Апрель 2006 г. **Том 176, № 4**

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Релятивистские эффекты первого порядка в электродинамике сред с неоднородной скоростью движения

Н.Н. Розанов, Г.Б. Сочилин

Представлена систематическая теория электродинамических релятивистских эффектов первого порядка в средах с пространственно неоднородной скоростью движения. Развит геометрооптический подход, в рамках которого найдены искривления лучей и изменения поляризационных характеристик излучения при его прохождении через сплошную среду с неоднородной скоростью движения. Продемонстрированы невзаимные (различающиеся для противоположных направлений распространения излучения) волноводы и линзы в среде с поперечной неоднородностью скорости. Изучено рассеяние (дифракция) излучения на локализованной неоднородности скорости движения. Обсуждены особенности распространения коротковолнового (рентгеновского) излучения в движущейся среде, а также возможности постановки экспериментов.

PACS numbers: **03.30.+p**, 03.50.De, **41.20.–q**, **42.25.–p**

Содержание

1. Введение и исходные соотношения

Электродинамика движущихся сплошных сред составляет важную часть теории относительности, основы которой были сформулированы Эйнштейном ровно век тому назад [1]. Здесь необходима оговорка, что один из наиболее ярких эффектов в этой области — эффект частичного увлечения света движущейся средой — был интуитивно предсказан Френелем (1818 г.) задолго до создания теории относительности при использовании несостоятельных с современной точки зрения модельных представлений об эфире и его конденсации в порах среды [2].

Тем не менее результат Френеля был экспериментально подтвержден Физо (1851 г.), получен из дорелятивистской электронной теории Лоренца с поправкой за счет частотной дисперсии (1895 г.), зарегистрированной в экспериментах Зеемана (1914 г.) [2], и лишь затем последовательно выведен из релятивистской формулы сложения скоростей в первом порядке по отношению скорости движения среды к скорости света в вакууме.

Если же отвлечься от эффекта Френеля – Физо, то в рамках теории относительности большее внимание уделялось задачам с резкими границами раздела движущихся сред. Так, уже в первой работе [1] Эйнштейн рассмотрел отражение от зеркала, равномерно перемещающегося вдоль нормали к своей (плоской) поверхности. Затем были сформулированы условия для полей на движущихся границах раздела сред и выведены материальные уравнения Минковского [3].

Значительную роль в последующем развитии теории сыграли важные эффекты Черенкова – Вавилова (излучение заряда, движущегося в среде со скоростью, превышающей фазовую скорость света в этой среде [4, 5]) и переходного излучения (излучения заряда, пересекающего границу раздела сред [6]). Интерес к такого рода задачам возрос в 1950-х годах в связи с развитием

Н.Н. Розанов, Г.Б. Сочилин. Всероссийский научный центр "Государственный оптический институт им. С.И. Вавилова", Научно-исследовательский институт лазерной физики, 199034 Санкт-Петербург, Биржевая линия 12, Российская Федерация
Тел. (812) 328-10-93
E-mail: nrosanov@yahoo.com, goga.ilph@yahoo.com

Статья поступила 10 октября 2005 г.

ускорительной техники и физики плазмы; обзор работ этого периода приводится в [7, 8].

К настоящему времени электродинамика движущихся сплошных сред, основанная на дифференциальных уравнениях Максвелла и материальных уравнениях Минковского, представляет собой достаточно полную теорию, изложенную в монографиях и учебниках [9–11], хотя и содержит некоторые дискуссионные моменты, в числе которых вид тензора энергии-импульса и пондеромоторной силы, различающийся в подходах Минковского и Абрагама [9]. Важным представляется, однако, то, что теоретические исследования ограничивались главным образом случаем пространственно однородной скорости движения среды, а влияние неоднородности скорости движения на распространение электромагнитного излучения рассматривалось недостаточно полно [11–13].

В то же время учет неоднородности скорости приводит к ряду новых существенных эффектов. Например, в стандартном описании классического опыта Физо считается, что скорость движения жидкости (воды) в трубе пространственно однородна. Если же учесть, что скорость ламинарного движения воды в трубе зависит от расстояния до оси трубы параболически, то окажется, что фазовая скорость света обладает аналогичной зависимостью и волновой фронт излучения для двух указанных встречных направлений искривляется противоположным образом. В зависимости от направления распространения свет будет фокусироваться или дефокусироваться, т.е. неоднородно движущаяся вода создает невзаимную линзу (с разными знаками фокусного расстояния для противоположных направлений) [14].

Другой пример: в объеме прозрачной среды вращается вокруг своей оси симметрии цилиндр или шар той же среды (с тем же показателем преломления). Нас интересуют характеристики излучения, рассеиваемого при падении на вращающееся тело электромагнитного излучения [15]. В этом случае мы встречаемся с проявлением скорости движения "в чистом виде", поскольку в отсутствие вращения все пространство однородно и рассеяние не имеет места. Таким образом, релятивистские эффекты приводят к новому механизму рассеяния излучения.

В данной статье мы излагаем систематическую теорию электродинамики сред с пространственно неоднородной скоростью движения, ограничиваясь эффектами первого порядка по отношению этой скорости v к скорости света в вакууме c. Эта теория описывает ряд нетривиальных эффектов, но число выполненных экспериментов невелико. Хотя речь идет о сравнительно малых эффектах, возможность их обнаружения и даже использования представляется реальной ввиду достигнутого уровня точности современных оптических и в том числе лазерных экспериментов [16, 17].

Исходными во всей статье, за исключением раздела 6, служат дифференциальные уравнения Максвелла для напряженности электрического и магнитного полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ и электрической и магнитной индукции среды $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$:

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0\,, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\,,$$
$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 0\,, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\,, \tag{1.1}$$

и материальные уравнения Минковского, записанные в первом порядке по параметру v/c:

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c}\,[\mathbf{vH}]\,,$$
$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c}\,[\mathbf{Ev}]\,. \tag{1.2}$$

Здесь t — время, ε и μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости сплошной среды, $\mathbf{v}$ — скорость ее движения. Дисперсия среды считается пренебрежимо слабой. Более точно, вместо (1.2) следует записать

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \frac{\varepsilon_0\,\mu_0 - 1}{c}\,[\mathbf{vH}] + \delta\mathbf{D}\,,$$
$$\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H} + \frac{\varepsilon_0\,\mu_0 - 1}{c}\,[\mathbf{Ev}] + \delta\mathbf{B}\,, \tag{1.3}$$

где ε_0 и μ_0 — диэлектрическая и магнитная проницаемости однородной неподвижной среды (при $\mathbf{v} = 0$).

Величины $\delta\mathbf{D}$ и $\delta\mathbf{B}$ представляют динамооптические и гиромагнитные явления соответственно, а также другие возможные малые возмущения, например обычное рассеяние на неоднородностях среды. Так, для твердых тел с вызванными неоднородностью скорости движения малыми механическими деформациями компоненты вектора $\delta\mathbf{D}$ имеют вид [11]

$$\delta D_i = a_{iklm}\,u_{lm}E_k\,. \tag{1.4}$$

Здесь a_{iklm} — тензор четвертого ранга, связанный с упругооптическими постоянными, u_{ik} — тензор деформации, E_k — компоненты вектора $\mathbf{E}$, индексы пробегают значения 1, 2, 3, соответствующие декартовым координатам x, y, z, а по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Аналогично (1.4) записывается соотношение для $\delta\mathbf{B}$, а также поправки за счет рассеяния на неоднородностях среды [11].

Решение рассматриваемых задач существенно облегчается малостью параметра v/c. Прежде всего (хотя это звучит, возможно, неожиданно), малость v/c позволяет отстроиться от паразитных нерелятивистских эффектов. Действительно, если рассматривать распространение излучения, например, во вращающемся твердом диэлектрике, то вращение вызывает механические напряжения, в свою очередь приводящие к изменению оптических свойств диэлектрика (эффекты фотоупругости). Однако эти эффекты квадратичны по скорости движения, т.е. меняют эффективный показатель преломления среды на величину $\sim (v/v_{\rm s})^2$, где $v_{\rm s}$ — скорость звука в среде [11, 18]. Величина же релятивистских эффектов — первого порядка по скорости ($\sim v/c$, где c — скорость света).

Таким образом, интересующие нас релятивистские эффекты являются основными при условии малости скорости движения среды [15]:

$$v < v_0 = \frac{v_{\rm s}^2}{c}\,.$$

Более точно, в этих соотношениях вместо скорости v должен фигурировать ее перепад.

В методическом плане малость параметра v/c позволяет обойти технически сложную проблему учета условий непрерывности на границах раздела сред (см. также [8]). Для демонстрации подхода мы приводим в разделе 2

анализ влияния вращательного движения диэлектрика на статические электрическое и магнитное поля. Последующее изложение относится уже к распространению электромагнитных волн. В разделе 3 рассматривается противоположный статическому случай высокочастотных полей, т.е. выводятся основные уравнения геометрической оптики движущихся сред, что позволяет последовательно определить сдвиги и искривление лучей и поляризационные изменения вследствие неоднородности движения среды на сравнительно коротких трассах (короче дифракционной длины).

В том же приближении, а также в волновом подходе в разделе 4 анализируются упомянутые выше эффекты невзаимной линзы и волновода. Дифракция (рассеяние) излучения на неоднородностях распределения скорости движения изучается в разделе 5. Случай распространения рентгеновского излучения в движущихся средах выходит за рамки электродинамики сплошных сред, поскольку для столь коротких длин волн макроскопическое описание среды не оправдано; соответствующий анализ приводится в разделе 6.

Наконец, в заключение (раздел 7) обобщаются представленные результаты, проводится сравнение с распространением звуковых волн в движущейся среде и обсуждаются возможности постановки экспериментов.

2. Электро- и магнитостатические поля в движущихся диэлектриках

Хотя электродинамика движущихся сред, основанная на уравнениях (1.1) и (1.2), принципиально позволяет решать широкий круг задач, сложность использования условий непрерывности на границах раздела сред приводит к тому, что практически во всех приложениях эти границы считаются плоскими, цилиндрическими или сферическими [7, 8, 11, 13]. Обойти эту трудность можно, учитывая, что условия непрерывности на границах раздела сред не являются независимыми от самих уравнений Максвелла; напротив, они служат следствием этих уравнений. Необходимость в их использовании отпадает, если ввести плавный переход между характеристиками сред, а затем уменьшить до нуля ширину переходной области.

В данном разделе, имеющем методический характер, демонстрируется возможность интегрального подхода (без привлечения условий непрерывности на границах раздела сред) для определения напряженностей статических электрического и магнитного полей в случае сравнительно произвольного распределения скорости движения однородной среды. Точнее, рассматривается случай стационарного (не зависящего от времени) распределения скорости движения среды, которое возникает, например, при вращении части тела с осесимметричной формой относительно оси симметрии. При этом электрическое и/или магнитное поле остается статическим и в движущейся среде.

Диэлектрическая и магнитная проницаемости движущейся и неподвижной частей среды считаются одинаковыми и анализируются эффекты первого порядка малости по отношению скорости движения среды к скорости света в вакууме. Мы покажем, что в частном случае вращающегося шара, для которого решение можно найти и традиционным способом (используя условия непрерывности на границе раздела между движущейся и неподвижной частями среды [11]), результаты этих двух подходов согласуются [19].

Для статических полей "дифференциальные" уравнения Максвелла (1.1) имеют вид

$$\operatorname{div}\mathbf{B}=0\,,\qquad \operatorname{rot}\mathbf{E}=0\,,\qquad \operatorname{div}\mathbf{D}=0\,,\qquad \operatorname{rot}\mathbf{H}=0\,. \tag{2.1}$$

Диэлектрическая (ε) и магнитная (μ) проницаемости считаются постоянными, отвечающими неподвижной среде. В такой постановке релятивистские эффекты проявляются в наиболее чистом виде. Рассмотрим случай движения среды с зависящей от координат скоростью в однородном статическом электрическом поле напряженности $\mathbf{E}_0=\text{const}$.

В нулевом порядке теории возмущений по v/c электрическое поле совпадает с $\mathbf{E}_0$, а магнитное поле $\mathbf{H}_0=0$. В первом порядке по v/c материальные соотношения (1.2) принимают вид

$$\mathbf{D}_1=\varepsilon\mathbf{E}_1\,,\qquad \mathbf{B}_1=\mu\mathbf{H}_1+\frac{\varepsilon\mu-1}{c}\,[\mathbf{E}_0\mathbf{v}]\,. \tag{2.2}$$

Тогда из первого уравнения Максвелла (2.1) следует

$$\operatorname{div}\mathbf{H}_1=-\frac{\varepsilon\mu-1}{\mu c}\,\operatorname{div}[\mathbf{E}_0\mathbf{v}]\,. \tag{2.3}$$

Ввиду последнего из уравнений (2.1) магнитное поле является безвихревым и обладает потенциалом:

$$\mathbf{H}_1=-\operatorname{grad}\Psi\,. \tag{2.4}$$

С учетом (2.3) и однородности поля $\mathbf{E}_0$ потенциал имеет вид

$$\begin{aligned}\Psi(\mathbf{r})&=-\frac{1}{4\pi}\int\frac{\operatorname{div}\mathbf{H}_1(\mathbf{r}')}{R}\,\mathrm{d}\mathbf{r}'=\\&=\frac{\varepsilon\mu-1}{4\pi\mu c}\int\frac{\operatorname{div}\left[\mathbf{E}_0\,\mathbf{v}(\mathbf{r}')\right]}{R}\,\mathrm{d}\mathbf{r}'=\\&=-\frac{\varepsilon\mu-1}{4\pi\mu c}\int\frac{\mathbf{E}_0\operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{r}')}{R}\,\mathrm{d}\mathbf{r}'\,,\end{aligned} \tag{2.5}$$

где $R=|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ — расстояние между точкой $\mathbf{r}$, в которой вычисляется поле, и вектором переменной интегрирования $\mathbf{r}'$.

Соотношение (2.5) служит общим решением поставленной задачи для произвольного распределения скорости движения среды. Применим его к случаю вращения шара радиуса a с угловой скоростью $\mathbf{\Omega}$, направленной вдоль оси z, т.е. $\mathbf{\Omega}=(0,0,\Omega)$. Считая внешнее электрическое поле направленным также вдоль оси z: $\mathbf{E}_0=(0,0,E_0)$, для магнитного потенциала вне шара получаем

$$\Psi=-\frac{4}{15}\,\frac{\varepsilon\mu-1}{\mu c}\,E_0\Omega\,\frac{a^5}{r^3}\left(1-3\,\frac{z^2}{r^2}\right). \tag{2.6}$$

Здесь r — расстояние до центра шара. Аналогично, для диэлектрического шара, вращающегося в постоянном магнитном поле напряженности $\mathbf{H}_0$, направленном вдоль оси вращения, электрический потенциал Φ вне шара имеет вид

$$\Phi=\frac{4}{15}\,\frac{\varepsilon\mu-1}{\varepsilon c}\,H_0\Omega\,\frac{a^5}{r^3}\left(1-3\,\frac{z^2}{r^2}\right). \tag{2.7}$$

Можно показать, что те же результаты дает и традиционный подход, основанный на сшивании решений на границе раздела вращающегося шара и неподвижной среды. Для этого следует обобщить решение приведенной в [11] задачи, где рассматривалось вращение диэлектрического шара в вакууме. (К этому не сводится случай окружающей среды с произвольной диэлектрической проницаемостью, так как для вакуума в материальных уравнениях Минковского (1.2) члены со скоростью исчезают.) Результат подтверждает правомерность интегрального подхода. Однако интегральный подход и общее соотношение (2.5) дают возможность решить более широкий круг задач, например, для вращающегося конечного цилиндра [15].

