Январь 2006 г. **Том 176, № 1**

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

О соотношении тензорной и скалярной мод возмущений в космологии Фридмана

В.Н. Лукаш

Дается элементарный вывод фундаментального соотношения $T/S = 4\gamma$, связывающего тензорную и скалярную моды космологических возмущений в ранней Вселенной, комментируются утверждения Л.П. Грищука по этому вопросу.

PACS numbers: **04.30.–w**, **04.62.+v**, **98.80.–k**

В обзорной работе "Реликтовые гравитационные волны и космология" (см. *УФН* **175** (12) 1289–1303 (2005)) подводится итог многолетних исследований автора, посвященных квантово-гравитационному рождению гравитационных волн (тензорная мода T) и возмущений плотности (скалярная мода S) в однородной изотропной Вселенной. Происхождение первичных космологических возмущений — важнейший вопрос физики XX века, инициированный пионерской работой Е.М. Лифшица [2] и первыми работами по квантованию T [3] и S [4] мод возмущений в плоской модели Фридмана. Точка зрения автора [1] в главных своих пунктах противоречит ставшему уже классическим результату о соотношении T и S в ранней Вселенной, вошедшему в книги по космологии.

Поскольку основные положения [1] и ряда предыдущих работ Л.П. Грищука, посвященных соотношению спектров реликтовых гравитационных волн и возмущений плотности, базируются на утверждении о том, что "амплитуды гравитационных волн и возмущений плотности должны быть грубо равны друг другу" (см. обсуждение после формулы[1] (33)*), мы в настоящей статье рассмотрим только данное ключевое утверждение.

Цитированное утверждение противоречит общепринятому результату, что *отношение квадратов амплитуд T- и S-мод космологических возмущений, родившихся квантово-гравитационным образом в ранней Вселенной, пропорционально* γ_i, где параметр $\gamma \equiv -\dot{H}/H^2$ берется в момент начала стадии параметрического усиления для возмущений данной длины волны[2]. (Напомним, что на стадии инфляции $\gamma < 1$.) Ниже мы приведем элементарный вывод классического соотношения $T/S = 4\gamma$, не прибегая к решению уравнений для возмущений, а далее укажем, в чем состоит ошибка Л.П. Грищука.

С теоретической точки зрения задача о малых линейных космологических возмущениях эквивалентна задаче о поведении пробных полей в невозмущенной модели Фридмана, которая в свою очередь сводится к описанию безмассовых действительных полей в пространстве Минковского в переменном внешнем поле:

$$S[q] = \int L \, \mathrm{d}\eta \, \mathrm{d}\mathbf{x}\,, \quad L = \frac{1}{2}\,\alpha^2 \eta^{\mu\nu} q_{,\mu}\, q_{,\nu}\,, \tag{1}$$

где S и L — действие и лагранжева плотность поля q, запятая в индексе означает производную по координатам Минковского (η, $\mathbf{x}$) с метрическим тензором $\eta_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$.

Роль внешнего (параметрического) поля играет функция времени α^2, которая для каждой из двух поляризаций гравитационных волн равна величине $\alpha_T^2 = a^2/8\pi G$ (в этом случае q_T есть поперечно-бесследовая компонента гравитационного поля) [3], а для возмущений плотности — $\alpha_S^2 = a^2\gamma/4\pi G$ (в этом случае q_S есть калибровочно-инвариантная комбинация продольного гравитационного потенциала и потенциала 4-скорости среды, умноженного на хаббловский параметр) [4].

В фурье-представлении поле q разбивается на элементарные осцилляторы q_n, зависящие от времени, с лагран-

[1] Здесь и далее ссылки на формулы работы [1] помечены звездочкой.

[2] В точной теории вместо параметра γ в этой и последующих формулах следует писать γ/β^2, где β — скорость звука в среде в единицах скорости света [4]. Однако поскольку для большинства рассматриваемых приложений $\beta \sim 1$, мы здесь и далее параметр β опускаем. Также в наших единицах $c = 1$ и $l_{\mathrm{Pl}} = (G\hbar)^{1/2}$, масштабный фактор $a \equiv (1+z)^{-1}$, $\mathbf{x}$ — пространственные (сопутствующие) координаты плоской модели Фридмана, $\eta = \int \mathrm{d}t/a$ и t — конформное и физическое время, $H = \dot{a}/a = a'/a^2$ — параметр Хаббла, точка или штрих над функцией означает производную по физическому или конформному времени.

