

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Хаотическая адвекция в океане

К.В. Кошель, С.В. Пранц

С точки зрения теории динамических систем рассматривается проблема хаотической адвекции пассивной примеси в океане и ее топологические, динамические и фрактальные свойства. Излагаются аналитические и численные результаты исследования лагранжева транспорта и перемешивания в кинематических и динамических моделях хаотической адвекции в меандрирующих струйных течениях, в топографических вихревых структурах баротропного океана и в двухслойном бароклинном океане. Описаны лабораторные эксперименты в гидродинамических потоках во вращающихся танках, имитирующие геофизическую хаотическую адвекцию. Обсуждаются перспективы применения теории динамических систем в физической океанографии.

PACS numbers: 05.45. – a, 47.52. + j, 92.10. – c

Содержание

1. Введение (1177).
 2. Транспорт, перемешивание и адвекция (1178).
2.1. Хаотическая адвекция. 2.2. Стохастический слой.
 3. Прототипная кинематическая модель хаотической адвекции (1181).
3.1. Инвариантные множества потока. 3.2. Геометрия хаотического рассеяния и фрактальная динамика.
 4. Кинематические модели хаотической адвекции в океане (1185).
 5. Динамические модели хаотической адвекции в океане (1189).
5.1. Фоновые течения. 5.2. Полукруглый бассейн. 5.3. Топографические вихри. 5.4. Модель с береговой чертой. 5.5. Двухслойная модель. 5.6. Оптимальная частота.
 6. Лабораторные эксперименты по моделированию геофизической хаотической адвекции (1201).
6.1. Течение с круговоротами. 6.2. Геострофическая струя с волнами Россби.
 7. Заключение (1203).
- Список литературы (1205).

1. Введение

В последнее десятилетие методы теории динамических систем стали активно применяться в физической океанографии для описания транспорта и перемешивания водных масс (а вместе с ними солёности, тепла, органического вещества, загрязнений и других трассеров) когерентными структурами в океане [1–4]. Когерентными

структурами называются устойчивые мезо- и субмезомасштабные образования, существующие на временах, значительно превышающих все эйлеровы временные характеристики потока. Современные средства визуализации океанских потоков с помощью буев нейтральной плавучести, дрейфтеров и радаров позволяют уверенно выявлять различные эйлеровы когерентные структуры — от планетарных круговоротов, фронтов, основных струйных течений и мезомасштабных вихрей до более мелких вихрей, струй и филаментов. На рисунке 1 приведено изображение Гольфстрима, полученное 17 апреля 1989 г. с помощью радиометра высокого разрешения спутника NOAA (National Oceanic and Atmospheric Administration) США [5]. Сильное меандрирующее струйное течение отделяет теплые солёные воды из Саргассова моря от холодных распреснённых вод континентального шельфа. Отчетливо видна петля меандра.

Настоящий обзор посвящен транспорту, перемешиванию и хаотической адвекции в геофизических потоках. Если адвектируемые частицы достаточно быстро приобретают скорость потока (т.е. инерционные эффекты пренебрежимо малы) и не оказывают существенного влияния на его свойства, то адвекция называется пассивной, а сами частицы — пассивными скалярами (примесями, трассерами или лагранжевыми частицами). Уравнение движения такой частицы очень простое:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t), \quad (1)$$

где $\mathbf{r} = (x, y, z)$ и $\mathbf{v} = (u, v, w)$ — радиус-вектор и скорость частицы в точке с координатами (x, y, z) . Эйлерово поле скоростей предполагается известным или в результате решения уравнений динамики жидкости (динамический подход), или благодаря каким-то кинематическим соображениям, или в результате измерений. Динамика трассеров описывается в нетривиальных случаях системой нелинейных дифференциальных уравнений (1) с полностью детерминированной правой частью (эйлерово

К.В. Кошель, С.В. Пранц. Тихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичева ДВО РАН,
690041 Владивосток, ул. Балтийская 43, Российская Федерация
Тел. (4232) 312-860, (4232) 316-419, (4232) 312-602
Факс (4232) 312-573
E-mail: kvkoshel@poi.dvo.ru, prants@poi.dvo.ru

Статья поступила 17 февраля 2006 г.

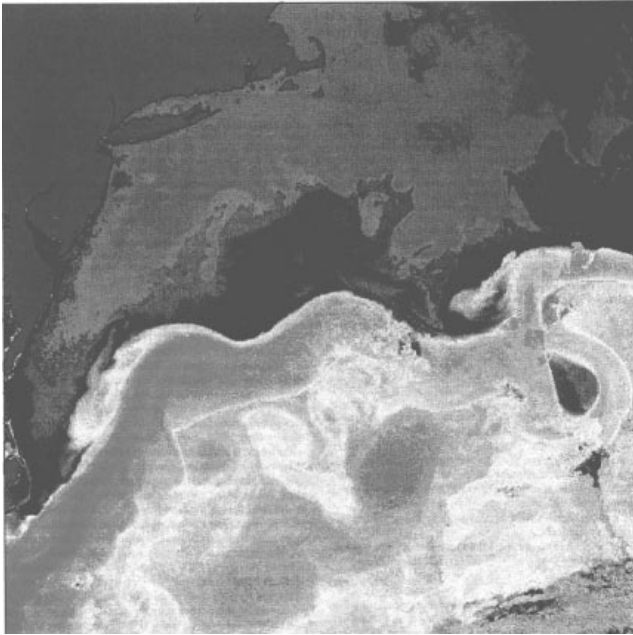


Рис. 1. Спутниковый снимок Гольфстрима от 17 апреля 1989 г. Данные радиометра высокого разрешения NOAA.

поле скоростей регулярно), фазовое пространство которой совпадает с физическим пространством адвектируемых частиц. Как хорошо известно из теории динамических систем, решения таких уравнений могут быть хаотическими в смысле экспоненциальной чувствительности к малым изменениям начальных условий и/или параметров. Динамический хаос не является экзотикой, он возникает даже в простых системах и наблюдается в многочисленных лабораторных экспериментах. В теории нелинейных динамических систем (по крайней мере маломерных) хорошо изучены геометрические структуры, называемые инвариантными многообразиями, которые и определяют главным образом движение в фазовом пространстве. К таковым относятся стационарные точки, различные аттракторы, в том числе странные, инвариантные торы, кантор-торы, устойчивые и неустойчивые многообразия неустойчивых инвариантных множеств и др. (см. обширную библиографию по теории хаоса в динамических системах, например [6–8]). В гидродинамике такие когерентные структуры естественно назвать лагранжевыми. Лагранжевы структуры определяют глобальное перемешивание в жидкости. В реальной жидкости вклад в общую картину перемешивания вносят также молекулярная диффузия и разномасштабная турбулентность. Лагранжевы структуры состоят из жидких элементов и поэтому не видны на картах нестационарных течений, измеренных тем или иным способом. В лабораторных экспериментах их можно визуализировать с помощью красителя. В океане некоторые сведения о них можно, в принципе, получить с помощью дрейфтеров и буев нейтральной плавучести. Теория динамических систем может подсказать, где и когда следует запускать буи, чтобы получить максимум существенной информации о потоке при минимальном количестве буйев.

Основная задача теоретической физической океанографии — моделирование эйлерова поля скоростей, как правило с помощью численного интегрирования более

или менее сложных динамически согласованных моделей. В нетривиальных моделях морских бассейнов и в реальности поле скоростей изменчиво в широких пространственно-временных пределах. Решая уравнение адвекции пассивных примесей (1) с заданным полем скоростей, можно получить ценную информацию о лагранжевых когерентных структурах, определяющих транспортные барьеры, каналы выноса, зоны интенсивного перемешивания и застоя.

В разделе 2 даются общие сведения о транспорте, перемешивании и хаотической адвекции пассивной примеси в гидродинамических потоках. Излагаются общие представления о возникновении стохастического слоя, являющегося "зерном" гамилътонова хаоса. В разделе 3 приводится простейшая кинематическая модель хаотической адвекции, содержащая основные эйлеровы структуры: вихрь и фоновое течение с периодической составляющей. На примере этой модели подробно описывается общий сценарий возникновения хаотической адвекции и ее топологические, динамические и фрактальные свойства, типичные для всех кинематических и динамических моделей этого явления в океане. В разделе 4 дается краткий обзор кинематических моделей хаотической адвекции в меандрирующих струйных течениях типа Гольфстрима и Куроиси и в планетарных круговоротах. Раздел 5 посвящен обзору хаотической адвекции в различных динамических моделях, построенных на основе концепции фоновых течений, развитой В.Ф. Козловым. Приводятся результаты численного моделирования лагранжева транспорта и перемешивания в баротропных моделях полукруглого бассейна с источником и стоком и моделях топографических вихрей с фоновым течением и приливным течением. Здесь же рассматривается простая двухслойная модель бароклинного океана и обсуждается эффективность хаотического перемешивания в зависимости от частоты возмущения. В разных лабораториях мира создаются экспериментальные модели эйлеровых когерентных структур в океане — струйных течений, вихрей, волн Россби и их взаимодействия. В разделе 6 мы описываем лабораторные эксперименты по хаотической адвекции в гидродинамических потоках во вращающихся танках, имитирующие взаимодействие периодического течения с двумя круговоротами и геострофическую струю с волнами Россби. В заключении обсуждаются перспективы применения теории динамических систем в физической океанографии.

Мы посвящаем настоящий обзор памяти Вадима Федоровича Козлова — выдающегося ученого, внесшего большой вклад в физическую океанографию и, в частности, в теорию хаотической адвекции в океане.

2. Транспорт, перемешивание и адвекция

Термин "транспорт" (или "перенос") означает движение частиц жидкости вместе с потоком из одной области пространства в другую. В теории динамических систем под транспортом понимают движение в фазовом пространстве точек, представляющих динамическую систему с разными начальными условиями. Количественными мерами транспорта являются расход жидкости через некоторую выделенную поверхность и пространственная протяженность, определяемая размерами распределения трассеров. При определенных условиях в жидкости возникают материальные поверхности, т.е.

поверхности, образованные траекториями жидких частиц. Так как траектории частиц жидкости не могут пересекать эти поверхности, то они представляют собой барьеры для транспорта. Например, так называемые Колмогорова–Арнольда–Мозера (КАМ) торы (или КАМ-трубки тока) [7, 9] являются абсолютными барьерами для транспорта. С другой стороны, существование в потоке так называемых ускорительных мод (acceleration modes) [8] приводит к усилению транспорта.

Перемешивание (mixing) является ключевым понятием и в гидродинамике, и в теории динамических систем. Этот термин определяется строго математически. Пусть в некотором бассейне A с циркуляцией находится область примеси B , имеющая при $t = 0$ объем $V(B_0)$. Рассмотрим некоторую область C в A . Количество примеси в области C в момент времени t есть $V(B_t \cap C)$, а ее концентрация в C выражается через отношение объемов $V(B_t \cap C)/V(C)$. Перемешивание с течением времени определяется так, чтобы концентрация примеси в любой области C из A стала такой же, как и во всем бассейне A , т.е. $V(B_t \cap C)/V(C) - V(B_0)/V(A) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Это определение полного перемешивания. Перемешивание определяется не мгновенным полем пассивной примеси, а его эволюцией. В теории динамических систем под полным перемешиванием понимается процесс деформации фазового объема, в результате которого малый объем быстро превращается в длинную тонкую нить, пронизывающую всю энергетически доступную область фазового пространства. Мерой перемешивания служат ляпуновские показатели. В геофизических потоках перемешивание, вызванное кинематикой потока, осложняется молекулярной диффузией и турбулентностью.

2.1. Хаотическая адвекция

Вернемся к векторному уравнению адвекции пассивной примеси (1). Если $\mathbf{v}$ является нелинейной функцией положения частицы $\mathbf{r}$, то из теории динамических систем следует, что решения уравнения (1) могут быть хаотическими, даже когда эйлерово поле скоростей является детерминированным и гладким. Детерминированный или динамический хаос строго определяется в теории и, в сущности, подразумевает экстремальную чувствительность к малому изменению начальных условий $|\delta \mathbf{r}(0)|$. Это означает, что $|\delta \mathbf{r}(t)|$ экспоненциально возрастает со временем почти при любом выборе $\delta \mathbf{r}(0)$:

$$|\delta \mathbf{r}(t)| = |\delta \mathbf{r}(0)| \exp(\lambda t), \quad (2)$$

где λ — положительный коэффициент, называемый ляпуновским показателем, $|\dots|$ — норма вектора. Точное направление вектора $\delta \mathbf{r}(0)$ несущественно, так как большинство (в смысле ненулевой меры) таких векторов будет эволюционировать в направлении максимального растягивания соответствующего объема жидкости. Величина λ характеризует асимптотически (при $t \rightarrow \infty$) среднюю скорость этого растягивания. Если сама жидкость несжимаема ($\text{div } \mathbf{v} = 0$), то этот объем должен сжиматься вдоль некоторого другого направления с той же средней скоростью, но имеющей противоположный знак. Для трехмерных гамильтоновых потоков существует третье направление, вдоль которого скорость растягивания (сжатия) равна нулю, т.е. равна нулю сумма всех ляпуновских показателей гамильтоновой системы.

Из уравнения (2) следует практически важный вывод — хаос ограничивает прогнозируемость поведения даже простых нелинейных систем временем порядка

$$\tau_p \approx \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\Delta a}{\Delta a(0)}, \quad (3)$$

где Δa — доверительный интервал прогноза некоторой динамической величины a , $\Delta a(0)$ — практически неизбежная погрешность измерения начального значения этой величины. В ограниченном фазовом пространстве динамической системы экспоненциально быстро разбегающиеся траектории возвращаются (по крайней мере в гамильтоновых системах) в окрестности своих начальных значений (теорема Пуанкаре о возвратах). Так как в задаче адвекции фазовое пространство является физическим, то это свойство, называемое хаотическим перемешиванием, является очень важным для океанских потоков. Хаотическое перемешивание в жидкости принято называть хаотической адвекцией [10, 11] (иногда употребляется термин "лагранжева турбулентность").

Из теории динамических систем следует, что в случае стационарного плоского течения любой степени сложности уравнения (1) интегрируемы, траектории элементов жидкости совпадают с линиями тока Ψ , материальные линии растягиваются (если растягиваются) пропорционально t . Даже простые временные зависимости плоского потока (периодичность или квазипериодичность) могут привести к кардинальным переменам: возникновению перемешивания и хаоса, экспоненциальному растягиванию материальных линий со временем и пр. Трехмерные стационарные потоки не могут быть, вообще говоря, записаны в гамильтоновой форме, что не мешает им быть хаотическими. Более того, именно для специального класса стационарных трехмерных течений (так называемых АВС-потоков) В.И. Арнольд впервые предположил возможность хаоса линий тока, а стало быть, и траекторий [12, 13]. На важные последствия перемешивания для геофизических потоков указывали еще более 50 лет назад Эккарт [14] и Веландер [15]. В последней работе уже использовались идеи фрактальной геометрии (без употребления самого термина) для объяснения того, как длина перемешивающейся материальной линии может стремиться к бесконечности при конечной площади замыкания.

Для плоских несжимаемых потоков компоненты скорости, как известно [16], находятся с помощью функции тока:

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \\ v &= \frac{\partial \Psi}{\partial x}. \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнения адвекции (1) теперь принимают форму уравнений Гамильтона

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{aligned} \quad (5)$$

с функцией тока $\Psi(x, y, t)$, играющей роль гамильтониана. Координаты частицы на плоскости x и y

являются канонически сопряженными переменными, а фазовое пространство уравнения (5) — конфигурационным пространством. Таким образом, двумерная адвекция в несжимаемой жидкости эквивалентна гамильтоновой динамике системы с полутора степенями свободы в нестационарном случае или с одной степенью свободы в стационарном. Поскольку гамильтонова природа адвекции следует из условия несжимаемости, то вышесказанное справедливо и для вязких двумерных потоков.

2.2. Стохастический слой

Как впервые заметил Пуанкаре [17], в типичной ситуации в гамильтоновых системах при сколь угодно малом возмущении происходит расщепление сепаратрис, препятствующее интегрируемости возмущенной системы. Более того, устойчивые и неустойчивые многообразия седловой точки (через которую проходит невозмущенная сепаратриса) трансверсально пересекаются и, как следствие, возникает стохастический слой в окрестности невозмущенной сепаратрисы. Возникновение стохастического слоя в неинтегрируемых гамильтоновых системах — универсальное явление. Именно этот слой является зародышем хаоса. Неустойчивость движения в окрестности разрушенных сепаратрис в колебательных системах имеет простую причину [7]: вдали от невозмущенной сепаратрисы частота колебания или вращения частиц слабо зависит от энергии (или действия), и малые ее изменения приводят к малым изменениям фазы за период колебания. Вблизи сепаратрисы период колебания стремится к бесконечности, и даже малые изменения частоты могут вызвать значительные изменения фазы. Отсюда и возникает локальная неустойчивость траекторий в стохастическом слое. Движение здесь очень сложное, поэтому несмотря на значительные усилия (см. обзор результатов в [8]) до сих пор не получено ответов на многие вопросы.

Следуя [18], приведем наглядное доказательство Пуанкаре расщепления и пересечения устойчивого и неустойчивого многообразий в гомоклиническом случае, т.е. при наличии единственной седловой точки. Фазовый портрет невозмущенной системы состоит из сепаратрисной петли, самопересекающейся в седловой точке и разделяющей финитные (внутри петли) и инфинитные (вне ее) траектории (рис. 2а). Конкретный пример такого потока рассматривается в разделе 3. Пусть $\Psi^{(\pm)}$ — линии пересечения устойчивого и неустойчивого многообразий седла с плоскостью $\tau = 0$. Предположим, что при достаточно малом возмущении эти линии не пересекаются и между ними имеется небольшой зазор Δ (рис. 2б). При отображении за период T отрезок Δ сдвинется против часовой стрелки. Так как $\Psi^{(\pm)}$ инвариантны относительно этого отображения, то область D , ограниченная кривыми $\Psi^{(\pm)}$ и отрезком Δ , перейдет в собственную подобласть (из площади D вычитается заштрихованная площадь). Однако это противоречит равенству фазовых объемов гамильтоновой системы при отображении за период: $V(D) = V(\hat{T}(D))$. Противоречие снимается при условии пересечения $\Psi^{(+)}$ и $\Psi^{(-)}$, схематично изображенного на рис. 2в.

Расщепление сепаратрисы приводит к важным последствиям для геофизических потоков, так как разрушается непроницаемый барьер и появляется возможность транспорта пассивных примесей между прежде не пересекавшимися (в невозмущенном потоке) областями

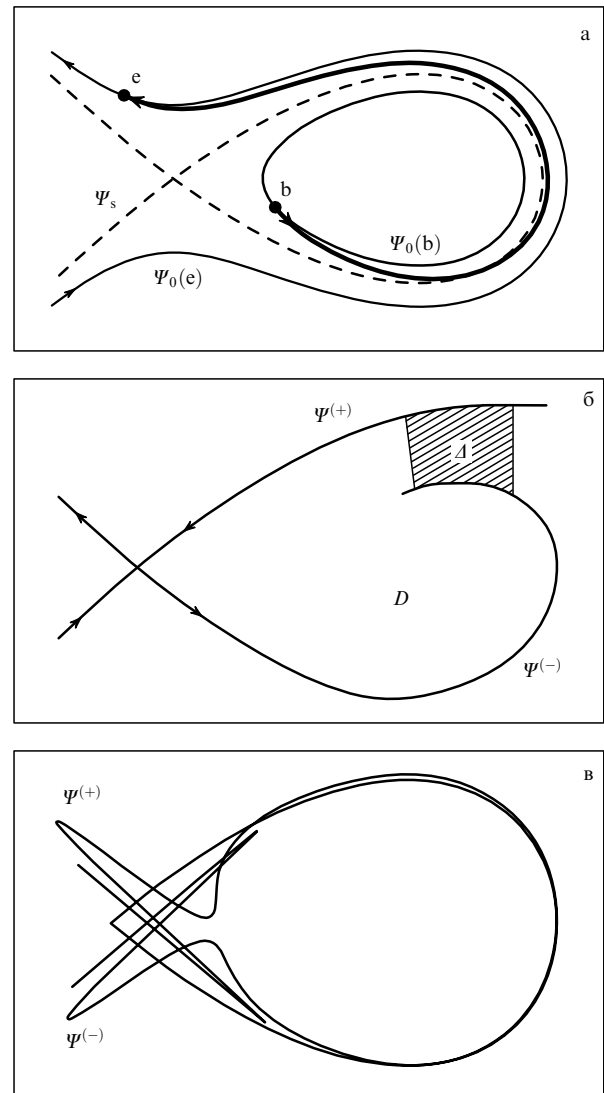


Рис. 2. Возникновение стохастического слоя: (а) петля невозмущенной сепаратрисы с функцией тока Ψ_s , траектории невозмущенного движения (тонкие сплошные кривые) частиц внутри и снаружи петли с функциями тока $\Psi_0(b)$ и $\Psi_0(e)$ соответственно и траектория частицы при включении возмущения (жирная кривая); (б) расщепление устойчивого $\Psi^{(+)}$ и неустойчивого $\Psi^{(-)}$ многообразий седла; (в) трансверсальное пересечение этих многообразий.

потока. Количественные оценки мгновенных и средних потоков между этими областями и скоростей обмена можно получить с помощью так называемого интеграла Мельникова [19], который характеризует мгновенное расстояние между расщепленными сепаратрисами Δ и ширину стохастического слоя. В отсутствие возмущения частицы движутся по линиям тока Ψ_0 (тонкие сплошные кривые на рис. 2а). При включении возмущения с функцией тока $\Psi_1(\tau)$ частица b , стартующая при $\tau = 0$ с линии тока $\Psi_0(b)$ внутри сепаратрисной петли, за время τ перейдет в положение e , соответствующее другой линии тока, $\Psi_0(e)$ (рис. 2а). Для вычисления разности невозмущенных функций тока $\Delta\Psi_0 = \Psi_0(e) - \Psi_0(b)$ нужно вычислить производную

$$\frac{d\Psi(x(\tau), y(\tau))}{d\tau} = \frac{\partial\Psi_1}{\partial x} \frac{\partial\Psi_0}{\partial y} - \frac{\partial\Psi_1}{\partial y} \frac{\partial\Psi_0}{\partial x} \equiv \{\Psi_1, \Psi_0\}, \quad (6)$$

для нахождения которой мы использовали уравнения адвекции (5) и определение скобки Пуассона $\{\Psi_1, \Psi_0\}$. Из соотношения (6) следует, что для траекторий вблизи невозмущенной сепаратрисы (x_s, y_s) разность функций тока с точностью до величины первого порядка малости по силе возмущения ξ равна

$$\Delta\Psi_0(\tau_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \Psi_1[x_s(\tau - \tau_0), y_s(\tau - \tau_0)], \right. \\ \left. \Psi_0[x_s(\tau - \tau_0), y_s(\tau - \tau_0)] \right\} d\tau, \quad (7)$$

где параметр τ_0 вводится для учета фазы возмущения. Из соотношения (7) с помощью замены переменной $\tau \rightarrow \tau' + \tau_0$, используя тригонометрические тождества, находим

$$\Delta\Psi_0(\tau_0) = \xi M_0 \sin \delta, \quad (8)$$

где интеграл Мельникова M_0 и фаза δ определяются из интегрирования (7) по τ' . Для оценки ширины стохастического слоя получим

$$\Delta = \frac{2\xi}{\pi} \frac{|M_0|}{|u_0|}, \quad (9)$$

где u_0 — горизонтальная скорость частиц в невозмущенном потоке. Тогда поток $F = u_0 \Delta$ равен

$$F = \frac{2\xi}{\pi} |M_0|. \quad (10)$$

Такая же величина получается и при использовании площади "лепестков" (lobes) в гомо- или гетероклининой структуре [20].