3. Геометрическая оптика движущихся сред

3.1. Исходные соотношения и уравнение эйконала

Рассмотрим распространение монохроматического излучения с частотой ω в среде с плавной (по сравнению с длиной волны излучения) неоднородностью скорости движения [20]. Это движение считаем стационарным, со скоростью, не зависящей от времени в каждой точке пространства. Тогда, как нетрудно увидеть из общих соотношений (1.1) и (1.2), излучение остается монохроматическим и после прохождения через движущуюся среду (отсутствуют доплеровские сдвиги частоты). Нас интересуют траектории световых лучей и изменение поляризации света из-за движения среды.

В рассматриваемом случае малых скоростей движения среды $\mathbf{v}$ при использовании комплексной записи поля (множитель $\exp(-\mathrm{i}\omega t)$ опускается) уравнения Максвелла (1.1) заменяются на следующие:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = \mathrm{i}\,\frac{\omega}{c}\,\mathbf{B}\,, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{H} = -\mathrm{i}\,\frac{\omega}{c}\,\mathbf{D}\,. \tag{3.1}$$

Отсюда получаем волновые уравнения для неоднородной движущейся среды:

$$\begin{aligned}
&\nabla^2\mathbf{E} + k_0^2\varepsilon\mu\mathbf{E} + [\operatorname{grad}\ln\mu\times\operatorname{rot}\mathbf{E}] + \operatorname{grad}(\operatorname{grad}\ln\varepsilon\cdot\mathbf{E}) = \\
&= -\frac{\varepsilon\mu-1}{c}\Big\{k_0^2\mu[\mathbf{vH}] + \mathrm{i}k_0\operatorname{rot}[\mathbf{Ev}] + \\
&+\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{grad}\operatorname{div}[\mathbf{vH}] - \mathrm{i}k_0\big[\operatorname{grad}\ln\mu\times[\mathbf{Ev}]\big]\Big\} - \\
&-\mathrm{i}k_0\frac{2n}{c}\big[\operatorname{grad}n\times[\mathbf{Ev}]\big] - \operatorname{div}[\mathbf{vH}]\operatorname{grad}\frac{\varepsilon\mu-1}{c\varepsilon} - \\
&-\frac{2}{c}\operatorname{grad}\left(\frac{n}{\varepsilon}\operatorname{grad}n\,[\mathbf{vH}]\right),
\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}
&\nabla^2\mathbf{H} + k_0^2\varepsilon\mu\mathbf{H} + [\operatorname{grad}\ln\varepsilon\times\operatorname{rot}\mathbf{H}] + \operatorname{grad}(\operatorname{grad}\ln\mu\cdot\mathbf{H}) = \\
&= -\frac{\varepsilon\mu-1}{c}\Big\{k_0^2\varepsilon[\mathbf{Ev}] - \mathrm{i}k_0\operatorname{rot}[\mathbf{vH}] + \\
&+\frac{1}{\mu}\operatorname{grad}\operatorname{div}[\mathbf{Ev}] + \mathrm{i}k_0\big[\operatorname{grad}\ln\varepsilon\times[\mathbf{Ev}]\big]\Big\} - \\
&-\mathrm{i}k_0\frac{2n}{c}\big[\operatorname{grad}n\times[\mathbf{vH}]\big] - \operatorname{rot}[\mathbf{Ev}]\operatorname{grad}\frac{\varepsilon\mu-1}{c\mu} - \\
&-\frac{2}{c}\operatorname{grad}\left(\frac{n}{\mu}\operatorname{grad}n\cdot[\mathbf{Ev}]\right),
\end{aligned} \tag{3.3}$$

где $k_0 = \omega/c$ — волновое число в вакууме, $n = (\varepsilon\mu)^{1/2}$ — показатель преломления среды. Отметим, что правые части этих уравнений содержат малый множитель v/c.

В приближении геометрической оптики локальная структура поля та же, что и у плоской волны в однородной среде. Важно, что в среде даже с постоянной скоростью движения $\mathbf{v}$ направления волнового вектора $\mathbf{k}$ и среднего по времени потока энергии (вектора Пойнтинга)

$$\mathbf{S} = \frac{c}{8\pi}\operatorname{Re}[\mathbf{EH}^*] \tag{3.4}$$

различаются (как в анизотропной среде, поскольку движение среды выделяет некоторое направление в пространстве) [9].

Действительно, в рассматриваемом случае из (3.1) и (1.2) для плоской волны вида

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_0\exp(\mathrm{i}\mathbf{kr})\,, \qquad \mathbf{H} = \mathbf{h}_0\exp(\mathrm{i}\mathbf{kr})$$

следует

$$[\mathbf{qe}_0] = \frac{\omega}{c}\,\mu\mathbf{h}_0\,, \qquad [\mathbf{qh}_0] = -\frac{\omega}{c}\,\varepsilon\mathbf{e}_0\,, \tag{3.5}$$

где

$$\mathbf{q} = \mathbf{k} + \frac{\omega}{c}\,\frac{\varepsilon\mu-1}{c}\,\mathbf{v}\,. \tag{3.6}$$

Нетрудно видеть, что при замене $\mathbf{q}$ на $\mathbf{k}$ уравнения (3.5) совпадают с уравнениями плоской волны в неподвижной среде. Поэтому в движущейся среде вектор Пойнтинга направлен вдоль вектора $\mathbf{q}$ (ненормированный лучевой вектор).

Рассмотрим теперь среду с плавным пространственным изменением скорости движения $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$. Ищем решение в виде [11, 21]

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \mathbf{e}(\mathbf{r})\exp\big(\mathrm{i}k_0\,L(\mathbf{r})\big)\,, \\
\mathbf{H} &= \mathbf{h}(\mathbf{r})\exp\big(\mathrm{i}k_0\,L(\mathbf{r})\big)\,,
\end{aligned} \tag{3.7}$$

где волновое число k_0 рассматривается как большой параметр асимптотической теории, а векторы $\mathbf{e}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{h}(\mathbf{r})$ в общем случае комплексные.

Подставляя (3.7) в (3.1) и (1.2), в первом приближении по v/c и основном порядке по малому параметру k_0^{-1} получаем

$$\begin{aligned}
\mathbf{e} &= -\frac{1}{\varepsilon}\left([\operatorname{grad}L\,\mathbf{h}] + \frac{\varepsilon\mu-1}{c}\,[\mathbf{vh}]\right), \\
\mathbf{h} &= -\frac{1}{\mu}\left([\mathbf{e}\operatorname{grad}L] + \frac{\varepsilon\mu-1}{c}\,[\mathbf{ev}]\right),
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}\operatorname{grad}L &= -\frac{\varepsilon\mu-1}{c}\,\mathbf{ev}\,, \\
\mathbf{h}\operatorname{grad}L &= -\frac{\varepsilon\mu-1}{c}\,\mathbf{hv}\,.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Из (3.8) следует

$$n^2 - (\operatorname{grad}L)^2 - 2\,\frac{\varepsilon\mu-1}{c}\,\mathbf{v}\operatorname{grad}L = 0\,. \tag{3.10}$$

Это уравнение эйконала для случая медленно движущейся среды. (При $\mathbf{v} = 0$ оно переходит в стандартное уравнение эйконала.) Его можно также записать в форме

$$\left(\operatorname{grad} L + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c}\,\mathbf{v}\right)^2 = n^2\,. \tag{3.11}$$

Произвольное распределение скорости $\mathbf{v}$ можно разложить на безвихревое (индекс 1) и соленоидальное (без источников, индекс 2), причем

$$\begin{gathered}\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\,, \quad \operatorname{rot}\mathbf{v}_1 = 0\,, \quad \mathbf{v}_1 = \operatorname{grad} U\,,\\ \operatorname{div}\mathbf{v}_2 = 0\,, \quad \mathbf{v}_2 = \operatorname{rot}\mathbf{W}\,,\\ U = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\operatorname{div}\mathbf{v}}{r}\,\mathrm{d}V\,, \quad \mathbf{W} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\operatorname{rot}\mathbf{v}}{r}\,\mathrm{d}V\,,\end{gathered} \tag{3.12}$$

или

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{1}{4\pi}\operatorname{grad}\int \frac{\operatorname{div}\mathbf{v}}{r}\,\mathrm{d}V\,, \quad \mathbf{v}_2 = -\frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\int \frac{\operatorname{rot}\mathbf{v}}{r}\,\mathrm{d}V\,, \tag{3.13}$$

где r — расстояние от элемента объема интегрирования $\mathrm{d}V$ до точки наблюдения.

Для движения со скоростью $\mathbf{v}_1$ (потенциальное течение, завихренность $\operatorname{rot}\mathbf{v}_1 = 0$) уравнение эйконала принимает вид

$$(\operatorname{grad} M)^2 = n^2\,, \quad M = L + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c}\,U\,. \tag{3.14}$$

Уравнение эйконала для M отвечает неподвижной среде. Если среда однородна, то решением (3.14) служит, например, плоский волновой фронт. Зная M, из (3.14) находим L, причем в неоднородно движущейся среде волновые фронты будут искривленными.

Второй случай (движение со скоростью $\mathbf{v}_2$) отвечает несжимаемой жидкости. Уравнение эйконала приводится к виду

$$\left(\operatorname{grad} M + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c}\,\mathbf{v}_2\right)^2 = n^2\,, \quad \operatorname{div}\mathbf{v}_2 = 0\,. \tag{3.15}$$

3.2. Энергетические соотношения и траектории лучей

Из (3.7)–(3.9) следует вид среднего по времени значения вектора Пойнтинга (3.4):

$$\mathbf{S} = \frac{c}{8\pi\mu}\,\mathbf{e}\mathbf{e}^*\left(\operatorname{grad} L + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c}\,\mathbf{v}\right). \tag{3.16}$$

Введем усредненные по времени плотности электрической и магнитной энергии, а также полной энергии [9, 21]:

$$\begin{gathered}\langle w_\mathrm{e}\rangle = \frac{1}{16\pi}\,\mathbf{e}\mathbf{d}^*\,,\\ \langle w_\mathrm{m}\rangle = \frac{1}{16\pi}\,\mathbf{h}\mathbf{b}^*\,,\\ \langle w\rangle = \langle w_\mathrm{e}\rangle + \langle w_\mathrm{m}\rangle\,,\end{gathered} \tag{3.17}$$

где $\mathbf{d}$ и $\mathbf{b}$ — амплитуды электрической и магнитной индукции. Можно показать, что

$$\begin{gathered}\langle w_\mathrm{e}\rangle = -\frac{1}{16\pi}\,\mathbf{e}\,[\operatorname{grad} L\,\mathbf{h}^*] = \frac{1}{16\pi}\,[\mathbf{e}\mathbf{h}^*]\operatorname{grad} L\,,\\ \langle w_\mathrm{m}\rangle = \frac{1}{16\pi}\,\mathbf{h}^*\,[\operatorname{grad} L\,\mathbf{e}] = \frac{1}{16\pi}\,[\mathbf{e}\mathbf{h}^*]\operatorname{grad} L\,,\end{gathered} \tag{3.18}$$

$$\langle\mathbf{S}\rangle = \mathbf{s}c_\mathrm{p}\langle w\rangle\left(\mathbf{s}\,\frac{\operatorname{grad} L}{n}\right)^{-1}. \tag{3.19}$$

Здесь $c_\mathrm{p} = c/n$ — фазовая скорость света в неподвижной среде, $\mathbf{s}$ — единичный лучевой вектор, направленный вдоль вектора Пойнтинга:

$$\mathbf{s} = \frac{1}{n}\left(\operatorname{grad} L + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c}\,\mathbf{v}\right). \tag{3.20}$$

Нетрудно увидеть, что в среде с единой скоростью движения лучевой вектор направлен вдоль вектора $\mathbf{q}$. В согласии с [9] для составляющей скорости света, направленной вдоль вектора $\mathbf{s}$, имеем

$$\mathbf{c}_\mathrm{s} = \frac{\langle\mathbf{S}\rangle}{\langle w\rangle} = \mathbf{s}c_\mathrm{p}\left(\mathbf{s}\,\frac{\operatorname{grad} L}{n}\right)^{-1}. \tag{3.21}$$

Составляющая же скорости вдоль нормали к волновому фронту равна фазовой скорости c_p [9, 21]. Действительно, проецируя $\mathbf{c}_\mathrm{s}$ на это направление и привлекая (3.21), получаем

$$c_\mathrm{p} = \mathbf{c}_\mathrm{s}\,\frac{\operatorname{grad} L}{n}\,. \tag{3.22}$$

Определим луч как траекторию, касательная к которой в каждой точке направлена вдоль лучевого вектора $\mathbf{s}$. Если радиус-вектор $\mathbf{r}(s)$ точки, расположенной на луче, рассматривать как функцию длины s луча, то уравнение луча в движущейся среде примет вид

$$n\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s} = \left(\operatorname{grad} L + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c}\,\mathbf{v}\right) \tag{3.23}$$

или

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(n\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}\right) = \operatorname{grad} n + \frac{2}{c}\big(\mathbf{v}(\mathbf{s}\operatorname{grad} n) - \operatorname{grad} n\,(\mathbf{s}\mathbf{v})\big) +\\ + \frac{n^2 - 1}{c}\,[\mathbf{s}\operatorname{rot}\mathbf{v}]\,.\end{aligned} \tag{3.24}$$

Из уравнений (3.23) и (3.24) можно получить и выражение для отношения интенсивностей в двух произвольных точках луча:

$$\begin{aligned}\frac{I_2}{I_1} = \frac{n_2}{n_1}\exp\left\{-\int_{s_1}^{s_2}\frac{\nabla^2 L}{n}\,\mathrm{d}s\right\}\times\\ \times\left\{1 - \int_{s_1}^{s_2}\frac{1}{n}\left(\frac{2n}{c}\operatorname{grad} n\,\mathbf{v} + \frac{n^2 - 1}{c}\operatorname{div}\mathbf{v}\right)\mathrm{d}s\right\}.\end{aligned} \tag{3.25}$$

Здесь интегрирование проводится вдоль луча, а интенсивность света I определяется как абсолютное значение вектора $\langle\mathbf{S}\rangle$.

