}\cdot\mathbf{b}\right)_4 = \frac{f_4(\delta)}{g_4(\delta)}\,,$$
$$f_4(\delta) = \delta^2(25\delta^{18}+58\delta^{16}+409\delta^{14}+311\delta^{12}+181\delta^{10}+ \\ +423\delta^8+103\delta^6+22\delta^4+6\delta^2+12)\,,$$
$$g_4(\delta) = 24(\delta^{20}+10\delta^{18}+25\delta^{16}+63\delta^{14}+56\delta^{12}+ \\ +37\delta^{10}+42\delta^8+11\delta^6+3\delta^4+\delta^2+1)\,.$$

Очевидно, что точность приближений A_N, а вместе с ней и точность приближения истинного распределения электрического поля пробными, будет расти с уменьшением δ. Поэтому исследуем сходимость A_N для самого неблагоприятного случая $\delta = 0{,}5$, когда круги соприкасаются в начале координат. Подставив в формулы (26)–(31) значение $\delta = 0{,}5$, найдем

$$\frac{A_0}{a} = \sqrt{2} = 1{,}41421356\,,$$
$$\frac{A_1}{a} = \sqrt{2}\exp\left(\frac{1}{10}\right) = 1{,}56294770\,,$$
$$\frac{A_2}{a} = \sqrt{2}\exp\left(\frac{13}{124}\right) = 1{,}57052868\,,$$
$$\frac{A_3}{a} = \sqrt{2}\exp\left(\frac{2825}{26919}\right) = 1{,}57071312\,,$$
$$\frac{A_4}{a} = \sqrt{2}\exp\left(\frac{4827473}{45990744}\right) = 1{,}570728896\,,$$
$$\frac{A_5}{a} = \sqrt{2}\exp\left(\frac{27199086917}{259063704600}\right) = 1{,}57076623\,,$$

$$\frac{A_6}{a} = \sqrt{2}\exp\left(\frac{40833357818741}{388865710509000}\right) = 1{,}570791939\,.$$

Сравнивая полученные приближенные значения с точным

$$\frac{A}{a} = \frac{\pi}{2} = 1{,}57079633\,,$$

видим, что погрешность расчета внешнего конформного радиуса с помощью октупольной аппроксимации

$$\varDelta = \frac{A - A_3}{A} = 5{,}30\times 10^{-5} = 0{,}00530\,\%$$

составляет тысячные доли процента. За среднюю квадратичную погрешность приближения истинного поля пробным можно принять величину

$$\sqrt{\varDelta} = 0{,}73\,\%\,.$$

С увеличением расстояния между центрами кругов (с уменьшением δ) эти погрешности будут уменьшаться.

Если полученная точность оказывается достаточной для практических расчетов, то аппроксимирующий комплексный потенциал находим с помощью формулы (1), подставляя в нее $N_p = N = 3$ и

$$\mathbf{\Lambda}_3 = \frac{(120;\ -426;\ 84)}{6729}\,.$$

Зная взаимную емкость двух проводящих кругов и приближенное значение

$$C_N^{(+)} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln(R/A_N)}\,,$$

можно найти оценку снизу для матрицы емкостных коэффициентов системы двух одинаковых проводящих кругов

$$\hat{C}_N^{(i)} = \begin{pmatrix} C^{(-)} + \dfrac{1}{4}\,C_N^{(+)} & \dfrac{1}{4}\,C_N^{(+)} - C^{(-)} \\ \dfrac{1}{4}\,C_N^{(+)} - C^{(-)} & C^{(-)} + \dfrac{1}{4}\,C_N^{(+)} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, можно сказать, что вариационная схема решения задачи о емкостных коэффициентах двух одинаковых проводящих кругов приводит к весьма простым и точным приближениям, описываемым в аналитической форме вплоть до соприкосновения кругов.

Рассмотрим теперь более сложный пример — частный случай задачи трех тел.

6. Задача о внешнем конформном радиусе трех одинаковых и одинаково расположенных относительно друг друга кругов

Пусть имеются три круга с одинаковыми радиусами a, центры которых расположены в вершинах правильного треугольника со стороной $l \geqslant 2a$ и центром в начале координат. Центр первого круга поместим на полуоси $x > 0$, тогда

$$z_1 = \frac{l}{\sqrt{3}}\,,\quad z_2 = \frac{l}{\sqrt{3}}\exp\left(\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{3}\right),\quad z_3 = \frac{l}{\sqrt{3}}\exp\left(-\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{3}\right).$$

Поскольку исследуемая задача эквивалентна задаче о емкости трех соединенных между собой проводящих кругов, аппроксимируем $\Pi^{(+)}(z)$ суперпозицией потенциалов характеристических мультиполей кругов (8). Учитывая симметрию задачи, выбираем в формуле (9) $N_1 = N_2 = N_3 = N$, $\lambda_0^{(1)} = \lambda_0^{(2)} = \lambda_0^{(2)} = \lambda_0^{(+)}/3$:

$$\lambda_n^{(1)} = \lambda_{n\mathrm{r}}^{(1)} = \lambda_0 a^n \varLambda_n\,,\quad \lambda_n^{(2)} = \exp\left(\mathrm{i}\,\frac{2n\pi}{3}\right)\lambda_{n\mathrm{r}}^{(1)}\,,$$
$$\lambda_n^{(3)} = \exp\left(-\mathrm{i}\,\frac{2n\pi}{3}\right)\lambda_{n\mathrm{r}}^{(1)}\,. \qquad (32)$$

Таким образом, число варьируемых параметров сокращается в 6 раз по сравнению с задачей, в которой нет симметрии в расположении кругов.