В типичных гамильтоновых системах перемешивание частиц жидкости неоднородно [8, 21]. В случае хаотической адвекции на плоскости это означает, что существуют области пространства (так называемые "острова"), в которых движение жидкости регулярно. Как правило, имеется иерархия "островов": большие "острова" окружены цепочками малых, те, в свою очередь, еще меньшими и т.д. до бесконечности (в теории). "Острова" погружены в "море" хаоса, в котором движение элементов жидкости (или пассивных частиц) неупорядоченное. Частицы не могут пересекать границы "островов" ни снаружи, ни изнутри, т.е. эти границы образуют барьеры, непроницаемые для транспорта частиц. Вблизи внешних границ "островов" имеются так называемые зоны "прилипания", в которых частицы могут надолго застревать, что существенно изменяет статистические свойства транспорта. Например, рост дисперсии координат частицы пропорционален не t (как в случае нормальной диффузии), а t^μ , где показатель степени, так называемая транспортная экспонента μ может быть как меньше единицы (субдиффузия), так и больше единицы (супердиффузия). Все эти динамические признаки хаотической адвекции обусловлены определенными геометрическими структурами — инвариантными многообразиями, речь о которых на примере простой кинематической модели хаотической адвекции пойдет в разделе 3.

3. Прототипная кинематическая модель хаотической адвекции

В этом разделе мы опишем в рамках геометрического подхода перемешивание пассивных примесей в потоке,

состоящем из основных эйлеровых когерентных структур: нестационарного течения и вихря. Рассматривается плоское течение идеальной жидкости с заданной безразмерной функцией тока [22]

$$\Psi(\tau) = \ln \sqrt{x^2 + y^2} + \varepsilon x + \Psi_1(\tau), \quad (11)$$

где первый член в правой части описывает точечный вихрь, расположенный в начале координат декартовой плоскости x, y , а второй член — пространственно однородный меридиональный поток, т.е. стационарное течение вдоль оси y с юга на север с безразмерной скоростью ε , $\Psi_1(\tau)$ — некоторая нестационарная функция тока, которую мы выберем в простом виде: $\Psi_1(\tau) = \xi x \sin v\tau$.

Уравнения адвекции пассивных примесей записываются в гамильтоновом виде (5), а именно:

$$\dot{x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad (12) \\ \dot{y} = \frac{x}{x^2 + y^2} + \varepsilon + \xi \sin v\tau,$$

где точка обозначает дифференцирование по нормированному времени τ . В отсутствие возмущения ($\xi = 0$) фазовый портрет этой системы состоит из набора финитных и инфинитных траекторий, разделенных петлей сепаратрисы, окружающей вихрь и проходящей через особую седловую точку с координатами $x = -1/\varepsilon, y = 0$. В зависимости от начальных условий частицы перемещаются либо внутри сепаратрисной петли вдоль замкнутых линий тока, либо огибают ее слева и справа по инфинитным линиям тока (рис. 2а). В работе [22] аналитически показано, что при наличии сколь угодно малого возмущения происходит расщепление сепаратрисы с трансверсальными пересечениями устойчивого и неустойчивого многообразий седловой точки, схематично изображенными на рис. 2в, и образованием гомоклинической структуры с бесконечным разнообразием периодических и непериодических орбит. Траектории пассивных примесей не совпадают со стационарными линиями тока. При описании потока будем различать область свободного потока (с входящей и выходящей составляющими), зону перемешивания и вихревое ядро как совокупности траекторий, совершающих соответственно нулевое, конечное и бесконечное число оборотов вокруг вихря. Интеграл Мельникова

$$M(\tau_0) = \int_{-\infty}^{\infty} u[x_s(\tau - \tau_0), y_s(\tau - \tau_0)] \cos(v\tau + \delta) d\tau, \quad (13)$$

характеризующий мгновенный поток через зазор Δ между расщепленными многообразиями в момент времени τ_0 (рис. 2б, в), зависит от частоты возмущения v и фазы меридионального потока δ .

Топология фазового пространства существенно зависит от значений управляющих параметров ε и ξ , поскольку в их определения входят скорость стационарного течения, частота осцилляций нестационарного течения и интенсивность вихря, задающая частоту вращения частиц. Соотношения этих величин определяют порядки нелинейных резонансов в системе. С увеличением отношения ε/ξ возрастают размеры сердцевин вихревого ядра, заполненной главным образом регулярными траекториями, увеличиваются порядки выживаю-

щих резонансов и соответственно уменьшаются размеры зоны перемешивания. При $\varepsilon/\xi \gg 1$ динамика системы практически регулярная. Все численные расчеты проводились при таких значениях управляющих параметров, $\varepsilon = 0,5$, $\xi = 0,1$ и $\nu = 1$, при которых зона перемешивания достаточно богата различными топологическими структурами.

3.1. Инвариантные множества потока

Структурообразующие инвариантные множества динамической системы (12) описаны в работе [23]. Поведение частиц, принадлежащих разным множествам, качественно различно. Тривиальными примерами инвариантных множеств являются: все фазовое пространство, неподвижная точка, замкнутая траектория, любая траектория, определенная по времени от $-\infty$ до ∞ . Исключим из описания множество всех проточных траекторий, не совершающих ни одного полного оборота вокруг вихря. Выделим множество всех инвариантных кривых, заполняющих КАМ-торы. Это множество траекторий всех периодических и квазипериодических движений пассивных примесей вокруг центра вихря. На изображенном на рис. 3 сечении Пуанкаре (это совокупность координат частиц с различными начальными условиями, отмечаемых точками на плоскости потока в моменты времени кратные периоду потока) такие траектории образуют семейства вложенных друг в друга замкнутых гладких кривых. В основном они сосредоточены в вихревом ядре. Другие семейства инвариантных кривых образуют "острова" устойчивости с эллиптическими точками в своих центрах и находятся как в вихревом ядре, так и в зоне перемешивания. "Острова" возникают в результате нелинейных резонансов разных порядков между движением частиц вокруг вихря и 2π -периодическим возмущением. При большом разрешении видно, что цепи "островов" в вихревом ядре окружены узкими стохастическими слоями. Вихревое ядро сохраняется при всех значениях параметров потока ε и ξ , т.е. оно является грубой структурой. Поскольку частота вращения частиц в вихревом ядре значительно превышает частоту возмущения (равную 1), то для типичных траекторий внутри ядра возмущение можно считать адиабатическим, а сами траектории — регулярными. Исключение составляют траектории в окрестностях

перекрывания резонансов высоких порядков, образующих очень узкие стохастические слои. Являясь абсолютно непроницаемыми барьерами, КАМ-инвариантные торы ограничивают транспорт и перемешивание пассивных примесей.

Возмущение приводит к тому, что на месте некоторых КАМ-торов (прежде всего тех из них, числа вращения которых не удовлетворяют диофантову условию теоремы Колмогорова – Арнольда – Мозера) появляются кантор-торы. Это инвариантные множества, имеющие канторову структуру с щелями, с топологической размерностью по крайней мере меньшей меры кривой. Движение на таких множествах квазипериодическое, однако кантор-торы неустойчивы и, следовательно, обладают устойчивыми и неустойчивыми многообразиями. Кантор-торы, в отличие от КАМ-торов, проницаемы (хотя и в малой степени) для пассивных примесей. На пересечении материальной линии с устойчивым многообразием Λ_s так называемого хаотического инвариантного множества Λ в области набегающего потока найдутся такие частицы, которые попадают с течением времени на границу зоны перемешивания и вихревого ядра и вращаются там в некоторой области так, как будто эта область ограничена инвариантной КАМ-кривой. Затем в течение короткого промежутка времени частицы проникают по другую сторону этой кривой и задерживаются уже там. Процесс многократно повторяется до тех пор, пока частицы не выйдут за границу этой зоны и затем вымываются. Наличие таких зон "прилипания" на границах вихревого ядра и "островов" устойчивости указывает на существование там кантор-торов с малыми щелями. На сечении Пуанкаре — это области сгущения точек. Из существования инвариантного множества кантор-торов и зон "прилипания" следует важный вывод о неоднородности перемешивания, проявляющейся, в частности на топографических картах пленения, в наличии "тяжелых хвостов" в функциях распределения частиц по временам пленения и в сингулярностях функций рассеяния [23–26].

Хаотическим инвариантным множеством Λ называется множество всех траекторий (за исключением КАМ-торов и кантор-торов), никогда не выходящих из зоны перемешивания. Это множество состоит из бесконечного числа периодических траекторий и непероди-

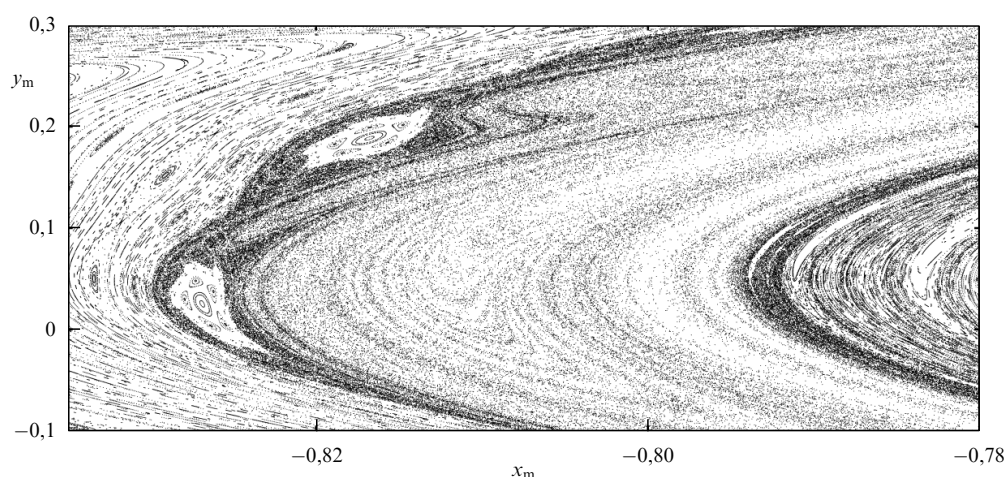


Рис. 3. Плоскость сечения Пуанкаре потока (11).

ческих хаотических траекторий. Все траектории этого множества неустойчивы. Пассивные примеси с начальными условиями, принадлежащими Λ , остаются в зоне перемешивания как при $\tau \rightarrow \infty$, так и при $\tau \rightarrow -\infty$. На сечении Пуанкаре Λ представляет собой фрактальное множество точек с нулевой мерой Лебега. Типичные траектории примесей из набегающего потока рано или поздно, конечно, покинут зону перемешивания вместе с выходящим потоком, однако наличие Λ существенно определяет их поведение. Траектории примесей могут в течение неограниченного времени "отслеживать" траектории этого множества, блуждая по их окрестностям.

Каждая орбита хаотического множества и, следовательно, все множество Λ в целом имеют устойчивое и неустойчивое многообразия. Устойчивым многообразием Λ_s хаотического множества является инвариантное множество всех траекторий, сходящихся к траекториям из Λ при $\tau \rightarrow \infty$. Неустойчивым многообразием Λ_u называется устойчивое многообразие обращенной во времени динамики. По траекториям из Λ_s пассивные примеси из набегающего потока попадают в зону перемешивания и остаются в ней навсегда. Как уже отмечалось, соответствующие начальные условия образуют множество меры нуль. Трассеры, стартующие вблизи траекторий устойчивого многообразия, длительное время отслеживают траектории хаотического множества, отталкиваются от них в конце концов и покидают зону перемешивания вдоль неустойчивого многообразия. Таким образом, возникает уникальная возможность реконструировать важные свойства Λ по результатам измерений рассеянных частиц и наблюдать непосредственно неустойчивые многообразия в лабораторных экспериментах и даже в геофизических потоках.

Визуализация неустойчивого многообразия осуществляется различными способами. В результате расплывания пятна, состоящего из большого числа трассеров, выбранного на пересечении с устойчивым многообразием где-нибудь в набегающем потоке, формируется сложная фрактальная кривая, сходящаяся с течением времени к Λ_u . Та же картина формируется в экспериментах с треками (streaklines) частиц красителя. На рисунке 4 представлен образ неустойчивого многообразия детерминированного модельного потока (12) в момент времени 15π , полученный в результате численного интегрирования уравнений движения частиц, непрерывно инжектируемых в точку набегающего потока с координатами $x_0 = -4,357759744$, $y_0 = -6$. Транспорт пассивных примесей происходит вдоль фрактальной кривой неустойчивого многообразия потока, которое является своего рода

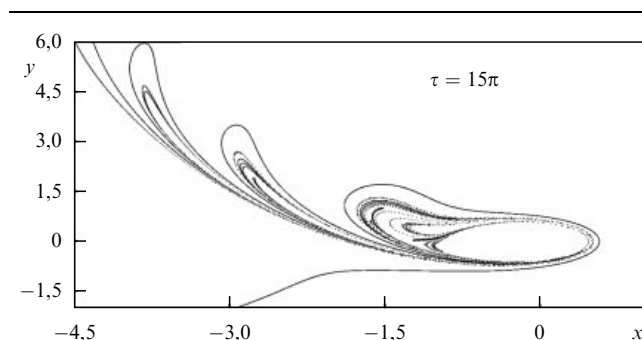


Рис. 4. Образ неустойчивого многообразия потока (11): мгновенный "снимок" трека красителя в потоке.

аттрактором в гамильтоновой системе (вследствие несжимаемости жидкости обычные аттракторы отсутствуют). Непосредственное вычисление так называемой карты пленения частиц [24] дает образ устойчивого многообразия Λ_s . Пересечением многообразий Λ_s и Λ_u является инвариантное хаотическое множество Λ , представляющее собой фрактальное множество точек, пульсирующее с периодом потока. Трассеры, стартующие из этих точек, остаются в зоне перемешивания при $\tau \rightarrow \pm\infty$. Если в невозмущенном потоке ($\xi = 0$) линия раздела зон вихревого ядра и свободного потока имеет конечную длину, равную длине замкнутой сепаратрисной петли, то в потоке с периодическим возмущением она обладает бесконечной длиной.

Периодические траектории хаотического множества Λ существенно неустойчивы, и вероятность их обнаружения при наложении одной фрактальной "пыли" на другую мала. Численный метод доказательства существования таких орбит и их обнаружения, предложенный в работе [27], основан на вычислении времени $T_n(I, \theta)$, за которое траектория с заданными начальными значениями угла θ и действия I совершит n оборотов, и вычислении изменения действия (или энергии $\Delta E_n(I, \theta)$) за это время. Если периодическое возмущение, действующее на систему, имеет период T , то все периодические траектории возмущенной системы с периодами kT ($k = 0, 1, \dots$), делающие n оборотов, могут быть найдены из условий $T_n(I, \theta) = kT$, $\Delta E_n(I, \theta) = 0$. На практике можно таким образом найти периодические орбиты, связанные с резонансной структурой фазового пространства (эллиптические и гиперболические точки первичных, вторичных и т.д. резонансов), и орбиты, возникающие в окрестности сепаратрис. Примеры таких орбит для рассматриваемой модели приведены в работе [27].

3.2. Геометрия хаотического рассеяния и фрактальная динамика

Для иллюстрации геометрии транспорта пассивных примесей в зоне перемешивания выберем в области свободного набегающего потока на линии $y = -6$ отрезок начальных условий, левый конец которого является точкой пересечения этой линии с нижним "усом" возмущенной сепаратрисной петли в моменты времени $3\pi/2 + 2\pi t$, а правый — точкой пересечения с "усом" возмущенной сепаратрисы в моменты времени $\pi/2 + 2\pi t$. На рисунке 5 показаны фрагменты эволюции заданной материальной линии в моменты времени $\tau = 8\pi, 9\pi, 10\pi$ и 11π . Точка А при $\tau = 0$ находилась на пересечении невозмущенной сепаратрисы и линии $y_0 = -6$, точка G — на пересечении этой линии и сепаратрисы в моменты времени $\pi/2 + 2\pi t$. Частицы с начальными координатами $x_0 < x_0(A)$ и $x_0 > x_0(G)$ не захватываются вихрем и сразу вымываются в зону свободного потока (см. сегменты, обозначенные пунктиром на рис. 5). Частицы А и G, передвигаясь вдоль устойчивого многообразия, попадают в окрестность седловой периодической орбиты и удерживаются длительное время (теоретически бесконечное) в зоне перемешивания.

Можно вычислить полное число оборотов n вокруг вихря, совершаемых большим числом частиц, выбранных на отрезке AG до момента их попадания в зону выходящего свободного потока (часть плоскости выше прямой $y = 6$). График зависимости $n(x_0)$ представляет

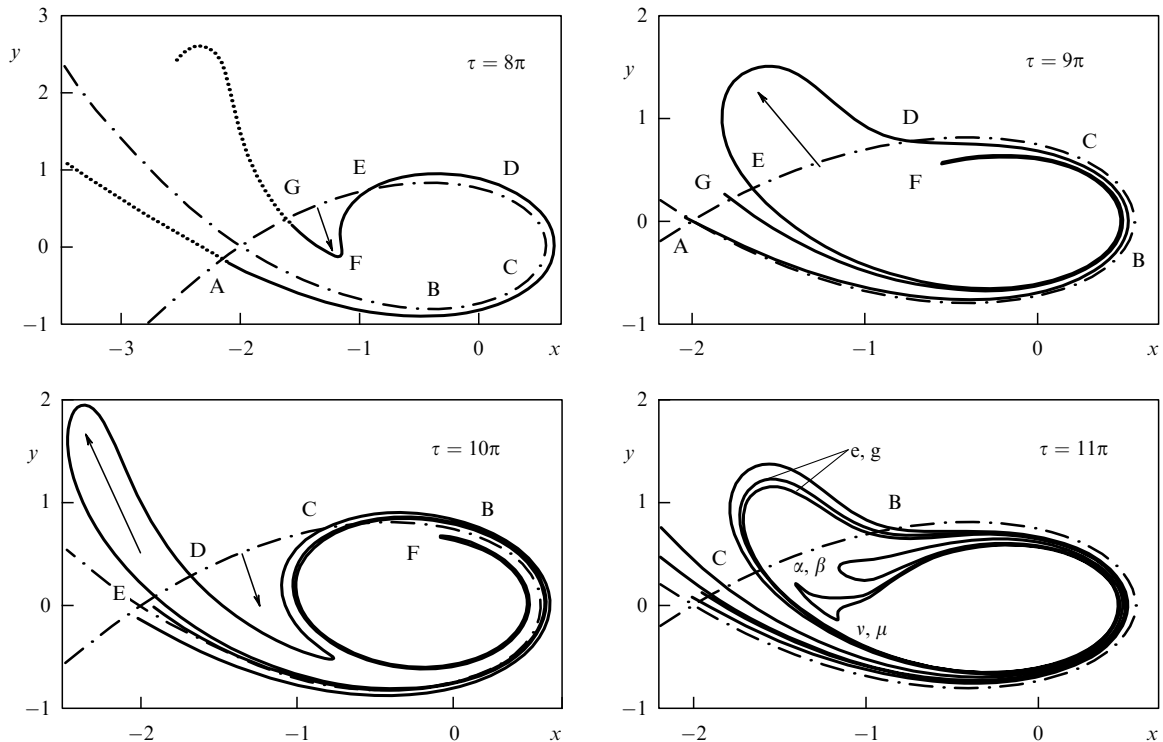


Рис. 5. Фрагмент эволюции материальной линии в последовательные моменты времени. Показано формирование "лепестков" из элементов эпистроф и строф фрактала, изображенного на рис. 6.

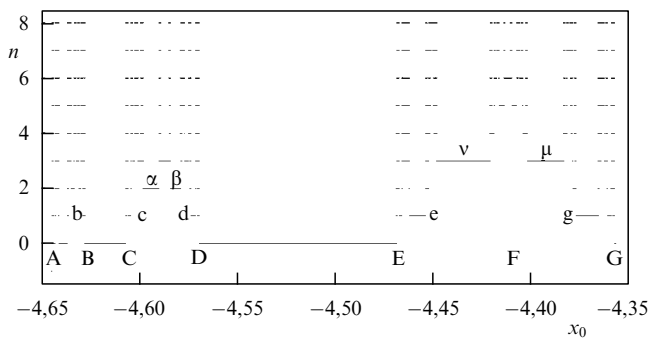


Рис. 6. Фрактальное множество (при $n \rightarrow \infty$) начальных координат x_0 частиц из набегающего потока, вымываемых из зоны перемешивания после n оборотов вокруг вихря.

собой (рис. 6) сложную иерархию последовательностей отрезков материальной линии AG (фрагменты эволюции которой показаны на рис. 5) с фрактальными свойствами, которые порождаются бесконечно повторяющимися пересечениями устойчивого и неустойчивого многообразия с материальной линией начальных условий при ее вращении вокруг вихря. Для каждого $n \geq 0$ имеются последовательности отрезков, которые вслед за авторами работы [28] будем называть эпистрофами. Эпистрофы образуют иерархическую структуру. Концы каждого отрезка эпистрофы на уровне n служат предельными точками эпистроф уровня $n+1$. Например, на уровне $n=0$ имеется одна эпистрофа, сходящаяся к точке A. Концы каждого отрезка этой эпистрофы порождают на уровне $n=1$ эпистрофы b, c, d, e, g и т.д., сходящиеся к соответствующим предельным точкам (см. рис. 6). Численные эксперименты с эпистрофами

разных уровней выявили следующие закономерности: 1) каждая эпистрофа сходится к предельной точке отрезка начальных условий; 2) концы каждого отрезка эпистрофы уровня n являются предельными точками эпистрофы уровня $n+1$; 3) длины отрезков в эпистрофе убывают в геометрической прогрессии; 4) показатель этой прогрессии одинаков для всех эпистроф и равен максимальному показателю Ляпунова хаотического инвариантного множества λ . Вычислялись зависимости длины l_j отрезка эпистрофы от его порядкового номера j для нулевой эпистрофы и эпистроф c, d, e и g первого уровня ($n=1$). Все линии имеют примерно одинаковый наклон, равный $\ln \lambda = -1,59$ [23], т.е. длины отрезков в любой эпистрофе убывают в геометрической прогрессии $l_j = l_0 \lambda^j$ со знаменателем прогрессии $\lambda \approx 0,2$. Последняя величина имеет смысл максимального показателя Ляпунова хаотического инвариантного множества Λ .

