

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Теория калибровочно-инвариантного отклика сверхпроводников на электромагнитное поле

П.И. Арсеев, С.О. Лойко, Н.К. Федоров

Предложен последовательный метод вычисления линейного отклика сверхпроводников на внешнее электромагнитное поле, позволяющий получить ответ в явно калибровочно-инвариантном виде. В рамках диаграммной техники для неравновесных процессов оказывается возможным вывести, как следствие уравнений самосогласования для параметра порядка в поле произвольной калибровки, уравнение, определяющее фазу параметра порядка как функцию внешних полей. Такой метод автоматически учитывает существование коллективных возбуждений в сверхпроводниках, которые нужно принимать во внимание для выполнения уравнения непрерывности. Рассмотрены возможные типы коллективных возбуждений в чистых сверхпроводниках при различных температурах. Дано изложение микроскопической теории, объясняющей возможность наблюдения коллективных мод в сверхпроводящих туннельных контактах.

PACS numbers: 74.20.Fg, 74.25.Nf, **74.81.-g**

Содержание

1. Введение (3).
2. Взаимодействие электронов с электромагнитным полем в модели БКШ (4).
3. Самосогласованный метод вычисления линейного отклика (6).
4. Простые предельные случаи (8).
5. Коллективные возбуждения в сверхпроводниках (10).
6. Возбуждение коллективных мод в туннельных экспериментах (12).
7. Заключение (16).
8. Приложения (16).

8.1. Нормальные и аномальные функции Грина сверхпроводника в диаграммной технике Келдыша. 8.2. Поляризационные операторы Q и P . Тождество Уорда. 8.3. Поведение поляризационных операторов Q и P в пределе малых q и ω .

Список литературы (20).

1. Введение

В 1957 г. появилась работа Дж. Бардина, Л. Купера и Дж. Шриффера [1], в которой впервые была сформулирована микроскопическая теория сверхпроводимости. Простая модель, предложенная этими авторами (называемая теперь моделью БКШ), чрезвычайно успешно объяснила многие свойства сверхпроводников. Однако

сначала при расчете линейного отклика сверхпроводника на электромагнитное поле в рамках модели БКШ возникли некоторые трудности. Довольно скоро было выяснено [2–5] из-за чего появляются проблемы. Дело оказалось в том, что требование калибровочной инвариантности удовлетворяется в сверхпроводнике не совсем тривиальным образом. В первых работах был вычислен ток, наведенный в сверхпроводнике только поперечным полем. Прямое обобщение полученных результатов на случай продольных полей приводило к нарушению требования калибровочной инвариантности отклика и к противоречию с уравнением непрерывности. Для решения этой проблемы необходимо учитывать возможность возбуждения внешним полем в сверхпроводнике не только боголюбовских квазичастиц, но и специфических для сверхпроводящего состояния коллективных мод. Вклад в ток, связанный с коллективными модами, устраняет противоречие с уравнением непрерывности и восстанавливает калибровочную инвариантность теории. Заметим, что даже в самом простом случае стационарных полей правильный учет калибровочной инвариантности очень важен. Именно это требование модифицирует хорошо известное уравнение Лондонов так, что из него следует одно из самых необычных свойств сверхпроводника — квантование магнитного потока в сверхпроводящем кольце.

В данном обзоре мы хотели бы показать, как последовательно описать линейный отклик сверхпроводников на электромагнитное поле в рамках модели БКШ, чтобы требования калибровочной инвариантности выполнялись автоматически. Разделы 2 и 3 посвящены выводу такой последовательной микроскопической теории. В разделе 4 обсуждаются некоторые простые следствия из общих формул, делающие яснее связь общего подхода с известными в теории сверхпроводимости соотноше-

П.И. Арсеев, С.О. Лойко, Н.К. Федоров. Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, 119991 Москва, Ленинский просп. 53, Российская Федерация
Тел. (495) 132-62-71
Факс (495) 135-85-33
E-mail: ars@lpi.ru; stol@lpi.ru; fedorov@lpi.ru

Статья поступила 9 февраля 2005 г.,
после доработки 20 мая 2005 г.