Энергия электрического поля, отвечающая такой аппроксимации, записывается в виде

$$W = \frac{\lambda_0^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(b + 2\mathbf{b}\cdot\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}\cdot\hat{B}\cdot\mathbf{\Lambda}\right), \qquad (33)$$

где, как показывает расчет по формулам (4) и (10),

$$b = \frac{1}{3}\ln\frac{R^3}{al^2}\,,\quad b_n = (-1)^n\frac{2}{n}\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)\delta^n\,,$$
$$B_{nn} = 3\left(\frac{1}{n} + 2\,\frac{(2n-1)!}{n!^2}\,\delta^{2n}\right),$$
$$B_{mn} = 6\,\frac{(n+m-1)!}{m!n!}\,(-1)^{n+m}\cos\left((m-n)\frac{\pi}{6}\right)\delta^{n+m}. \qquad (34)$$

При любых значениях $\mathbf{\Lambda}$ величина W будет больше значения истинной энергии $W_{\text{и}}$, выражаемой через емкость соединенных кругов $C^{(+)}$ и внешний конформный радиус A как

$$W_{\text{и}} = \frac{\lambda_0^2}{2C^{(+)}} = \frac{\lambda_0^2}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R}{A}\,.$$

Используя неравенство

$$W_{\text{и}} < \min W = \frac{\lambda_0^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(b - \mathbf{b}\cdot\hat{B}^{-1}\cdot\mathbf{b}\right),$$

для внешнего конформного радиуса найдем

$$A > a\delta^{-2/3}\exp\left(\mathbf{b}\cdot\hat{B}^{-1}\cdot\mathbf{b}\right). \qquad (35)$$

По степени близости правой части неравенства (35) к истинному значению A будем судить о качестве аппроксимации истинного поля пробным.

Запишем неравенство (35) для первых порядков приближений:

$$A > A_0 = a\delta^{-2/3}\,,\quad A > A_1 = a\delta^{-2/3}\exp\left(\frac{\delta^2}{1+2\delta^2}\right), \qquad (36)$$

$$A > A_2 = a\delta^{-2/3}\exp\left(\frac{6\delta^2 + \delta^4 + 26\delta^6}{6(1+2\delta^2+6\delta^4+6\delta^6)}\right), \qquad (37)$$

$$A > A_3 = a\delta^{-2/3}\exp\left(\frac{f_3(\delta)}{g_3(\delta)}\right), \qquad (38)$$
$$f_3(\delta) = \delta^2(157\delta^{10} + 20\delta^8 + 120\delta^6 + 26\delta^4 + \delta^2 + 6),$$
$$g_3(\delta) = 6(30\delta^{12} + 48\delta^{10} + 37\delta^8 + 26\delta^6 + 6\delta^4 + 2\delta^2 + 1)\,.$$

Этим неравенствам соответствуют значения

$$\mathbf{\Lambda} = -\hat{B}^{-1}\cdot\mathbf{b}\,, \qquad (39)$$

а именно:

$$\boldsymbol{\Lambda}_0 = 0\,, \quad \boldsymbol{\Lambda}_1 = \left(\frac{\sqrt{3}\delta}{3(1+2\delta^2)}\right),$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_2 = \frac{\left(\sqrt{3}\delta(1+5\delta^4);\ -\delta^2(1-4\delta^2)\right)}{3(6\delta^6+6\delta^4+2\delta^2+1)}\,, \tag{40}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_3 = \frac{1}{3D(\delta)}\begin{pmatrix} \sqrt{3}\delta(1+5\delta^4+20\delta^6+34\delta^{10}) \\ -\delta^2(1-4\delta^2+20\delta^6-47\delta^8) \\ -3\sqrt{3}\delta^5(1+2\delta^2-3\delta^4) \end{pmatrix}, \tag{41}$$

$$D(\delta) = 30\delta^{12}+48\delta^{10}+37\delta^8+26\delta^6+6\delta^4+2\delta^2+1\,.$$

Как и следовало ожидать, с ростом порядка аппроксимации аналитические формулы, определяющие $\boldsymbol{\Lambda}_N$ и $\left(\mathbf{b}\cdot\hat{B}^{-1}\cdot\mathbf{b}\right)_N$, усложняются. Приведем здесь еще одну оценку для внешнего конформного радиуса, соответствующую $N=4$:

$$\left(\mathbf{b}\cdot\hat{B}^{-1}\cdot\mathbf{b}\right)_4 = \frac{f_4(\delta)}{g_4(\delta)}\,,$$

$$f_4(\delta) = \delta^2(2950\delta^{18}+728\delta^{16}+5677\delta^{14}+2986\delta^{12}+ \\ +480\delta^{10}+882\delta^8+241\delta^6+52\delta^4+2\delta^2+12)\,,$$

$$g_4(\delta) = 12(250\delta^{20}+560\delta^{18}+790\delta^{16}+820\delta^{14}+400\delta^{12}+ \\ +188\delta^{10}+107\delta^8+26\delta^6+6\delta^4+2\delta^2+1)\,.$$