Фрактал на рис. 6 не является строго самоподобным, так как в его структуре имеются отрезки, называемые строфами, которые не являются элементами эпистроф. Некоторые из них обозначены на рисунке греческими буквами. Таким образом, наш фрактал обладает частичным самоподобием — самоподобные эпистрофические последовательности существуют на всех уровнях разрешения. Кроме этого, имеются дополнительные элементы (строфы), сохраняющиеся в асимптотическом пределе и не укладывающиеся в регулярную структуру. Фрактал на рис. 6 дает полное представление о транспорте пассивных примесей. Прямая материальная линия AG сначала растягивается и изгибается, опоясывая точечный вихрь, а затем часть ее начинает складываться, поскольку испытывает одновременное влияние двух противоположных тенденций — ускорение одних частиц при движении вокруг вихря и замедление других вблизи

седловой точки. На рисунке 5 показан момент образования первой складки при $\tau = 8\pi$. Сегменту DE на рис. 5 соответствует первый отрезок DE эпистрофы нулевого уровня — это те трассеры, которые не завершили полный оборот. Сегменту EFG соответствует пустой отрезок на рис. 6, порождающий бесконечную последовательность эпистроф и строф на всех высших уровнях. Через период возмущения ($\tau = 10\pi$) на материальной линии образуется вторая складка. К моменту времени $\tau = 11\pi$ на растянувшемся участке первой складки начинают формироваться два новых "лепестка", соответствующие отрезкам эпистроф e и g уровня $n = 1$, частицы которых, не завершив второго оборота вокруг вихря, вымываются вместе с "лепестком" BC, образуя второй "палец" (см. рис. 5). При $\tau = 11\pi$ видны также две складки, являющиеся зародышами строф α и β уровня $n = 2$ и строф ν и μ уровня $n = 3$. Эти строфы формируют четыре "лепестка", которые вместе с отрезками эпистроф нулевого и первого уровней образуют третий "палец".

Этот процесс итеративен, т.е. на каждом обороте вокруг вихря от замедлившегося в окрестности седловой точки хвоста оставшегося сегмента материальной линии отматывается очередная порция, соответствующая на рис. 6 отрезку эпистрофы и пустому отрезку. По этому сценарию образуются все эпистрофы и строфы на уровнях выше нулевого с тем отличием, что каждый отрезок эпистрофы n -го уровня генерирует не одну, а две эпистрофы $(n+1)$ -го уровня. В экспериментах с треками красителя это проявляется в периодическом образовании пары "лепестков". С течением времени треки красителя образуют самоподобную структуру (см. рис. 5) в том смысле, что с каждым периодом возмущения появляются новые "пальцы" со все возрастающим числом "лепестков". Таким образом, выявляется скрытый в хаосе порядок.

Строгое определение инвариантных множеств и динамических инвариантных мер типа фрактальной размерности, ляпуновских показателей, энтропий разного рода, транспортных и временных экспонент и др. дается асимптотически, т.е. при $\tau \rightarrow \infty$. Разумеется, в реальности мы имеем дело с конечными временами и размерами. В типичных гамильтоновых системах с неоднородным перемешиванием (к которым относится и наш модельный поток) точное самоподобие обычно отсутствует (наличие строф в нашем потоке), так как инвариантные множества статистически не инвариантны при увеличении разрешения. Таким образом, асимптотическое поведение динамических систем может существенно отличаться от их поведения на конечных временах, которое только и может быть фиксировано и в численных, и в реальных экспериментах. Не имеет физического смысла вычислять фрактальную размерность гидродинамического потока на пространственных масштабах меньше молекулярных, а ляпуновскую экспоненту — на временах, превышающих эйлерово время жизни когерентной структуры. Вычисленные эффективные размерности динамических "инвариантов" могут отличаться от асимптотических.

4. Кинематические модели хаотической адвекции в океане

Западные пограничные течения, такие как Кurociao в северном Тихом океане и Гольфстрим в северной Атлан-

тике, являются ярко выраженными струями, разделяющими водные массы с различными физическими и биогеохимическими характеристиками. Известны три основных механизма транспорта и обмена водными массами в этих фронтальных зонах: генерация так называемых рингов с холодным или теплым ядром, которые могут отщепляться от основного течения с каждой из его сторон, взаимодействие рингов с основным течением и меандрирование потока. Такие течения являются когерентными эйлеровыми структурами, пространственная форма которых волнообразно изменяется со временем в широких пределах (с длиной волны порядка 200–400 км) с типичными фазовыми скоростями порядка 0,1–0,3 м с⁻¹ (для сравнения, максимальная скорость течения на поверхности достигает 2 м с⁻¹). Наблюдения за лагранжевыми траекториями буев нейтральной плавучести, запущенных на различных глубинах и в Куроciao [29, 30], и в Гольфстриме [31, 32], выявили крупномасштабные латеральные перемещения буев в отсутствие рингов, коррелирующие с меандрами течений. Резюмируя эти и другие наблюдения в Гольфстриме, А. Bower и Н. Rossby [32] сделали следующие выводы: 1) вода из центра струи уходит главным образом из тыловых областей впадин и горбов меандров, а поступает преимущественно в головные области горбов; 2) захват водных масс и их транспорт поперек струи усиливается с увеличением кривизны струи; 3) поперечный транспорт в глубине выражен более ярко, чем у поверхности (Гольфстрим для глубоководных буев "прозрачнее", чем для мелководных).

На рисунке 7 представлена композиция траекторий 37 изопикнических буев "Rafos" (такие буи непосредственно отслеживают движение элементов жидкости в потоке), последовательно запущенных в главном термоклине Гольфстрима в районе мыса Хаттерас (~35°N, ~75°W) и отслеживаемых акустически в течение 30 или 45 сут [32]. Очевидная нерегулярность этих траекторий вызывает вопросы о механизмах транспорта и перемешивания физических, химических и биологических свойств Гольфстрима и других подобных океанских фронтов. Вопрос о том, являются ли траектории буев хаотическими, — один из центральных в проблеме латерального перемешивания пассивной примеси в океане [33–38]. Расчеты показывают [39], что вклад рингов в суммарный транспорт кислорода поперек Гольфстрима не превышает 5%. В качестве домини-

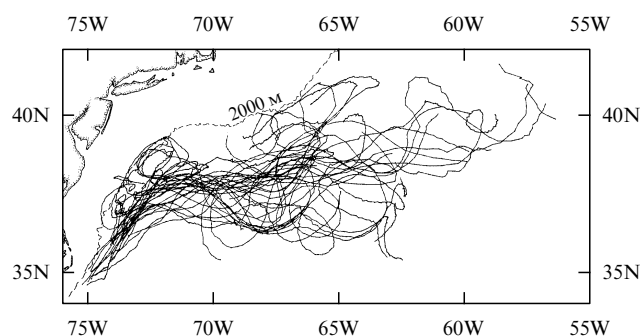


Рис. 7. Композиция траекторий буев "Rafos" на глубинах термоклина Гольфстрима [32]. Рисунок любезно предоставлен А. Bower (Океанографический институт, Вудсхол, США).

рующего механизма перемешивания в меандрирующих течениях была предложена хаотическая адвекция [40].

Для качественного объяснения результатов наблюдения были построены сначала кинематические, а затем и динамические модели меандрирующего течения. Интерпретация лагранжевых движений упрощается, если поток рассматривается в системе координат, движущейся с фазовой скоростью периодического доминирующего меандра. Для простейшей двумерной кинематической модели меандрирующего течения в лабораторной системе отсчета можно выбрать следующую функцию тока [39, 40]:

$$\Psi(x, y, t) = \Psi_0 \left(1 - \tanh \frac{y - a \cos k(x - c_x t)}{d \sqrt{1 + k^2 a^2 \sin^2 k(x - c_x t)}} \right), \quad (14)$$

где a , $k = 2\pi/l$ и c_x — амплитуда, волновое число и фазовая скорость меандра соответственно, l — длина волны меандра, d — характерная ширина течения. Появление гиперболического тангенса в функции тока (14) связано с выбором профиля Бикли для горизонтальной скорости струи в виде $u = u_0 \operatorname{sech}^2 y$, а подкоренное выражение в (14) дает одинаковую (по длине меандра) ширину струи. Нормированная функция тока в системе отсчета, движущейся со скоростью c_x , имеет вид

$$\Psi'(x', y', \tau) = -\tanh \left(\frac{y' - A \cos x'}{L \sqrt{1 + A^2 \sin^2 x'}} \right) + C y', \quad (15)$$

где $x' = k(x - c_x t)$, $y' = y/k$. Уравнения адвекции для функции тока (15) с нормированным временем $\tau = \Psi_0 k^2 t$ (штрихи опущены)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{L \sqrt{1 + A^2 \sin^2 x} \cosh^2 \Theta} - C, \\ \dot{y} &= -\frac{A \sin x (1 + A^2 - A y \cos x)}{L (1 + A^2 \sin^2 x)^{3/2} \cosh^2 \Theta}, \\ \Theta &= \frac{y - A \cos x}{L \sqrt{1 + A^2 \sin^2 x}} \end{aligned} \quad (16)$$

содержат три управляющих параметра: нормированную амплитуду меандра $A = ak$, нормированную характерную ширину струи $L = dk$ и нормированную фазовую скорость $C = c_x/\Psi_0 k$. Анализ уравнений (16) позволяет сделать вывод [41] о существовании в движущейся системе координат нескольких топологически разных режимов течения в зависимости от величины C .

1. $C > C_{cr1} = 1/L$. Особых точек нет. Струя направлена с запада на восток.

2. $C_{cr1} > C > C_{cr2} = [L \cosh^2(1/AL)]^{-1}$ и $C > C_{cr3}$. Существует четыре особых точки — два центра и два седла. Имеются две сепаратрисы, каждая из которых проходит через свою седловую точку. Струя между сепаратрисами направлена с востока на запад.

3. $C_{cr1} > C > C_{cr2}$ и $C < C_{cr3}$. Особые точки те же, что и в режиме 2, но свободный поток между сепаратрисами направлен с запада на восток.

4. $C_{cr2} > C > C_{cr3}$. Существует восемь особых точек: четыре центра и четыре седла. Свободный поток между сепаратрисами направлен с востока на запад.

5. $C_{cr2} > C$ и $C < C_{cr3}$. Особые точки те же, что и в режиме 4, но свободный поток между сепаратрисами направлен с запада на восток.

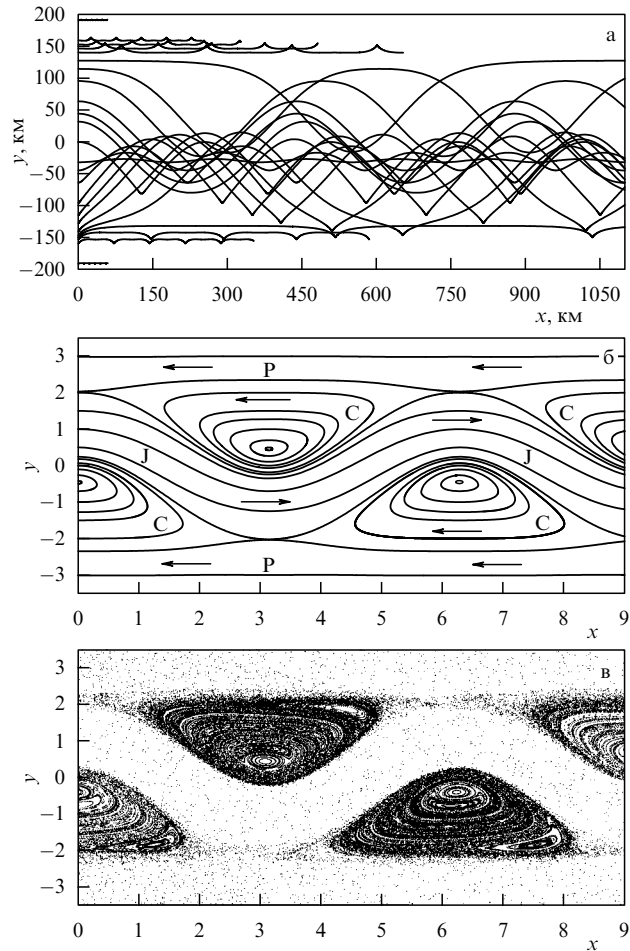


Рис. 8. (а) Траектории частиц в меандрирующем течении в лабораторной системе координат. (б) Линии тока в системе координат, движущейся с фазовой скоростью меандра. (в) Сечение Пуанкаре с периодически модулированной амплитудой меандра.

При равенстве C одному из критических значений фазовой скорости, C_{cr1} , C_{cr2} , C_{cr3} , и различных соотношениях между последними возникают бифуркации. Значение C_{cr3} не удастся найти аналитически, но можно показать, что $C_{cr3} > C_{cr2}$, если

$$2(1 + A^2) \left(AL \sinh \frac{2}{AL} \right)^{-1} < 1,$$

и $C_{cr3} < C_{cr2}$ в противном случае.

На рисунке 8а показаны траектории частиц в лабораторной системе координат для топологии потока, соответствующей режиму 3, с параметрами, отвечающими реальному Гольфстриму. Поскольку Ψ в этой системе зависит от времени, то частицы могут пересекать линии тока. В движущейся системе $\Psi = \text{const}$ и траектории частиц жидкости совпадают с линиями тока, изображенными на рис. 8б. Налицо три различных области потока: центральная струя в восточном направлении (область J), замкнутые циркуляции к северу и югу от нее (области С, иногда называемые "кошачьими глазами" в литературе по теории динамических систем) и периферийные западные течения (области Р). Центры "кошачьих глаз" расположены на двух критических линиях потока, определяемых условиями $u(y_c) = c_x$ и $v(y_c) = 0$. Эти области

отделены друг от друга сепаратрисами, соединяющими седловые точки равновесия, и, следовательно, обмен между ними невозможен. Эти структуры, разумеется, исчезают в лабораторной системе отсчета. Траектории адвектируемых частиц в лабораторной системе существенно различны. Частицы, запущенные в области центральной струи, перемещаются вместе с ней на восток по криволинейным траекториям. Частицы, запущенные в области перекрытия центральной струи с одной из зон циркуляции, движутся вниз по течению по траекториям с меньшей кривизной и значительно медленнее, с фазовой скоростью меандра.

Как следует из теории динамических систем, даже малое нестационарное возмущение потока (15) должно, как правило, приводить к расщеплению устойчивых и неустойчивых многообразий седловых точек. В окрестности каждой из них возникает стохастический слой по типу, описанному в разделе 2.2. Результирующая гетероклиническая структура порождает хаотическое перемешивание и транспорт водных масс с величинами потоков, зависящими от многих факторов (ширины стохастического слоя, количества перекрывающихся и неперекрывающихся основных резонансов и т.д.). Флуктуации амплитуды меандров являются основным фактором изменчивости Гольфстрима и Куроисио. Численное решение уравнений адвекции с периодически модулированной амплитудой меандра $A(\tau) = A_0 + \varepsilon \cos(\nu\tau + \varphi)$ подтверждает эти предположения [40]. Для сравнительно малых амплитуд возмущения, $\varepsilon \ll 1$, слой хаотической адвекции узок, и перемешивание происходит главным образом вдоль параллели. На рисунке 8в изображено сечение Пуанкаре меандрирующего течения с периодически модулированной амплитудой меандра ($A = 0,785$, $C = 0,1168$, $L = 0,628$, $\nu = 0,117$ и $\varepsilon = 0,0728$). Поскольку амплитуда возмущения сравнительно мала (10 % от амплитуды меандра), то разрушены только самые внешние КАМ-торы областей циркуляции, в которых и возможно слабое хаотическое перемешивание. Множество "островов" внутри областей циркуляции отвечает множеству резонансов периодического возмущения с движением частиц в этих областях.

С увеличением ε все большее число инвариантных торов разрушается, площадь хаотического "моря" увеличивается, в нем возникают "острова" регулярного движения с зонами "прилипания" на своих границах. Все это приводит к фрактальной динамике перемешивания и транспорта пассивной примеси. Наглядно фрактальные свойства представлены на рис. 9. Запустив 5000 частиц на нулевой долготе, $x_0 = 0$, с равномерным распределением по широте $-200 < y_0 < 200$ км, рассчитаем число поворотов n (изменений знака зональной скорости) для каждой частицы при амплитуде возбуждения $\varepsilon = 0,2355$ и частоте $\nu = 0,2536$. На рисунке 9а изображена зависимость $n(y_0)$ в движущейся системе координат, имеющая кантороподобную структуру (ср. с рис. 6). В лабораторной системе координат, где знак зональной скорости не меняется, подобный вид имеет и зависимость числа событий $u = c_x$ от y_0 . Прямым следствием фрактальности для траекторий буев в реальном течении является хаотическая зависимость времени T достижения фиксированной долготы в лабораторной системе (в расчете принято $x_f = 1100$ км) от их начальной широты. Это нерегулярно осциллирующая функция (рис. 9б), состоящая из хаотически чередующихся гладких и сингулярно-

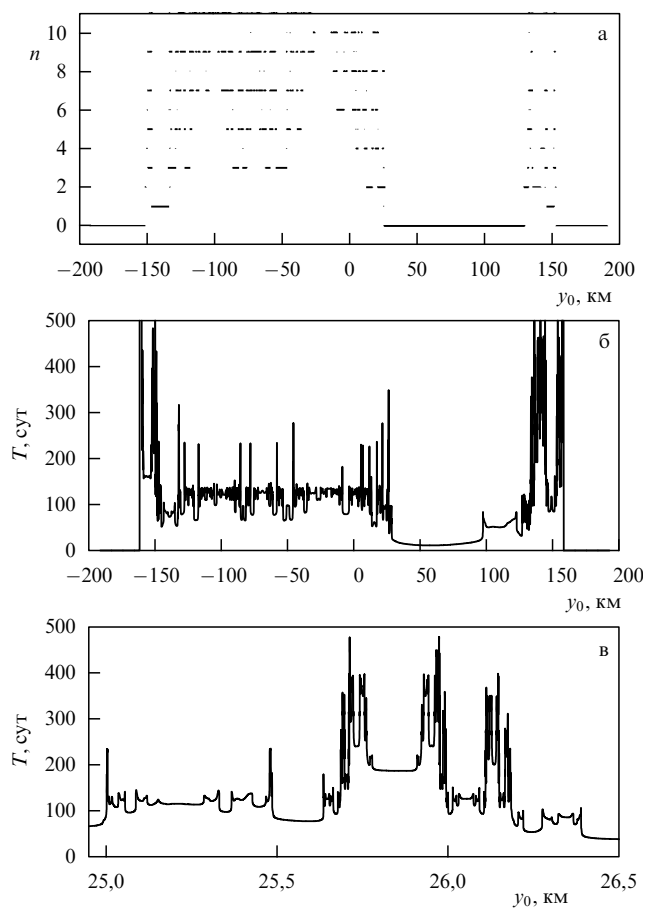


Рис. 9. (а) Фрактальная зависимость числа поворотов частиц n в движущейся системе от их начальной широты y_0 . (б) Время достижения частицами фиксированной долготы в лабораторной системе в зависимости от их начальной широты. (в) Увеличенный малый фрагмент рис. 9б.

подобных участков. Увеличение последних дает самоподобную структуру (рис. 9в). Малая начальная разница координат буев (порядка 100 м) может привести к внушительной разнице времен дрейфа (порядка полугода). При дальнейшем увеличении ε становится возможным меридиональный транспорт поперек течения.

Наглядное представление о хаотическом перемешивании пассивной примеси дают фрагменты эволюции материальной линии (25000 частиц на нулевой долготе $x_0 = 0$ распределены при $\tau = 0$ по широте $-200 < y_0 < 200$ км) в последовательные моменты времени (рис. 10). Периодическое формирование "лепестков" из элементов фрактала, изображенного на рис. 9а, подробно исследовано в работе одного из авторов настоящего обзора с сотрудниками [41].

Помимо периодического изменения амплитуды меандра A в литературе рассматривались и другие типы периодического возмущения [40]: пространственно однородный меридиональный поток с функцией тока $\Psi'_m = x \cos(\nu\tau + \varphi)$ и плоская волна с функцией $\Psi'_p = p^{-1} \cos[p(x - c_p\tau) + \varphi]$. Добавляя эти функции тока к стационарной функции (15), получим новые динамические системы, описывающие разные типы периодического возмущения основного потока (15). Периодический характер возмущения упрощает решение уравнений адвекции, поскольку позволяет свести их к отображению

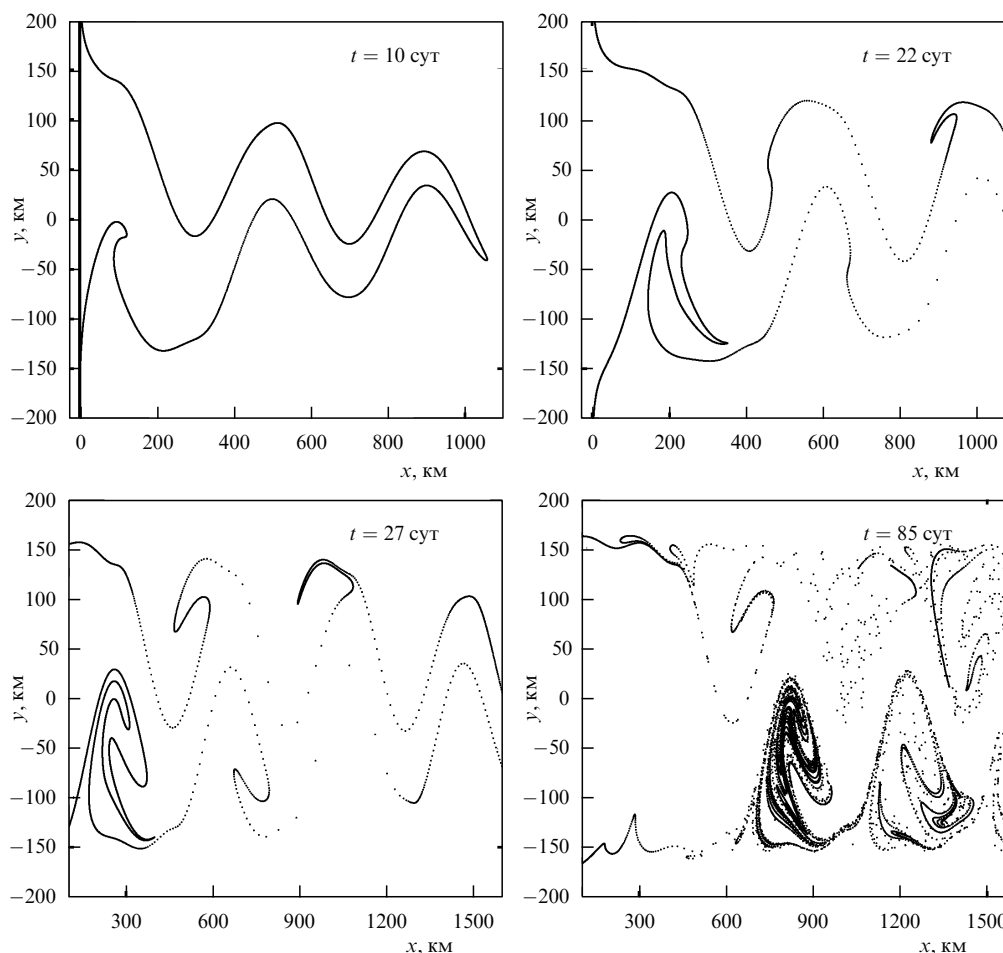


Рис. 10. Эволюция материальной линии в меандрирующем течении с периодической модуляцией в лабораторной системе координат. Показано формирование "лепестков" из элементов фрактала, изображенного на рис. 9а.

Пуанкаре, т.е. рассматривать траекторию жидкой частицы лишь в дискретные моменты времени с величиной, кратной периоду возмущения. Для моделирования квазипериодического характера изменчивости меандрирующей струи вместо единственной гармоники возмущения нужно ввести в функцию тока несколько таких гармоник с несоизмеримыми частотами.