ниями. В разделе 5 коротко разбираются возможные типы коллективных возбуждений в сверхпроводниках и их роль в функциях отклика. Наконец, 6-й раздел посвящен вопросу, тесно связанному с проблемой коллективных мод в функциях отклика. В нем излагается теория, объясняющая, каким образом коллективные моды могут проявляться в измерениях туннельного тока между двумя сверхпроводниками.

2. Взаимодействие электронов с электромагнитным полем в модели БКШ

Напомним, что отправной точкой в теории БКШ является гамильтониан следующего вида:

$$\hat{H} = \int \hat{\psi}_\alpha^+(x) \left(\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} - \mu \right) \hat{\psi}_\alpha(x) d^3\mathbf{r} - g \int \hat{\psi}_\uparrow^+(x) \hat{\psi}_\uparrow^+(x) \hat{\psi}_\uparrow(x) \hat{\psi}_\downarrow(x) d^3\mathbf{r}. \quad (1)$$

Здесь $x = (t, \mathbf{r})$, ψ_α — гейзенберговский оператор уничтожения электрона со спином α ($\alpha = \uparrow, \downarrow$), g — константа межэлектронного взаимодействия. Здесь и далее используется форма записи, предложенная Л.П. Горьковым [6], и по одинаковым спиновым индексам предполагается суммирование. В теории сверхпроводимости появляются ненулевые аномальные средние, определяющие сверхпроводящий параметр порядка Δ :

$$\Delta(x) = g \langle \hat{\psi}_\uparrow(x) \hat{\psi}_\downarrow(x) \rangle. \quad (2)$$

Тогда в приближении среднего поля гамильтониан БКШ принимает простой вид:

$$\hat{H} = \int \hat{\psi}_\alpha^+(x) \left(\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} - \mu \right) \hat{\psi}_\alpha(x) d^3\mathbf{r} - \int [\Delta(x) \hat{\psi}_\uparrow^+(x) \hat{\psi}_\uparrow^+(x) + \text{h.c.}] d^3\mathbf{r}. \quad (3)$$

Этот гамильтониан может быть точно диагонализирован с помощью преобразований Боголюбова [7], так что окончательно получается хорошо известный спектр одночастичных возбуждений щелевого типа:

$$\hat{H}' = \sum_p \sqrt{\left(\frac{p^2}{2m} - \mu \right)^2 + \Delta^2} a_p^+ a_p, \quad (4)$$

где a_p^+ — оператор рождения квазичастицы.

Перейдем теперь к описанию сверхпроводников во внешнем электромагнитном поле с потенциалами $\mathbf{A}(x)$ и $\varphi(x)$. С учетом кулоновского взаимодействия между электронами полный гамильтониан имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \int \hat{\psi}_\alpha^+(x) \left\{ \frac{[\hat{\mathbf{p}} - (e/c) \mathbf{A}(x)]^2}{2m} - \mu \right\} \hat{\psi}_\alpha(x) d^3\mathbf{r} + \\ & + \int e\varphi(x) \delta\hat{n}(x) d^3\mathbf{r} - \int [\Delta(x) \hat{\psi}_\uparrow^+(x) \hat{\psi}_\uparrow^+(x) + \text{h.c.}] d^3\mathbf{r} + \\ & + \frac{1}{2} \int \delta\hat{n}(x) V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta\hat{n}(x') d^3\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (5)$$

В гамильтониане (5) учтено наличие однородного положительно заряженного фона, обеспечивающего электронейтральность системы, что приводит к появлению

оператора флуктуации плотности

$$\delta\hat{n}(x) \equiv \hat{\psi}_\alpha^+(x) \hat{\psi}_\alpha(x) - n \quad (6)$$

(n — плотность электронов в отсутствие поля) в слагаемых, содержащих скалярный потенциал и кулоновское взаимодействие между электронами $V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = e^2/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$.