Приведенные выше результаты аналогичны обычной геометрической оптике, за исключением члена, пропор-

ционального скорости в эйконале (3.10), (3.11) и в лучевом векторе (3.20). Наличие этого члена приводит к искажению геометрического волнового фронта и эффективной анизотропии движущейся среды. Для среды с пространственно однородным показателем преломления из (3.24) следует

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}s^2} = \frac{n^2-1}{cn}\,[\mathbf{s}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v}]\,. \tag{3.26}$$

Видно, что в случае среды с однородным показателем преломления лучи остаются прямыми при безвихревом движении среды, когда завихренность $\mathrm{rot}\,\mathbf{v} = 0$, и искривляются при наличии завихренности. Изменение же интенсивности в однородной несжимаемой среде ($\mathrm{grad}\,n = 0$, $\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0$) вследствие кривизны волнового фронта аналогично изменению интенсивности в вакууме, например, при распространении сферической волны [20].

3.3. Поляризационные эффекты

Перейдем к рассмотрению изменений векторных амплитуд $\mathbf{e}$ и $\mathbf{h}$ при распространении излучения. В общем случае неоднородной среды уравнения для амплитуд весьма громоздки, поэтому ограничимся случаем среды с однородным показателем преломления (но с неоднородным распределением скорости движения). Тогда волновые уравнения примут вид

$$\nabla^2\mathbf{E} + k_0^2\varepsilon\mu\mathbf{E} = -\frac{\varepsilon\mu-1}{c}\times \\ \times\left(k_0^2\mu\,[\mathbf{v}\mathbf{H}] + \mathrm{i}k_0\,\mathrm{rot}\,[\mathbf{E}\mathbf{v}] + \frac{1}{\varepsilon}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,[\mathbf{v}\mathbf{H}]\right), \tag{3.27}$$

$$\nabla^2\mathbf{H} + k_0^2\varepsilon\mu\mathbf{H} = -\frac{\varepsilon\mu-1}{c}\times \\ \times\left(k_0^2\varepsilon\,[\mathbf{E}\mathbf{v}] - \mathrm{i}k_0\,\mathrm{rot}\,[\mathbf{v}\mathbf{H}] + \frac{1}{\mu}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,[\mathbf{E}\mathbf{v}]\right). \tag{3.28}$$

Подставляя (3.7) в (3.27) и (3.28) и приравнивая члены при одинаковых степенях k_0, мы получаем, наряду с уравнением эйконала (3.10) (члены при k_0^2), и уравнения для амплитуд $\mathbf{e}$ и $\mathbf{h}$ (члены при $\mathrm{i}k_0$):

$$(\mathrm{grad}\,L\,\mathrm{grad})\mathbf{e} + \frac{1}{2}\,\mathbf{e}\,\nabla^2 L + \\ + \frac{\varepsilon\mu-1}{c}\left\{[\mathbf{e}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v}] + (\mathbf{v}\,\mathrm{grad})\mathbf{e} + \frac{1}{2}\,\mathbf{e}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} - \\ - \frac{1}{2\varepsilon\mu}\,(\mathrm{rot}\,\mathbf{v}\,\mathrm{grad}\,L)\,[\mathbf{e}\,\mathrm{grad}\,L]\right\} = 0\,, \tag{3.29}$$

$$(\mathrm{grad}\,L\,\mathrm{grad})\mathbf{h} + \frac{1}{2}\,\mathbf{h}\,\nabla^2 L + \\ + \frac{\varepsilon\mu-1}{c}\left\{[\mathbf{h}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v}] + (\mathbf{v}\,\mathrm{grad})\mathbf{h} - \frac{1}{2}\,\mathbf{h}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} - \\ - \frac{1}{2\varepsilon\mu}\,(\mathrm{rot}\,\mathbf{v}\,\mathrm{grad}\,L)\,[\mathbf{h}\,\mathrm{grad}\,L]\right\} = 0\,. \tag{3.30}$$

Это и есть искомые векторные уравнения переноса, описывающие изменения $\mathbf{e}$ и $\mathbf{h}$ вдоль луча. Введем комплексные векторы с единичным модулем:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{e}}{(\mathbf{e}\mathbf{e}^*)^{1/2}}\,, \qquad \mathbf{w} = \frac{\mathbf{h}}{(\mathbf{h}\mathbf{h}^*)^{1/2}}\,, \tag{3.31}$$

и параметр τ, характеризующий положение вдоль луча, причем

$$\frac{\partial}{\partial\tau} = \left(\left(\mathrm{grad}\,L + \frac{\varepsilon\mu-1}{c}\,\mathbf{v}\right)\mathrm{grad}\right). \tag{3.32}$$

Тогда из (3.29) – (3.32) следует

$$\frac{\partial}{\partial\tau}(\mathbf{e}\mathbf{e}^*) + \mathbf{e}\mathbf{e}^*\left(\nabla^2 L + \frac{\varepsilon\mu-1}{c}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}\right) = 0\,, \tag{3.33}$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}(\mathbf{h}\mathbf{h}^*) + \mathbf{h}\mathbf{h}^*\left(\nabla^2 L - \frac{\varepsilon\mu-1}{c}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}\right) = 0\,. \tag{3.34}$$

Для самих амплитуд с учетом тождества $\mathrm{d}/\mathrm{d}\tau = n\,\mathrm{d}/\mathrm{d}s$ имеем

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}s} = -\frac{\varepsilon\mu-1}{cn}\left\{[\mathbf{u}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v}] + \frac{1}{2}\,\mathbf{w}(\mathbf{s}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v})\right\}, \tag{3.35}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{w}}{\mathrm{d}s} = -\frac{\varepsilon\mu-1}{cn}\left\{[\mathbf{w}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v}] - \frac{1}{2}\,\mathbf{u}(\mathbf{s}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v})\right\}. \tag{3.36}$$

Последние два соотношения позволяют найти изменения поляризации излучения, к которым приводит движение среды. Правые части (3.35), (3.36) пропорциональны малому параметру v/c, поэтому в них можно заменить $\mathbf{u}$ и $\mathbf{w}$ на их значения в неподвижной среде, ввиду чего эти уравнения расщепляются.

Решение удобно представить в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\theta \\ \theta & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{x0} \\ u_{y0} \end{pmatrix} \tag{3.37}$$

(нулевые индексы соответствуют неподвижной среде). В (3.37) фигурирует матрица Джонса [22, 23], описывающая поворот вектора поляризации на угол

$$\theta = \int A\,\mathrm{d}s\,, \tag{3.38}$$

где

$$A = \frac{\varepsilon\mu-1}{cn}\left\{(\mathrm{rot}\,\mathbf{v})_z - \frac{1}{2}\,\mathbf{s}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v}\right\}. \tag{3.39}$$

Выражение для поворота плоскости поляризации (3.38) согласуется с предсказанием Ферми [12] (см. [11]), которое следует рассматривать скорее как оценочное, поскольку при прохождении исходной плоской волны через слой вращающейся среды волну можно рассматривать как плоскую только локально, в приближении геометрической оптики. При более точном описании (см. раздел 5) пространственная неоднородность скорости движения среды приводит к рассеянию (дифракции) падающего излучения. Пренебрежение дифракционными эффектами оправдано для трасс протяженностью, много меньшей характерной дифракционной длины $L_0 \sim kl^2$, где l — характерный размер неоднородности.

4. Невзаимные волноводы и линзы

В данном разделе мы продемонстрируем, что эффект Френеля – Физо частичного увлечения света движущейся

жидкостью в случае поперечной неоднородности скорости движения среды может приводить к волноводному распространению излучения и его фокусировке, причем эффект оказывается невзаимным (различается для противоположных направлений распространения излучения) [24].

Рассмотрим сначала распространяющуюся в направлении оси x плоскую монохроматическую волну с частотой ω, волновым числом k и напряженностями электрического и магнитного полей вида (комплексная форма записи)

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(\mathrm{i}kx - \mathrm{i}\omega t)\,, \qquad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \exp(\mathrm{i}kx - \mathrm{i}\omega t)\,. \tag{4.1}$$

Пусть среда, в которой распространяется волна, движется также вдоль оси x со скоростью v ($v > 0$, если направления движения среды и света совпадают, и $v < 0$ при противоположных направлениях). Тогда для фазовой скорости волны $v_{\mathrm{ph}} = \omega/k$ в первом порядке по параметру $v/c \ll 1$ имеем [10, 11]

$$v_{\mathrm{ph}} = c_{\mathrm{p}} + v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right). \tag{4.2}$$

Здесь n — показатель преломления неподвижной среды на частоте ω. (Имеется в виду частота излучения в среде, которая из-за эффекта Доплера отличается от частоты излучения, падающего извне на движущуюся среду.) Это соотношение можно переписать в виде

$$v_{\mathrm{ph}} = \frac{c}{n_{\mathrm{eff}}}\,, \tag{4.3}$$

где введен эффективный показатель преломления

$$n_{\mathrm{eff}} = n - \frac{v}{c}(n^2 - 1)\,. \tag{4.4}$$

Для газов при умеренных давлениях показатель преломления близок к единице и эффект увлечения (зависимости эффективного показателя преломления от скорости движения среды) выражен слабо. Как показывают оценки, эффект мал для газов даже в области аномальной дисперсии. Однако для жидкостей этот эффект не мал. Для обычных жидкостей, показатель преломления которых превышает единицу, эффективный показатель преломления при попутном (встречном) движении убывает (возрастает) при возрастании скорости движения. Указанные выше условия, при которых можно пренебречь дополнительными эффектами движения среды (например, изменением ее плотности), здесь считаются выполненными.

Рассмотрим теперь среду (жидкость), скорость движения которой пространственно неоднородна. Точнее, будем считать, что скорость v зависит от поперечных (по отношению к оси x) координат. Если изменение скорости плавное, то излучение локально близко к плоской волне и для него можно использовать выражение (4.4) для эффективного показателя преломления. Тогда эффективный показатель преломления меняется в поперечном направлении. В зависимости от знака скорости v среда обладает волноводным или антиволноводным характером. Это и означает возможность создания невзаимного волновода (с различающимися свойствами для волн, распространяющихся в противоположных направлениях).

Заметим, что неоднородность скорости движения жидкости характерна для большинства вариантов течения в трубах, поскольку обычно скорость стационарного движения максимальна на оси трубы и $\mathbf{v} = 0$ на ее стенках.

Рассмотрим два варианта стационарного потока вязкой несжимаемой жидкости [18]. В первом из них жидкость течет между двумя параллельными плоскостями, расположенными на расстоянии h (вдоль оси y, ортогональной плоскостям) друг от друга, т.е. координаты плоскостей $y = \pm h/2$.

Скорость ламинарного течения квадратично зависит от координаты y:

$$v(y) = v_0\left(1 - 4\,\frac{y^2}{h^2}\right), \tag{4.5}$$

и максимальна на оси симметрии:

$$v_0 = v(0) = \frac{\Delta p}{2\eta l}\,\frac{h^2}{4}\,. \tag{4.6}$$

Здесь η — динамическая вязкость жидкости, p — давление, причем градиент давления $\Delta p/l = \mathrm{const}$ (Δp — разность давлений на концах трубы, l — ее длина). Теперь соотношение (4.4) принимает вид

$$n_{\mathrm{eff}}(y) = n_{0y} - \frac{1}{2}\,n_{1y}y^2\,, \tag{4.7}$$

где

$$n_{0y} = n - \frac{v_0}{c}(n^2 - 1)\,, \qquad n_{1y} = -\frac{8}{h^2}\,\frac{v_0}{c}(n^2 - 1)\,. \tag{4.8}$$

Второй вариант отвечает трубе кругового сечения радиуса R. В этом случае имеют место аналогичные соотношения для скорости течения (r — радиальная координата):

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta l}(R^2 - r^2)\,, \qquad v_0 = v(0) = \frac{\Delta p}{4\eta l}\,R^2\,, \tag{4.9}$$

и для радиального профиля эффективного показателя преломления:

$$n_{\mathrm{eff}}(r) = n_{0r} - \frac{1}{2}\,n_{1r}\,r^2\,, \tag{4.10}$$

$$n_{0r} = n - \frac{v_0}{c}(n^2 - 1)\,, \qquad n_{1r} = -\frac{2}{R^2}\,\frac{v_0}{c}(n^2 - 1)\,. \tag{4.11}$$

Из (4.7) и (4.10) видно, что в обоих вариантах эффективный показатель преломления квадратично зависит от поперечной координаты. Распространение излучения в таких квадратичных средах детально изучено в литературе (см., например, [21]). Волновод реализуется при $n_1 > 0$, т.е. при $v_0 < 0$. Среду можно считать неограниченной в поперечном направлении, если поперечные размеры трубы значительно превосходят ширину моды. Полуширина низшей (основной) моды w определяется соотношением

$$w^2 = \frac{2}{k_0(nn_1)^{1/2}}\,. \tag{4.12}$$

С учетом малости параметра v/c в (4.12) можно пренебречь различием между n_0 и n, а волновое число k_0

определять, как в однородной неподвижной среде. Для рассмотренных двух вариантов течения соответственно имеем

$$w_y^2 = \frac{h}{k_0}\left(\frac{c}{2v_0\, n(n^2-1)}\right)^{1/2}, \qquad w_r^2 = \frac{d}{k_0}\left(\frac{c}{2v_0\, n(n^2-1)}\right)^{1/2}. \tag{4.13}$$

Вторая формула получается из первой при замене h на диаметр трубы $d = 2R$.

Волноводный эффект реализуется в трубе, длина которой превышает характерную длину дифракции пучка с полушириной w:

$$l \gg L_{\mathrm{d}} = k_0 w^2 . \tag{4.14}$$

В противоположном случае короткой трубы она эквивалентна линзе с фокусным расстоянием

$$f = \frac{1}{n_1 L} . \tag{4.15}$$

Хотя рассматриваемый эффект возрастает при увеличении скорости течения жидкости, возможность такого увеличения ограничивается требованием ламинарности течения. Течение может превратиться в турбулентное, если число Рейнольдса

$$\mathrm{Re} = \frac{vD}{\nu_m} \tag{4.16}$$

превышает некоторое критическое значение $\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$ [6]. Здесь ν_m — кинематическая вязкость, D — характерный поперечный размер (в трубе — ее диаметр). Вообще говоря, критическое значение $\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$ не является универсальным.

Для трубы кругового сечения движение устойчиво по отношению к бесконечно малым возмущениям при любых числах Рейнольдса. При устранении возмущений у входа в трубу в тщательно выполненных экспериментах ламинарное течение поддерживается вплоть до значения $\mathrm{Re} \approx 10^5$ [18]. Отметим также, что определяющая число Рейнольдса вязкость жидкости сильно зависит от температуры, увеличиваясь с ее уменьшением [18, 25].

Оценим величину эффекта в условиях, близких к реализованным в классическом эксперименте Физо [2]. В этом эксперименте вода двигалась со скоростью $v = 7$ м с$^{-1}$ по трубе длиной $L = 150$ см и диаметром $d = 5{,}3$ мм. Для излучения с длиной волны $\lambda = 0{,}5$ мкм из (4.13) получаем $w_r = 1{,}38$ мм, что заметно меньше радиуса трубы, так что среду можно считать неограниченной в поперечном направлении.