Теория динамических систем предоставляет удобную меру транспорта и перемешивания водных масс в хаотической адвекции, основанную на интеграле Мельникова (10). Количественные оценки меридионального и зонального потоков помогают установить распределения потенциальной завихренности, температуры, органического вещества и других характеристик водных масс в меандрирующих течениях. Очевидно, что величины потоков зависят от топологии фазовых портретов возмущенной системы. Основываясь на картине линий тока в движущейся системе координат (рис. 8б), определим два основных потока: F_{jc} — поток из центральной струи J в области циркуляции C и F_{cp} — поток из областей циркуляции в области периферийных западных течений P . Из соображений симметрии следуют равенства соответствующих потоков для северных и южных (по отношению к центральной струе) циркуляций и периферийных течений. Проведенный в работе [40] расчет величины этих потоков на основе интеграла Мельникова типа (10) показал, что величины F_{jc} и F_{cp} для меандра с флуктуи-

рующей амплитудой сильно зависят от частоты флуктуаций ν . Для сравнительно высоких частот ($\geq 0,04$ цикла за 1 сут при типичных параметрах Гольфстрима) $F_{jc} > F_{cp}$, тогда как для низких частот ($\leq 0,04$ цикла за 1 сут) $F_{jc} < F_{cp}$. Бегущие волны на меандрирующей струе могут усилить потоки, если их фазовые скорости согласуются со скоростями основного потока вдоль соответствующих границ. Численные расчеты в работах [40, 42] подтверждают наблюдения: поперечный транспорт через центр струи значительно меньше потоков F_{jc} и F_{cp} . Меандрирующая струя хорошо перемешивает жидкость по обе стороны от себя, но сохраняет градиенты поперек себя. Следует подчеркнуть, что эти выводы сделаны на примере конкретного топологического режима простой функции тока (14) с периодическими возмущениями. Численные расчеты потоков для той же системы с квазипериодическими возмущениями дают другие величины [43]. Расчет перемешивания в кинематической модели меандрирующей струи, взаимодействующей с вихрем, проведен в работе [44].

Ранее упоминалось, что наблюдения за глубоководными буями "Rafos" [31, 32] свидетельствуют об усилении меридионального (поперечного) транспорта с глубиной. Качественно этот эффект можно объяснить в рамках кинематической многослойной модели, в которой скорость $u(y, z)$ убывает с глубиной. То есть поток остается двумерным в том смысле, что пассивная примесь оста-

ется на изопикнических поверхностях, но топология потока может изменяться на разных изопикнических поверхностях. Фазовая скорость меандра постоянна, но скорость в центральной струе ослабевает с глубиной (давлением). Критические линии $u(y_c, z)$ сближаются при возрастании z (рис. 86) и при некотором $z = z_c$ сливаются. Вместо двух цепочек "кошачьих глаз", разделенных струей, появляется вихревая дорожка, что и облегчает меридиональный транспорт [32]. Кроме того, амплитуда меандра существенно изменяется с глубиной, что также способствует усилению такого транспорта. В недавней работе [45] построена динамически согласованная бароклинная (точнее, с двумя с половиной слоями) модель меандрирующего течения, в рамках которой усиление меридионального транспорта с глубиной зонального потока является результатом бароклинной неустойчивости, возникающей, когда отношение скоростей верхнего и нижнего слоев больше двух.

Хаотический транспорт и перемешивание исследовались в модели планетарных круговоротов в работах [46–48], где рассматривались два круговорота — субполярный и субтропический, разделяемые струйным западным пограничным течением (Гольфстримом в северной Атлантике и Куроисио в северном Тихом океане). Циркуляция в круговоротах возбуждается ветром. При постоянном ветре обмен водными массами между этими круговоротами в простейшей модели несжимаемого двумерного потока невозможен. Сезонные изменения направления ветра приводят к расщеплению и пересечению устойчивого и неустойчивого инвариантных многообразий и, как следствие, к хаотическому транспорту водных масс из одного круговорота в другой. В рамках простейшей кинематической модели с периодическим возбуждением наиболее интенсивный транспорт наблюдается на частотах, резонансных с частотой циркуляции. Включение в модель двух круговоротов меандрирующей струи с функцией тока типа (14) приводит к появлению дополнительного механизма перемешивания. Как подчеркивалось выше, в меандрирующем течении сама струя служит хорошим барьером для меридионального транспорта (по крайней мере в приповерхностном слое). Ветровое возбуждение значительно усиливает хаотический меридиональный транспорт между круговоротами [47].

Что касается трехмерных потоков, то хаотическая адвекция пассивных примесей возможна и в стационарном случае. Как уже отмечалось, впервые на это обратил внимание В.И. Арнольд [12]. Кинематическая модель с трехмерной циркуляцией в океане сконструирована в работе [49]: два планетарных круговорота в горизонтальной плоскости дополнены термохалинной циркуляцией в вертикальной плоскости. Уравнения движения лагранжевых частиц не являются гамильтоновыми и составляют трехмерную автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с хаотическими решениями. Океанографически важным следствием хаоса в этой модели является наличие барьера для транспорта, который определяется существованием последнего неразрушенного КАМ-тора в трехмерном пространстве.

Кинематические модели привлекательны своей простотой, общностью и заключающимися в них возможностями выявления фундаментальных геометрических структур, ответственных за лагранжевы транспорт и перемешивание. В рамках таких моделей можно полу-

чать аналитические результаты и устанавливать количественные соотношения топологических, динамических и статистических характеристик потоков. Однако функции тока в кинематических моделях не являются решениями динамических уравнений движения, поэтому в таких моделях не сохраняется, вообще говоря, потенциальная завихренность. Концепция фоновых течений позволяет при заданных формах бассейна, возмущениях рельефа дна и расходах на границе получить класс динамически согласованных функций тока в замкнутом виде. В разделе 5 эта концепция используется для построения различных классов функций тока в баротропном и геострофическом приближениях для исследования хаотической адвекции в динамически согласованных моделях бассейнов типа окраинных дальневосточных морей с сильной внутригодовой изменчивостью расходов через проливы.

5. Динамические модели хаотической адвекции в океане

Кинематика плоского движения несжимаемой жидкости описывается функцией тока $\psi(x, y, t)$, связанной с компонентами скорости формулами (4) и с завихренностью ω соотношением

$$\omega = v_x - u_y \equiv \Delta\psi. \quad (17)$$

Если функция тока ψ задана безотносительно к законам движения жидкости, то модель (5) является кинематической. Проблема динамической совместимости состоит в том, что ψ должна удовлетворять соотношениям, вытекающим из динамических уравнений. По-видимому, первая нетривиальная динамически согласованная и имеющая геофизическое значение двумерная модель, проявляющая детерминированный хаос, была проанализирована на примере классического вихря Кида [50, 51]. В качестве перспективных для исследования хаотической адвекции рассмотрим класс простых динамически согласованных моделей, предложенный на основе концепции фоновых течений в геофизической гидродинамике в работах В.Ф. Козлова [4, 52, 53].

5.1. Фоновые течения

В динамической океанологии достаточно широко используется понятие фонового течения, под которым обычно подразумевается осредненная в некотором смысле циркуляция. Как правило, определения этого понятия (если они вообще приводятся) не являются конструктивными в том смысле, что не позволяют однозначно построить соответствующее фоновое течение или из-за нечеткости самого определения, или из-за невозможности фактически реализовать "осреднение" ввиду отсутствия необходимых сведений об осредняемых полях (например из-за недостаточного количества данных наблюдений), особенно в глубинных водах. Попытка дать одно из возможных конструктивных определений фонового течения предпринята в [53]. Основную идею предлагаемого метода проиллюстрируем на простом примере [52].

Одной из фундаментальных характеристик квазидвумерных геофизических потоков является потенциальная завихренность Π , синтезирующая вклады относительной завихренности ω и планетарно-топографиче-

ских, в общем случае стратифицированных воздействий. Поскольку Π и ω связаны между собой линейно, задание любого из указанных полей при соответствующих граничных условиях позволяет однозначно восстановить поле течений. Любую из характеристик Π и ω можно использовать для выделения когерентных структур типа вихрей, струй, фронтальных разделов и т.п., однако традиционно предпочтение отдается относительной завихренности ω . В отличие от последней, Π в случае исчезающе малой вязкости является лагранжевым инвариантом, удовлетворяющим уравнению [54]

$$\frac{d\Pi}{dt} \equiv \Pi_t + u\Pi_x + v\Pi_y = 0. \quad (18)$$

Благодаря своей инвариантности Π является более удобной характеристикой для структурирования поля течений. В качестве фонового (в другой терминологии отсчетного, реперного) естественно принять течение с горизонтально однородным и стационарным распределением Π , автоматически удовлетворяющим (18). Результат, однако, будет зависеть от величины Π , с изменением которой поле течений может радикально трансформироваться. Из этого многообразия решений выделим единственное, для которого $\Pi = \bar{\Pi}$ доставляет глобальный минимум механической энергии системы. Одновременно однозначно определяется фоновая относительная завихренность $\bar{\omega}$, зависящая от рельефа дна, планетарной завихренности и в бароклинном случае от стратификации. Теперь эволюцию любого заданного начального состояния можно изучать как взаимодействие соответствующих отклонений Π от фонового значения $\bar{\Pi}$, которое само не зависит от этих возмущений.

Алгоритмизацию построения фонового течения и соответствующих распределений фоновых относительных завихренностей выполним на примере простейшей квазигеострофической баротропной модели [51], для которой [53] имеем

$$\Pi = \omega + F, \quad (19)$$

где $F = f(x, y) + (f_0/H)h(x, y)$ — заданная планетарно-топографическая функция, суммирующая вклады параметра Кориолиса $f(x, y)$ с отсчетным значением f_0 , средней глубины бассейна H и возвышения рельефа дна $h(x, y)$. Рассмотрим в бассейне D с границей ∂D течение, описываемое уравнениями (18) и (19) с определяющей расходу на границе функцией $\psi^{(b)}(l, t)$ (l — координата точки на границе):

$$\psi|_{\partial D} = \psi^{(b)}(l, t). \quad (20)$$

Для производной по параметру $\Phi \equiv \partial\psi/\partial\Pi$ из (19) и (20) следуют соотношения

$$\Delta\Phi = 1, \quad \Phi|_{\partial D} = 0. \quad (21)$$

С учетом (19) и (21) для кинетической энергии получаем

$$E = \frac{1}{2} \int_D (\nabla\psi)^2 dD \quad (22)$$

и после простых преобразований находим необходимое условие минимума:

$$\frac{\partial E}{\partial \Pi} = \int_D \Phi(F - \Pi) dD = 0, \quad (23)$$

откуда следует

$$\bar{\Pi} = \langle F \rangle \equiv \left(\int_D F \Phi dD \right) \left(\int_D \Phi dD \right)^{-1}. \quad (24)$$

Правая часть последнего соотношения определяет операцию взвешенного осреднения произвольной функции F , причем всегда $F_{\min} \leq \langle F \rangle \leq F_{\max}$. Таким образом, фоновое течение однозначно определяется по известному распределению фоновой относительной завихренности $\bar{\omega}$ как решение задачи Дирихле

$$\Delta\bar{\psi} = \bar{\omega} \equiv \langle F \rangle - F, \quad \bar{\psi}|_{\partial D} = \psi^{(b)}(l, t). \quad (25)$$

С учетом выражения для F имеем

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}^{(h)} + \bar{\omega}^{(f)}, \quad \bar{\omega}^{(h)} = \frac{f_0}{H} (\langle h \rangle - h), \quad (26)$$

$$\bar{\omega}^{(f)} = \langle f \rangle - f.$$

Постоянные $\langle h \rangle$ и $\langle f \rangle$ определяют критические изобату и широту, при пересечении которых соответствующие составляющие $\bar{\omega}$ меняют знаки на противоположные. В северном полушарии $f > 0$, южнее (севернее) критической широты завихренность $\bar{\omega}^{(f)}$ — циклоническая (антициклоническая). Аналогично, $\bar{\omega}^{(h)}$ — циклоническая (антициклоническая) в районах, в которых глубины больше (меньше) критической. В частности, над подводными поднятиями дна фоновая топографическая циркуляция является антициклонической. Формальное решение задачи (25) легко выписывается в явном виде (в квадратурах), если известна функция Грина $G(\mathbf{r}, \mathbf{\rho})$ для оператора Лапласа, удовлетворяющая краевому условию $G|_{\partial D} = 0$. Имеем [55]

$$\bar{\psi}(\mathbf{r}, t) = \bar{\psi}^{(w)}(\mathbf{r}) + \bar{\psi}^{(b)}(\mathbf{r}, t), \quad (27)$$

где первое слагаемое в правой части,

$$\bar{\psi}^{(w)}(\mathbf{r}) = \int_D G(\mathbf{r}, \mathbf{\rho}) \bar{\omega}(\mathbf{\rho}) dD_{\rho}, \quad (28)$$

представляет собой стационарную вихревую часть решения, а второе,

$$\bar{\psi}^{(b)}(\mathbf{r}, t) = \int_{\partial D_{\rho}} \bar{\psi}^{(b)}(l_{\rho}, t) \frac{\partial G}{\partial h_{\rho}} dl_{\rho}, \quad (29)$$

является нестационарным безвихревым слагаемым, обусловленным заданными расходами на границе.

Теоретическое обоснование гомогенизации Π при исчезающе малых диссипации и генерации просто воспроизводится для областей с замкнутыми линиями тока [56]. Допускаемые при нашем подходе расходы на границе области D не оказывают вентиляционного воздействия, так как по определению вносят и выносят однородную Π , согласованную с ее значениями внутри области [53]. С другой стороны, как следует из (26), фоновая планетарно-топографическая завихренность имеет нулевое средневзвешенное значение, т.е. напоминает дипольную структуру, проявляющуюся в отдельных циркуляционных кольцах. Со временем потенциальная завихренность гомогенизируется, но при этом соответствующие значения Π различны в разных

циркуляционных кольцах, что естественным образом приводит к проблеме фронтов в поле Π , формирующихся в фоновом течении. Тогда мы приходим к задаче совместной эволюции фронтов Π и вихрей в поле течения [57]. Попытка применения развитых алгоритмов построения фонового течения к конкретным физико-географическим условиям дальневосточных окраинных морей предпринята в работах [58–60]. Пример модельных фоновых течений в полуплоскости, на границе которой расположена сбалансированная система источник–сток, рассмотрен в [61].

В квазигеострофическом приближении двухслойного океана с постоянной плотностью в слоях ρ_i ($i = 1, 2$ для верхнего и нижнего слоев соответственно) движение описывается геострофическими функциями тока $\psi_i(x, y, t)$, а уравнения (4), (5), (17) и (18) описывают соответствующие величины в слоях [54]. Потенциальную завихренность можно представить в виде

$$\Pi_i = \omega_i + F_i - \Pi_i^*, \quad (30)$$

где $F_1 = f + (f_0/H_1)\zeta$, $F_2 = f + (f_0/H_2)(h - \zeta)$, ζ и h — возвышения границы раздела и рельефа дна, H_i — толщины слоев ($H = H_1 + H_2$), а Π_i^* определим ниже. Согласно динамическому условию непрерывности давления на границе раздела получаем

$$\zeta = \frac{f_0}{g'} (\psi_2 - \psi_1),$$

где $g' = g(\rho_2 - \rho_1)/\rho_2$ — редуцированное ускорение силы тяжести. Следуя [53], введем баротропную и бароклинную функции тока $\psi = (H_1\psi_1 + H_2\psi_2)/H$, $\psi' = (f_0/g')\zeta = \psi_2 - \psi_1$ и соответствующие $\Pi = (H_1\Pi_1 + H_2\Pi_2)/H$, $\Pi' = \Pi_2 - \Pi_1$. Из уравнения (17) получаем

$$\Delta\psi = \Pi - F + \Pi^*, \quad (31)$$

$$\Delta\psi' - k^2 = \Pi' - \frac{f_0}{H_2} h + \Pi'^*, \quad (32)$$

где $k^{-1} = L_d = (g'H_1H_2/H_2)^{1/2}/f_0$ — внутренний радиус деформации. Введем операцию взвешенного осреднения

$$\langle F \rangle_k = \left(\int_D F \Phi^{(k)} dD \right) \left(\int_D \Phi^{(k)} dD \right)^{-1} \quad (33)$$

с весовой функцией, которая удовлетворяет уравнению

$$\Delta\Phi^{(k)} - k^2\Phi^{(k)} = 1, \quad \Phi^{(k)}|_{\partial D} = 0, \quad (34)$$

и определим параметры

$$\langle \Pi^* \rangle = \left\langle f + \frac{f_0}{H} h \right\rangle, \quad \langle \Pi'^* \rangle = \frac{f_0}{H_2} \langle h \rangle.$$

При постоянных средних потенциальных завихренностях решения уравнений (31) и (32) имеют вид

$$\psi = \bar{\Pi}\Phi + \bar{\psi}, \quad \psi' = \bar{\Pi}'\Phi^{(k)} + \bar{\psi}', \quad (35)$$

где

$$\Delta\bar{\psi} = \langle f \rangle_0 - f + \frac{f_0}{H} (\langle h \rangle_0 - h), \quad \bar{\psi}|_{\partial D} = \psi^{(b)}(l, t), \quad (36)$$

$$\Delta\bar{\psi}' - k^2\bar{\psi}' = \frac{f_0}{H_2} (\langle h \rangle_k - h), \quad \bar{\psi}'|_{\partial D} = \psi^{(b)'}(l, t). \quad (37)$$

Так же, как в баротропном случае, минимум энергии достигается при $\bar{\Pi} = \bar{\Pi}' = 0$ [53], т.е. для фонового течения $\psi = \bar{\psi}$ и $\psi' = \bar{\psi}'$. Геострофические функции тока в слоях выражаются как [54]

$$\bar{\psi}_1 = \bar{\psi} - \frac{H_2}{H} \bar{\psi}', \quad \bar{\psi}_2 = \bar{\psi} + \frac{H_1}{H} \bar{\psi}', \quad (38)$$

откуда видна ослабляющая роль стратификации в топографических эффектах в верхнем слое. Планетарное фоновое течение имеет чисто баротропный характер.

5.2. Полукруглый бассейн

В соответствии с концепцией фоновых течений [53] функция тока имеет структуру (27), где стационарная планетарно-топографическая составляющая ψ_1 является вихревой ($\Delta\psi_1 = \omega$ в области D и $\psi_1|_{\partial D} = 0$), а проточная нестационарная составляющая ψ_2 — безвихревой ($\Delta\psi_2 = 0$ и ψ_2 задано на границе ∂D).

В качестве первого примера рассмотрим полукруглый бассейн $x^2 + y^2 < a^2$, $y > 0$ с источником и стоком интенсивности $\pm q(t)$ соответственно в угловых точках $(-a, 0)$, $(a, 0)$ [61]. Принимая в приближении бета-плоскости $f = f_0 + \beta^* y$ возвышение рельефа дна в виде $h = -\gamma h_0 y/a$ (при $\gamma > 0$ глубина растет линейно в направлении на север), нетрудно получить

$$\psi_1 = -\frac{\beta}{8} (a^2 - x^2 - y^2) y, \quad (39)$$

где постоянный параметр

$$\beta = \gamma \frac{f_0 h_0}{H a} - \beta^* \quad (40)$$

выражается через среднее значение параметра Кориолиса f_0 , параметр Россби β^* , среднюю глубину бассейна H , масштаб возвышения рельефа дна h_0 и меридиональный наклон рельефа дна γ . В дальнейшем принимается $\beta > 0$, т.е. топографический эффект считается сильнее планетарного, что, например, в среднем имеет место для Японского моря [58]. Проточная составляющая имеет вид

$$\psi_2 = -\frac{2q}{\pi} \arctan \frac{2ya}{a^2 - x^2 - y^2}. \quad (41)$$

Переходя к безразмерным переменным с помощью соотношений

$$(x, y) = a(x', y'), \quad t = \frac{8}{\beta a} t', \quad (42)$$

$$\psi = \frac{\beta a^3}{8} \Psi', \quad q = \frac{\pi \beta a^3}{8} \sigma(t')$$

и опуская штрихи, окончательно получим

$$\Psi = -(1 - x^2 - y^2) y - 2\sigma(t) \arctan \frac{2y}{1 - x^2 - y^2}. \quad (43)$$

Здесь $\sigma(t)$ — заданная положительная функция времени, отвечающая безразмерному расходу $\pi\sigma$.

Симметричная относительно оси $x = 0$ мгновенная картина линий тока определяется соответствующим значением $\sigma(t)$. Элементарный анализ поля скорости показывает, что при $\sigma > 1$ (докритический режим) в потоке преобладает проточная составляющая и поток

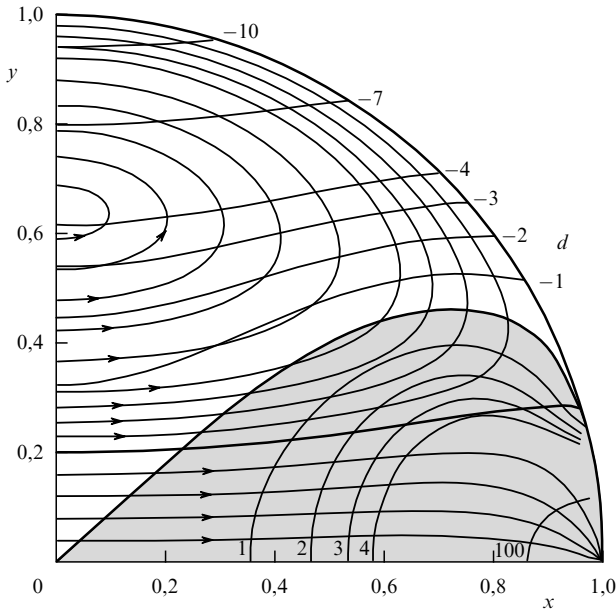


Рис. 11. Совместная картина изолиний поля d с указанными значениями и линий тока (отмечены стрелками) с сепаратрисой для стационарного случая ($\sigma = \sigma_0$). Темным цветом выделена область неустойчивости $d > 0$.

имеет качественно такой же вид, как при чисто проточном течении, обусловленном системой источник–сток в угловых точках. Скорость при $\sigma = 1$ обращается в нуль в точке $(0, 1)$, которая при $\sigma < 1$ (сверхкритический режим) расщепляется на три критические точки — две гиперболические при значениях азимутального угла $\theta = \theta_1$ и $\theta = \pi - \theta_1$ на полуокружности $r = 1$ и эллиптическую $(0, y_0)$ на полу диаметре $x = 0$. Линии тока изображены на рис. 11. Соединяющая гиперболические точки сепаратриса (гетероклиническая траектория) с $y_1 = \min y$, $y_2 = \max y = \sin \theta_1$ отделяет прилегающую к диаметру $y = 0$ проточную область от расположенной выше вихревой области с центром $(0, y_0)$. Из соотношения (43) находим явные выражения

$$y_0^2 = \frac{1}{3} (2\sqrt{1+3\sigma} - 1), \quad y_2 = \sqrt{\sigma} \quad (44)$$

и трансцендентное уравнение

$$\sigma = \frac{(1 - y_1^2) y_1}{4 \arctan \left[\frac{(1 - y_1)/(1 + y_1)}{1} \right]}. \quad (45)$$

В стационарном случае при $\sigma < 1$ нетрудно оценить некоторые характерные времена. Время, за которое частица проходит диаметр $y = 0$, равно

$$t_d = \int_{-1}^1 \frac{dx}{u(x, 0)} = F(\sqrt{1+4\sigma}), \quad (46)$$

где введена монотонно убывающая функция параметра p

$$F(p) = \frac{1}{2p} \left[\sqrt{\frac{p+1}{2}} \ln \frac{\sqrt{(p+1)/2} + 1}{\sqrt{(p+1)/2} - 1} - 2\sqrt{\frac{p-1}{2}} \arctan \frac{1}{\sqrt{(p-1)/2}} \right]. \quad (47)$$

В окрестности точки $(0, y_0)$, аппроксимируя траектории эллипсами, находим время обращения частицы

$$t_0 = \frac{\pi(1 + y_0^2)}{2y_0 \sqrt{(1 - y_0^2)(1 + 3y_0^2)}}. \quad (48)$$

Функция $t_0(\sigma)$ имеет слабо выраженный минимум в окрестности $\sigma = 0,17$.