В.Н. Лукаш. Астрокосмический центр физического института им. П.Н. Лебедева РАН,
117997 Москва, ул. Профсоюзная 84/32, Российская Федерация
Тел. (495) 333-33-66. Факс (495) 333-23-78
E-mail: vladimir@lukash.asc.rssi.ru

Статья поступила 16 сентября 2005 г., после доработки 15 ноября 2005 г.

жианами (далее волновой индекс n у фурье-мод опускаем)

$$L_n = \frac{1}{2n^3}\,\alpha^2(q'^2 - n^2 q^2)\,. \tag{2}$$

Эволюция осциллятора (2) зависит от функции f, определяющей его эффективную частоту:

$$\bar{q}'' + n^2(1-f)\,\bar{q} = 0\,,$$
$$\bar{q} = \frac{\alpha}{n}\,q\,, \quad f \equiv \frac{\alpha''}{\alpha n^2}\,. \tag{3}$$

При $|f| \ll 1$ осциллятор q находится в свободном адиабатическом режиме колебаний и затухает обратно пропорционально α ($q \propto \exp(-\mathrm{i}n\eta)/\alpha$). При $f \geqslant 1$ возникает режим параметрического усиления и поле q "замерзает" ($q \propto \mathrm{const}$). В переменных ($\bar{q}$, $\bar{p}$) лагранжиан имеет стандартный канонический вид:

$$L_n = \frac{n}{2}\,(\bar{p}^2 - \bar{q}^2)\,,$$
$$\bar{p} = \frac{\partial L_n}{\partial \bar{q}'} = \frac{\alpha q'}{n^2} = \frac{\bar{q}'}{n} - s\bar{q}\,, \quad s \equiv \frac{\alpha'}{\alpha n}\,, \tag{4}$$

где $\bar{p}$ — импульс поля, сопряженный к $\bar{q}$.

Ключ к разгадке соотношения T/S — это выбор начальных условий для элементарных q-осцилляторов, которые удобно определять в адиабатической зоне как состояние с наинизшей энергией для всех T- и S-осцилляторов (вакуум). Квантование систем (1), (2) — стандартная задача, не требующая пояснений. Вопрос состоит в однозначности выбора начального вакуумного состояния для q-осциллятора. Напомним, что свободный (невзаимодействующий) осциллятор имеет единственное основное состояние.

Для большинства инфляционных сценариев условие адиабатичности реализуется в микроскопической области ($\eta < \eta_i$), где период колебаний q-осциллятора меньше характерного времени изменения параметра α:

$$|s| < 1\,, \quad |f| < 1\,, \tag{5}$$

и гамильтониан системы (2) положительно определен. При выполнении обоих условий (5) квантово-механические операторы $\bar{q}$ и $\bar{p}$ описывают в главном порядке осциллятор, свободный от внешнего воздействия (см. (3) и (4)), что сводит к стандартной процедуру разбиения частот (на положительные и отрицательные) и определения основного состояния (отсутствие частиц на стадии (5)):

$$\langle \bar{p}^2 \rangle = \langle \bar{q}^2 \rangle = \frac{\hbar}{2}\,, \quad \eta < \eta_i\,, \tag{6}$$

где скобки $\langle \ldots \rangle$ означают усреднение по данному (вакуумному) состоянию.

Эквивалентным образом основное состояние на стадии (5) можно построить с помощью "нормированных" переменных q:

$$\tilde{q} = \frac{\alpha_0}{n}\,q\,,$$
$$L_n = \frac{1}{2n}\,\bar{\alpha}^2(\tilde{q}'^2 - n^2\tilde{q}^2) = \frac{n}{2}\left(\frac{\tilde{p}^2}{\bar{\alpha}^2} - \bar{\alpha}^2\tilde{q}^2\right),$$
$$\bar{\alpha} \equiv \frac{\alpha}{\alpha_0}\,, \tag{7}$$

которые канонизируют лагранжиан в течение конечного периода времени вблизи любого момента η_0 (причем $\eta_0 < \eta_i$), в пределах которого величину α можно считать постоянной ($\bar{\alpha} \simeq 1$), и, следовательно, тождественными оказываются канонические пары $\tilde{q} \simeq \bar{q}$ и $\tilde{p} \simeq \bar{p}$ и вакуумные условия (6), (8):

$$\langle \tilde{p}^2 \rangle = \langle \tilde{q}^2 \rangle = \frac{\hbar}{2}\,, \quad \forall \quad \eta_0 < \eta_i\,. \tag{8}$$

(Можно сказать, что переменные $\tilde{q}$ образуют касательное пространство к функции $\bar{q}$.)