Для наблюдения волноводного эффекта, однако, следует увеличить длину трубы, поскольку в этих условиях дифракционная длина $L_{\mathrm{d}} = 22{,}8$ м. При большой длине трубы необходимо учитывать ослабление излучения за счет его поглощения и рассеяния водой (экстинкцию). Это ослабление характеризуется полным коэффициентом экстинкции, который представляет собой декремент затухания плотности потока излучения при его распространении в поглощающей и рассеивающей среде [11]. Для дистиллированной воды в диапазоне длин световых волн 440–480 нм этот коэффициент равен 0,012 м$^{-1}$, причем вклад в него за счет рассеяния составляет менее 30 % [26]. Поэтому и ослабление пучка, и рассеяние, приводящее к его уширению, на дифракционной длине будут малы.

Подставляя в (4.16) параметры установки Физо и вязкость $\nu_m = 0{,}01$ см^2 с$^{-1}$, получаем значение числа Рейнольдса $\mathrm{Re} \approx 3{,}7 \times 10^4$ при температуре воды 20 °C. При температуре 0 °C число Рейнольдса $\mathrm{Re} \approx 2 \times 10^4$. Поэтому, хотя в экспериментах Физо движение воды было, по-видимому, турбулентным, можно добиться его ламинарности, что, правда, требует аккуратности при проведении эксперимента.

Заметим, что вопрос с турбулентностью в трубах столь малого диаметра не так прост. Дело в том, что характерный минимальный размер вихрей (колмогоровский масштаб) порядка 1–10 мм, но такие вихри уже не дробятся, а просто рассасываются за счет вязкости. Поэтому возможно, что в трубах такого диаметра турбулентность вообще не возникает. Укажем также, что для параметров установки Физо определяемое соотношением (4.15) фокусное расстояние эквивалентной линзы $f = 129$ м, что вполне регистрируется экспериментально.

Таким образом, при пропускании светового пучка через трубу с водой, текущей во встречном направлении, можно получить волноводное распространение света, тогда как при попутном течении пучок света расширяется. И радиус пучка (моды), и фокусное расстояние можно уменьшить, если использовать прозрачную жидкость с бóльшим показателем преломления, чем у воды.

В заключении раздела отметим влияние вращения диэлектрического волновода (световода) на структуру его мод [27]. А именно, в световоде с осесимметричным плавным или скачкообразным поперечным изменением показателя преломления вращение волновода вокруг его оси делает неравноправными направления обхода оси по и против часовой стрелки и потому снимается вырождение спектра мод с различными знаками азимутального индекса.

Наиболее ярко ситуация выражена для среды с постоянным (пространственно однородным) показателем преломления, в которой единственная неоднородность отвечает поперечной (по отношению к оси вращения) зависимости угловой скорости вращения среды. Естественно, что в отсутствие вращения однородная среда не обладает волноводными свойствами.

Представляется интересным, что для поперечной зависимости скорости вращения квадратичного вида в качестве точных решений уравнений Максвелла фигурируют гауссовы пучки (моды Гаусса–Эрмита или Гаусса–Лагерра), тогда как для обычных сред с квадратичным поперечным изменением показателя преломления гауссовы пучки возникают лишь в квазиоптическом (параксиальном) приближении в пренебрежении поляризационными эффектами [23]. Точнее, гауссовым профилем обладают продольные компоненты электрического и магнитного полей E_z и H_z, тогда как поперечные компоненты полей, определяемые применением к этим компонентам дифференциальных операторов, содержат примесь гауссовых мод более высокого порядка. Кроме того, во вращающемся волноводе снимается вырождение частот мод по знаку азимутального индекса, ввиду чего волновод принципиально может служить датчиком вращения [27].

5. Рассеяние света на неоднородностях скорости движения среды

5.1. Общие соотношения

Рассмотрим задачу дифракции электромагнитного излучения на неоднородностях скорости движения среды [15]. Удобно оперировать с получающимися из (1.1) и (1.3) волновыми уравнениями для **D** и **B**:

$$\Box\,\mathbf{D} = \mathbf{f}_D\,, \qquad \Box\,\mathbf{B} = \mathbf{f}_B\,,$$
$$\Box = \Delta - \frac{\varepsilon_0\mu_0}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,, \tag{5.1}$$

где

$$\mathbf{f}_D = -\frac{\varepsilon_0\mu_0 - 1}{c}\left\{\operatorname{rot}\operatorname{rot}[\mathbf{vH}] - \frac{\varepsilon_0}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}[\mathbf{Ev}]\right\} - \\ - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\delta\mathbf{D} + \frac{\varepsilon_0}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\delta\mathbf{B}\,,$$
$$\mathbf{f}_B = -\frac{\varepsilon_0\mu_0 - 1}{c}\left\{\operatorname{rot}\operatorname{rot}[\mathbf{Ev}] + \frac{\mu_0}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}[\mathbf{vH}]\right\} - \\ - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\delta\mathbf{B} - \frac{\mu_0}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\delta\mathbf{D}\,. \tag{5.2}$$

Ввиду малости скорости движения среды уравнения (5.1), (5.2) могут быть решены по теории возмущений. При этом рассеянное излучение находится из первого порядка теории возмущений решением (5.1) в форме запаздывающих потенциалов [28], причем правые части этих уравнений можно считать заданными (выраженными через решения нулевого порядка; см. (5.3)–(5.5)). Члены в фигурных скобках в (5.2) представляют релятивистские эффекты, а следующие за ними члены вне скобок — нерелятивистские. Далее мы будем учитывать только релятивистские эффекты, т.е. пренебрегать $\delta\mathbf{D}$ и $\delta\mathbf{B}$, полагая, что скорость движения среды удовлетворяет условию $v \ll v_0$.

Для решения (5.1) полагаем $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1 + \ldots$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_1 + \ldots$ и т.д. В нулевом приближении по параметру v/c (сплошная однородная неподвижная среда) невозмущенное решение $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$ считаем известным. В первом приближении теории возмущений из (5.1) находим

$$\Box\,\mathbf{E}_1 = \mathbf{f}_E\,, \qquad \Box\,\mathbf{H}_1 = \mathbf{f}_H\,, \tag{5.3}$$

$$\mathbf{f}_E = -\frac{\varepsilon_0\mu_0 - 1}{c\varepsilon_0}\left\{\operatorname{grad}\operatorname{div}[\mathbf{vH}_0] - \frac{\varepsilon_0\mu_0}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}[\mathbf{vH}_0] - \right. \\ \left. - \frac{\varepsilon_0}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}[\mathbf{E}_0\mathbf{v}]\right\}\,,$$
$$\mathbf{f}_H = -\frac{\varepsilon_0\mu_0 - 1}{c\mu_0}\left\{\operatorname{grad}\operatorname{div}[\mathbf{E}_0\mathbf{v}] - \frac{\varepsilon_0\mu_0}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}[\mathbf{E}_0\mathbf{v}] + \right. \\ \left. + \frac{\mu_0}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}[\mathbf{vH}_0]\right\}\,. \tag{5.4}$$

Поскольку правые части уравнений (5.3) известны, их решения даются в виде запаздывающих потенциалов [28]:

$$\mathbf{E}_1 = -\frac{1}{4\pi}\int\frac{1}{R}\,\mathbf{f}_E\left(t - \frac{R}{c}\right)\mathrm{d}V\,,$$
$$\mathbf{H}_1 = -\frac{1}{4\pi}\int\frac{1}{R}\,\mathbf{f}_H\left(t - \frac{R}{c}\right)\mathrm{d}V\,. \tag{5.5}$$

Здесь интегрирование ведется по объему движущейся среды, а R — расстояние от элементарного объема $\mathrm{d}V$ до точки, в которой ищутся поля. Естественно, что амплитуды рассеянного поля (в первом приближении) пропорциональны, как и **f**, параметру v/c. Будем считать, что неоднородности скорости сосредоточены в некоторой ограниченной области среды, и поместим начало координат в какую-либо "среднюю" точку этой области.

Обозначим, следуя [11], радиус-вектор, соединяющий начало координат и точку наблюдения, через $\mathbf{R}_0$, единичный вектор в том же направлении через **n**, радиус-вектор объема интегрирования через **r** и радиус-вектор от объема интегрирования в точку наблюдения через **R**, так что $\mathbf{R}_0 = \mathbf{R} + \mathbf{r}$. В дальнем поле (на достаточно большом расстоянии от области неоднородности скорости) можно заменить R в знаменателе подынтегральных выражений в (5.5) на R_0, а в аргументах функций в числителях — на более точное выражение $R = R_0 - \mathbf{nr}$. Тогда (5.5) примет вид

$$\mathbf{E}_1 = -\frac{1}{4\pi R_0}\int\mathbf{f}_E\left(t - \frac{R_0}{c} + \frac{\mathbf{nr}}{c}\right)\mathrm{d}V\,,$$
$$\mathbf{H}_1 = -\frac{1}{4\pi R_0}\int\mathbf{f}_H\left(t - \frac{R_0}{c} + \frac{\mathbf{nr}}{c}\right)\mathrm{d}V\,. \tag{5.6}$$

Выражения (5.5) и (5.6) дают общее решение задачи дифракции (рассеяния) излучения на неоднородностях скорости движения среды произвольного вида. Падающее излучение в них также имеет произвольный вид. Более того, достаточно решить только одно из уравнений (5.3), (5.4). Второе получается простой заменой исходных параметров. Действительно, правые части этих уравнений переходят одна в другую при замене $\varepsilon \leftrightarrow -\mu$ и $\mathbf{E}_0 \leftrightarrow \mathbf{H}_0$ [29].

Важным случаем является стационарное движение среды, когда скорость ее движения в каждой точке не зависит от времени. Тогда спектр излучения не меняется, т.е. частота рассеянного излучения совпадает с частотой падающего излучения (доплеровский сдвиг частоты отсутствует). Это обстоятельство позволяет свести линейную задачу о рассеянии импульса электромагнитного излучения к рассмотрению рассеяния отдельных плоских монохроматических волн.

Далее мы применим этот результат к случаю падающего излучения в виде плоской монохроматической волны с частотой ω и волновым числом $k = n\omega/c$:

$$\mathbf{E}_0 = \exp(-\mathrm{i}\omega t + \mathrm{i}k\mathbf{rm})(b_{\mathrm{I}}, b_{\mathrm{II}}, 0)\,,$$
$$\mathbf{H}_0 = \left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\right)^{1/2}\exp(-\mathrm{i}\omega t + \mathrm{i}k\mathbf{rm})(b_{\mathrm{I}}, -b_{\mathrm{II}}, 0)\,, \tag{5.7}$$

где **m** — единичный вектор направления падения волны, $b_{\mathrm{I,II}} = |b_{\mathrm{I,II}}|\exp(\mathrm{i}\varDelta_{\mathrm{I,II}})$ — комплексные амплитуды падающего излучения с эллиптической поляризацией, и к конкретным вариантам распределения скорости.

Практически, в связи с большим значением скорости света к этой задаче сводится и случай квазистационар-

ного движения среды, когда за время пробега светом области неоднородности скорости эта скорость существенно не меняется. Мы полагаем, что рассеивающий объект (неоднородность) есть тело вращения с линейной скоростью вращения

$$\mathbf{v} = \begin{cases} [\mathbf{\Omega}\,\mathbf{r}]\,, & r \in V\,, \\ 0\,, & r \notin V\,, \end{cases} \tag{5.8}$$

где V — объем вращающегося тела, $\mathbf{\Omega}$ — угловая скорость вращения.

В настоящем разделе мы рассмотрим рассеяние электромагнитных волн для случаев, когда решение задачи представляется в аналитическом виде. Это задача рассеяния на неоднородностях скорости вращения, размеры которых малы по сравнению с длиной волны λ и которые имеют произвольную осесимметричную форму, и задача рассеяния на неоднородности вращения цилиндрической формы.

Разделим поляризации, представив электрическое и магнитное поля падающей волны в виде

$$\mathbf{E}_0 = b_{\mathrm{I}}\mathbf{E}_{0\mathrm{I}} + b_{\mathrm{II}}\mathbf{E}_{0\mathrm{II}}\,, \qquad \mathbf{H}_0 = b_{\mathrm{I}}\mathbf{H}_{0\mathrm{I}} + b_{\mathrm{II}}\mathbf{H}_{0\mathrm{II}}\,, \tag{5.9}$$

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}_{0\mathrm{I}} = \tilde{\mathbf{E}}_0 \exp\left(-\mathrm{i}\omega t + \mathrm{i}k\mathbf{rm}\right), \\ &\mathbf{H}_{0\mathrm{I}} = -\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{1/2} \tilde{\mathbf{H}}_0 \exp\left(-\mathrm{i}\omega t + \mathrm{i}k\mathbf{rm}\right), \\ &\mathbf{E}_{0\mathrm{II}} = \tilde{\mathbf{H}}_0 \exp\left(-\mathrm{i}\omega t + \mathrm{i}k\mathbf{rm}\right), \\ &\mathbf{H}_{0\mathrm{II}} = \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{1/2} \tilde{\mathbf{E}}_0 \exp\left(-\mathrm{i}\omega t + \mathrm{i}k\mathbf{rm}\right), \end{aligned} \tag{5.10}$$

где $\tilde{\mathbf{E}}_0$, $\tilde{\mathbf{H}}_0$ — постоянные векторы. Из-за линейности задачи общее решение при падении такой волны выглядит совершенно аналогично (5.9):

$$\mathbf{E}_1 = b_{\mathrm{I}}\mathbf{E}_{\mathrm{I}} + b_{\mathrm{II}}\mathbf{E}_{\mathrm{II}}\,, \qquad \mathbf{H}_1 = b_{\mathrm{I}}\mathbf{H}_{\mathrm{I}} + b_{\mathrm{II}}\mathbf{H}_{\mathrm{II}}\,. \tag{5.11}$$

Ввиду симметрии задачи, отмеченной выше, поля $\mathbf{E}_{\mathrm{II}}$ и $\mathbf{H}_{\mathrm{II}}$ связаны с $\mathbf{E}_{\mathrm{I}}$ и $\mathbf{H}_{\mathrm{I}}$ простыми соотношениями

$$\mathbf{E}_{\mathrm{II}} = -\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{1/2} \mathbf{H}_{\mathrm{I}}\,, \qquad \mathbf{H}_{\mathrm{II}} = \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{1/2} \mathbf{E}_{\mathrm{I}}\,. \tag{5.12}$$

Отметим, что векторы в тройках $\mathbf{E}_{\mathrm{I}}$, $\mathbf{H}_{\mathrm{I}}$, $\mathbf{n}$ и $\mathbf{E}_{\mathrm{II}}$, $\mathbf{H}_{\mathrm{II}}$, $\mathbf{n}$ ортогональны между собой.