Очевидно, что точность приближений A_N, а вместе с ней и точность приближения истинного распределения электрического поля пробными, будет расти с уменьшением δ. Поэтому исследуем сходимость A_N для самого неблагоприятного случая $\delta = 0{,}5$, когда круги соприкасаются в начале координат. Подставив в формулы (36)–(41) значение $\delta = 0{,}5$, найдем

$$\frac{A_0}{a} = 2^{2/3} = 1{,}58740105\,, \quad \frac{A_1}{a} = 2^{2/3}\exp\left(\frac{1}{6}\right) = 1{,}87529276,$$

$$\frac{A_2}{a} = \frac{A_1}{a}\,, \quad \frac{A_3}{a} = 2^{2/3}\exp\left(\frac{3407}{20316}\right) = 1{,}87723219\,,$$

$$\frac{A_4}{a} = 2^{2/3}\exp\left(\frac{1071625}{6385716}\right) = 1{,}87744924\,,$$

$$\frac{A_5}{a} = 2^{2/3}\exp\left(\frac{6616067471}{39423215880}\right) = 1{,}87745987\,.$$

Сравнивая полученные значения для внешнего радиуса с последующими

$$\frac{A_6}{a} = 1{,}87749291\,, \quad \frac{A_7}{a} = 1{,}87749902\,,$$

$$\frac{A_8}{a} = 1{,}87749913\,, \quad \frac{A_9}{a} = 1{,}87750048\,,$$

видим, что погрешность расчета внешнего конформного радиуса с помощью октупольной аппроксимации разумно оценить как

$$\varDelta = \frac{A_9 - A_3}{A_9} = 1{,}43\times10^{-4} = 0{,}0143\,\%\,.$$

Эта погрешность составляет сотые доли процента. За среднюю квадратичную погрешность приближения истинного поля пробным можно принять величину

$$\sqrt{\varDelta} = 1{,}19\,\%\,.$$

Для больших расстояний между центрами кругов (меньших значений δ) эти погрешности будут меньше.

Если полученная точность оказывается достаточной для практических расчетов, то аппроксимирующий комплексный потенциал находим с помощью формулы (1), подставляя в нее $N=3$ и $\boldsymbol{\Lambda}_3$ из формулы (41). Разумеется, что при необходимости, задавая заранее точность аппроксимации, можно найти значение N, отвечающее такой точности.

7. Заключение

В заключение обратим внимание на то, что именно использование комплексной формы записи электростатических соотношений позволило в компактной форме дать понятие о точечных мультиполях на плоскости и их энергии взаимодействия. Органическое сочетание такого подхода с вариационными принципами дало возможность построить полное решение одной из задач многих тел в электростатике. Построенная вариационная схема при расчете электрических полей в системе большого числа параллельных круговых проводов потребует для своей реализации использования ЭВМ.

Список литературы

1. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Наука, 1973)
2. Джексон Дж *Классическая электродинамика* (М.: Мир, 1965)
3. Батыгин В В, Топтыгин И Н *Сборник задач по электродинамике* (М.: Наука, 1970)
4. Казанцев В П *Докл. РАН* **361** 469 (1998)
5. Казанцев В П, Лысенко Е А *Изв. вузов. Сер. Физ.* **38** (2) 30 (1995)
6. Лаврентьев М А, Шабат Б В *Методы теории функций комплексного переменного* 3-е изд. (М.: Наука, 1965)
7. Полиа Г, Сеге Г *Изопериметрические неравенства в математической физике* (М.: Физматгиз, 1962)
8. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Электродинамика сплошных сред* (М.: Наука, 1982)
9. Казанцев В П "Понятие о высших поляризуемостях уединенных полупроводников в плоских задачах электростатики", Деп. в ВИНИТИ 242 2291 — В96 (Красноярск, 1996)

Electric multipole interaction energy in a plane and the point multipole approximation for the electric field of conductors

V.P. Kazantsev, O. A. Zolotov, M. V. Dolgopolova
Krasnoyarsk State University, Physics Department
Svobodnyi prosp. 79, 660041 Krasnoyarsk, Russian Federation
Tel. (7-3912) 44-56 03. *Fax* (7-3912) 44-87 81. *E-mail*: zolotov@krasu.ru

Complex plane representation of electric potential is used to obtain relations for the interaction energy of electric multipoles in a plane, which can be usefully applied to the variational calculation of the electric field in a system of parallel circular wires.

PACS numbers: 03.50 De, 41.20.Cv
Bibliography — 9 references *Received 28 July 2005, revised 20 November 2005*
Uspekhi Fizicheskikh Nauk **176** (5) 537–542 (2006) *Physics – Uspekhi* **49** (5) (2006)