На данном этапе необходимо отметить следующее. Если добавить в гамильтониан (1) внешнее поле, то при калибровочных преобразованиях

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(x) & \rightarrow \mathbf{A}'(x) = \mathbf{A}(x) + \nabla\chi(x), \\ \varphi(x) & \rightarrow \varphi'(x) = \varphi(x) - \frac{1}{c} \frac{\partial\chi(x)}{\partial t}, \\ \hat{\psi}_\alpha(x) & \rightarrow \hat{\psi}'_\alpha(x) = \hat{\psi}_\alpha(x) \exp \left[i \frac{e}{c} \chi(x) \right] \end{aligned} \quad (7)$$

он не меняется. Однако для гамильтониана (5) ситуация несколько иная. Если рассматривать Δ как заданный параметр, то гамильтониан (5) перестает быть калибровочно-инвариантным. По сути дела, это и есть основной источник трудностей. Для описания всех эффектов, связанных с одночастичными возбуждениями в сверхпроводниках, достаточно гамильтониана (3) или (4). Но при появлении электромагнитного поля необходимо помнить, что величина Δ всегда должна определяться самосогласованным образом по формуле (2). Если учитывать этот факт, то можно построить полностью калибровочно-инвариантную теорию линейного отклика сверхпроводников так, что в окончательных выражениях для тока и электронной плотности появятся только калибровочно-инвариантные комбинации потенциалов, образующие электромагнитное поле.

Внешнее поле приводит к изменению состояний электронов в сверхпроводнике, или, другими словами, это значит, что гейзенберговские ψ -операторы зависят от потенциалов \mathbf{A} и φ . Таким образом, параметр порядка (2), очевидно, является функцией внешнего поля, поэтому полный гамильтониан возмущения для сверхпроводника во внешнем поле должен быть записан следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{int}} = & -\frac{1}{c} \int \hat{\mathbf{j}}^0(x) \mathbf{A}(x) d^3\mathbf{r} + \\ & + e \int \delta\hat{n}(x) \left[\varphi(x) + \frac{1}{e} \int V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \langle \delta\hat{n}(x') \rangle^{(1)} d^3\mathbf{r}' \right] d^3\mathbf{r} - \\ & - \int \Delta^{(1)}(x) \hat{\psi}_\downarrow^+(x) \hat{\psi}_\uparrow^+(x) d^3\mathbf{r} - \\ & - \int \Delta^{(1)+}(x) \hat{\psi}_\uparrow(x) \hat{\psi}_\downarrow(x) d^3\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь

$$\hat{\mathbf{j}}^0(x) = \frac{ie}{2m} \left[(\nabla \hat{\psi}_\alpha^+(x)) \hat{\psi}_\alpha(x) - \hat{\psi}_\alpha^+(x) \nabla \hat{\psi}_\alpha(x) \right] \quad (9)$$

— "парамагнитная" часть оператора плотности тока, $\Delta^{(1)}$ — поправка к параметру порядка, вызванная действием поля, а $\langle \delta\hat{n}(x) \rangle^{(1)}$ — поправка к электронной плотности. Поскольку в реальных сверхпроводниках кулоновское взаимодействие между электронами приводит к сильным эффектам экранирования, в гамильто-

ниане (8) учтено также кулоновское взаимодействие в приближении RPA.

Для определения изменений распределения тока и заряда под действием гамильтониана возмущения (8) воспользуемся диаграммной техникой Келдыша для неравновесных процессов [8]. В качестве элементов, из которых строится диаграммная техника для сверхпроводника, кроме нормальных функций Грина G , вводятся еще и аномальные функции F (их вид приведен в разделе 8.1). Наиболее важным является знание двух функций $G_{\alpha\beta}^{-+}$ и $F_{\alpha\beta}^{-+}$, определенных без привычного символа Т-упорядочения:

$$G_{\alpha\beta}^{-+}(x, x') = i \langle \widehat{\psi}_{\beta}^{+}(x') \widehat{\psi}_{\alpha}(x) \rangle, \quad (10)$$

$$F_{\alpha\beta}^{-+}(x, x') = i \langle \widehat{\psi}_{\beta}(x') \widehat{\psi}_{\alpha}(x) \rangle.$$