Введем безразмерную переменную $\mathbf{q} = k\mathbf{r}$. Тогда, исходя из (5.3), (5.4) и (5.8)–(5.10), выражения для рассеянного поля можно представить в форме

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 = S_E \iiint \mathrm{d}\mathbf{q}\, \big\{ &\mathbf{\Omega}_\perp(\tilde{\mathbf{H}}_0\mathbf{q}) - \mathbf{q}_\perp(\tilde{\mathbf{H}}_0\mathbf{\Omega}) + \\ &+ [\mathbf{nq}]\,(\tilde{\mathbf{E}}_0\mathbf{\Omega}) - [\mathbf{n\Omega}]\,(\tilde{\mathbf{E}}_0\mathbf{q}) \big\}\, \Phi(\mathbf{q}) \exp\left\{-\mathrm{i}\mathbf{q}(\mathbf{n}-\mathbf{m})\right\}, \end{aligned} \tag{5.13}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1 = S_H \iiint \mathrm{d}\mathbf{q}\, \big\{ &-\mathbf{\Omega}_\perp(\tilde{\mathbf{E}}_0\mathbf{q}) + \mathbf{q}_\perp(\tilde{\mathbf{E}}_0\mathbf{\Omega}) + \\ &+ [\mathbf{nq}]\,(\tilde{\mathbf{H}}_0\mathbf{\Omega}) - [\mathbf{n\Omega}]\,(\tilde{\mathbf{H}}_0\mathbf{q}) \big\}\, \Phi(\mathbf{q}) \exp\left\{-\mathrm{i}\mathbf{q}(\mathbf{n}-\mathbf{m})\right\}. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Здесь $\mathbf{\Omega}_\perp$, $\mathbf{q}_\perp$ — двумерные векторы, перпендикулярные направлению распространения падающей волны $\mathbf{m}$,

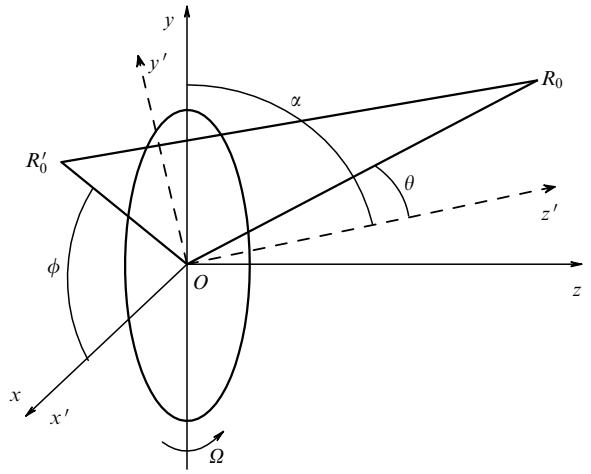

Рис. 1. Системы координат (см. текст).

коэффициенты перед интегралами имеют вид

$$S_E = \frac{n^2-1}{4\pi c n k^2}\, \frac{\exp\left(-\mathrm{i}\omega t + \mathrm{i}kR_0\right)}{R_0}\,, \qquad S_H = \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{1/2} S_E\,, \tag{5.15}$$

а

$$\Phi(\mathbf{q}) = \begin{cases} 1\,, & r \in V\,, \\ 0\,, & r \notin V\,. \end{cases}$$

При непосредственной регистрации рассеянного излучения без его смешения с опорной волной энергетические характеристики квадратичны по угловой скорости (и по параметру v/c) и определяются дифференциальным сечением рассеяния $P(\theta, \phi, \alpha)$, где α — угол между осью вращения и направлением падения электромагнитной волны. Сечение вводится соотношением

$$P(\theta, \phi, \alpha) = \frac{w}{w_0}\, R_0^2\,. \tag{5.16}$$

Здесь w_0 — плотность энергии в падающей волне, w — плотность рассеянной электромагнитной энергии, определяемая выражением

$$w = \frac{\varepsilon_0}{4\pi}\,(\mathrm{Re}\,\mathbf{E}_1)^2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\,(\mathrm{Re}\,\mathbf{H}_1)^2\,. \tag{5.17}$$

Проинтегрировав дифференциальное сечение $P(\theta, \phi, \alpha)$ по телесному углу, получим полное сечение рассеяния σ.

Прежде чем перейти к конкретным расчетам, укажем используемые системы координат. На рисунке 1 система xyz связана с областью вращающейся среды, причем ось y совпадает с осью вращения неоднородности. Система $x'y'z'$ связана с падающей плоской волной. Направление распространения волны совпадает с осью z' и образует с осью вращения y угол α. Оси x и x' совпадают, поэтому оси z' и y' лежат в плоскости zy. Радиус-вектор OR_0, связывающий центр системы координат и точку наблюдения, образует с осью z' угол θ, а его проекция R_0' на плоскость $x'y'$ образует с осью x' угол ϕ.

5.2. Малая область вращающейся среды

Остановимся на случае рассеивающих неоднородностей малых размеров, когда в (5.13), (5.14) $|\mathbf{q}| < 1$. Известно

[11, 30], что в случае малых размеров рассеивающая частица находится в эффективно однородном поле и характеризуется определенными электрическим и магнитным моментами **P** и **M** соответственно. Зависимость их от времени дается множителем $\exp(-\mathrm{i}\omega t)$. Разлагая в (5.13), (5.14) экспоненту под интегралами в ряд Тейлора, видим, что первый неисчезающий член является квадратичным по **q**. Принимая направление оси вращения за ось y и учитывая симметрию решения по x и z для малых рассеивающих неоднородностей, выражения (5.13), (5.14) нетрудно свести к виду [29]

$$\mathbf{E}_1 = K_E\,\mathbf{\Lambda}(\mathbf{m},\mathbf{n},\mathbf{\Omega})\,, \qquad \mathbf{H}_1 = K_H\,\mathbf{M}(\mathbf{m},\mathbf{n},\mathbf{\Omega})\,, \tag{5.18}$$

$$K_{E,H} = -\mathrm{i} f S_{E,H}\,, \qquad f = \int \mathrm{d}\mathbf{q}\, q_x^2 = \frac{\pi}{4}\,k^5 \int \mathrm{d}y\,\rho^4(y)\,. \tag{5.19}$$

Векторные функции в правых частях (5.18) зависят только от угловых характеристик задачи, а в зависимость от размеров и формы входит фактор f.

Как следует из (5.18), угловая зависимость рассеянного поля одна и та же для малых вращающихся неоднородностей произвольной формы. Отличия полей лишь в формфакторе f, определяемом размером неоднородности. Приведем выражение для $\mathbf{\Lambda}$, поскольку **M** получается прямо из него согласно (5.11) и (5.12):

$$\mathbf{\Lambda}(\mathbf{m},\mathbf{n},\mathbf{\Omega}) = 4\Omega\big(A(\mathbf{m},\mathbf{n})\,\mathbf{e}_x + B(\mathbf{m},\mathbf{n})\,\mathbf{e}_y + C(\mathbf{m},\mathbf{n})\,\mathbf{e}_z\big)\,, \tag{5.20}$$

$$A = b_{\mathrm{I}}A_1 + b_{\mathrm{II}}A_2\,, \quad B = b_{\mathrm{I}}B_1 + b_{\mathrm{II}}B_2\,, \quad C = b_{\mathrm{I}}C_1 + b_{\mathrm{II}}C_2\,.$$

Здесь

$$\begin{aligned} A_1 &= 2\gamma^2 n_{x'}\sin\alpha + (1+\sin^2\alpha - n_{y'}\cos\alpha)\,2n_{x'}(n_{z'}-\sin\alpha)\,,\\ A_2 &= \gamma^2(n_{y'}+\cos\alpha)\left(1+2\sin\alpha\,\frac{n_{z'}-\sin\alpha}{\gamma^2}\right)+\\ &\quad + (n_{y'}+\cos\alpha)\big(n_{x'}^2-(n_{z'}-\sin\alpha)^2\big)\,, \end{aligned} \tag{5.21}$$

$$\begin{aligned} B_1 &= 2(n_{z'}-\sin\alpha)(n_{y'}+\cos\alpha)(1-n_{y'}\cos\alpha) + 2n_{y'}\gamma^2\sin\alpha\,,\\ B_2 &= 2n_{x'}(n_{y'}^2-\cos^2\alpha)\,, \end{aligned} \tag{5.22}$$

$$\begin{aligned} C_1 &= 2\gamma^2 n_{z'}\sin\alpha -\\ &\quad -\cos\alpha\,(n_{y'}+\cos\alpha)\big(\gamma^2+2(n_{z'}-\sin\alpha)\sin\alpha\big)-\\ &\quad -(1+\sin^2\alpha - n_{y'}\cos\alpha)\big(n_{x'}^2-(n_{z'}-\sin\alpha)^2\big)\,,\\ C_2 &= 2n_{x'}(n_{z'}-\sin\alpha)(n_{y'}-\cos\alpha)\,. \end{aligned} \tag{5.23}$$

В (5.21)–(5.23) введены проекции единичного вектора направления рассеяния

$$\begin{aligned} n_{x'} &= \sin\theta\cos\phi\,,\\ n_{y'} &= \sin\theta\sin\phi\sin\alpha - \cos\theta\cos\alpha\,,\\ n_{z'} &= \sin\theta\sin\phi\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha\,, \end{aligned} \tag{5.24}$$

а параметр γ связан с ними соотношением

$$\gamma = \big(n_{x'}^2 + (n_{z'}-\sin\alpha)^2\big)^{1/2}\,.$$

В случае падения волны перпендикулярно оси вращения дифференциальные сечения рассеяния на малых неоднородностях имеют вид [31]

$$P_s\left(\theta,\phi,\frac{\pi}{2}\right) = |S|^2 f^2 (1-\cos\theta)^2\sin^2\phi\sin^2\theta\,. \tag{5.25}$$

Максимумы по углу ϕ будут при $\phi = \pi/2, 3\pi/2$, а по углу θ — при $\theta = 2\pi/3$. Аналогично, в случае падения волны вдоль оси вращения ($\alpha = 0$) [32]

$$P_s(\theta,\phi,0) = |S|^2 f^2 \sin^4\theta\,, \tag{5.26}$$

т.е. максимальное рассеяние идет в угол $\theta = \pi/2$. Кроме того, в этом случае сечение не зависит от полярного угла ϕ, а следовательно, разница в рассеянии поляризованного и естественного света будет только в численном коэффициенте.

Приведем также выражения для полных сечений рассеяния:

$$\sigma_s\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{8\pi}{5}\,|S|^2 f^2\,, \qquad \sigma_s(0) = \frac{32\pi}{15}\,|S|^2 f^2\,. \tag{5.27}$$

Полные сечения в (5.27) различаются лишь численным множителем порядка единицы. На рисунке 2 (в двух видах) представлены нормированные дифференциальные сечения $p(\theta,\phi) = P(\theta,\phi)/\sigma$ для малой неоднородности. В отличие от полного сечения σ эти функции не зависят от угловой скорости вращения.

Расчеты показывают, что как и в теории Ми, приближение малых частиц можно использовать до размеров l, определяемых соотношениями $kl < 0{,}5$. Существенным отличием рассеяния на неоднородности скорости малых размеров от рассеяния на малых частицах является его мультипольный характер [15, 21]. Об этом говорит вид зависимости сечений от длины волны падающего излучения (λ^{-6} для неоднородности вместо λ^{-4} для частицы) и от размеров рассеивателя (l^{10} в первом случае и l^6 во втором).

5.3. Конечная область вращающейся среды (аналитика)

Перейдем к рассмотрению задачи рассеяния плоской волны на диэлектрической неоднородности, имеющей форму кругового цилиндра (см. рис. 1) с радиусом основания ρ_0 и высотой $2h$ (ось вращения y), вращающегося с постоянной угловой скоростью Ω в среде с тем же показателем преломления. Будем полагать, что направление падения плоской волны перпендикулярно оси вращения. Выполняя интегрирование в (5.6), в этом случае получаем

$$\mathbf{E}_1 = b_{\mathrm{I}}\mathbf{E}_{\mathrm{I}} + b_{\mathrm{II}}\mathbf{E}_{\mathrm{II}}\,, \tag{5.28}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathrm{I}} &= K_E\big\{-\mathbf{e}_x\cos\phi\sin\phi\sin^2\theta +\\ &\quad + \mathbf{e}_y(1-\cos\theta-\sin^2\phi\sin^2\theta) +\\ &\quad + \mathbf{e}_z\sin\phi\sin\theta(1-\cos\theta)\big\}\,,\\ \mathbf{E}_{\mathrm{II}} &= K_E\big\{-\mathbf{e}_x(1-\cos\theta-\cos^2\phi\sin^2\theta) +\\ &\quad + \mathbf{e}_y\cos\phi\sin\phi\sin^2\theta - \mathbf{e}_z\cos\phi\sin\theta(1-\cos\theta)\big\}\,, \end{aligned} \tag{5.29}$$

$$\begin{aligned} K_E &= -\mathrm{i}\,\frac{n^2-1}{cn}\,\frac{\Omega}{R_0}\,\exp(-\mathrm{i}\omega t + \mathrm{i}kR_0)\times\\ &\quad \times\frac{\rho_0^2 J_2(k\rho_0\gamma)}{\gamma^2}\,\sin(kh\sin\phi\sin\theta)\,,\\ \gamma &= \big((1-\cos\theta)^2 + \cos^2\theta\sin^2\phi\big)^{1/2}\,, \end{aligned} \tag{5.30}$$

где J_2 — функция Бесселя второго порядка.