Если $\sigma(t)$ — некоторая положительная периодическая функция, то сепаратриса вместе с гиперболическими концевыми точками также совершает периодические колебания. С топологической точки зрения эта задача похожа на модель [46, 62], и в ней возможно возникновение хаотической адвекции. Ее особенность, однако, состоит в том, что система является открытой благодаря проточному течению, в отличие, например, от систем, рассмотренных в [63–65].

Возникновение хаоса в неавтономных системах вида $\dot{x} = u(x, y, t)$, $\dot{y} = v(x, y, t)$ тесно связано со свойствами устойчивости траекторий отдельных жидких частиц, хотя эти проблемы и не эквивалентны [66]. Локальное исследование линейной устойчивости решений сводится к анализу собственных чисел матрицы, возникающей при линеаризации, которые в случае несжимаемой жидкости ($u_x + v_y = 0$) удовлетворяют уравнению [2]

$$\lambda^2 = d \equiv v_x u_y - v_y u_x. \quad (49)$$

Так как d — четная функция x и y , то достаточно проанализировать ее поведение в пределах первой четверти круга $x^2 + y^2 \leq 1$ (см. детали в [61]). Оказывается, что в общем случае кривая нейтральной устойчивости $d = 0$ пересекается с сепаратрисой на границе, подходя к точке пересечения всегда "сверху". С другой стороны, сепаратриса всегда пересекает круговую границу горизонтально, т.е. кроме граничной существует еще одна, "внутренняя" точка пересечения сепаратрисы с кривой $d = 0$, правее которой вплоть до границы кривая нейтральной устойчивости проходит выше сепаратрисы, и поэтому прилегающие к последней линии тока на некотором участке располагаются в области по крайней мере линейной неустойчивости. Именно на этих участках траекторий жидкие частицы проявляют неустойчивое поведение, приводящее к их хаотическому перемешиванию. На рисунке 11 представлены линии тока с сепаратрисой и изолинии поля d , построенные для стационарного случая $\sigma = \sigma_0$ [67].

При численных экспериментах расход задавался в виде

$$\sigma = \sigma_0 [1 + \varepsilon \sin(vt + \varphi)], \quad 0 < \varepsilon < 1, \quad (50)$$

где параметр $\sigma_0 = 0,081632$ фиксировался из условия, что в стационарном случае ($\varepsilon = 0$) ширина проточной зоны в центральном сечении $x = 0$ составляет 1/5 часть радиуса, а остальные параметры варьировались. Закон (50) изменения $\sigma(t)$ определяет характер возмущения гамильтониана (43) и, в принципе, позволяет применить имеющие асимптотический характер варианты теории возмущений, например построение функции Мельникова (см. раздел 2.2). Численные эксперименты показали, что в зависимости от координат начального положения и значений параметров возможны три типа траекторий: остающиеся в проточной (с последующим вымыванием через сток) или в вихревой области и

проникающие из одной области в другую с возможным возвратом назад. В частности, представляет интерес задача о вымывании пассивных маркеров из вихревой области в проточную.

Применение таких стандартных методов оценки степени хаотичности, как построение сечений Пуанкаре или вычисление показателей Ляпунова, в рассматриваемом случае затруднено из-за ограниченности времени жизни частиц с хаотическим поведением, обусловленной открытостью системы. Применение повторной инъекции [68] попавших в сток маркеров представляется неоправданным из-за наличия сингулярностей, не позволяющих однозначно восстановить выходящую из источника траекторию инжектируемого маркера, как это, например, удается сделать в открытых системах, удовлетворяющих граничным условиям периодичности и непрерывности поля скорости [69]. Поэтому едва ли не единственной возможностью остается анализ распределения показателей Ляпунова, вычисленных для конечного промежутка времени по методике [66], поскольку, как подчеркивается в [70], с физической точки зрения мы всегда интересуемся явлениями, происходящими за конечное время. Еще одной интересной характеристикой может служить время жизни маркера в вихревой области [67]. На предварительном этапе был выполнен анализ вымывания равномерно распределенной в начальный момент по всему бассейну примеси в виде 8300 маркеров, причем для каждого маркера вычислялось время выноса его через сток. Соответствующие результаты представлены на рис. 12 для значений начальных фаз φ и оптимальных (для выноса) значений остальных параметров, указанных на рисунке. Во всех случаях четко выделяются области, заполненные наиболее "долгоживущими" частицами, которые с увеличением фазы смещаются вдоль границ вихревой области в циклоническом направлении. Сравнение распределений показателей Ляпунова, накопленных к различным моментам времени и приведенных к начальным координатам соответствующих маркеров, для тех же значений параметров, что и на рис. 12 с $\varphi = 0$ [67], позволяет считать показатель Ляпунова за конечное время достаточно надежным индикатором степени хаотичности соответствующих траекторий. В работе [67] в качестве наглядной иллюстрации сложности поведения системы представлены зависимости времен выноса 10000 маркеров (равномерно распределенных в начальный момент по прямолинейным отрезкам $y = 0,408$; $x = -0,93-0$ или $x = -0,32-0$) от их начального положения. Приведенные графики свидетельствуют о наличии сильной неустойчивости траекторий по отношению к их начальному положению, а их фрактальные свойства аналогичны подробно описанным в разделе 3.2 на примере простой кинематической модели.

Геофизическое значение рассмотренной модели можно увидеть, задав размерные значения определяющих параметров. Примем радиус бассейна $a = 500$ км (примерно половина ширины Японского моря) и минимальную ширину проточного течения 100 км, тогда $y_1 = 0,2$ и $\sigma_0 = 0,081632$. Если принять расход проточного течения в 1 Св (свердруп) $= 10^6 \text{ м}^3 \text{ с}^{-1}$ и предположить, что оно охватывает слой высотой в 100 м по вертикали, то получим для баротропного случая $q = 10^8 \text{ см}^2 \text{ с}^{-1}$, что определяет масштабы скорости $U^* = q/\pi a \sigma_0 \approx 8 \text{ см с}^{-1}$ и времени $t^* = aU^* \approx 72$ сут. Из соотношения (39) тогда

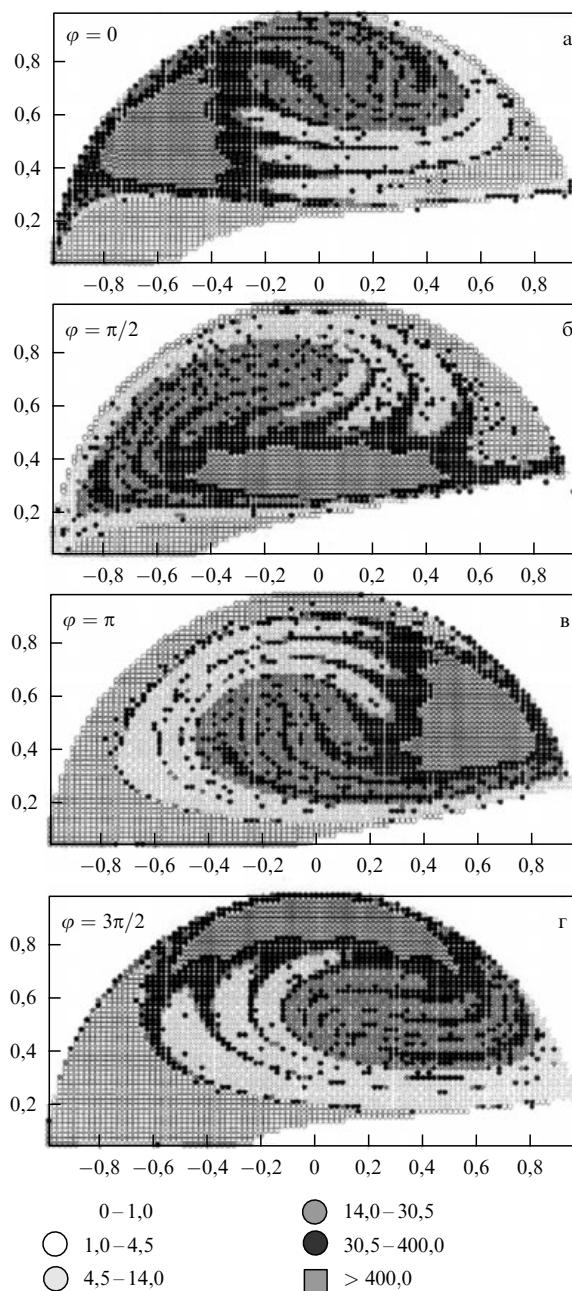


Рис. 12. Распределение времен выноса маркеров в сток, приведенное к их начальным координатам, для случая $\nu = 1,875$, $\varepsilon = 0,5$ и указанных значений начальной фазы возмущения. В сплошной белой области в правом нижнем углу рис. а–г сосредоточены маркеры с нормированным временем выноса меньше 1.

следует, что

$$\beta = 8U^*a^2 = 2,56 \times 10^{-14} (\text{см с})^{-1} \gg 4,68 \times 10^{-16} (\text{см с})^{-1} = \beta^*$$

(соответствует широте Сангарского пролива), поэтому преобладание топографического бета-эффекта над планетарным обеспечено. Все приведенные оценки достаточно разумны, и можно ожидать, что применение моделей предложенного класса окажется полезным для бассейнов типа дальневосточных окраинных морей, для которых характерна сильная внутригодовая изменчивость расходов через проливы.

5.3. Топографические вихри

Как известно (см. работу [71], монографии [72, 73] и приведенные там ссылки на натурные наблюдения), топографические вихри в океане (и в атмосфере) возникают при течении жидкости над локализованными особенностями рельефа дна (подводными горами, впадинами, хребтами и желобами) вследствие закона сохранения потенциальной завихренности на вращающейся Земле. Над горой возникает квазистационарный антициклонический вихрь, а над впадиной — циклонический. Топографические вихри способствуют вентиляции вод океана и длительному захвату личинок планктона, в результате чего биомасса планктона в области вихря может превышать фоновые значения на два порядка величины [73, 74]. Отмечена роль топографических вихрей в формировании кобальто-марганцевых корок гайотов [75] (подводных гор со срезанными вершинами) и сильной поперечной асимметрии осадкообразования [71]. Наиболее хорошо изучены потоки над гайотом Fieberling ($32^\circ 25' \text{N}$, $127^\circ 75' \text{W}$), находящимся в Тихом океане на расстоянии примерно 1000 км от побережья южной Калифорнии. Протяженность этого гайота ≈ 40 км, высота $\approx 3,5$ км, а глубина океана ≈ 4 км. Прямые гидрографические измерения (см. [76] и ссылки в этой работе) выявили квазистационарную антициклоническую циркуляцию над гайотом, широкий фоновый поток со скоростью $0,1\text{--}0,2$ м с $^{-1}$ и сильное приливное течение над гайотом со скоростями $0,14$ м с $^{-1}$ (для прилива с периодом 23,93 ч) и порядка $0,7$ м с $^{-1}$ (для прилива с периодом 25,82 ч), скорость фонового приливного течения на порядок меньше. Максимальные средние скорости течений обнаружены на высоте 50 м над вершиной гайота. Перемешивание вблизи гайота на порядок больше типичных значений для глубин океана.

Кратко упомянем о других примерах взаимодействия океанских вихрей с течениями. Изолированные крупномасштабные (порядка нескольких десятков километров в диаметре) вихри отщепляются от основного течения при меандрировании Куроиси и Гольфстрима. Нестационарность реальных течений и вихрей обусловлена колебаниями в широком диапазоне частот их скорости, циркуляции и размеров. Западные пограничные течения с расположенными к востоку от них мезомасштабными вихрями распространены в различных частях Мирового океана. Сошлемся (см. [77] и цитированные там работы) на хорошо изученное глубоководное западное пограничное течение в северной Атлантике со средними скоростями порядка $0,05\text{--}0,1$ м с $^{-1}$, воды которого временно захватываются глубоководными мезомасштабными циклоническими вихрями. Хорошо известны также поверхностные вихри вблизи Куроиси и Гольфстрима, взаимодействующие с поверхностными западными пограничными течениями. В мелководных морях и заливах крупномасштабные вихри возникают благодаря ветру и неравномерной топографии дна. Приливные течения создают периодическое возмущение, которое, как мы покажем ниже, ответственно за сложную и неоднородную картину перемешивания вод.

В фоновых течениях, развивающихся в ограниченных областях, проточная безвихревая составляющая, тем не менее, обладает деформационными свойствами. Эту особенность можно устранить, рассматривая поток на неограниченной плоскости. Например, в простейшем случае неограниченной f -плоскости (параметр Корио-

лиса $f = f_0 = \text{const}$) при возвышении рельефа дна $h(x, y)$ для топографической завихренности имеем

$$\omega = -\frac{f_0}{H} h. \quad (51)$$

Единственным ограниченным на всей плоскости проточным течением является пространственно однородный поток $W(t)$, ориентированный под углом $\theta(t)$ к оси x , с функцией тока

$$\psi_2 = W(x \cos \theta - y \sin \theta), \quad W > 0. \quad (52)$$

Хотя формально вихревая часть функции тока ψ_1 представима в виде свертки правой части (51) с функцией Грина для оператора Лапласа, вычислить соответствующие квадратуры удается лишь для весьма ограниченного набора модельных форм рельефа дна, простейшей из которых является осесимметричная $h(r)$, $r^2 = x^2 + y^2$. Топографическое течение в этом случае представляет собой круговой вихрь с азимутальной скоростью $V(r) = d\psi_1/dr$, связанной с завихренностью формулой Стокса

$$rV = \int_0^r \omega(\rho) \rho d\rho = -\frac{f_0}{2\pi H} \tau(r), \quad (53)$$

где $\tau(r) = 2\pi \int_0^r h(\rho) \rho d\rho$ — объем подводного возвышения в цилиндре радиуса r . Из формулы Стокса асимптотически имеем

$$V = \begin{cases} \Omega r, & r \rightarrow 0, \\ \frac{\Gamma}{2\pi r}, & r \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (54)$$

что соответствует твердотельному вращению с угловой скоростью $\Omega = -f_0 h(0)/2H$ в окрестности оси вихря и полю точечного вихря с циркуляцией $\Gamma = -f_0 \tau_\infty/H$ вдали от центра, где $\tau_\infty = \tau(\infty)$ — результирующий объем возвышения. Приведенные асимптотики при $\tau_\infty = \pi a^2 h(0)$ в точности совпадают с соответствующими участками кусочно-аналитического решения для прямого кругового цилиндра высотой $h(0)$ и радиусом a . Этот случай для проточного течения вида (53) исследовался в работе [78] без учета хаотического перемешивания.

Кусочно-аналитический характер поля скорости с разрывом завихренности на границе подводной возвышенности создает искусственные трудности при численном интегрировании уравнений для траекторий, пересекающих границу цилиндра. Этого легко избежать, задавая в (53) любой аналитический рельеф, качественно воспроизводящий основные особенности локализованной возвышенности. Асимптотики (54) гарантируют существование точки $r = L^*$, в которой $V'(L^*) = 0$. Используя характерные масштабы длины L^* , скорости V^* , времени $t^* = L^*/V^*$, функции тока $\psi^* = V^* L^*$ и возвышения рельефа дна $h^* = h(0)$, в безразмерных переменных вместо (53) получаем

$$rV = -\sigma \int_0^r h(\rho) \rho d\rho, \quad (55)$$

где введены топографический параметр $\sigma = h^*/H \text{Ro}$ и число Россби $\text{Ro} = V^*/f_0 L^* = 1/f_0 t^*$. Напомним, что приближение квазигеострофичности требует выполнения условия $h^*/H = O(\text{Ro})$, т.е. $\sigma = O(1)$ [78]. Кроме

того, очевидно, что

$$\left. \frac{dV}{dr} \right|_{r=1} = 0, \quad (56)$$

т.е. горизонтальный масштаб определяется расстоянием от центра, на котором достигается экстремум азимутальной топографической скорости.

Для подводной горы гауссовой формы $h(r) = \exp(-\alpha r^2)$, где $\alpha > 0$, из (55) находим

$$V = \frac{\sigma}{2\alpha r} (\exp(-\alpha r^2) - 1), \quad (57)$$

откуда с учетом условия (56) определяем $\alpha \approx 1,256$, как единственный положительный корень уравнения $1 + 2\alpha = \exp \alpha$, причем

$$V_m = V(1) = -\sigma(1 + 2\alpha) \approx -0,3285 \sigma.$$

Распределение азимутальной скорости вида (56) при $\sigma < 0$ использовалось в [79] при лабораторном моделировании циклонических вихрей. На рисунке 13 представлен радиальный профиль (57), где через $R_e(V)$ и $R_h(V)$ обозначены две ветви функции, обратной к $V = V(r)$. Можно привести много других аналитических форм рельефа с требуемой асимптотикой (54). Например, в случае алгебраической зависимости $h(r) = 1/(1 + r^2)^2$ из (55) находим при выполнении условия (56) следующие выражения для азимутальной скорости и функции тока:

$$V = -\frac{\sigma}{2} \frac{r}{1 + r^2}, \quad \psi_1 = -\frac{\sigma}{4} \ln(1 + r^2), \quad (58)$$

причем $V_m = -\sigma/4$. В нашем случае уравнение линейной устойчивости (49) сводится к не зависящему от проточной скорости выражению

$$d = -\frac{1}{2r} (V^2)', \quad (59)$$

означающему для (57) устойчивость над подводной горой ($r < 1$) и неустойчивость вне этой области ($r > 1$). Зависимость $d(r)$ для (57) также изображена на рис. 13, где r_m — положение максимума азимутальной скорости, W_0 — стационарное значение скорости проточного течения.

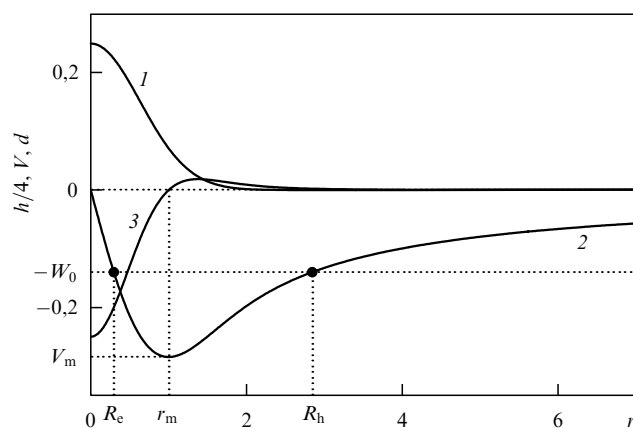


Рис. 13. Радиальные распределения возвышения рельефа дна (кривая 1), азимутальной топографической скорости (кривая 2) и детерминанта устойчивости (кривая 3) для подводной возвышенности гауссовой формы.

Для стационарного проточного течения $W = W_0 = \text{const}$ удобно принять $\theta = 0$. При $W + V_m > 0$ в суммарном потоке отсутствуют критические точки, тогда как при $W + V_m < 0$ их две — эллиптическая $(0, -R_e(-W))$ и гиперболическая $(0, -R_h(-W))$. Самопересекающаяся в гиперболической точке сепаратриса делит область течения на две части — с замкнутыми линиями тока вокруг эллиптической точки внутри гомоклинической петли и с неограниченными траекториями вне ее. В нестационарном случае мгновенная картина линий тока, которые теперь не совпадают с траекториями частиц, при заданных W и θ получается простым поворотом на угол θ , причем обе критические точки описывают заданные параметрически кривые

$$x_{e,h} = R_{e,h}(-W) \sin \theta, \quad y_{e,h} = -R_{e,h}(-W) \cos \theta. \quad (60)$$

Рассматриваемая гомоклиническая картина представляет собой типичную структурно-неустойчивую картину (см. рис. 2), наложение на которую возмущений в виде гармонических колебаний W разрушает топологическую эквивалентность соответствующих отображений и порождает хаотические проявления. Детерминированный хаос в динамических системах указанного типа многократно исследовался в различных модельных задачах естествознания, в том числе в гидродинамических приложениях. Например, в классической гидродинамике [80] задача о циркуляционном обтекании цилиндра порождает мгновенную картину линий тока с сепаратрисой в виде гомоклинической петли, наличие которой при возмущениях является одним из индикаторов возникновения хаотического перемешивания [2]. Такая задача при вырождении цилиндра в точечный вихрь была исследована методом возмущений в работе [81] с целью получения оценки толщины стохастического слоя. Подробный топологический анализ хаотического рассеяния в модели с изолированным точечным вихрем приведен в разделе 3.

В нашем случае в качестве проточного принималось простейшее однонаправленное колеблющееся течение

$$W = W_0[1 + \varepsilon \sin(vt + \varphi)], \quad \theta = 0. \quad (61)$$

Применяя для оценки толщины хаотического слоя стандартную технику Мельникова [2, 19, 82, 83], удается показать [84], что интеграл Мельникова имеет по крайней мере один максимум по частоте v . Численные эксперименты с построением диаграмм рассеяния и оценкой числа вынесенных за пределы контрольной полосы маркеров показали [84], что максимальный вынос наблюдается при частоте, близкой к $v = 0,25$. Характерной особенностью является увеличение скорости выноса частиц при возрастании частоты на начальном этапе и весьма медленное установление предельного режима, при котором частицы практически перестают покидать вихревую область. Типичная картина хаотизации и разрушения ядра вихревой области приведена в [84]. Эволюция аналогичных картин в зависимости от частоты v представлена в [84], где также имеется последовательность сечений Пуанкаре для оптимальной частоты $v = 0,25$ и набора амплитуд возмущений ε в интервале $[0-0,6]$, по мере роста которых сжимается ядро регулярных траекторий, разрушаются окружающие его отдельные вихри ("острова") и расширяется

охваченная хаотическим перемешиванием область, из которой все интенсивнее осуществляется вынос частиц в проточное течение.

Перемешивание и транспорт пассивных частиц в этой задаче определяет хаотическое инвариантное множество Λ того же типа, что и в прототипной модели хаотической адвекции из раздела 3. Это множество состоит из неустойчивых периодических орбит всевозможных периодов и аperiodических орбит с устойчивым (Λ_s) и неустойчивым (Λ_u) многообразиями. По траекториям из Λ_s частицы из проточной области фазового пространства попадают в вихревую область и остаются там навсегда. Траектории частиц, близкие к Λ_s , длительное время находятся в вихревой области вблизи траекторий из Λ и покидают эту область, перемещаясь вдоль неустойчивого многообразия Λ_u .