С помощью (10) выражения для флуктуаций плотности (6), тока и параметра порядка (2) можно записать следующим образом:

$$\delta n(x) = -2iG_1^{-+}(x, x), \quad (11)$$

$$\mathbf{j}(x) = -2 \frac{ie}{2m} (\nabla' - \nabla) G_1^{-+}(x, x')|_{x'=x} - \frac{e^2 n}{mc} \mathbf{A}(x), \quad (12)$$

$$\Delta^{(1)}(x) = igF_1^{-+}(x, x). \quad (13)$$

Здесь нижний индекс 1 обозначает поправку первого порядка по оператору возмущения (8) к соответствующей функции Грина (поскольку мы ограничиваемся теорией линейного отклика). Множитель 2 в (11) и (12) возникает из-за суммирования по спину (взаимодействием спина электрона с магнитным полем пренебрегается, поэтому $G_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}G$ и $F_{\alpha\beta} = i\sigma_{\alpha\beta}^y F$).

Стандартное построение диаграммной техники в теории возмущений по оператору \widehat{H}_{int} (8) приводит к поправке первого порядка к функции Грина G^{-+} , изображенной графически на рис. 1. Обратим внимание на то, что стоящая в правой части величина $\Delta^{(1)}$ определяется аномальной функцией F^{-+} при совпадающих аргументах (13). Для функции F^{-+} существует совершенно аналогичное G^{-+} выражение, описывающее изменение аномальной функции в первом порядке по \widehat{H}_{int} . Поэтому для $\Delta^{(1)}$ возникает уравнение, показанное на рис. 2а, где

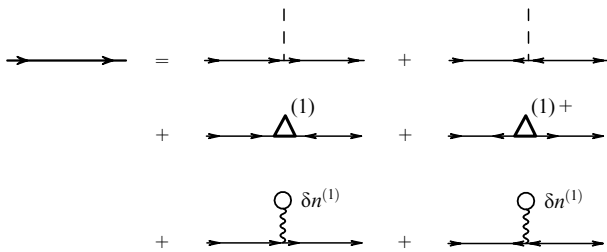


Рис. 1. Диаграммное выражение для линейной по внешнему электромагнитному полю поправки к нормальной функции Грина G_1^{-+} . Пунктирной линии соответствует "затравочное" взаимодействие электронов с потенциалами \mathbf{A} и φ . Треугольником обозначена поправка $\Delta^{(1)}$ к параметру порядка, волнистой линией — кулоновское взаимодействие V между электронами. Светлые кружки в третьей строке выражения соответствуют изменению плотности $\delta n^{(1)}$ под действием поля.

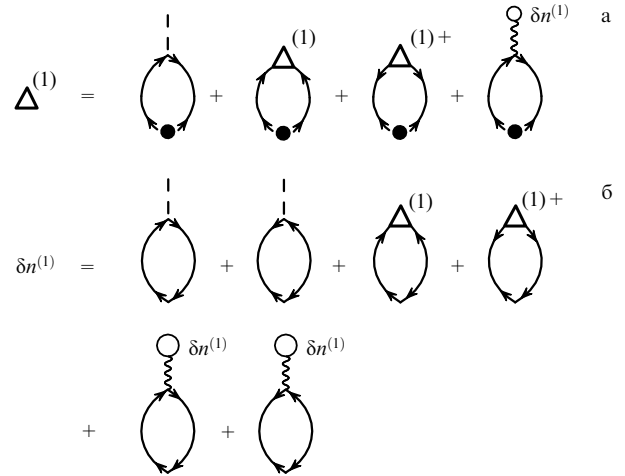


Рис. 2. (а) Графический вид уравнения самосогласования для линейной по внешнему полю поправки $\Delta^{(1)}$ к параметру порядка. Черный кружок обозначает константу взаимодействия БКШ g ; (б) уравнение для определения изменения плотности электронов $\delta n^{(1)}$ в линейном по внешнему полю приближении.