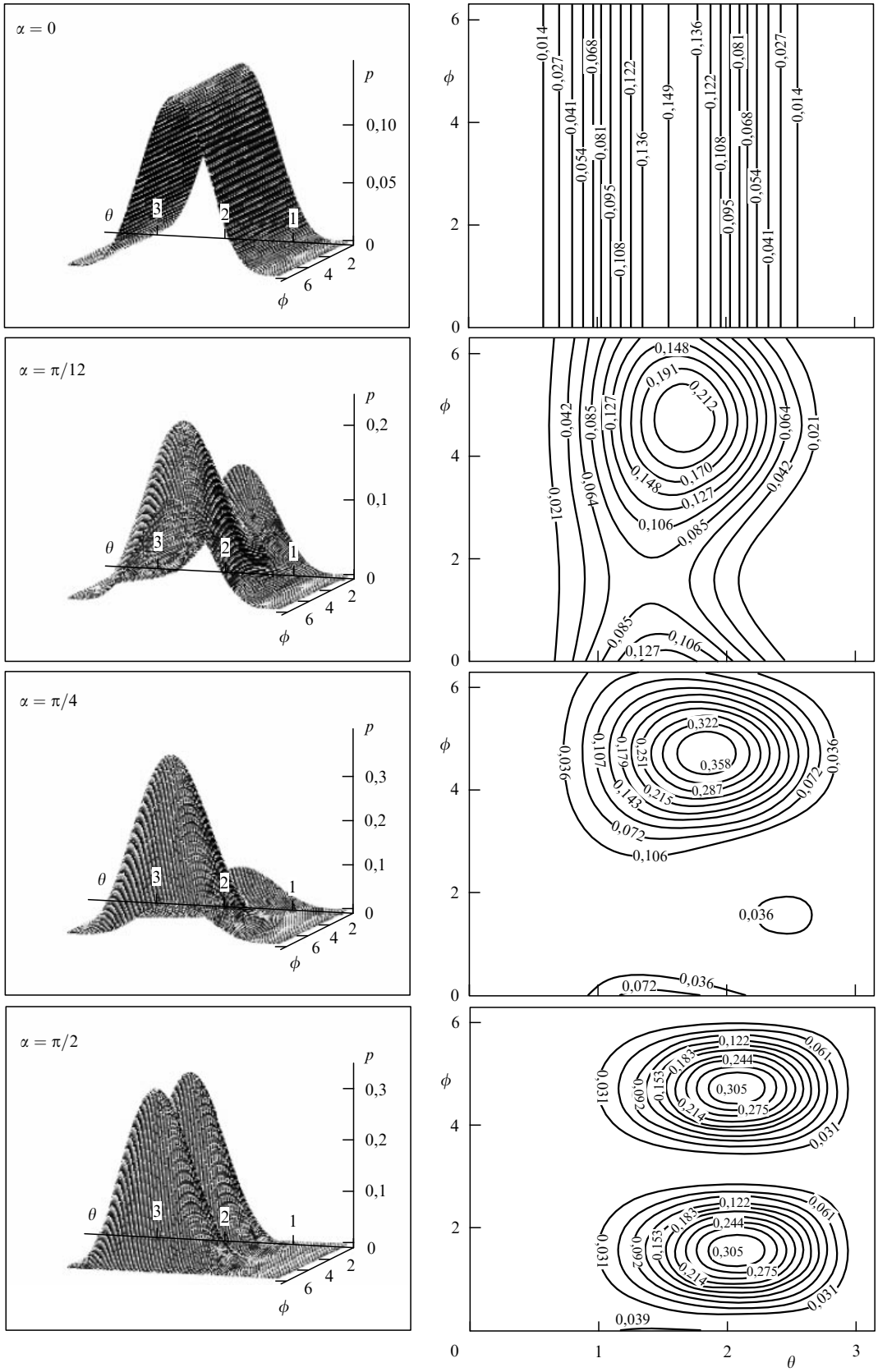

Рис. 2. Нормированные дифференциальные сечения рассеяния на малой неоднородности для разных углов наклона α: слева — пространственные графики; справа — плоские (вид сверху).

Магнитное поле получается из (5.28)–(5.30) согласно (5.12). Обобщение этих результатов на случай наклонного падения плоской волны на цилиндр содержится в [15]. Приведем только значение коэффи-

циента K_E:

$$K_E = -\mathrm{i}\,\frac{n^2-1}{2cn}\,\frac{\Omega}{R_0}\,\exp\left(-\mathrm{i}\omega t + \mathrm{i}kR_0\right)\times \\ \times\frac{\rho_0^2 J_2(k\rho_0\gamma)}{\gamma^2}\,\frac{\sin\left(kh(n_y'-\cos\alpha)\right)}{n_y'-\cos\alpha}\,. \tag{5.31}$$

Угловая зависимость для этого случая описывается точно так же, как и для малых частиц: функциями $\mathbf{\Lambda}(\mathbf{m},\mathbf{n},\mathbf{\Omega})$ и $\mathbf{M}(\mathbf{m},\mathbf{n},\mathbf{\Omega})$ (см. (5.18), (5.20)).

Дифференциальное сечение рассеяния на конечном круговом цилиндре при падении излучения перпендикулярно оси вращения имеет вид [15]

$$P\left(\theta,\phi,\frac{\pi}{2}\right) = \left|K_E\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|^2 \sin^2\left(kh\sin\phi\sin\theta\right)\left(1-\cos\theta\right)^2. \tag{5.32}$$

В случае параллельности волнового вектора падающей волны направлению оси

$$P(\theta,\phi,0) = \left|K_E(0)\right|^2\,\frac{\sin^2\left(kh(1-\cos\theta)\right)}{(1-\cos\theta)^2}\,. \tag{5.33}$$

Проанализируем зависимость дифференциальных сечений (5.32), (5.33) от углов в предельных случаях цилиндра малых размеров и длинного тонкого цилиндра. Для цилиндра малых размеров ($k\rho_0$, $kh \ll 1$) дифференциальное сечение $P(\theta,\phi,\pi/2)$ получается подстановкой в (5.25)–(5.27):

$$f = \frac{\pi}{2}\,(k\rho_0)^4 kh\,. \tag{5.34}$$

Отметим, что для малого шара ($kr_0 \ll 1$) радиуса r_0

$$f = \frac{4\pi}{15}\,(kr_0)^5\,. \tag{5.35}$$

Для вытянутого цилиндра ($kh \gg 1$) квадрат синуса в (5.32) приводит к высокочастотным осцилляциям. Если проследить за их огибающей, заменив квадрат синуса на $1/2$, то зависимость от угла ϕ (только через параметр γ) будет слабой. При малом диаметре цилиндра эта зависимость совсем исчезает. Зависимость от угла θ имеет вид

$$P_{\mathrm{t}}\left(\theta,\phi,\frac{\pi}{2}\right) = \frac{(n^2-1)^2}{128n^2}\,\frac{\Omega^2}{c^2}\,k^4\rho_0^8(1-\cos\theta)^2\,. \tag{5.36}$$

Максимальное значение достигается при $\theta=\pi$. Отметим, что выражение (5.36) справедливо вне малой области углов, где произведение $\sin\phi\sin\theta$ близко к нулю. При малых углах θ дифференциальное сечение пропорционально θ^6, тогда как при $\theta\to\pi$ — лишь $(\theta-\pi)^2$.

Обозначая полное сечение рассеяния для малого и длинного цилиндров через σ_{s} и σ_{t} соответственно, получаем

$$\sigma_{\mathrm{s}}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{(n^2-1)^2}{40n^2}\,\frac{\Omega^2}{c^2}\,\pi k^6\rho_0^8 h^2\,, \\ \sigma_{\mathrm{t}}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{(n^2-1)^2}{96n^2}\,\frac{\Omega^2}{c^2}\,\pi k^4\rho_0^8\,. \tag{5.37}$$

Представляет интерес зависимость дифференциального и полного сечений рассеяния от длины световой волны λ. Из (5.37) видно, что для малого цилиндра сечение $\sigma_{\mathrm{s}} \sim \lambda^{-6}$, тогда как для тонкого длинного цилиндра $\sigma_{\mathrm{t}} \sim \lambda^{-4}$ (как при рэлеевском рассеянии).

В случае, описываемом (5.33), для малых размеров цилиндра

$$P_{\mathrm{s}}(\theta,\phi,0) = \frac{(n^2-1)^2}{64n^2}\,\frac{\Omega^2}{c^2}\,k^6\rho_0^8 h^2\sin^4\theta\,, \tag{5.38}$$

т.е. для малых размеров неоднородностей максимальное рассеяние идет в направлении $\theta=\pi/2$. Для вытянутого цилиндра

$$P_{\mathrm{t}}(\theta,\phi,0) = \frac{(n^2-1)^2}{128n^2}\,\frac{\Omega^2}{c^2}\,k^4\rho_0^8\sin^4\theta\,. \tag{5.39}$$

Полные сечения имеют вид

$$\sigma_{\mathrm{s}}(0) = \frac{(n^2-1)^2}{30n^2}\,\frac{\Omega^2}{c^2}\,\pi k^6\rho_0^8 h^2\,, \\ \sigma_{\mathrm{t}}(0) = \frac{(n^2-1)^2}{60n^2}\,\frac{\Omega^2}{c^2}\,\pi k^4\rho_0^8\,. \tag{5.40}$$

Естественно, что найденная в первом порядке теории возмущений амплитуда рассеянного излучения линейна по угловой скорости вращения тела. Для регистрации такого линейного эффекта следует смешать рассеянное излучение с опорным (нерассеянным) когерентным излучением той же частоты.

Пусть смешение (интерференция) происходит в плоскости $z=Z_0$, а опорное излучение является плоской волной:

$$\mathbf{E}_s = \exp\left(\mathrm{i}kL + \mathrm{i}k\mathbf{q}\boldsymbol{\alpha} - \mathrm{i}\omega t\right)\left(\mathbf{e}_x a_{\mathrm{I}} + \mathbf{e}_y a_{\mathrm{II}}\right). \tag{5.41}$$

Здесь первый член в показателе экспоненты — постоянный набег фазы, второй член учитывает поворот фронта этой волны на малый двумерный угол $\boldsymbol{\alpha}$ с компонентами в декартовой системе координат α_x и α_y, $\mathbf{q}=(x,y)$ — двумерный вектор поперечных координат. Величины a_{I}, a_{II} характеризуют состояние поляризации излучения и представляются в форме

$$a_j = |a_j|\exp\left(\mathrm{i}\delta_j\right), \qquad j=\mathrm{I},\mathrm{II}\,.$$

Тогда интерференционный член имеет вид

$$I_{12} = 2\,\mathrm{Re}\,\langle\mathbf{E}_s\mathbf{E}_1^*\rangle\,, \tag{5.42}$$

где угловые скобки обозначают усреднение по времени за период, много больший периода световых колебаний.

С учетом (5.28)–(5.31) и (5.41) получаем

$$I_{12} = \frac{\Omega\rho_0}{c}\,\frac{\rho_0}{R_0}\,\frac{n^2-1}{n}\,\frac{J_2(k\rho_0\gamma)}{\gamma^2}\,\times \\ \times\sin\left(kh\sin\phi\sin\theta\right)\big\{\cos\phi\sin\phi\sin^2\theta\,\times \\ \times\left[|a_{\mathrm{I}}|\,|b_{\mathrm{I}}|\sin\left(S_{\mathrm{I}}-\Lambda_{\mathrm{I}}\right) - |a_{\mathrm{II}}|\,|b_{\mathrm{II}}|\sin\left(S_{\mathrm{II}}-\Lambda_{\mathrm{II}}\right)\right] + \\ +\left(1-\cos\theta-\sin^2\phi\sin^2\theta\right)\times \\ \times\left[|a_{\mathrm{I}}|\,|b_{\mathrm{II}}|\sin\left(S_{\mathrm{I}}-\Lambda_{\mathrm{II}}\right) - |a_{\mathrm{II}}|\,|b_{\mathrm{I}}|\sin\left(S_{\mathrm{II}}-\Lambda_{\mathrm{I}}\right)\right]\big\}\,. \tag{5.43}$$

$$S_j = kL + k\,\mathbf{q}\boldsymbol{\alpha} + \delta_j\,, \qquad \Lambda_j = kR_0 + \Delta_j\,, \qquad j=\mathrm{I},\,\mathrm{II}\,. \tag{5.44}$$

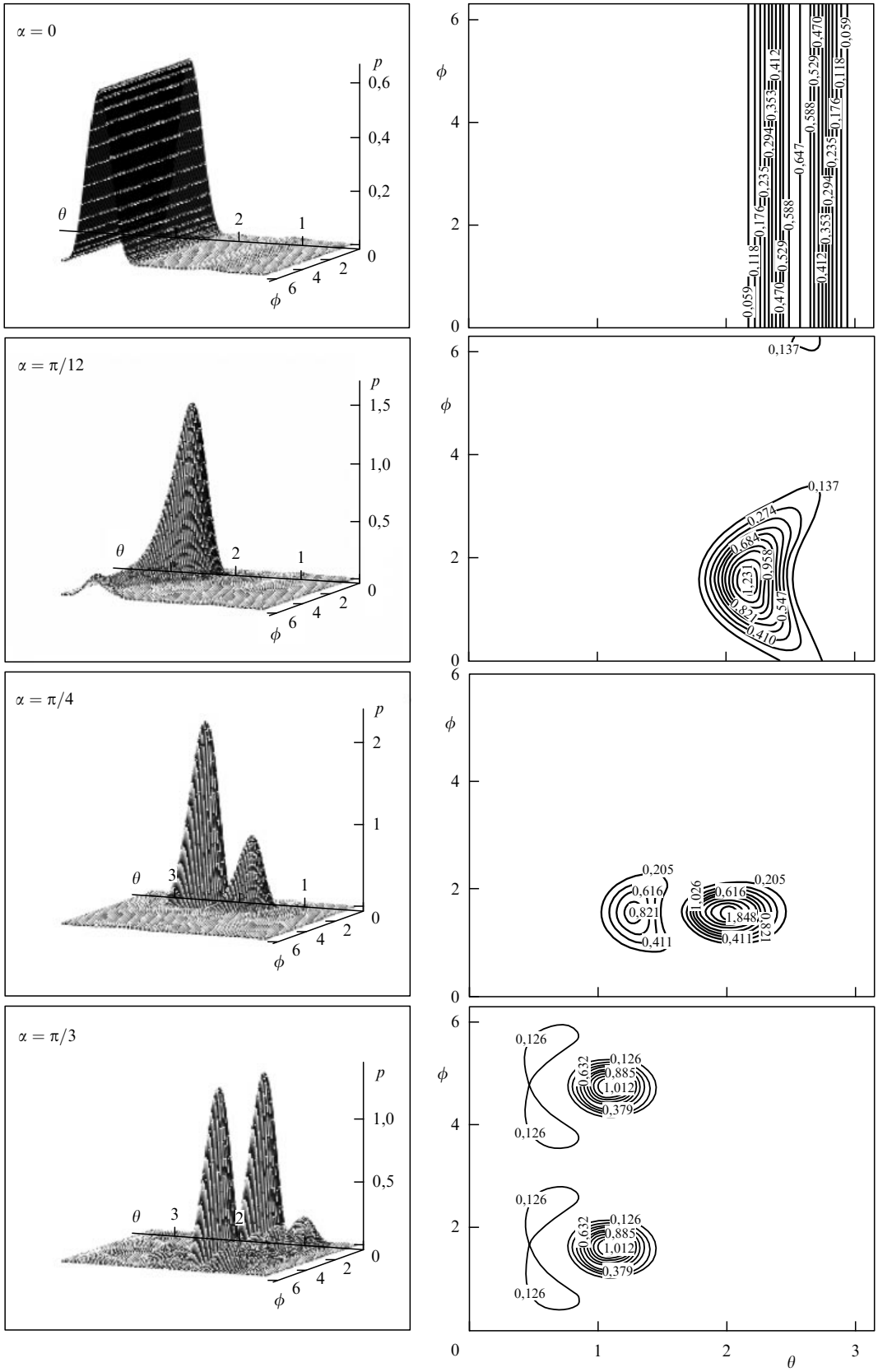

Рис. 3. Нормированные дифференциальные сечения рассеяния на конечном цилиндре для разных углов наклона α: слева — пространственные графики; справа — плоские (вид сверху).

Первый множитель в (5.43) совпадает с отношением линейной скорости вращения на боковой грани цилиндра к скорости света v_c/c, второй — отношение радиуса цилиндра к расстоянию до точки приема, а третий пропорционален коэффициенту увлечения Френеля.