Подчеркнем, что условия адиабатичности (5) обеспечивают однозначность выбора состояния (6), (8) как исходного состояния элементарных осцилляторов (2), отвечающего минимальному начальному уровню их возбуждений (вакуум поля q). В процессе дальнейшей эволюции q-осцилляторы попадают в зону параметрического усиления, равенства (6), (8) нарушаются, и их состояние становится многочастичным (рождение космологических возмущений).

Предполагая существование адиабатической стадии (5) в ранней Вселенной, которая в момент η_i ($f \sim s = 1$) сменилась стадией параметрического усиления, мы получаем из условия (6) величину амплитуды q-осциллятора в области "вмороженности" ($\eta > \eta_i$):

$$\langle q^2 \rangle \simeq \langle q_i^2 \rangle = \frac{n^2}{\alpha_i^2}\,\langle \bar{q}_i^2 \rangle \approx \frac{\hbar n^2}{2\alpha_i^2}\,. \tag{9}$$

Отсюда следует справедливость общепринятого утверждения для отношения T/S мод возмущений данной длины волны[3]:

$$\frac{T}{S} \equiv 2\,\frac{\langle q_T^2 \rangle}{\langle q_S^2 \rangle}\bigg|_{\eta > \eta_i} \simeq 2\left(\frac{\alpha_S}{\alpha_T}\right)_i^2 = 4\gamma_i \tag{10}$$

(учтены обе поляризации гравитационных волн).

А теперь рассмотрим ошибку Л.П. Грищука.

Соответствие безразмерных амплитуд элементарных осцилляторов обозначениям работы [1] определяется следующим образом:

$$q_T \equiv h\,, \quad q_S \equiv \frac{\zeta}{2}$$

(см. (11)*, (20)*). При определении состояния T-осциллятора автор следует логике уравнений (7) и (8) ($\tilde{q}_T \equiv \bar{h}$; см. (12)* – (17)*). Однако, переходя к S-моде, он вместо нормированной переменной $\tilde{q}_S$ вводит асимметричную (по отношению к $\alpha_S \propto a\sqrt{\gamma}$) переменную $\bar{\zeta}$ (см. (21)*):

$$\bar{\zeta} \equiv q_{\text{ЛПГ}} = \frac{\tilde{q}_S}{\sqrt{\gamma_0}}\,,$$
$$L_n = \frac{1}{2n}\,\bar{\alpha}_S^2\gamma_0(\bar{\zeta}'^2 - n^2\,\bar{\zeta}^2) = \frac{n}{2}\left(\frac{p_{\text{ЛПГ}}^2}{\bar{\alpha}_S^2\,\gamma_0} - \bar{\alpha}_S^2\,\gamma_0\,q_{\text{ЛПГ}}^2\right), \tag{11}$$
$$\bar{\alpha}_S \equiv \frac{a\sqrt{\gamma}}{a_0\sqrt{\gamma_0}}\,,$$

[3] Учитывая, что $\alpha_i H_i \approx n$, из (9) и (10) получаем хорошо известные выражения для спектров возмущений и их наклонов:

$$\langle q_T^2 \rangle^{1/2} \approx l_{\text{Pl}} H_i\,, n_T \equiv \frac{\mathrm{d}\ln\langle q_T^2 \rangle}{\mathrm{d}\ln n} \simeq -2\gamma_i \simeq -0{,}5\,\frac{T}{S}\,,$$

$$\langle q_S^2 \rangle^{1/2} \approx \frac{l_{\text{Pl}} H_i}{(2\gamma_i)^{1/2}}\,, \quad n_S \equiv \frac{\mathrm{d}\ln\langle q_S^2 \rangle}{\mathrm{d}\ln n} \simeq -\left(2\gamma + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma H}\right)_i\,.$$

для которой лагранжиан явно зависит от γ_0, а уравнения (8), переписанные для пары

$$q_{\text{ЛПГ}} \equiv \bar{\zeta}\,, \quad p_{\text{ЛПГ}} = \frac{\partial L_n}{\partial \bar{\zeta}'} = \tilde{p}\sqrt{\gamma_0}$$

($\mathbf{q}$, p в обозначениях (24)*, (25)*), также приобретают явную зависимость от величины параметра γ:

$$\langle q^2_{\text{ЛПГ}}\rangle = \frac{\hbar}{2\gamma_0}\,, \quad \langle p^2_{\text{ЛПГ}}\rangle = \frac{\hbar}{2}\,\gamma_0\,, \quad \forall \quad \eta_0 < \eta_i\,. \tag{12}$$

Очевидно, что вакуумное состояние никак не связано с выбором той или иной пары канонических переменных. Уравнения (8) (и тождественные им (12)) имеют прозрачный инвариантный смысл: равенство величин $\langle \tilde{q}^2\rangle = \langle \tilde{p}^2\rangle$ (или $\gamma_0\langle q^2_{\text{ЛПГ}}\rangle = \langle p^2_{\text{ЛПГ}}\rangle/\gamma_0$) означает равенство средних кинетической и потенциальной энергий элементарного осциллятора (2), а равенство каждой из этих величин $\hbar/2$ означает выбор минимально возможного уровня энергии осциллятора (т.е. вакуумное состояние) на адиабатической стадии (5).