соединение концов аномальной функции Грина напоминает о совпадающих аргументах x и x' . Точно так же для изменения плотности электронов (11) мы приходим к уравнению, показанному на рис. 2б. Для нормального металла это уравнение дает обычный учет экранировки в рамках RPA. Таким образом, уравнения, приведенные на рис. 2, есть уравнения самосогласования на параметр порядка и флуктуации плотности электронов.

Прежде, чем переходить к конкретным вычислениям, обсудим некоторые "идеологические" вопросы, связанные с уравнением самосогласования для параметра порядка рис. 2а. Для большей ясности опустим временно эффекты, связанные с кулоновским взаимодействием. Тогда уравнение самосогласования можно переформулировать немного по-другому, учитывая, что правая часть уравнения на рис. 2а — это сумма всех членов ряда, показанного на рис. 3, где в вершинах стоит константа взаимодействия БКШ g . Этот ряд соответствует учету определенных вершинных поправок, которые модифицируют "затравочную" вершину взаимодействия электронов с электромагнитным полем из-за наличия между электронами взаимодействия, приводящего к сверхпроводящему спариванию. Известно, что из закона сохранения заряда (уравнения непрерывности) следует жесткая связь между одночастичными функциями Грина и вершинными функциями — тождество Уорда [9]. Оказывается, что учет вершинных попра-

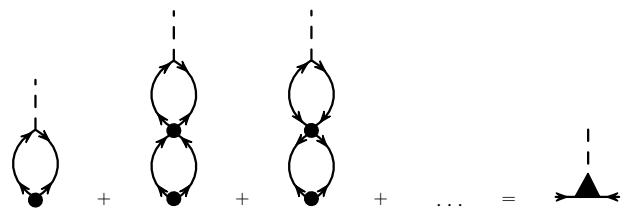


Рис. 3. Диаграммный ряд, соответствующий перенормировке вершины взаимодействия электронов с электромагнитным полем, связанной с наличием взаимодействия БКШ между электронами.

вок, изображенных на рис. 3, необходим для удовлетворения тождеству Уорда в модели БКШ. Как будет видно позже, в таких вершинных поправках присутствует полносной вклад, соответствующий определенным, специфическим для сверхпроводников, коллективным возбуждениям. Здесь прослеживается некоторая аналогия с появлением плазмонного полюса в нормальных металлах при учете поляризационных поправок к кулоновскому взаимодействию. С другой стороны, можно показать, что последовательный учет требования калибровочной инвариантности при вычислении функций отклика автоматически приводит к тому, что наведенные токи и заряды удовлетворяют уравнению непрерывности [9]. Таким образом, понятия: "калибровочная инвариантность", "закон сохранения заряда", "тождество Уорда", "учет коллективных возбуждений", употребляемые в различных работах, в данном случае означают одно и то же. На этот факт впервые обратили внимание Н.Н. Боголюбов [3] и Ф. Андерсон [5].

По существу, все первоначальные трудности возникли из-за использования в качестве отправной точки при построении линейного отклика гамильтониана (4), описывающего только одночастичные возбуждения в сверхпроводниках. Теперь можно перейти к технической стороне дела и показать, как можно получить явно калибровочно-инвариантные выражения для линейного отклика сверхпроводников.

3. Самосогласованный метод вычисления линейного отклика

Вместо того, чтобы решать задачу, непосредственно суммируя необходимые вершинные диаграммы, можно применить подход, логика которого была впервые сформулирована в работе В. Амбегаокара и Л.П. Каданова [10]. Мы знаем, что внешнее поле вызывает изменения параметра порядка. Будем вначале считать это изменение $\Delta^{(1)}$ заданной, но неизвестной функцией внешних полей. Тогда из диаграмм первого порядка для G^{-+} (рис. 1) легко определить \mathbf{j} и δn как функции потенциалов \mathbf{A} , φ и величины $\Delta^{(1)}$. После этого надо потребовать, чтобы ток и плотность удовлетворяли уравнению непрерывности $e(\partial\delta n/\partial t) + \text{div } \mathbf{j} = 0$. Это уравнение определяет $\Delta^{(1)}$ как функцию внешних полей \mathbf{A} , φ . В соответствии со сказанным в конце раздела 2, такая процедура эквивалентна правильному суммированию вершинных поправок с учетом тождества Уорда.