Важной количественной характеристикой расходимости изначально близких траекторий является показатель Ляпунова, для вычисления которого на конечном промежутке времени использовался предложенный в [66] простейший алгоритм [84]. Полезную информацию дает также так называемое "ляпуновское время", определяемое как величина обратная к показателю Ляпунова [85]. Сравнение распределений указанных величин [84] показывает, что в обоих случаях выделяются области, из которых при последующем движении маркеры не вымываются, претерпевая некоторую эволюцию в вихревой области. Можно отметить довольно хорошее совпадение областей, из которых маркеры не выносятся до определенного момента времени, и областей, выделяемых по определенному уровню ляпуновского времени. Это еще раз подтверждает тот факт [67], что время пребывания в вихревой области служит адекватной характеристикой хаоса в открытых динамических системах рассматриваемого типа. Для оптимальной частоты $\nu = 0,25$ обнаруживается близкая в среднем к квадратичной связь [85] между временем пребывания и ляпуновским временем.

Многообразие форм возможных возвышений рельефа дна, наличие границ с заданием на них нестационарных и синхронно сбалансированных расходов, определяющих характер проточного течения, — все эти факторы порождают отдельные классы задач с хаотическими свойствами.

Попытка учесть анизотропную геометрию локализованной подводной возвышенности на неограниченной f -плоскости предпринята в работе [86], в которой использовалась возможность разделения переменных в уравнении Пуассона для топографической составляющей функции тока в эллиптических координатах (p, q) :

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin p \cosh q, & 0 \leq p \leq 2\pi, \\ y &= \rho \cos p \sinh q, & 0 \leq q < \infty, \\ \rho &= \text{const}. \end{aligned} \quad (62)$$

Форма подводной возвышенности задавалась функцией

$$h(q) = \frac{1}{1 + (\gamma \sinh 2q)^{2m}}, \quad (63)$$

где для простоты m полагалось четным, а набегающий поток имел вид (52) при постоянном угле θ , задавая который можно было рассматривать варианты продольного ($\theta = 0$) и поперечного ($\theta = \pi/2$) обтекания препятствия с эллиптическими изобатами. В численных экспериментах принималось $\rho = 2$, $\gamma = 1$, $m = 6$, $\sigma = 0,5$,

$W_0 = 0,2$ (переход к безразмерным переменным такой же, как в осесимметричном случае). Профили рельефа дна и соответствующей топографической скорости в главных сечениях семейства эллиптических изобат $x = 0$ и $y = 0$ аналогичны приведенным в работе [86] (см. рис. 3 из цитируемой работы). Картины распределения критических точек результирующего потока, положения линий линейной нейтральной устойчивости и сепаратрисы топологически имеют такой же вид, как и в осесимметричном случае, тем не менее, различаясь для продольного и поперечного обтекания. Сравнение зависимостей от времени (n) числа трассеров, вынесенных из вихревой области за n периодов пульсирующего с частотой ν потока (61), показало, что оптимальный вынос реализуется при частоте, близкой к $\nu = 0,2$, причем вентиляция вихревой области эффективнее при поперечном обтекании. Анализ сечений Пуанкаре, построенных для продольного и поперечного обтеканий [86], показал, что с увеличением частоты ν происходит разрушение исходной и достаточно плотно заполненной регулярными траекториями вихревой области, причем под действием двух конкурирующих механизмов — формирования стохастического слоя в окрестности невозмущенной сепаратрисы и резонансных явлений в ядре вихря, приводящих к возникновению все новых эллиптических и гиперболических точек. Сравнение с осесимметричным случаем показывает, что при соизмеримых значениях определяющих параметров вынос маркеров в эллиптическом случае происходит интенсивнее, а оптимальная частота изменяется в зависимости от формы подводной горы и ее ориентации.

Отметим также, что в [86] была предпринята попытка применить технику "динамики лепестков" на начальном этапе развития процесса хаотизации (lobe dynamics [83]) по предложенной в [87] численной схеме, реализацию которой не удалось полностью автоматизировать, поэтому для окончательной оценки эффективности выноса использовалась техника сечений Пуанкаре.

5.4. Модель с береговой чертой

Вследствие линейного характера уравнений (25) легко строится решение для полуплоскости, на которой условия непротекания на прямолинейной границе $y = 0$ удовлетворяются с помощью метода зеркальных отображений. Например, функция тока для находящегося в точке $(0, 1)$ дельтаобразного топографического возмущения, помещенного в ориентированный вдоль границы однородный поток со скоростью $W(t)$, в безразмерных переменных имеет вид

$$\psi = -W(t)y + \sigma \ln \frac{x^2 + (y+1)^2}{x^2 + (y-1)^2}. \quad (64)$$

В стационарном случае $W = W_0 = \text{const}$ в зависимости от величины $W_0 > 0$ (с критическим значением $W_0 = 4$) картина линий тока представлена на рис. 14. С уменьшением W_0 форма сепаратрисы изменяется от гомоклинической ($W_0 = 4,4$) до гетероклинической ($W_0 = 3,6$). По аналогии с [81] асимптотический анализ толщины стохастического слоя, основанный на простых физических соображениях, был выполнен в работе [88], где показано, что наличие границы вблизи топографического вихря приводит к утолщению этого слоя. Так, при характерных параметрах работы [81] стохастический

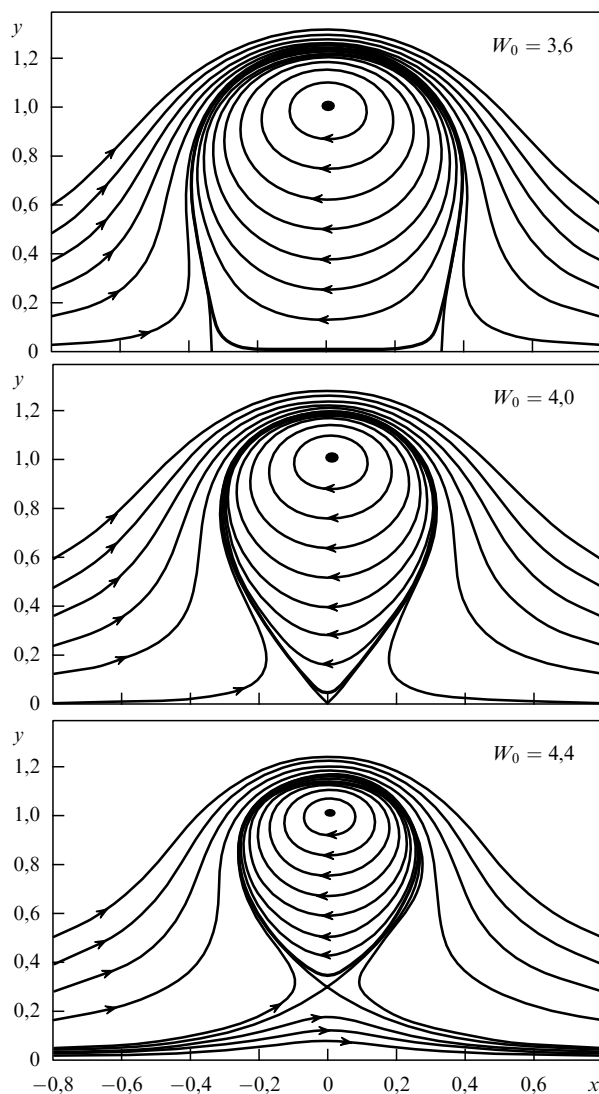


Рис. 14. Картины линий тока для стационарного случая.

слой увеличивается при наличии границы в полтора раза и может занимать значительную часть вихревой области.

Вымывание частиц из вихревой области определяется устойчивым и неустойчивым многообразиями хаотического инвариантного множества и происходит по сценарию, подробно описанному в разделе 3. Топология и фрактальные свойства траекторий этого множества изменяются с ростом влияния границы (с изменением W_0), однако по-прежнему имеется бесконечное множество неустойчивых периодических траекторий со всевозможными периодами, слабохаотических траекторий с "прилипанием" к "островам" регулярного движения и хаотических траекторий с широким диапазоном времен захвата в вихревой области. Для количественной характеристики поведения траекторий в работе [89] использовались время нахождения маркера в вихревой области и показатель Ляпунова, накопленный за это время. Указанные характеристики рассчитывались для всех фазовых картин, представленных на рис. 14. Распределение показателей Ляпунова, приведенных к начальным положениям маркеров в вихревой области, выявляет основные типы траекторий. Области с малыми показателями Ляпунова располагаются в вихревом ядре и на "остро-

вах" регулярного поведения в стохастическом море. Вблизи невозмущенной сепаратрисы располагаются области с большими показателями Ляпунова и малыми временами захвата. Соответствующие начальные условия находятся вблизи неустойчивого многообразия хаотического инвариантного множества. Траектории с промежуточными значениями показателей Ляпунова и продолжительными временами захвата маркеров в вихревой зоне проходят вблизи устойчивого многообразия этого множества. Сравнение областей хаотического поведения, выделенных по распределениям накопленных показателей Ляпунова и времен нахождения маркеров в вихревой области, обнаружило их различие в случае сильного влияния границы ($W_0 = 3,6$).

Указанное различие объяснено появлением траекторий особого типа, которые крайне редки в случае слабого влияния границы, а также в ее отсутствие [89]. Эти траектории распределены почти по всей вихревой области, имеют большой накопленный показатель Ляпунова и при этом долго не вымываются из вихревой области. Среди них могут быть траектории, отслеживающие периодические орбиты с большими периодами и периодические седловые движения, а также блуждающие хаотические траектории, "прилипающие" к границам "островов" регулярного движения. Однако характерной особенностью таких траекторий являются достаточно частые перескоки между объектами притяжения (возможно разного типа) и низкая при этом вероятность выхода из вихревой области. Подобное поведение характерно для гамильтоновых систем с ограниченным фазовым пространством. Можно предположить, что наличие таких траекторий в нашей модели с границей объясняется появлением в результате изменения топологии фазового пространства большого числа канторов, достаточно близких к КАМ-торам. В такой ситуации проникновение частицы сквозь один кантор еще более или менее вероятно, но она может просачиваться сквозь соседние канторы, попадая как внутрь вихревой области, так и в сторону проточной области. Таким образом, вероятность прохождения частицы сквозь несколько канторов и выхода в результате в проточную область становится довольно малой. Для выделения маркеров с поведением такого типа в [90] предложен комбинированный коэффициент

$$\alpha = \frac{t}{T} \frac{\lambda}{\lambda^*} \frac{dy}{r}, \quad (65)$$

где T — время, за которое большинство маркеров покидает вихревую область, λ^* — усредненный по всем траекториям накопленный показатель Ляпунова, dy — максимальное расстояние между последовательными пересечениями траекторией оси y (для $y < 1$), r — расстояние между эллиптической и гиперболической точками или расстояние от эллиптической точки до границы. На рисунке 15 показаны распределения α , приведенные к начальным положениям маркеров для трех значений скорости (см. рис. 14) и для случая без границы ($W_0 = 2,0$). Из рисунка видно, что с увеличением влияния границы число маркеров с большим значением α возрастает. В качестве критерия для выделения маркеров этого типа можно взять неравенство $\alpha^* < \alpha$, где α^* — максимальное значение для случая слабого влияния границы. Существенно, что начальные положения таких маркеров распределены нерегулярно по вихревой обла-

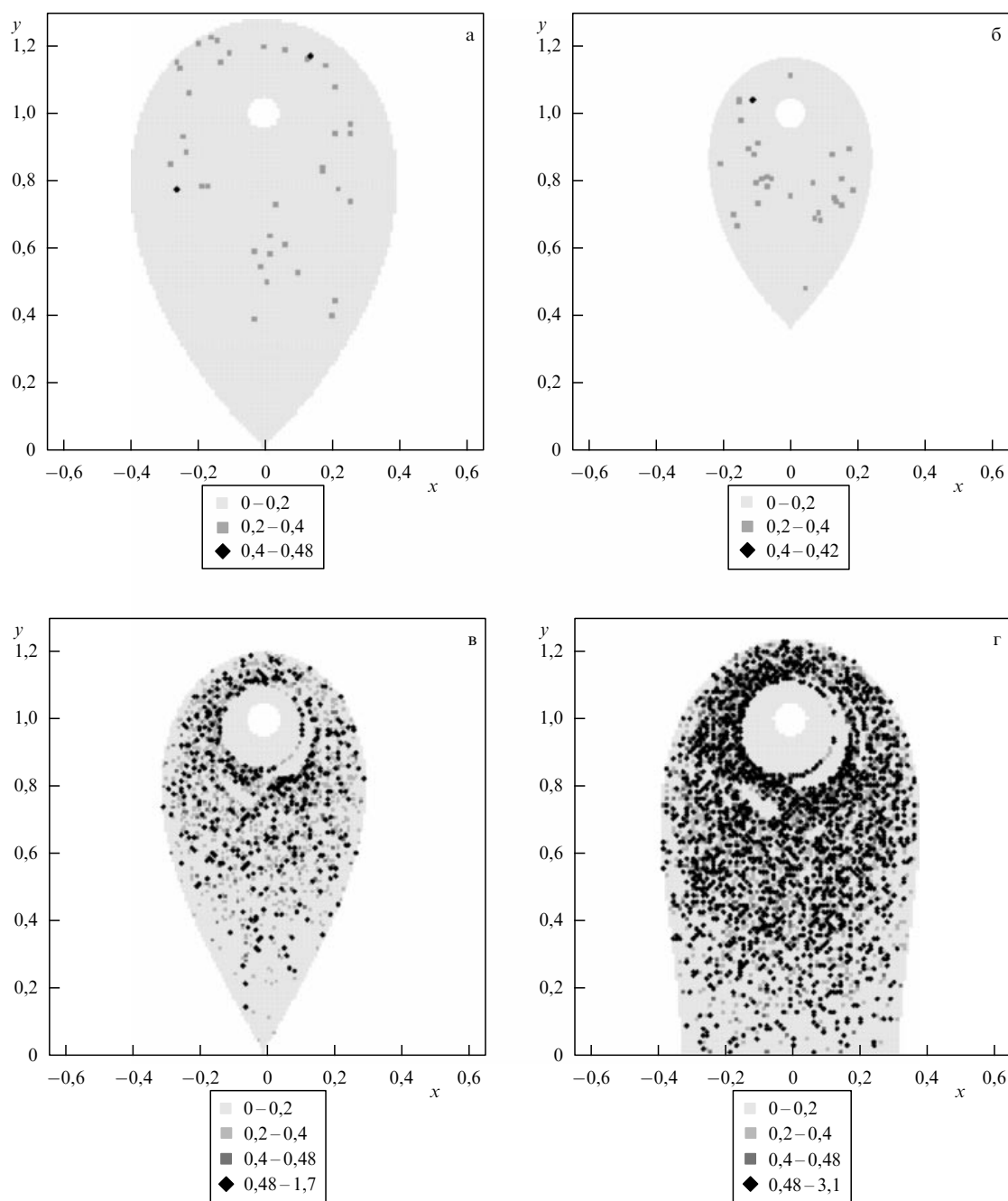


Рис. 15. Распределение коэффициента α , приведенное к начальным положениям маркеров: (а) $W_0 = 2,0$, (б) $W_0 = 4,6$, (в) $W_0 = 4,0$, (г) $W_0 = 3,6$.

сти. Число таких маркеров можно оценить, подсчитав маркеры, имеющие α больше текущего (рис. 16). Видно, что их число составляет 7–10 % при $W_0 = 4,0$ и 25 % при $W_0 = 3,6$.

Таким образом, можно заключить, что, с одной стороны, влияние границы увеличивает перемешивание в системе, а с другой, — препятствует быстрому выносу, что, по-видимому, связано с ростом числа "островов" регулярного поведения или, точнее, почти разрушенных нелинейных резонансов.

5.5. Двухслойная модель

Мы рассмотрели баротропные, динамически согласованные модели вихревого движения в океане, допускающие

хаотическую адвекцию [4, 84, 86, 90, 91]. Однако реальный океан неоднороден по глубине, поэтому исследование хаотической адвекции в бароклинном океане представляется естественным направлением усложнения моделей. В рамках концепции фоновых течений [4, 52] удастся сформулировать динамически согласованную двухслойную модель океана, допускающую хаотическое перемешивание в поле точечного топографического вихря и нестационарного проточного течения. В рамках подобных моделей исследовалось движение точечных вихрей в бароклинном океане [91], однако эффекты хаотического транспорта не рассматривались.

Рассмотрим двухслойную модель океана в приближении квазигеострофичности в неограниченном бас-

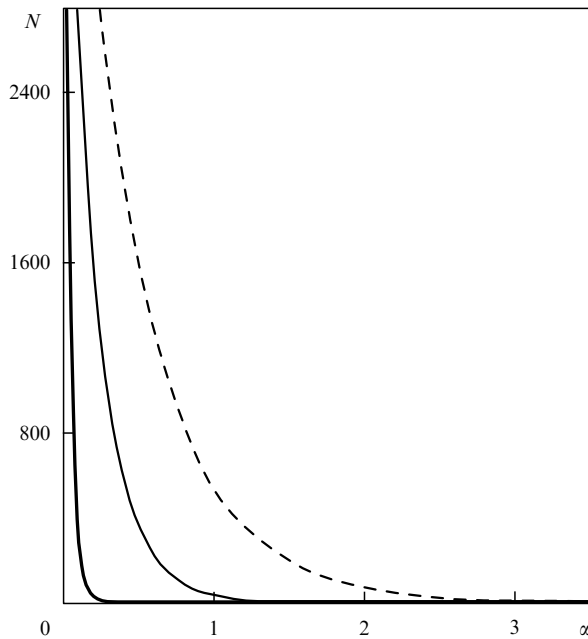


Рис. 16. Число маркеров, имеющих коэффициент α больше текущего. Штриховая кривая соответствует $W_0 = 3,6$, сплошная тонкая кривая — $W_0 = 4,0$ и сплошная жирная кривая — $W_0 = 4,6$.

сейне. Функции тока фонового течения, порожденного взаимодействием δ -образного возмущения рельефа дна $h(x, y) = \tau_\infty \delta(x, y)$ с проточным течением (которое мы будем считать баротропным), являются решениями уравнений (36), (37) и в верхнем и нижнем слое соответственно имеют вид [4, 52]

$$\psi_1 = -Uy - \frac{f_0 \tau_\infty}{2\pi H} [\ln kr + K_0(kr)], \quad (66)$$

$$\psi_2 = -Uy - \frac{f_0 \tau_\infty}{2\pi H} \left[\ln kr - \frac{H_1}{H_2} K_0(kr) \right], \quad (67)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $K_0(kr)$ — функция Макдональда нулевого порядка, H — глубина, H_1 и H_2 — толщины слоев, U^* — масштаб скорости, $h^* = h(0)$ — эффективное возвышение рельефа дна,

$$L_d = k^{-1} = \sqrt{\frac{g' H_1 H_2}{H f_0^2}}$$

— линейный масштаб, $\tau_\infty = \pi h^* L^{*2}$ — эффективный объем горы. Выбирая масштаб функции тока $\Psi = U^* L_d$ и используя в качестве безразмерных параметров число Россби $\varepsilon = U^*/(L_d f_0)$ и параметр

$$\sigma = \frac{f_0 L_d}{U^*} \left(\frac{L^*}{L_d} \right)^2 \frac{h^*}{H} = \frac{h^*}{\varepsilon H} \left(\frac{L^*}{L_d} \right)^2,$$

перейдем к отмеченным штрихами безразмерным переменным:

$$\begin{aligned} k(x, y) &= (x', y'), \\ (u, v, U) &= U^*(u', v', W), \\ \psi &= \Psi \psi'. \end{aligned} \quad (68)$$

Опуская штрихи, получаем

$$\psi_1 = -Wy - \sigma (\ln r + K_0(r)), \quad (69)$$

$$\psi_2 = -Wy - \sigma \left(\ln r - \frac{H_1}{H_2} K_0(r) \right). \quad (70)$$

В квазигеострофическом приближении должно выполняться ограничение $\varepsilon \sim o(1)$, $\sigma \sim O(1)$. Полагая $H = 4$ км, $H_1 = 900$ м, $H_2 = 3100$ м, $f_0 = 10^{-4}$ с $^{-1}$, $U^* = 10$ см с $^{-1}$, $h^* = 310$ м, получим $L_d = 1/k = 53$ км, $L^* = 31,8$ км, $\Psi = 5300$ м 2 с $^{-1}$, $\varepsilon \approx 0,0189$ и $\sigma \approx 1,0$, т.е. приближение квазигеострофичности удовлетворяется.

Уравнения движения жидких частиц в силу (69), (70) для верхнего и нижнего слоев имеют вид

$$u_1 = -\frac{\partial \psi_1}{\partial y} = W + \frac{y}{r} \left(\frac{1}{r} - K_1(r) \right), \quad (71)$$

$$v_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = -\frac{x}{r} \left(\frac{1}{r} - K_1(r) \right),$$

$$u_2 = -\frac{\partial \psi_2}{\partial y} = W + \frac{y}{r} \left(\frac{1}{r} + \frac{H_1}{H_2} K_1(r) \right), \quad (72)$$

$$v_2 = \frac{\partial \psi_2}{\partial x} = -\frac{x}{r} \left(\frac{1}{r} + \frac{H_1}{H_2} K_1(r) \right).$$

Поскольку в нижнем слое поведение частиц практически не отличается от их поведения в баротропном случае, будем рассматривать только верхний слой. Результаты предыдущих исследований хаотической адвекции показали, что при наличии малого нестационарного возмущения набегающего потока в поле течения (56) возможен транспорт жидких частиц из вихревой области в проточную, а параметры (частота, амплитуда и фаза) возмущения существенно влияют на степень выноса [90, 92]. Для исследования влияния частоты возмущения на транспорт маркеров проводился численный эксперимент по отслеживанию пятна из 8250 маркеров, заполняющих в начальный момент времени всю вихревую область при различных значениях частоты возмущения. Скорость набегающего потока задавалась в виде

$$W(t) = 0,3(1 + 0,1 \sin(vt)), \quad (73)$$

где v — частота возмущения. Маркер считался вымытым, если его траектория покидала контрольную полосу $|x| = 3$ [91]. На рисунке 17 представлена зависимость нормированного числа маркеров $N(v)$, покинувших вихревую область, от частоты возмущения. Наряду с наличием оптимальной частоты возмущения $v = 0,59$ [84, 92], при которой вымывается максимальное число маркеров, имеется несколько локальных экстремумов. Подобное поведение $N(v)$ не наблюдалось ни в одной из рассмотренных ранее моделей [89, 92]. Отметим, что ввиду больших вычислительных затрат определены не все локальные экстремумы.

5.6. Оптимальная частота

Вопрос о степени хаотизации системы в зависимости от частоты возмущения поднимался во многих работах, в частности, было показано, что при высоких частотах [84, 92, 93] толщина стохастического слоя в окрестности сепаратрисы экспоненциально мала. Разумно предположить [84, 92], что существуют оптимальные для хаотиче-

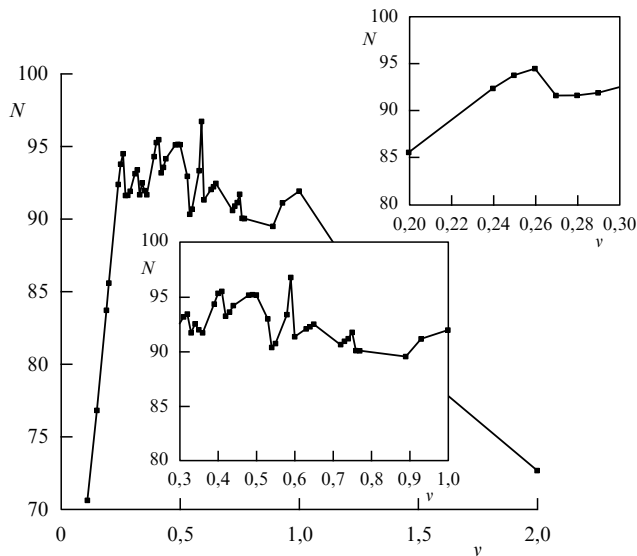


Рис. 17. Зависимость предельной доли вынесенных маркеров от частоты возмущения (двухслойная модель).