В приосевой области, т.е. при малых углах θ,

$$I_{12} = \frac{\Omega\rho_0}{c}\,\frac{\rho_0}{R_0}\,\frac{n^2-1}{2n}(k\rho_0)^2\theta^2\sin(kh\theta\sin\phi)\times$$
$$\times\left\{\sin 2\phi\left[|a_{\rm I}|\,|b_{\rm I}|\sin(S_{\rm I}-\Lambda_{\rm I})-|a_{\rm II}|\,|b_{\rm II}|\sin(S_{\rm II}-\Lambda_{\rm II})\right]+\right.$$
$$\left.+\cos 2\phi\left[|a_{\rm I}|\,|b_{\rm II}|\sin(S_{\rm I}-\Lambda_{\rm II})-|a_{\rm II}|\,|b_{\rm I}|\sin(S_{\rm II}-\Lambda_{\rm I})\right]\right\}. \tag{5.45}$$

Здесь мы положили, что $kh\theta > 1$. В зоне дифракции Френеля $R_0 \approx k\rho_0^2$ интерференционный член

$$I_{12} \sim k\rho_0\theta^2\,\frac{v_{\rm c}}{c}\,,$$

т.е. существенно определяется отношением скоростей. Простейший вид соотношения (5.43) и (5.45) принимают в случае, когда в падающей на цилиндр и опорной волнах электрический вектор направлен вдоль оси x: $a_{\rm II} = b_{\rm II} = 0$, или вдоль оси y: $a_{\rm I} = b_{\rm I} = 0$.

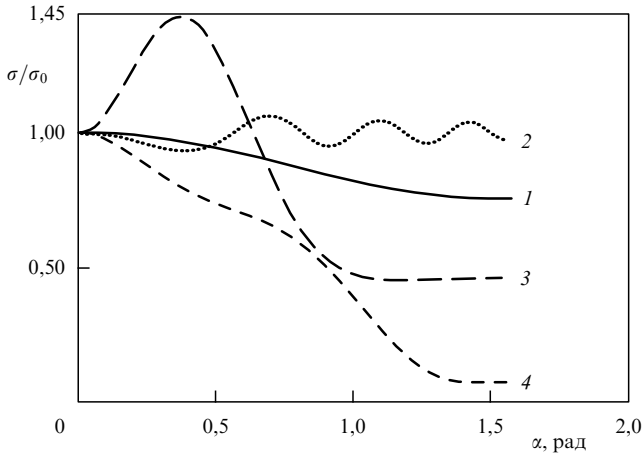

Рис. 4. Зависимость полного сечения рассеяния от угла наклона для малого рассеивателя (кривая *1*) и цилиндров различных размеров (кривая *2* — $k\rho_0 = 0{,}02$, $kh = 10$; кривая *3* — $k\rho_0 = 5$, $kh = 0{,}05$; кривая *4* — $k\rho_0 = 5$, $kh = 5$). $\sigma_0 = \sigma(\alpha = 0)$.

5.4. Конечная область вращающейся среды (численное исследование)

Из полученных выше выражений для полей и сечений рассеяния на цилиндре видно, что рассеяние на конечных неоднородностях скорости отличается от рассеяния на малых частицах как видом угловой зависимости, так и видом зависимости от длины волны излучения λ. Однако решение задачи рассеяния на неоднородностях других типов (например, конечный шар) не удается получить в явном виде. Поэтому исследование дифференциального сечения для этого случая проведем численно [15, 31, 32].

На рисунке 3 (в двух видах) приведены нормированные дифференциальные сечения $p(\theta,\phi) = P(\theta,\phi)/\sigma$ для вращающегося цилиндра конечных размеров. Для вычисления σ угловая скорость Ω во всех расчетах бралась разной, постоянной была линейная скорость вращения на границе ($v_{\rm c} = 1$ см с$^{-1} \ll v_0$), что позволяет не учитывать динамооптические эффекты в воде. Если в качестве среды берется стекло, то скорость вращения может достигать 10 м с$^{-1}$ [15], что значительно увеличивает сечение рассеяния.

Приведенные на рис. 3 расчеты относятся к цилиндру с размерами $k\rho_0 = 5$, $kh = 5$. Полное сечение рассеяния достигает значения $\sigma(0) = 4{,}653 \times 10^{-30}$ см^2. Увеличение скорости вращения в 1000 раз увеличивает это сечение на шесть порядков. В [15] отмечалось, сколь сильно искажается поле рассеяния практически на "нити" ($\rho_0 \ll h$) и какую большую роль играет в этом случае дифракция.

На рисунке 4 представлены зависимости полных сечений рассеяния от угла падения для случаев малых неоднородностей и цилиндров различных размеров [32]. Интересно, что полное сечение рассеяния как для малого рассеивателя, так и для "нити" очень слабо зависят от угла наклона оси вращения к направлению падения. Однако в последнем случае есть слабые осцилляции сечения (кривые *1* и *2*). При этом полное сечение также значительно меняется (масштаб изменений почти в три раза), что и видно из кривой *3*. Неожиданный результат (кривая *4*) получился в случае равенства диаметра основания ($2\rho_0$) и высоты цилиндра ($2h$). Сечение при изменении α от 0 до $\pi/2$ уменьшилось больше, чем на порядок. Это показывает, что при рассеянии на большом количестве рассеивателей усреднение по углам наклона может оказаться существенным.

Для сферических неоднородностей имеется только один геометрический параметр — радиус шара r_0. Дифференциальные сечения для шара с $kr_0 = 5$ приведены на рис. 5, причем они не нормированы на полное сечение. Видно, что рассеяние в заднюю полусферу при $\alpha = 0$ сменяется с ростом α на рассеяние преимущественно в переднюю полусферу, при этом все максимумы расположены симметрично вдоль линии $\phi = \pi$. Сечение рассеяния при этом уменьшается в два раза: от $\sigma(0) = 4{,}11 \times 10^{-28}$ см^2 до $\sigma(\pi/2) = 2{,}45 \times 10^{-28}$ см^2. Отметим также, что сечение рассеяния на шаре на два порядка больше, чем на цилиндре примерно того же размера.

6. Рентгеновское излучение в движущихся средах

Выше мы рассмотрели рассеяние света на неоднородностях скорости движения непрерывной среды, исходя из макроскопических уравнений Максвелла и материальных соотношений Минковского. Усреднение микроскопических уравнений по бесконечно малому объему неприменимо для коротковолнового (рентгеновского) излучения, длина волны которого порядка межатомных расстояний. В этом разделе мы обсудим распространение и дифракцию коротковолнового (рентгеновского) излучения в (неравномерно) движущемся кристалле, следуя общему методу [11].

Необходимо исходить из микроскопических уравнений Максвелла

$$\operatorname{div}\mathbf{H}_{\rm m} = 0\,,\qquad \operatorname{rot}\mathbf{E}_{\rm m} = -\frac{1}{c}\,\frac{\partial\mathbf{H}_{\rm m}}{\partial t}\,,$$
$$\operatorname{div}\mathbf{E}_{\rm m} = 0\,,\qquad \operatorname{rot}\mathbf{H}_{\rm m} = \frac{1}{c}\,\frac{\partial\mathbf{E}_{\rm m}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}_{\rm m} \tag{6.1}$$

для напряженностей электрического и магнитного микрополей $\mathbf{E}_{\rm m}$ и $\mathbf{H}_{\rm m}$ и плотности тока $\mathbf{j}_{\rm m}$, создаваемого

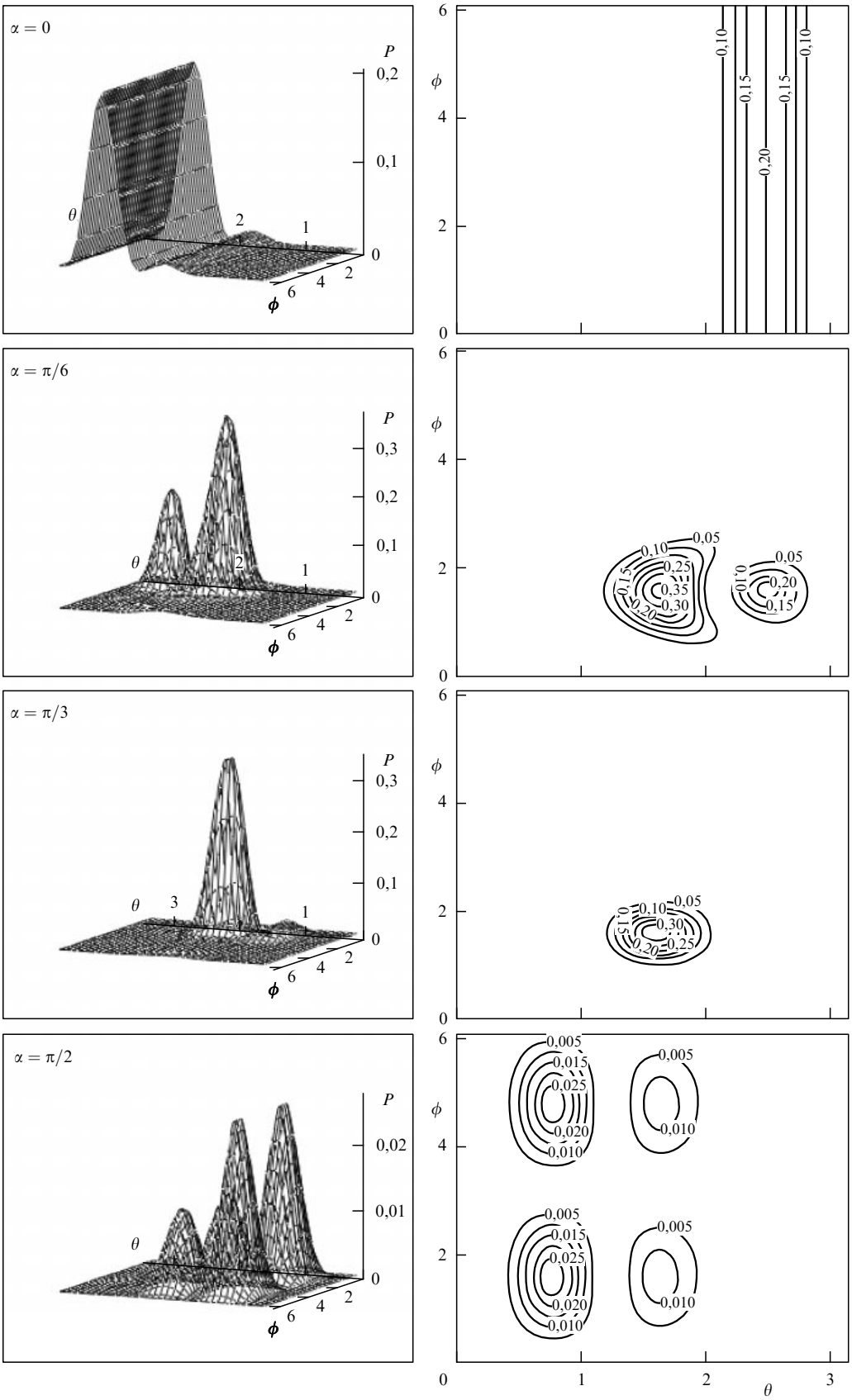

Рис. 5. Дифференциальное сечение рассеяния на шаре для разных углов наклона α. Размер шара $kr_0 = 5$. $\sigma(0) = 4{,}11 \times 10^{-28}$ см^2, $\sigma(\pi/2) = 2{,}45 \times 10^{-28}$ см^2.

вызванным микрополями движением электронов (в дальнейшем индексы у полей и тока опускаются). Пусть на кристалл падает монохроматическая плоская волна, так что напряженности поля в лабораторной системе

имеют вид

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-\mathrm{i}\omega t + \mathrm{i}\mathbf{kr}), \qquad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \exp(-\mathrm{i}\omega t + \mathrm{i}\mathbf{kr}), \tag{6.2}$$

где векторы $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{H}_0$ не зависят ни от координат, ни от времени. Локальная (и мгновенная) скорость кристалла в лабораторной системе координат является медленно меняющейся функцией координат и времени: $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$. Кристалл рассматривается как абсолютно твердое тело, что оправдано при его достаточно малых размерах. Величины в системе координат, жестко связанной с кристаллом, будем обозначать штрихованными величинами.

В пренебрежении членами, квадратичными по скорости движения и напряженностям полей, уравнение движения электрона имеет вид

$$m\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}'}{\mathrm{d}t'} = e\mathbf{E}', \tag{6.3}$$

где m — масса, e — заряд и $\mathbf{v}'$ — скорость электрона. В системе координат, связанной с кристаллом, на электрон воздействует поле

$$\mathbf{E}' = \left(\mathbf{E}_0 + \frac{1}{c}\,[\mathbf{u}\mathbf{H}_0]\right) \exp(-\mathrm{i}\omega' t' + \mathrm{i}\mathbf{k}'\mathbf{r}'), \tag{6.4}$$

где

$$\omega' = \omega - \mathbf{uk}, \qquad \mathbf{k}' = \mathbf{k} - \frac{\omega}{c}\,\frac{\mathbf{u}}{c}.$$

Установившееся решение (6.3) имеет вид

$$\mathbf{v}' = \mathrm{i}\,\frac{e}{m\omega'^2}\left(\mathbf{E}_0 + \frac{1}{c}\,[\mathbf{u}\mathbf{H}_0]\right) \exp(-\mathrm{i}\omega' t' + \mathrm{i}\mathbf{k}'\mathbf{r}'). \tag{6.5}$$

По предположению, вызванные полем смещения электронов малы, поэтому скорость $\mathbf{u}$ можно считать практически постоянной. Выражение для плотности тока $\mathbf{j}$, создаваемого электронами с плотностью n, представим в форме

$$\mathbf{j}' = e\,n(\mathbf{r}')\,\mathbf{v}'. \tag{6.6}$$

Чтобы решить систему (6.1), необходимо перейти в (6.6) в лабораторную (неподвижную) систему координат. Согласно [9] в этой системе, в пренебрежении квадратичными по скорости членами, выражение для тока не меняется:

$$\mathbf{j} = \mathrm{i}\,\frac{e\,n(\mathbf{r}, t)}{m\omega^2}\left(\mathbf{E}_0 + \frac{1}{c}\,[\mathbf{u}\mathbf{H}_0]\right) \exp(-\mathrm{i}\omega t + \mathrm{i}\mathbf{kr}). \tag{6.7}$$

Мы специально выделили (не задавая явного вида) зависимость плотности электронов от времени и координат, поскольку все другие величины, в том числе и $\mathbf{u}$, возвращаются к своим прежним значениям в лабораторной системе.

Из (6.1) стандартным путем [11, 33] нетрудно получить уравнение для определения рассеянного поля:

$$\Delta\mathbf{E}_1 - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2\mathbf{E}_1}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c}\,\frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t}. \tag{6.8}$$

Здесь и поля, и координаты относятся к лабораторной (неподвижной) системе координат.