Тем не менее автор [1] ошибочно интерпретирует состояние (12) для S-осцилляторов как сжатое (многочастичное; см. формулы после (26)*, (27)*), упуская из виду, что асимметрия уравнений (12) связана не с выбором состояния, по которому производилось усреднение, а с выбором переменной [4], в явном виде зависящей от γ, что приводит его к введению другого начального состояния (обозначим это состояние индексом ЛПГ), которое он называет "истинным вакуумным состоянием для переменной ζ" (см. формулы после (32)*):

$$\langle q^2_{\text{ЛПГ}}\rangle_{\text{ЛПГ}} = \langle p^2_{\text{ЛПГ}}\rangle_{\text{ЛПГ}} = \frac{\hbar}{2}\,, \quad \forall \quad \eta_0 < \eta_i\,, \tag{13}$$

и, как следствие, к утверждению $T/S \sim 1$ (см. (33)*), поскольку при $\eta > \eta_i$

$$\langle q^2_S\rangle_{\text{ЛПГ}} \simeq \gamma_i\langle q^2_S\rangle \approx \left(\frac{l_{\text{Pl}}\,n}{a_i}\right)^2 \approx \langle q^2_T\rangle\,. \tag{14}$$

Ошибка Л.П. Грищука состоит в неверной постановке начального вакуумного условия для S-осциллятора, при этом начальное состояние для T-осциллятора выбрано правильно. Следует заметить, что вакуумное состояние элементарного осциллятора (2) является единственным на стадии (5) и определяется исключительно методами квантовой механики [5], т.е. не требует знаний физики S- и T-мод. В этом плане, с формальной точки зрения, все осцилляторы подобны: их связь с внешним полем определена лишь функцией $\alpha(t)$ независимо от ее физического содержания (будь то масштабный фактор a для T-осциллятора или $a\sqrt{\gamma}$ для S-осциллятора). В частности, это означает, что амплитуда возбуждения S-осциллятора (под воздействием поля $\alpha(t)$) из состояния с наинизшей энергией может зависеть только от произведения $a\sqrt{\gamma}$, а не отдельно от γ или a, как это получается в работе [1] (ср. формулы (9) и (14)).

Лагранжиан S-моды (22)* получен из лагранжиана T-моды (13)* заменой a на $\tilde{a} \equiv a\sqrt{\gamma}$ и $\bar{h}$ на $\bar{\zeta}$, тогда как правильный переход из T в S, как видно из (2), происходит при замене α_T на α_S и q_T на q_S. При этом с точностью до численного множителя порядка единицы $a_0 h \propto h$ переходит в $\tilde{a}_0\zeta \propto \sqrt{\gamma_0}\,\bar{\zeta}$, а не в $\bar{\zeta}$, как полагает Л.П. Грищук. В результате, правильный лагранжиан (11) получается умножением (22)* на фактор γ_0.

Лагранжиан (22)* не совместим с другими формулами работы [1]. Так, в высокочастотном пределе гравитационные эффекты несущественны и лагранжиан S-моды должен переходить в лагранжиан звуковых волн в среде:

$$L_{n \gg aH} = \frac{1}{2n^3}\,a^2(\varphi_1'^2 - n^2\varphi_1^2)\,,$$

где

$$\varphi_1 \simeq \left(\frac{\gamma}{16\pi G}\right)^{1/2}\zeta = \frac{\alpha_S}{a}\,q_S$$

— потенциал материального поля при $n \gg aH$; см. (19)* – (20)*. Очевидно, что лагранжиан (22)* не удовлетворяет этому пределу.

Другое несоответствие: канонические переменные $q_{\text{ЛПГ}}$ и $p_{\text{ЛПГ}}$, рассмотренные [6] в (24)* и (25)*, являются каноническими по отношению к лагранжиану (11), а не (22)*, что легко проверяется прямой подстановкой выражений (11) и (22)* в уравнение (25)*. Кроме того, переписывая лангранжиан (22)* в терминах исходной полевой переменной ζ, мы видим, что он оказывается зависимым от произвольного момента времени η_0, что недопустимо. Устранение неточности в формуле (22)* сняло бы эти противоречия.