Однако можно предложить подход, на более раннем этапе восстанавливающий калибровочную инвариантность. При вычислении линейного отклика сверхпроводника на внешнее продольное электрическое поле изменение параметра порядка представимо в виде поправок к модулю и градиенту фазы параметра порядка, которые являются малыми. Изменения же самой фазы (а следовательно, и всего параметра порядка) могут быть величинами порядка 1. Такая ситуация имеет место, например, в сверхпроводящем кольце, помещенном в магнитное поле. Теория, которая это учитывает, может быть построена следующим образом.

Выделим явным образом изменение модуля и фазы Δ во внешнем поле:

$$\Delta(x) = (\Delta_0 + \Delta_1) \exp [i\theta(\mathbf{A}, \varphi)].$$

С помощью калибровочного преобразования сделаем параметр порядка вещественным. (Подчеркнем, что фаза θ пока является неизвестной функцией \mathbf{A} , φ .) При таком преобразовании потенциалы в соответствии с (7), приобретут добавки:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}'(x) &= \mathbf{A}(x) - \frac{c}{2e} (\nabla\theta(x))^{(1)}, \\ \varphi'(x) &= \varphi(x) + \frac{1}{2e} \left(\frac{\partial\theta(x)}{\partial t} \right)^{(1)}. \end{aligned} \quad (14)$$

Рассмотрим сначала для простоты сверхпроводник без учета кулоновского взаимодействия. Подставив \mathbf{A}' , φ' в качестве внешних полей в диаграммы рис. 1, легко получить следующее выражение для тока и плотности заряда (объединенных для компактности записи в 4-вектор тока $j_\mu = (e\delta n, \mathbf{j})$):

$$\begin{aligned} j_\mu(q) &= -\frac{e^2}{c} \left[Q_{\mu\nu}^A(q) + \frac{n}{m} \delta_{\mu\nu} (1 - \delta_{\mu 0}) \right] A'_\nu(q) - \\ &- e [Q_\mu^\Delta(q) + Q_\mu^{\Delta*}(-q)] \Delta_1(q). \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь для потенциалов поля (14) введены 4-векторные обозначения $A'(q) = (c\varphi'(q), \mathbf{A}'(q))$ и сделано преобразование Фурье по пространственным и временным переменным, $q = (\omega, \mathbf{q})$, индекс $\mu = 0$ соответствует временной компоненте 4-вектора, а $\mu = 1, 2, 3$ — пространственным компонентам. Чтобы не загромождать изложение, явный вид ядер (поляризационных операторов) Q , представляющих собой сумму свертков от различных пар функций Грина, приведен в разделе 8.2.

Формула (15) еще не дает решения задачи, так как в правой части, во-первых, стоит неизвестное изменение модуля параметра порядка Δ_1 , во-вторых, в эффективные потенциалы A' входят не только потенциалы внешнего поля, но и требующая определения фаза $\theta(\mathbf{A}, \varphi)$. Для их нахождения воспользуемся уравнением самосогласования, приведенным на рис. 2а:

$$\Delta^{(1)}(q) = -\frac{e}{c} \Pi_V^A(q) A'_V(q) - [\Pi^\Delta(q) + \Pi^{\Delta^+}(q)] \Delta^{(1)}(q). \quad (16)$$

Поляризационные операторы Π вычисляются аналогично ядрам Q и выписаны в разделе 8.2. Во избежание недоразумений подчеркнем, что Π^{Δ^+} является независимо определенным ядром, а не функцией, комплексно сопряженной Π^Δ .