Решение (6.8) имеет вид

$$\mathbf{E}_1 = -\int \frac{1}{R}\,\mathbf{f}_E\left(t - \frac{R}{c}\right)\mathrm{d}V, \tag{6.9}$$

где

$$\mathbf{f}_E(t) = \frac{1}{c}\,\frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t},$$

интегрирование ведется по объему кристалла, R — расстояние от элементарного объема $\mathrm{d}V$ до точки, в которой ищутся поля (см. раздел 5).

В дальней зоне (6.9) можно записать

$$\mathbf{E}_1 = -\frac{1}{R_0}\int \mathbf{f}_E\left(t - \frac{R_0}{c} + \frac{\mathbf{nr}}{c}\right)\mathrm{d}V. \tag{6.10}$$

Поскольку частота изменения плотности и скорости движения много меньше ω, можно положить

$$\frac{1}{c}\,\frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t} \cong -\mathrm{i}\,\frac{\omega}{c}\,\mathbf{j}.$$

В принятой модели плотность электронов и ток в системе координат, связанной с кристаллом, не зависят от времени и решение можно представить в виде

$$\mathbf{E}_1 = \frac{e^2}{m\omega^2}\,\frac{1}{R_0}\exp(-\mathrm{i}\omega t + \mathrm{i}kR_0)\times \int \mathrm{d}\mathbf{r}\,n(\mathbf{r}, t)\exp\{\mathrm{i}\mathbf{r}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_s)\}\times \left\{\left[\mathbf{k}_s\left[\mathbf{k}_s\left(\mathbf{E}_0 + \frac{1}{c}\,[\mathbf{u}\mathbf{H}_0]\right)\right]\right]\right\}. \tag{6.11}$$

Здесь $\mathbf{k}_s$ — волновое число рассеянного излучения,

$$\mathbf{H}_0 = -\left[\frac{\mathbf{k}}{k}\,\mathbf{E}_0\right] = -[\mathbf{m}\mathbf{E}_0],$$

где $\mathbf{m}$ — единичный вектор направления падения волны.

Вводя единичный вектор в направлении рассеяния $\mathbf{n}$ (см. (5.7)), перепишем (6.11) в форме

$$\mathbf{E}_1 = \frac{e^2 k_s^2}{m\omega^2}\,\frac{1}{R_0}\exp(-\mathrm{i}\omega t + \mathrm{i}kR_0)\times \int \mathrm{d}\mathbf{r}\,n(\mathbf{r}, t)\exp\{-\mathrm{i}\mathbf{r}(\mathbf{k}_s - \mathbf{k})\}\times \left\{\left(1 - \frac{\mathbf{um}}{c}\right)[\mathbf{n}\,[\mathbf{n}\mathbf{E}_0]] + \frac{\mathbf{uE}_0}{c}\,[\mathbf{n}\,[\mathbf{nm}]]\right\}. \tag{6.12}$$

Отметим, что рассеянное излучение уже не является монохроматическим. Это связано с пространственной неоднородностью плотности электронов в системе координат, связанной с кристаллом, и соответствующей нестационарностью распределения в неподвижной системе координат.

Действительно, при движении кристалла, включая его повороты, изменяется взаимная ориентация волнового вектора падающего излучения и кристаллографических осей. В частности, при вращении кристалла с угловой скоростью Ω должно появляться рассеянное излучение с частотами $\omega \pm \Omega$. В пренебрежении флуктуациями плотность электронов в кристалле может быть

разложена в ряд Фурье по всем векторам обратной решетки $\mathbf{b}'$ [11, 34, 35], направление которых определяется ее трансляционными периодами [35]:

$$n(\mathbf{r}') = \sum_{\mathbf{b}'} n_{\mathbf{b}'} \exp\left(\mathrm{i}2\pi\,\mathbf{r}'\mathbf{b}'\right). \tag{6.13}$$

Дальнейший расчет требует задания вида движения кристалла, т.е. закона преобразования координат при переходе от движущейся с кристаллом к лабораторной системе. В квазистатическом приближении время играет роль параметра, определяющего угол падения волны на эффективно неподвижный кристалл. В соответствии с [11] получаем, что положение угловых максимумов дифрагированного излучения определяется выражением (уравнением Лауэ)

$$\mathbf{k}_s - \mathbf{k} = 2\pi\,\mathbf{b}'(t). \tag{6.14}$$

Естественно, что их положение меняется со временем. Этот случай отвечает методу Брэгга, используемому в рентгеноструктурном анализе для определения постоянных решетки, или методу качания и вращения. В общем случае соотношение (6.12) описывает дополнительные релятивистские поправки.

7. Заключение

Остановимся на величинах исследованных эффектов. Начнем с оценки геометрооптических эффектов, возникающих при прохождении излучения через движущуюся среду. Первый из них — это отклонение траектории луча от прямолинейной при прохождении слоя движущейся среды толщины z_0. По порядку величины модуль угла отклонения

$$\alpha = \frac{n^2-1}{n}\,\frac{|\mathbf{v}|}{c}\,, \tag{7.1}$$

а сдвиг поперечных координат луча $\delta \sim \alpha z_0$.

В разделе 1 и в работе [15] приведены оценки скоростей движения среды, при которых релятивистские эффекты превалируют над динамооптическими. Для воды критическая скорость v_0 порядка нескольких сантиметров в секунду, для стекол величина v_0 может достигать 10 м с$^{-1}$. Тогда для воды (показатель преломления $n = 1{,}34$) угол отклонения $\alpha \approx 10^{-10}$, для стекла ($n = 1{,}5$) угол $\alpha \approx 3 \times 10^{-8}$. Сдвиги лучей могут стать заметными для достаточно протяженных трасс.

Вторым эффектом служит изменение поляризационных характеристик, описываемое соотношениями (3.37)–(3.39). Учитывая малость искривления лучей, можно заменить интегрирование в (3.38) на интегрирование вдоль оси z, т.е. $\mathrm{d}s \cong \mathrm{d}z$ (параксиальное приближение [23]). Если рассматривается среда, вращающаяся вокруг направления распространения света с угловой скоростью Ω, то угол поворота

$$\theta = \frac{n^2-1}{n}\,\frac{\Omega z_0}{c} = \alpha\left(\frac{z_0}{r_0}\right), \tag{7.2}$$

где z_0 — толщина слоя среды, r_0 — удаление луча от оси вращения.

Из (7.2) видно, что угол поворота вектора поляризации может значительно превосходить угол отклонения луча α. Если толщина слоя z_0 в сто раз больше, чем r_0, то угол поворота в воде $\theta \approx 10^{-8}$, для стекла угол θ достигает 10^{-6}. Наблюдение таких поворотов вполне реально ввиду высокой точности поляризационных измерений. Их учет может стать необходимым в схемах дальней оптической связи. Реально также использование этих эффектов для диагностики распределения скорости движения жидкостей и, возможно, газов.

В разделе 4 показано, что фокусное расстояние эквивалентной линзы, возникающей за счет отличия профиля скорости течения от прямолинейного, для параметров установки Физо имеет величину, доступную для экспериментального определения. Таким образом, при пропускании светового пучка через трубу с водой, текущей во встречном направлении, можно получить волноводное распространение света, тогда как при попутном течении пучок света будет расширяться. Достижение волноводного распространения и фокусировки за счет эффекта Френеля–Физо в оптическом диапазоне облегчается, если использовать прозрачную жидкость с бóльшим показателем преломления, чем у воды. Например, для длины волны 10 мкм прозрачным является жидкий ксенон при давлении 40 атм.

Из приведенного рассмотрения следует возможность реализации невзаимных элементов, которые ранее в лазерной технике строились преимущественно на основе эффекта Фарадея в магнитооптических материалах [24]. Применение таких невзаимных элементов способно обеспечить, например, надежную одностороннюю генерацию кольцевых лазеров. Рассмотренные релятивистские эффекты могут быть существенными и в случае газодинамических лазеров.

Что касается рассеяния на неоднородностях скорости, то сечения рассеяния малы. Однако при размерах неоднородностей порядка нескольких длин волн они сопоставимы с сечением комбинационного рассеяния. Следует также отметить, что при нарушении ламинарного течения жидкости возникает область нестабильности (флуктуации) [18, 36], в которой рассеяние света хоть и мало, но доступно наблюдению. Если даже оно и превосходит рассеяние на вращающихся неоднородностях, то изменения, вносимые последними в вид угловой зависимости сечения, могут оказаться существенными. Развитие техники прецизионных исследований, связанной с лазерами [16, 17], позволяет надеяться на возможность надежного наблюдения релятивистских эффектов. В частности, в кольцевом лазере нетрудно диагностировать невзаимную линзу, так как при ее наличии можно добиться даже устойчивости генерации только в одном направлении распространения.

Скажем несколько слов об акустических аналогах рассмотренных выше эффектов. В [37] показано, что в однородной движущейся среде возможно волноводное распространение звуковых колебаний при условии неоднородности скорости движения среды. Существенным признаком вклада этого механизма (по сравнению со стандартным механизмом волноводного распространения) является различие условий распространения звука в противоположных направлениях. Эта невзаимность могла бы использоваться для развязки мощных звуковых излучателей от воздействия отраженного излучения. Другой аналог — полученное в [38] рассеяние акустической волны на неоднородностях скорости движения среды. Проведенные в этой работе оценки свидетель-

ствуют о реальности акустической диагностики неоднородностей гидродинамической скорости.

Таким образом, учет неоднородности скорости движения среды приводит к широкому кругу электродинамических релятивистских эффектов первого порядка. Их теория достаточно полно описывается макроскопическими уравнениями Максвелла и Минковского. В то же время представляется необходимой постановка опытов в этой области как ввиду недостаточности экспериментального подтверждения электродинамики движущихся сред, так и из-за возможности приборных приложений, включая недоплеровские методы детектирования скорости подводных течений.

Авторы благодарны Ал.С. Киселеву и Ан.С. Киселеву за помощь в расчетах и оформлении рисунков. Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 05-02-16342).

Список литературы

1. Einstein A *Ann. Phys.* (Leipzig) **17** 891 (1905) [Эйнштейн А *Собрание научных трудов* Т. 1 (М.: Наука, 1965) с. 7]
2. Вуд Р *Физическая оптика* (М.: ОНТИ, 1936)
3. Minkowski H *Math. Ann.* **68** 472 (1910); Born M *Math. Ann.* **68** 526 (1910)
4. Черенков П А *ДАН СССР* **2** 451 (1934)
5. Вавилов С И *ДАН СССР* **2** 457 (1934)
6. Гинзбург В Л, Франк И М *ЖЭТФ* **16** 15 (1946)
7. Болотовский Б М, Столяров С Н *УФН* **114** 569 (1974)
8. Столяров С Н, в сб. *Эйнштейновский сборник 1975 – 1976* (Под ред. В Л Гинзбурга) (М.: Наука, 1978) с. 152
9. Паули В *Теория относительности* (М.: Наука, 1983)
10. Тамм И Е *Основы теории электричества* (М.: Наука, 1989)
11. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Электродинамика сплошных сред* (М.: Физматлит, 2001)
12. Fermi E *Rend. Accad. Lincei* **32** 115 (1924)
13. Van Bladel J *Relativity and Engineering* (Berlin: Springer-Verlag, 1984)
14. Розанов Н Н, Сочилин Г Б, Данилов О Б *Оптика и спектроск.* **95** 908 (2003)
15. Розанов Н Н, Сочилин Г Б *Оптика и спектроск.* **94** 624 (2003)
16. Кравцов Н В, Ларионцев Е Г *Изв. РАН. Сер. физ.* **60** 188 (1996)
17. Кравцов Н В, Кравцов Н Н *Квантовая электрон.* **27** 98 (1999)
18. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Гидродинамика* (М.: Наука, 1988)
19. Розанов Н Н, Сочилин Г Б *ЖТФ* **75** (10) 115 (2005)
20. Розанов Н Н, Сочилин Г Б *Оптика и спектроск.* **98** 486 (2005)
21. Борн М, Вольф Э *Основы оптики* (М.: Наука, 1973)
22. Шерклифф У *Поляризованный свет* (М.: Мир, 1965)
23. Маркузе Д *Оптические волноводы* (М.: Мир, 1974)
24. *Справочник по лазерам* Т. 2 (Под ред. А М Прохорова) (М.: Советское радио, 1978)
25. Сена Л А *Единицы физических величин и их размерности* 3-е изд. (М.: Наука, 1988)
26. Иванов А П *Физические основы гидрооптики* (Минск: Наука и техника, 1975)
27. Розанов Н Н *Оптика и спектроск.* **95** 911 (2003)
28. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Наука, 1988)
29. Rosanov N N, Sochilin G B, in *Proc. of the II Intern. Conf.* "*Current Problems in Optics of Natural Waters*", *8 – 12 September 2003, St. Petersburg, Russia* (Eds I Levin, G Gilbert) (St. Petersburg, 2003) p. 332
30. Исимару А *Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах* Т. 1 *Однократное рассеяние и теория переноса* (М.: Мир, 1981)
31. Киселев Ал С, Киселев Ан С, Розанов Н Н, Сочилин Г Б *Изв. РАН. Сер. физ.* **69** 1139 (2005)
32. Киселев Ал С, Киселев Ан С, Розанов Н Н, Сочилин Г Б *Оптика и спектроск.* (в печати)
33. Иверонова В И, Ревкевич Г П *Теория рассеяния рентгеновских лучей* (М.: Изд-во МГУ, 1972)
34. Фок В А *Теория пространства, времени и тяготения* (М.: ГИТТЛ, 1955)
35. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Статистическая физика* (М.: Наука, 1964)
36. Уленбек Г *УФН* **103** 275 (1971)
37. Розанов Н Н, Сочилин Г Б *Письма в ЖТФ* **30** (11) 85 (2004)
38. Розанов Н Н, Сочилин Г Б *Письма в ЖТФ* **30** (16) 90 (2004)

First-order relativistic effects in the electrodynamics of media with a nonuniform velocity distribution

N.N. Rozanov, G.B. Sochilin
All-Russian Scientific Center "S.I. Vavilov State Optical Institute", Research Institute for Laser Physics, Birzhevaya liniya 12, 199034 St.-Petersburg, Russian Federation
Tel. (*7-812*) *328-10 93*
E-mail: *nrosanov@yahoo.com*, *goga.ilph@yahoo.com*

A systematic theory of first-order relativistic effects in electrodynamic media with a nonuniform velocity distribution is presented. A geometrical optics approach is developed and used to calculate the bending of rays and the polarization change of radiation propagating through a continuous medium with a nonuniform velocity distribution. Nonreciprocal (i.e., propagation direction dependent) waveguides and lenses in media with a transversely nonuniform velocity distribution are considered. Radiation scattering (diffraction) on localized velocity nonuniformities is studied. Special propagation features of short-wave (X-ray) radiation in a moving medium are discussed, and experimental prospects are reviewed.

PACS numbers: **03.30.+p**, 03.50.De, **41.20.–q**, **42.25.–p**

Bibliography — 38 references *Received 10 October 2005*

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **176** (4) 421 – 439 (2006) *Physics – Uspekhi* **49** (4) (2006)