Резюмируя, мы можем констатировать, что лангранжиан (22)* не следует из полевого лагранжиана для минимально связанного с гравитацией скалярного поля (см. формулу до (19)*), и тогда дальнейшие комментарии излишни. Если же считать, что формула (22)* есть результат технической неточности, и исходить из правильного лагранжиана, то утверждение об "ошибочности" стандартного инфляционного результата (см., например, заголовок раздела 4 в [1]) связано с неправильным выбором начальных условий.

Второе замечание касается измерений величины T/S: она не пренебрежимо мала, как это неоднократно повторяет автор [1] (см., например, комментарий к формуле (6)*).

Оценка $T/S \simeq 4\gamma_i$ подтверждена точными расчетами для широкого класса инфляционных моделей (см., например, величину r в [5]). В частности, все модели хаотической инфляции с $p > 1$ ($V(\varphi) \propto \varphi^{2p}$, p — натуральное число) противоречат наблюдательным данным, поскольку предсказывают значительный уровень T/S и отклонение от спектра Зельдовича:

$$\frac{T}{S} \simeq \frac{2p}{N} \simeq (1 - n_S)\,\frac{2p}{1+p} \approx 0{,}04p\,, \tag{15}$$

где $N = 2\pi G\varphi^2/p \approx 50$ на масштабе порядка 10^3 Мпк.

[4] Напомним, что S-осцилляторы связаны с произведением $a\sqrt{\gamma}$, а не отдельно с a или γ.

[5] По сути, это математика (лагранжевых систем) — "*искусство называть разные вещи одинаковыми именами*", в определении Анри Пуанкаре.

[6] Заметим, что фактор γ в (24)*, (25)* следует заменить на γ_0, поскольку ζ убывает обратно пропорционально $\tilde{a} = a\sqrt{\gamma}$ в адиабатическом пределе (см. (20)*).

Исключением является случай массивного скалярного поля ($p = 1$), для которого амплитуда гравитационно-волновой моды всего лишь в 5 раз меньше скалярной ($\sqrt{0{,}04} = 1/5$), что не противоречит наблюдательным ограничениям с 95%-ным уровнем достоверности (см., например, [6]).

Следует подчеркнуть, что все значения $T/S > 0{,}2$ противоречат современным наблюдениям, поскольку в этом случае амплитуда S-моды оказывается недостаточной для образования наблюдаемой крупномасштабной структуры Вселенной (напомним, что сумма $T + S$ фиксирована данными по анизотропии реликтового излучения).

Автор благодарен редакции *УФН* за приглашение прокомментировать проблему о соотношении T- и S-мод первичных космологических возмущений. Любая дискуссия по фундаментальным вопросам космологии в столь широкой аудитории, как читатели *УФН*, способствует привлечению молодых талантливых исследователей к данной тематике.

Автор признателен Д.А. Компанейцу и Е.В. Михеевой за обсуждение статьи.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ (04-02-17444).

Список литературы

1. Грищук Л П *УФН* **175** 1289 (2005)
2. Лифшиц Е М *ЖЭТФ* **16** 587 (1946)
3. Грищук Л П *ЖЭТФ* **67** 825 (1974); Grishchuk L P, in *Eight Texas Symp. on Relativistic Astrophysics* (Ann. of the New York Acad. of Sci., Vol. 302, Ed. M D Papagiannis) (New York: The New York Acad. of Sci., 1977) p.439
4. Лукаш В Н *ЖЭТФ* **79** 1601 (1980); *Письма в ЖЭТФ* **31** 631 (1980); Lukash V N astro-ph/9910009
5. Lukash V N, Mikheeva E V *Int. J. Mod. Phys. A* **15** 3783 (2000)
6. Seljak U et al. *Phys. Rev. D* **71** 103515 (2005)

On the relation between tensor and scalar perturbation modes in Friedmann cosmology

V.N. Lukash
Astro-Space Centre of the P.N. Lebedev Physics Institute, Russian Academy of Sciences,
ul. Profsoyuznaya 84/32, 117997 Moscow, Russian Federation
Tel. (*7-495*) *333-33 66. Fax* (*7-495*) *333-23 78*
E-mail: *vladimir@lukash.asc.rssi.ru*

An elementary derivation of the fundamental relation $T/S = 4\gamma$ between the tensor and scalar modes of cosmological perturbations in the early Universe is given. Statements by L P Grishchuk on this problem are commented.

PACS numbers: **04.30.–w**, **04.62.+v**, **98.80.–k**

Bibliography — 6 references *Received 16 September 2005, revised 15 November 2005*

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **176** (1) 115–118 (2006) *Physics – Uspekhi* **49** (1) (2006)