ского перемешивания частоты. На примере трех моделей, для которых в работах [86, 94] были получены зависимости степени хаотизации фазового пространства от частоты, мы предложим объяснение этих зависимостей на основе анализа времени обращения частиц по невозмущенным траекториям вокруг эллиптической точки.

Поскольку рассматриваемые динамические системы, в отличие, скажем, от обсуждаемой в [95], являются открытыми, задача определения меры хаотической компоненты фазового пространства упрощается. Действительно, нерегулярные траектории, изначально расположенные в вихревой области, со временем покинут ее, а регулярные останутся [86]. Таким образом, расположив равномерно в вихревой области достаточное количество маркеров и вычислив, сколько из них покинет эту область за достаточно большое время, мы получим долю хаотических траекторий среди всех выбранных, что может служить хорошей оценкой меры хаотической компоненты фазового пространства. В работе [86] рассчитывались зависимости числа вынесенных маркеров от времени для различных значений частоты возмущения. Из анализа стационарных значений этой величины был сделан вывод о наличии оптимальной для хаотического перемешивания частоты и получено численное значение этой величины (для моделей с гауссовой и эллиптической возвышенностями). На рисунке 17 приведена зависимость степени хаотизации фазового пространства (доля вынесенных из вихревой области маркеров) от частоты возмущения для двухслойной модели. Аналогичные зависимости для моделей с гауссовой и эллиптической горами приведены в [86], а уточненные зависимости — в [96]. Отметим, что нам пришлось построить указанные кривые в более широком диапазоне частот и с лучшим разрешением по частоте, что позволило обнаружить локальные максимумы и минимумы и в однослойных моделях, хотя они и не так ярко выражены, как в двухслойной [96].

На рисунке 18 приведены зависимости частоты оборота в невозмущенном случае ($\varepsilon = 0$) от начального положения траектории, которое бралось на оси y ниже

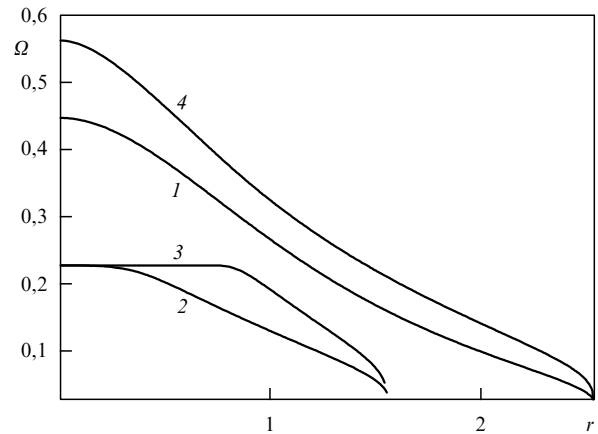


Рис. 18. Зависимость частоты оборота жидкой частицы от расстояния до эллиптической точки вдоль линии, соединяющей эллиптическую и гиперболическую точки, для гауссовой (кривая 1), эллиптической при $\theta = 0$ (кривая 2), эллиптической при $\theta = \pi/2$ (кривая 3), двухслойной (кривая 4).

эллиптической точки. Анализируя кривые, представленные на рис. 18, мы можем определить начальное положение траекторий, соответствующих нелинейным резонансам разных кратностей [93, 97]. Существенной особенностью указанных кривых является то, что не все простые нелинейные резонансы могут существовать в рассматриваемых динамических системах.

В соответствии с КАМ-теоремой при частоте возмущения v нелинейные резонансы возможны в окрестности частот оборота $\bar{v} = (n/m)v$, где n и m — целые числа, при условии, что частота $\bar{v}$ возможна в системе. В случае гауссовой возвышенности при частоте возмущения $v > 0,44$ резонанс $\bar{v} = v$ существовать не может и ближайшим к эллиптической точке достаточно простым резонансом может являться резонанс $\bar{v} = (4/5)v$ или $\bar{v} = (2/3)v$ и т.п. Более точное определение кратности ближайшего к центру вихря нелинейного резонанса требует более подробного анализа. Мы предполагаем, что имеет место следующий механизм, определяющий степень хаотизации фазового пространства. Пока ближайший к центру вихря нелинейный резонанс находится достаточно далеко от центра, он перекрывается следующим за ним. В соответствии с критерием перекрытия резонансов [93, 97] определяемые ими "острова" устойчивости полностью или частично разрушаются, и мы имеем в рассматриваемой области фазового пространства хаотическое поведение траекторий и локальный максимум степени хаотизации фазового пространства. С дальнейшим ростом частоты возмущения ширина ближайшего к центру вихря нелинейного резонанса начинает уменьшаться за счет выхода частот оборота соответствующих траекторий за критическое значение (0,44 для гауссовой горы, 0,22 для эллиптической горы и 0,56 для двухслойной модели) вплоть до полного исчезновения этого нелинейного резонанса. По мере уменьшения ширины ближайшего к центру вихря резонанса уменьшается и степень его перекрытия со следующим за ним, который перестает разрушаться, и мы наблюдаем возникновение или увеличение соответствующего ему "острова" устойчивости, т.е. локальный минимум степени хаотизации фазового пространства. При дальней-

Таблица. Значения частот возмущения, соответствующих локальным максимумам степени выноса маркеров из вихревой области для моделей с гауссовой и эллиптической подводными возвышенностями, а также для двухслойной модели. Указаны кратности нелинейных резонансов, для которых эти частоты являются критическими

Гауссова гора		Эллиптическая гора				Двухслойная модель	
		$\theta = 0$		$\theta = \pi/2$			
ν	$n/m \approx 0,44/\nu$	ν	$n/m \approx 0,2/\nu$	ν	$n/m \approx 0,22/\nu$	ν	$n/m \approx 0,52/\nu$
0,22	2			0,11	2/1	0,26	2
0,26	5/3					0,32	5/3
0,28	3/2					0,34	3/2
0,33	4/3	0,15	4/3	0,165	4/3	0,41	4/3
0,44	1	0,2	1	0,22	1	0,48	~ 1
						0,59	~ 1
		0,24	4/5	0,3	4/5	0,65	4/5
		0,27	3/4				
		0,29	2/3	0,33	2/3	0,76	2/3
		0,38	1/2	0,44	1/2	1	1

шем увеличении частоты возмущения последний оставшийся в системе нелинейный резонанс приближается к центру, одновременно расширяясь в соответствии с оценкой ширины нелинейного резонанса $\delta\bar{\nu} \sim \nu/m$, приведенной в [93]. Расширение двух ближайших к центру вихря нелинейных резонансов приводит к увеличению степени их перекрытия и в соответствии с критерием перекрытия резонансов к разрушению соответствующих "островов" устойчивости, т.е. к увеличению степени хаотизации фазового пространства вплоть до достижения локального максимума, после чего начинает исчезать следующий резонанс и ситуация повторяется. При приближении к центру вихря резонанса с $n/m < 1$ ширина резонансов начинает уменьшаться по мере увеличения m и, по-видимому, можно ожидать, что глобальный максимум степени хаотизации фазового пространства будет находиться в окрестности частоты возмущения, равной критической для данной модели, т.е. такой, при которой из системы уходит резонанс с $n/m = 1$. В таблице приведены частоты возмущения, отвечающие локальным максимумам степени хаотизации фазового пространства, и соответствующие им кратности резонансов, достигших критического значения частоты, для моделей с подводной горой гауссовой формы, эллиптической формы (две ориентации относительно проточного течения) и двухслойной модели [86].

В целом, приведенные в таблице значения подтверждают вывод о связи частот возмущения, на которых достигаются локальные и глобальный экстремумы степени хаотизации фазового пространства динамической системы, с максимальной частотой оборота жидких частиц в соответствующей модели. Однако с приближением к оптимальной частоте, при которой достигается максимальная степень перемешивания, точность определения кратности нелинейного резонанса, ближайшего к центру вихря, существенно падает. По-видимому, это связано с тем, что наши рассуждения основываются на теории возмущений, так как и КАМ-теорема, и анализ нелинейных резонансов опираются на предположение о малости возмущения. В нашем случае центр вихря возмущенной системы значительно смещается от положения эллиптической точки невозмущенной системы, что, по-видимому, должно приводить к смещению частоты близкого к центру нелинейного резонанса и критической частоты его существования. Анализ сечений Пуанкаре на оптимальных частотах при уменьшении амплитуды

возмущения подтверждает этот вывод, т.е. мы наблюдаем смещение частоты нелинейного резонанса с увеличением амплитуды возмущения.

Несмотря на грубость предложенных оценок вывод о том, что в рассмотренных моделях мера хаотизации фазового пространства достаточно велика в области частот возмущения от половины критической до удвоенной критической, является достаточно надежным. Оценку положения локальных экстремумов в окрестности частот, соответствующих близости нелинейных резонансов к критической частоте, также можно считать убедительной.

6. Лабораторные эксперименты по моделированию геофизической хаотической адвекции

6.1. Течение с круговоротами

В этом разделе излагаются результаты лабораторного эксперимента, выполненного в Океанографическом институте в Вудсхолле в 2001 г. [77] с целью имитирования взаимодействия западного пограничного глубинного противотечения с круговоротами, и обсуждается, как их можно интерпретировать с помощью геометрических структур в прототипной кинематической модели хаотической адвекции (см. раздел 3). Экспериментальная установка представляет собой цилиндрический танк диаметром 42,5 см со средней глубиной 20 см и наклоном дна с севера на юг, равным 0,15. Танк вращается с угловой скоростью $\Omega = 2$ рад с^{-1} . Крышка на поверхности воды в танке может вращаться с дифференциальной скоростью $\Delta\Omega < 0$, порождая антициклонический однородный вихрь поверхностного напряжения. В результате возникает западное пограничное течение (скорость порядка 0,1–0,3 см с^{-1}) с двумя круговоротами. Ключевым управляющим параметром нелинейности является отношение толщин пограничного слоя Стоммела и инерционного слоя $\delta \simeq 8\sqrt{\Delta\Omega/\Omega}$ [77]. При $\delta \leq 1,1$ поток почти стационарен. Варьируя скорость вращения крышки, $\Omega(t) = \Delta\Omega_0(1 + A_{\text{osc}} \sin 2\pi t/T_{\text{osc}})$, можно создавать периодический поток. Измерение и визуализация горизонтальной циркуляции осуществлялись разными способами. Частицы с нейтральной плавучестью облучались горизонтальным пучком лазера, и их треки регистрировались цифровой видеокамерой. Прямые измере-

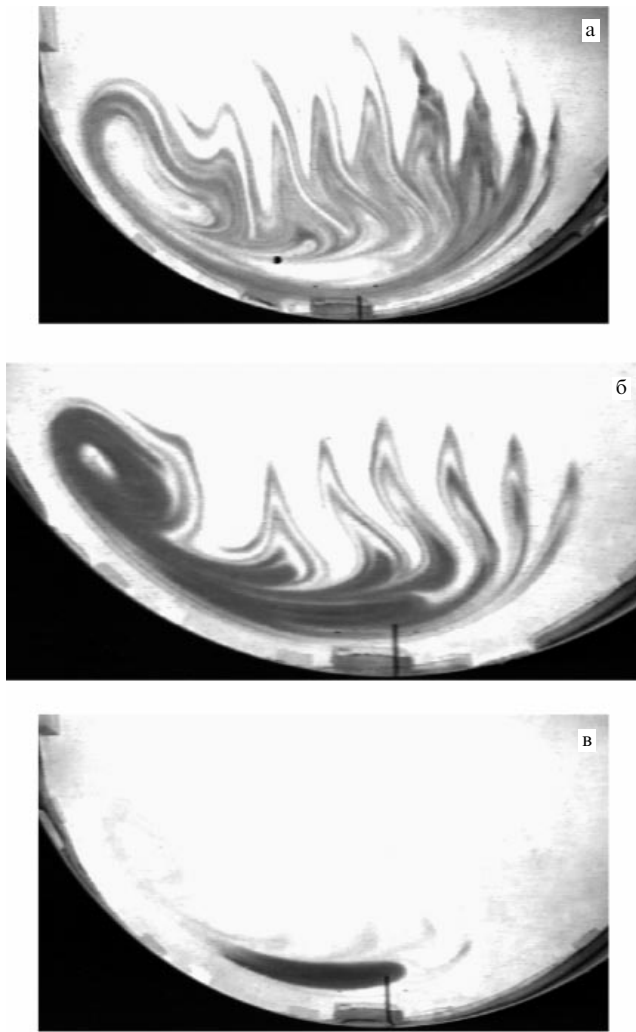


Рис. 19. Паттерны красителя в лабораторном эксперименте [77] при инъекции (а) в западном пограничном течении, (б) на границе южного круговорота, (в) во внутренней области южного круговорота. Рисунок любезно предоставлен L. Pratt (Океанографический институт, Вудсхолл, США).

ния скорости проводились с помощью видеоскоросте-метра с пространственным разрешением порядка 1 см. Визуализация потока осуществлялась также с помощью впрыскивания красителя, его освещения и записи на видеокамеру.

При $1,1 \leq \delta \leq 1,4$ поток состоял из двух круговоро-тов, северного и южного, которые отчетливо проявля-лись при введении красителя в виде ∞ -образной фигуры. В стационарном потоке перемешивание красителя про-исходит из-за молекулярной диффузии. Хаотическая адвекция красителя возникает при периодическом возму-щении потока ($20 \leq T_{\text{osc}} = 2\pi/\Delta\Omega \leq 131$ с). На рисунке 19 приведены снимки треков красителя для трех разных точек инъектирования: в западном пограничном тече-нии (т.е. снаружи невозмущенной сепаратрисы, рис. 19а), на границе южного круговорота (т.е. на ее внутреннем крае, рис. 19б) и во внутренней области южного круго-ворота (рис. 19в). Эксперимент проводился при $\delta = 1,25$, $A_{\text{osc}} = 0,05$ и $T_{\text{osc}} = 131$ с [77]. В первых двух случаях транспорт и перемешивание красителя осуществляются через ярко выраженные филаменты, которые разви-

ваются и в южном (более отчетливо, так как краситель инъектируется вблизи южного круговорота), и в север-ном круговоротах (север на этих рисунках находится слева, запад — внизу). Фактически на этих снимках мы видим эволюцию неустойчивого многообразия хаотиче-ского инвариантного множества Λ , так как краситель вводился вблизи невозмущенной ∞ -образной сепарат-рисы. В случае инъектирования внутри южного круго-ворота краситель остается там на длительное время, поскольку КАМ-торы являются барьерами, проницае-мость которых обусловлена только молекулярной диф-фузией.

Обратим внимание на сходство треков численного (см. рис. 4) и лабораторного (рис. 19б) экспериментов. В обоих случаях краситель инъектировался вблизи невоз-мущенной сепаратрисы и оба трека являются образами неустойчивых многообразий потока. Различие обусло-влено тем, что невозмущенная сепаратриса нашего модельного потока имела ∞ -образную форму, и, следо-вательно, наш поток имел только один (южный) круго-ворот. Проведенный в разделе 3 геометрический анализ фрактальных свойств потока, транспорта и пере-мешивания пассивных примесей объясняет основные свойства хаотической адвекции лабораторного экспери-мента работы [77], который, по утверждению авторов этой работы, может служить лабораторной моделью перемешивания между западными пограничными тече-ниями и суббассейновыми круговоротами.

6.2. Геострофическая струя с волнами Россби

В этом разделе описаны результаты лабораторных экспериментов группы Н. Swinney по хаотической адвекции пассивных примесей в лабораторном прото-типе геострофического струйного течения с волнами Россби [98–100]. Танк с жидкостью между двумя цилиндрами быстро вращается. Крышка и стенки танка прозрачны, что позволяет вести съемки траекто-рий частиц красителя видеокамерой, помещенной на вращающуюся платформу, которая находится выше танка. Квазидвумерное течение возбуждается посред-ством непрерывной прокачки жидкости сквозь дырки в наклонном дне внутрь танка и из него (чередующиеся источники и стоки, каждый из которых состоит из большого числа дырок малого диаметра). Наклонное дно моделирует бета-эффект — вариацию силы Корио-лиса с широтой. Накачка создает радиальный градиент давления, который благодаря действию силы Корио-лиса порождает азимутальное струйное течение. В широком диапазоне параметров эксперимента струя имеет устойчивую волнообразную форму. В зависимо-сти от силы накачки и скорости вращения танка создавались двумерные течения с различным волно-вым числом или числом вихрей. Азимутальная ско-рость струи на два порядка величины превосходила среднюю радиальную скорость.

Измеренная радиальная зависимость азимутальной компоненты скорости для чисел Рейнольдса $\sim 10^4$ имела вид струи Бикли $\text{sech}^2[(r - \bar{r})/d]$, где $\bar{r}$ и d — измеренные значения среднего радиуса струи и ее ширины. Следова-тельно, функция тока должна иметь форму гиперболи-ческого тангенса. Преобразование Фурье азимутальной компоненты скорости показало наличие двух и более азимутальных мод. Так что для моделирования такого потока можно выбрать следующую простую функцию

тока [99] в полярных координатах:

$$\Psi = du_0 \sum_j \varepsilon_j \tanh \frac{r - \bar{r} - b \cos m_j(\theta - \omega_j t)}{d}, \quad (74)$$

сходную с функцией тока (14) кинематической модели меандрирующего течения. Здесь $\sum \varepsilon_j = 1$, u_0 — максимально возможная скорость, ω_j — азимутальная скорость j -й волны в неподвижной системе координат, k_j — волновое число j -й моды. В системе координат, вращающейся со скоростью ω_1 (т.е. в новой системе полярных координат $r, \varphi = \theta - \omega_1 t$), функция (74) принимает вид

$$\Psi' = du_0 \left(\varepsilon_1 \tanh \frac{r - \bar{r} - b \cos m_1 \varphi}{d} + \varepsilon_2 \tanh \frac{r - \bar{r} - b \cos m_2(\varphi - \delta \omega_2 t)}{d} + \dots \right) - \omega_1 r^2, \quad (75)$$

где $\delta \omega_j = \omega_j - \omega_1$. Очевидно, что в присутствии только одной волны ω_1 функция тока (75) стационарна, и движение частиц полностью регулярно. При наличии двух и более волн уравнения движения

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi'}{\partial \varphi}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \Psi'}{\partial r}, \quad (76)$$

вообще говоря, неинтегрируемы и адвекция становится хаотической. Заметим, что в отличие от временных зависимостей потока в экспериментах в [77] (см. раздел 6.1) и других лабораторных экспериментах по хаотической адвекции [2] с периодической вынуждающей накачкой, временная зависимость данного потока естественно возникает благодаря азимутальным волнам.

Исследование радиального транспорта в описываемых экспериментах показало наличие барьера, препятствующего перемешиванию поперек струи даже для чисел Рейнольдса $\sim 10^5$, при которых эйлерово поле скоростей становится турбулентным. Вычисление сечений Пуанкаре нелинейной динамической системы (76) с функцией тока (75) показывает существование такого барьера как для двухволнового, так и для трехволнового возбуждения [99] при разумных значениях управляющего параметра $b/d < 1$ (экспериментальные значения $b/d \sim 0,5 - 0,6$). Мерой азимутального транспорта служит дисперсия

$$\sigma^2(t) = \langle \Delta \theta^2(t, \tau) \rangle - \langle \Delta \theta(t, \tau) \rangle^2, \quad (77)$$

$$\Delta \theta(t, \tau) = \theta(t + \tau) - \theta(\tau),$$

где усреднение производится по времени τ для отдельных траекторий и по разным траекториям в ансамбле. Расплывание пятна красителя в неоднородном поле скоростей происходит благодаря пространственно-временным вариациям скорости жидкости и молекулярной диффузии. На масштабах времени всех экспериментов молекулярная диффузия пренебрежимо мала. Однако неизбежные в реальном эксперименте технические шумы и конечный размер пассивных частиц (трассеры нейтральной плавучести с диаметром ~ 1 мм) искажают теоретические траектории.

Наличие когерентных структур (струй и вихрей) порождает корреляции в движении частиц на больших расстояниях и/или временах, в результате чего становится неприменимой центральная предельная теорема и, следовательно, диффузия является аномальной, $\sigma^2 \sim t^\gamma$,

$\gamma \neq 1$ (см. обзоры по аномальной диффузии [8, 101]). Возможны как субдиффузия с $\gamma < 1$, так и супердиффузия с $\gamma > 1$. В случае стационарной (в движущейся системе координат) функции тока транспортные свойства очень просты. Азимутальная координата $\theta(t)$ частиц в вихре осциллирует вокруг некоторого постоянного значения и растет линейно со временем для частиц в струе. Разрушение некоторых инвариантных кривых в потоках с периодической функцией тока (75) приводит к эффектам, типичным для гамильтоновых систем и описанным в разделе 3, — "прилипанию" траекторий к границам "островов" в фазовом пространстве, фракталам, полетам Леви, аномальному транспорту и др. Эти эффекты обусловлены существованием структурообразующих инвариантных множеств гамильтоновых систем (см. раздел 3). Типичная хаотическая траектория в негиперболической гамильтоновой системе демонстрирует перемежаемость, т.е. хаотические участки чередуются с регулярными. Последние в описываемых потоках соответствуют событиям двух типов: пленению траекторий в динамических ловушках ("прилипание"), легко идентифицируемым на записи $\theta(t)$ как малые осцилляции, и полетам Леви с постоянной азимутальной скоростью, представленным длинными прямолинейными участками функции $\theta(t)$.

Регистрируя траектории большого числа частиц (от 1300 до 1700), авторы работы [102] обнаружили следующие закономерности функций плотности вероятности этих событий $P(t)$. Наиболее представительные данные были получены для струйного потока с семью вихрями. Функция распределения по длительности полетов имеет отчетливый степенной "хвост", $P_F(t) \sim t^{-\mu}$, где $\mu = 3,2 \pm 0,2$. Этот показатель примерно одинаков для полетов по часовой стрелке и против часовой стрелки. Функция распределения по длительности времени пленения не распадается экспоненциально и не имеет отчетливого степенного "хвоста". Измерение дисперсии для ансамбля трассеров дает зависимость $\sigma^2 \sim t^{1,5}$, т.е. супердиффузию. Заметим, что центральная предельная теорема для $\mu > 3$ предсказывает нормальную диффузию с $\sigma^2 \sim t^\gamma$, где $\gamma = 1$. Аналогичные измерения с шестивихревым периодическим потоком дают значения $\mu = 2,5 \pm 0,2$ и супердиффузию с $\gamma = 1,65 \pm 0,15$.

В работе [103] описаны лабораторные эксперименты в двухслойной вращающейся жидкости. На пути к бароклинному хаосу обнаружены последовательности бифуркаций удвоения периода [104]. Обзор теоретических и экспериментальных работ по хаотическому поведению в неустойчивых бароклинических системах представлен в работе [105]. Экспериментальное исследование хаотического перемешивания и транспорта пассивной примеси в квазидвумерном четырехвихревом течении с периодической зависимостью эйлерова поля скорости от времени проводилось в работах [106–108] на установке, в которой течение в тонком слое электролита возбуждается магнитогидродинамически. Обзор устойчивости и вихревых структур квазидвумерных сдвиговых течений дан в работе [109].

7. Заключение

Мы показали насколько плодотворными являются идеи и методы теории динамических систем для описания лагранжева транспорта и перемешивания в океане.

Кратко остановимся на некоторых проблемах, которые остались за рамками этого обзора. Уравнения адвекции с полностью детерминированной правой частью являются, конечно, идеализированной моделью геофизических потоков. Даже компьютерные вычисления подвержены случайным ошибкам. Для устойчивых траекторий малость этих ошибок гарантирует устойчивый результат. В случае неустойчивых хаотических траекторий экспоненциальное увеличение малой ошибки быстро приводит к уходу компьютерной траектории от теоретически детерминированной. Казалось бы, это дезавуирует все компьютерные расчеты хаотических траекторий. Однако в сильно хаотических системах вблизи каждой "зашумленной" орбиты найдется хаотическая детерминированная (т.е. без шума) траектория (строго это доказывается для отображений с гиперболической динамикой). Таким образом, мы не в состоянии на компьютере из данной начальной точки получить теоретическую хаотическую орбиту и получаем вместо нее некоторую "зашумленную" компьютерную орбиту, которая является теоретической для близкого начального условия. По образному выражению Дж. Форда: "Боги хаоса помогают вычислять невычислимое".

При моделировании транспорта и перемешивания в реальных геофизических потоках нужно учитывать разномасштабную турбулентность. В рамках динамического подхода в правую часть уравнений адвекции добавляется случайное поле скоростей с заданными статистическими свойствами. В кинематических моделях соответствующую функцию тока можно представить в виде большого числа гармоник со случайными фазами в заданном диапазоне частот. В работах [25, 27, 110] на примере хаотической адвекции с фиксированным точечным вихрем в набегающем нестационарном потоке показано, что фрактальные и аномальные статистические свойства транспорта не исчезают при наличии слабого и умеренного шума. Более того, при шумовом воздействии на сравнительно больших временах сохраняются определенные свойства устойчивости движения по Ляпунову. Это приводит к существованию так называемых когерентных кластеров в гамильтоновых системах с шумом [110, 111], которые в гидродинамических несжимаемых потоках являются густками пассивных частиц, когерентно адвектируемых шумовым потоком в течение длительного времени (по сравнению с временными характеристиками потока). Причиной образования когерентных кластеров являются нелинейные резонансы в гамильтоновых системах в отличие от стохастической кластеризации пассивной примеси в полностью случайном поле скоростей [112, 113].

Таким образом, возможны три основных механизма нелинейного транспорта. В первом в результате бифуркаций возникают гиперболические (седловые) точки с соответствующими устойчивыми и неустойчивыми многообразиями, которые существенно изменяют направление транспорта в своих окрестностях. Второй механизм обусловлен периодическими или квазипериодическими возмущениями (собственно хаотическая адвекция), а третий — случайными возмущениями. Если экмановский транспорт, вызванный ветром, затрагивает только самый верхний слой океана, то на больших глубинах может преобладать хаотическая адвекция.

Хаотическая адвекция является эффективным механизмом транспорта планктона, икры и рыбы молоди.

Математические модели процессов выживания, гибели и переноса биологических объектов являются самосогласованными системами уравнений адвекции, реакции и диффузии [114]. Методология теории динамических систем в физической океанографии применима не только к задачам адвекции пассивных частиц. Она с успехом может использоваться и уже используется для изучения конвективного перемешивания и транспорта (например термохалинной конвекции), адвекции примесей с химической или биологической активностью при учете конечного размера частиц и вязкости среды, что требует привлечения методов теории не гамильтоновых, а диссипативных систем.

Традиционно в физической океанографии задача считается решенной, как только найдено решение гидродинамических уравнений движения. С точки зрения теоретико-динамического подхода к изучению транспорта и перемешивания это является только началом. Эйлерово поле скоростей находится экспериментально или в результате численного интегрирования более или менее сложных динамически согласованных моделей потоков и подставляется в правую часть уравнения адвекции пассивных примесей (1). Выявление и изучение соответствующих лагранжевых структур, обнаружение транспортных барьеров, каналов выноса и зон интенсивного перемешивания дает ценную информацию об основных свойствах транспорта и перемешивания водных масс в океане и атмосфере. Однако поля скоростей, являющиеся входными данными при вычислении инвариантных лагранжевых многообразий, содержат неизбежные ошибки, связанные с конечными размерами сетки интегрирования модели, неопределенностью начальных условий и параметров (например поля ветра) и пр. Возникают вопросы о том, насколько грубы и устойчивы (в обычном смысле) лагранжевы структуры к погрешностям эйлерова поля скоростей и как коррелируют друг с другом эйлеровы и лагранжевы ошибки. Эти вопросы остаются открытыми. Отметим работу [115], в которой они обсуждаются.

Другая проблема связана с тем, что вычисленное или измеренное эйлерово поле скоростей не является динамической системой в строгом смысле, а представляет собой совокупность данных на пространственно-временной сетке. Это поле известно (к тому же с ограниченной точностью) на конечном промежутке времени и, следовательно, аperiодично. Математические понятия теории динамических систем (инвариантные многообразия, фрактальные множества, хаос, ляпуновские показатели и др.) определены для бесконечного времени. Математики уже преуспели в обобщении основных понятий теории динамических систем, распространив их на конечные промежутки времени. Строго говоря, простая кинематическая модель, рассмотренная в разделе 3, не является хаотической, так как все траектории пассивных частиц открытого потока асимптотически регулярны. Однако мы показали, что движение в зоне перемешивания имеет все признаки истинного хаоса с гомоклиническими структурами, фракталами, хаотическим инвариантным множеством и положительным показателем Ляпунова. Поскольку бесконечное время не является физической реальностью, можно было бы не беспокоиться на этот счет, но определенная осторожность необходима, если поле скоростей задано не аналитически, а численно на ограниченном промежутке времени.

Ясно, что экстраполяция результатов на более длительное время, вообще говоря, некорректна. Гиперболическая структура реальных потоков (сложность которой и является причиной хаотического транспорта) имеет переносный характер.

В заключение упомянем о хаотическом транспорте и перемешивании в атмосфере. Использование идей теории динамических систем для описания транспорта и перемешивания в атмосфере обусловлена двумя обстоятельствами. Устойчивая стратификация атмосферы подавляет вертикальные движения, в результате чего транспорт является в основном квазигоризонтальным на изэнтропийных поверхностях. Доминирующий вклад в адвекцию дают крупномасштабные потоки с характерными масштабами порядка нескольких сотен километров (т.е. значительно большими размеров облаков). Важнейшими пассивными трассерами в атмосфере являются водяной пар, озон, различные химические вещества и потенциальная завихренность (которую с рядом оговорок можно считать пассивной). Быстрое вращение Земли порождает крупномасштабные волны Россби в атмосфере. Приближения двумерности и несжимаемости потока позволяют ввести функцию тока и получить гамильтоновы уравнения движения для пассивных частиц типа (5). Применяя ту же методологию, которая изложена в настоящем обзоре для океанских потоков, можно исследовать зарождение динамического хаоса в специфической модели, его динамические, статистические и топологические свойства, фрактальную динамику транспорта в атмосфере. Лабораторное моделирование транспорта волнами Россби описано в разделе 6. В работах [116–120] изучались главным образом математические аспекты транспорта и перемешивания пассивных частиц в бегущих волнах, многие из которых рассматривались в более ранних работах по гамильтонову хаосу частиц в поле двух и более волн (см. монографии [7, 121] и приведенные там ссылки). Численное моделирование хаотической адвекции в атмосфере выявляет неоднородное перемешивание, барьеры и аномальный транспорт [122–126] типичные для гамильтоновых геофизических потоков. Похожие особенности обнаружены в реальной атмосфере. Например, край зимнего полярного вихря в стратосфере (зона атмосферы от 10 до 50 км), по-видимому, является малопроницаемым барьером, транспорт сквозь который затруднен. На средних широтах вне вихря и в меньшей степени внутри него имеются области сильного перемешивания. Субтропическая струя является барьером, отделяющим верхнюю тропосферу от нижней стратосферы, тогда как по обе стороны от струи (в сторону полюсов и экватора) находятся области перемешивания. Практический интерес представляет динамика активных примесей с диффузией, способных к химической и биологической активности. Отметим важную роль хаотического инвариантного множества в геофизических потоках с адвекцией активных примесей, например фитопланктона в океане и химических реагентов в океане и атмосфере. Такие множества являются своего рода динамическими катализаторами биопродуктивности и химических реакций.

Авторы благодарны М.Ю. Улейскому и М.В. Будянскому за помощь в оформлении рисунков, а А. Bower и L. Pratt за предоставленные рисунки. Работа выполнена при поддержке Программы Президиума РАН "Математические методы в нелинейной динамике", РФФИ

(проекты 06-01-00198, 06-05-96032, 06-05-96080), Федеральной целевой программы "Мировой океан" (тема "Комплексные исследования процессов, характеристик и ресурсов дальневосточных морей России") и Президиума Дальневосточного отделения РАН.

Список литературы

1. Dijkstra H A *Nonlinear Physical Oceanography* (Atmospheric and Oceanographic Sci. Library, Vol. 22) (Dordrecht: Kluwer, 2000)
2. Ottino J M *The Kinematics of Mixing: Stretching, Chaos, and Transport* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989)
3. Wiggins S *Annu. Rev. Fluid Mech.* **37** 295 (2005)
4. *Избранные труды профессора В.Ф. Козлова* (Под ред. А.С. Саркисяна, В.А. Акуличева) (Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2006)
5. Dutkiewicz S, Griffa A, Olson D B *J. Geophys. Res.* **98** 16487 (1993)
6. Лихтенберг А, Либерман М *Регулярная и стохастическая динамика* (М.: Мир, 1984)
7. Заславский Г М, Сагдеев Р З *Введение в нелинейную физику: От маятника до турбулентности и хаоса* (М.: Наука, 1988)
8. Заславский Г М *Физика хаоса в гамильтоновых системах* (Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004)
9. Арнольд В И, Козлов В В, Нейштадт А И *Математические аспекты классической и небесной механики* (Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, Т. 3, Под ред. Р.В. Галекелидзе) (М.: ВИНТИ, 1985)
10. Aref H J *Fluid Mech.* **143** 1 (1984)
11. Aref H *Phys. Fluids* **14** 1315 (2002)
12. Arnold V I *C.R. Hebd. Seances Acad. Sci.* **261** 17 (1965)
13. Hénon M *C.R. Hebd. Seances Acad. Sci.* **262** 312 (1966)
14. Eckart C J *Mar. Res.* **7** 265 (1948)
15. Welander P *Tellus* **7** 141 (1955)
16. Ламб Г *Гидродинамика* (М.-Л.: ОГИЗ, 1947)
17. Poincaré H *C.R. Acad. Sci. Paris* **123** 1224 (1896); Пуанкаре А *Избранные труды* Т. 1, 2 (М.: Наука, 1971)
18. Козлов В В *Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике* (Ижевск: Изд-во Удм. гос. ун-та, 1995)
19. Мельников В К *Труды Моск. мат. общества* **12** 3 (1963)
20. Rom-Kedar V, Leonard A, Wiggins S J *Fluid Mech.* **214** 347 (1990)
21. MacKay R S, Meiss J D, Percival I C *Physica D* **13** 55 (1984)
22. Будянский М В, Пранц С В *Письма в ЖТФ* **27** (12) 51 (2001)
23. Будянский М В, Улейский М Ю, Пранц С В *ЖЭТФ* **126** 1167 (2004)
24. Будянский М В, Улейский М Ю, Пранц С В *Докл. РАН* **386** 686 (2002)
25. Будянский М В, Пранц С В, в сб. *Нелинейные динамические процессы (к 80-летию со дня рождения Уно Коввиллема)* (Под ред. С.В. Пранца) (Владивосток: Дальнаука, 2004) с. 63
26. Budyansky M, Uleysky M, Prants S *Physica D* **195** 369 (2004)
27. Budyansky M V, Uleysky M Yu, Prants S V, in *Proc. Fifth EUROMECH Nonlinear Dynamics Conf.* (Ed. D H van Campen et al.) (Eindhoven: Eindhoven Univ. of Technology, 2005) p. 1489
28. Mitchell K A et al. *Chaos* **13** 880 (2003)
29. Журбас В М, Ох И С, Пыжев М Л *Океанология* **43** 660 (2003)
30. Sainz-Trápaga S, Sugimoto T J *Oceanogr.* **56** 79 (2000)
31. Bower A S, Lozier M S J *Phys. Oceanogr.* **24** 1399 (1994)
32. Bower A S, Rossby T J *Phys. Oceanogr.* **19** 1177 (1989)
33. Osborne A R et al. *Tellus* **41A** 416 (1989)
34. Osborne A R, Caponio R *Phys. Rev. Lett.* **64** 1733 (1990)
35. Brown M G, Smith K B J *Phys. Oceanogr.* **20** 139 (1990)
36. Meyers S D, Magnan J F, O'Brien J J *Nonlinear Proc. Geophys.* **1** (1) 45 (1994)
37. Özgökmen T M et al. *J. Phys. Oceanogr.* **31** 2691 (2001)
38. Assireu A T et al. *Physica D* **168–169** 397 (2002)
39. Bower A S J *Phys. Oceanogr.* **21** 173 (1991)
40. Samelson R M J *Phys. Oceanogr.* **22** 431 (1992)
41. Улейский М Ю, Будянский М В, Пранц С В *Нелинейная динамика* **2** 165 (2006)
42. Meyers S D J *Phys. Oceanogr.* **24** 1641 (1994)
43. Duan J, Wiggins S J *Phys. Oceanogr.* **26** 1176 (1996)
44. Dutkiewicz S, Paldor N J *Phys. Oceanogr.* **24** 2418 (1994)
45. Yuan G-C, Pratt L J, Jones C K R T J *Phys. Oceanogr.* **34** 1991 (2004)

46. Yang H, Liu Z *Geophys. Res. Lett.* **21** 545 (1994)
47. Yang H J. *Phys. Oceanogr.* **26** 115 (1996)
48. Poje A C, Haller G J. *Phys. Oceanogr.* **29** 1649 (1999)
49. Yang H, Liu Z J. *Phys. Oceanogr.* **27** 1258 (1997)
50. Poplvani L M, Wisdom J *Phys. Fluids A* **2** 123 (1990)
51. Dahleh M D *Phys. Fluids A* **4** 1979 (1992)
52. Козлов В Ф, Гурулев А Ю *Метеорология и гидрология* (6) 70 (1994)
53. Козлов В Ф *Изв. РАН. Сер. Физ. атм. и океана* **31** 245 (1995)
54. Pedlosky J *Geophysical Fluid Dynamics* 2nd ed. (New York: Springer-Verlag, 1987)
55. Тихонов А Н, Самарский А А *Уравнения математической физики* (М.: Наука, 1997)
56. Rhines P B, Young W R J. *Fluid Mech.* **122** 347 (1982)
57. Козлов В Ф, Гурулев А Ю *Изв. РАН. Сер. Физ. атм. и океана* **34** 395 (1998)
58. Козлов В Ф, Макаров В Г *Океанология* **35** 658 (1995)
59. Козлов В Ф, Макаров В Г *Океанология* **36** 493 (1996)
60. Козлов В Ф, Макаров В Г *Океанология* **38** 505 (1998)
61. Козлов В Ф, Кошель К В *Изв. РАН. Сер. Физ. атм. и океана* **35** 137 (1999)
62. Liu Z, Yang H J. *Phys. Oceanogr.* **24** 1768 (1994)
63. Berloff P S, Meacham S P J. *Mar. Res.* **55** 407 (1997)
64. Meacham S P, Berloff P S J. *Mar. Res.* **55** 523 (1997)
65. Ипатов В М, Филатов А Н *Изв. РАН. Сер. Физ. атм. и океана* **33** 443 (1997)
66. Pierrehumbert R T, Yang H J. *Atmos. Sci.* **50** 2462 (1993)
67. Козлов В Ф, Кошель К В *Изв. РАН. Сер. Физ. атм. и океана* **36** 119 (2000)
68. Jones S W, Aref H *Phys. Fluids* **31** 469 (1988)
69. Pierrehumbert R T *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **58** 285 (1991)
70. Yang H *Int. J. Bifurc. Chaos* **3** 1013 (1993)
71. Hogg N G J. *Fluid Mech.* **58** 517 (1973)
72. Козлов В Ф *Модели топографических вихрей в океане* (М.: Наука, 1983)
73. Зырянов В Н *Топографические вихри в динамике морских течений* (М.: Инст. вод. проблем РАН, 1995)
74. Mullineaux L S, Mills S W *Deep-Sea Res. Pt. I* **44** 745 (1997)
75. Михайлик Е В, Ханчук А И *Докл. РАН* **394** 234 (2004)
76. Goldner D R, Chapman D C *Deep-Sea Res. Pt. I* **44** 719 (1997)
77. Deese H E, Pratt L J, Helfrich K R J. *Phys. Oceanogr.* **32** 1870 (2002)
78. Sokolovskiy M A, Zyryanov V N, Davies P A *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **88** 1 (1998)
79. Carnevale G F, Kloosterziel R C, van Heijst G J J. *Fluid Mech.* **233** 119 (1991)
80. Милн-Томсон Л М *Теоретическая гидродинамика* (М.: Мир, 1964)
81. Гледзер А Е *Изв. РАН. Сер. Физ. атм. и океана* **35** 838 (1999)
82. Wiggins S *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos* (New York: Springer-Verlag, 1990)
83. Wiggins S *Chaotic Transport in Dynamical Systems* (New York: Springer-Verlag, 1992)
84. Козлов В Ф, Кошель К В *Изв. РАН. Сер. Физ. атм. и океана* **37** 378 (2001)
85. Shevchenko I I *Phys. Lett. A* **241** 53 (1998)
86. Izrail'sky Yu G, Kozlov V F, Koshel' K V *Phys. Fluids* **16** 3173 (2004)
87. Krauskopf B, Osinga H J. *Comput. Phys.* **146** 404 (1998)
88. Козлов В Ф, Кошель К В, Степанов Д В *Дальневосточный матем. журн.* **2** (2) 89 (2001)
89. Козлов В Ф, Кошель К В, Степанов Д В *Изв. РАН. Сер. Физ. атм. и океана* **41** 242 (2005)
90. Koshel' K V, Stepanov D V *Regul. Chaotic Dyn.* **9** (4) 439 (2004)
91. *Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей* (Под ред. А В Борисова, И С Мамаева, М А Соколовского) (М. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003)
92. Rom-Kedar V, Poje A C *Phys. Fluids* **11** 2044 (1999)
93. Заславский Г М *Стохастичность динамических систем* (М.: Наука, 1984)
94. Кошель К В, Степанов Д В *Докл. РАН* **407** 542 (2006)
95. Шевченко И И, Мельников А В *Письма в ЖЭТФ* **77** 772 (2003)
96. Израильский Ю Г, Кошель К В, Степанов Д В *Докл. РАН* **407** 773 (2006)
97. Chirikov B V *Phys. Rep.* **52** 263 (1979)
98. Sommeria J, Meyers S D, Swinney H L *Nature* **337** 58 (1989)
99. Behringer R P, Meyers S D, Swinney H L *Phys. Fluids A* **3** 1243 (1991)
100. Solomon T H, Weeks E R, Swinney H L *Phys. Rev. Lett.* **71** 3975 (1993)
101. Shlesinger M F, Zaslavsky G M, Klafter J *Nature* **363** 31 (1993)
102. Weeks E R, Urbach J S, Swinney H L *Physica D* **97** 291 (1996)
103. Hart J E *Tellus* **37A** 286 (1985)
104. Mundt M D, Hart J E, Ohlsen D R J. *Fluid Mech.* **300** 311 (1995)
105. Klein P *Fluid Dyn. Res.* **5** 235 (1990)
106. Danilov S D et al. *Chaos* **6** 297 (1996)
107. Данилов С Д и др. *Изв. РАН. Сер. Физ. атм. и океана* **35** 810 (1999)
108. Данилов С Д, Довженко В А, Якушкин И Г *ЖЭТФ* **118** 483 (2000)
109. Должанский Ф В, Крымов В А, Манин Д Ю *УФН* **160** (7) 1 (1990)
110. Makarov D V et al. *Phys. Rev. E* **73** 066210 (2006)
111. Makarov D V, Uleysky M Yu, Prants S V *Chaos* **14** 79 (2004)
112. Клячкин В И, Кошель К В *УФН* **170** 771 (2000)
113. Клячкин В И *Диффузия и кластеризация пассивной примеси в случайных гидродинамических потоках* (М.: Физматлит, 2005)
114. Tél T et al. *Phys. Rep.* **413** 91 (2005)
115. Kuznetsov L et al. *Physica D* **191** 81 (2004)
116. Knobloch E, Weiss J B *Phys. Rev. A* **36** 1522 (1987)
117. Weiss J B *Phys. Fluids A* **3** 1379 (1991)
118. del-Castillo-Negrete D, Morrison P J *Phys. Fluids A* **5** 948 (1993)
119. Ngan K, Shepherd T G J. *Fluid Mech.* **334** 315 (1997)
120. del-Castillo-Negrete D *Phys. Fluids* **10** 576 (1998)
121. Заславский Г М и др. *Слабый хаос и квазирегулярные структуры* (М.: Наука, 1991)
122. Pierrehumbert R T *Phys. Fluids A* **3** 1250 (1991)
123. Pierce R B, Fairlie T D A J. *Geophys. Res.* **98** 18589 (1993)
124. Bowman K P J. *Geophys. Res.* **98** 23013 (1993)
125. Waugh D W, Plumb R A J. *Atmos. Sci.* **51** 530 (1994)
126. Shuckburgh E, Haynes P *Phys. Fluids* **15** 3342 (2003)

Chaotic advection in the ocean

K.V. Koshel', S.V. Prants

V.I. Il'ichev Pacific Oceanological Institute, Far-Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences,
ul. Baltiiskaya 43, 690041 Vladivostok, Russian Federation
Tel. (7-4232) 312-860, (7-4232) 316-419, (7-4232) 312-602. Fax (7-4232) 312-573
E-mail: kvkoshel@poi.dvo.ru, prants@poi.dvo.ru

The chaotic advection of passive scalars in the ocean is reviewed from a dynamic systems theory viewpoint, together with its topological, dynamical and fractal properties. Analytical and numerical results on Lagrangian transport and mixing in kinematic and dynamic chaotic advection models are described for meandering jet currents, topographical eddies in a barotropic ocean, and a two-layer baroclinic ocean. Laboratory experiments on rotating tank flows as an imitation of geophysical chaotic advection are discussed. Application prospects of dynamic systems theory in physical oceanography are examined.

PACS numbers: **05.45. – a**, **47.52. + j**, **92.10. – c**

Bibliography — 126 references

Received 17 February 2006

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **176** (11) 1177 – 1206 (2006)

Physics – Uspekhi **49** (11) (2006)