Мы выделили фазу θ так, что параметр порядка $\Delta^{(1)}$ стал действительной величиной. Но так как функции Π — комплексные, то уравнение (16) на самом деле представляет собой систему из двух уравнений, позволяющую одновременно определить и действительную поправку Δ_1 и связь фазы θ с внешним полем. Обозначим действительную и мнимую части функций Π и Q как

$$\begin{aligned} \Pi_1(q) &= \frac{\Pi(q) + \Pi^*(-q)}{2}, \quad \Pi_2(q) = \frac{\Pi(q) - \Pi^*(-q)}{2i}, \\ Q_1(q) &= \frac{Q(q) + Q^*(-q)}{2}, \quad Q_2(q) = \frac{Q(q) - Q^*(-q)}{2i}. \end{aligned} \quad (17)$$

Тогда уравнение (16) с учетом кулоновского взаимодействия эквивалентно двум условиям:

$$\begin{aligned} \Delta_1(q) = & -\frac{e}{c} \Pi_{1,l}^A(q) \left[A_l(q) - i \frac{c}{2e} q_l \theta(q) \right] + \\ & + e \Pi_{1,0}^A(q) \left[\varphi(q) - i \frac{1}{2e} \omega \theta(q) + \frac{1}{e} V(q) \delta n(q) \right] - \\ & - [\Pi_1^\Delta(q) + \Pi_1^{\Delta^+}(q)] \Delta_1(q), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} 0 = & -\frac{e}{c} \Pi_{2,l}^A(q) \left[A_l(q) - i \frac{c}{2e} q_l \theta(q) \right] + \\ & + e \Pi_{2,0}^A(q) \left[\varphi(q) - i \frac{1}{2e} \omega \theta(q) + \frac{1}{e} V(q) \delta n(q) \right] - \\ & - [\Pi_2^\Delta(q) + \Pi_2^{\Delta^+}(q)] \Delta_1(q), \end{aligned} \quad (19)$$

где (18) — это действительная, а (19) — мнимая часть (16). Уравнение (19) есть условие вещественности параметра порядка, после того как мы в явном виде выделили его фазу. Поскольку мы теперь вернулись к полной задаче с учетом флуктуаций плотности и кулоновского взаимодействия, уравнения (18), (19) должны быть дополнены уравнением самосогласования для флуктуаций плотности (см. рис. 26):

$$\begin{aligned} \delta n(q) = & -\frac{e}{c} Q_{0l}^A(q) \left[A_l(q) - i \frac{c}{2e} q_l \theta(q) \right] + \\ & + e Q_{00}^A(q) \left[\varphi(q) - i \frac{1}{2e} \omega \theta(q) + \frac{1}{e} V(q) \delta n(q) \right] - \\ & - 2Q_{1,0}^\Delta(q) \Delta_1(q), \end{aligned} \quad (20)$$

где $V(q) = 4\pi e^2/q^2$, индекс l принимает только "пространственные" значения 1, 2, 3. Уравнения (18)–(20) образуют замкнутую систему из 3-х уравнений для трех неизвестных функций: Δ_1 , θ и δn . Из решения этой системы получаем следующее уравнение для определения фазы θ как функции внешних полей:

$$\begin{aligned} \frac{i}{2} \left\{ \left[\bar{\Pi}_{2,l}^A(1 - V \bar{Q}_{00}^A) + \bar{\Pi}_{2,0}^A V \bar{Q}_{0l}^A \right] q_l - \bar{\Pi}_{2,0}^A \omega \right\} \theta = \\ = \frac{e}{c} \left[\bar{\Pi}_{2,l}^A(1 - V \bar{Q}_{00}^A) + \bar{\Pi}_{2,0}^A V \bar{Q}_{0l}^A \right] A_l - e \bar{\Pi}_{2,0}^A \varphi. \end{aligned} \quad (21)$$

Уравнение (21) можно считать центральным в теории калибровочно-инвариантного отклика сверхпроводников. До тех пор, пока фаза θ остается произвольной функцией, уравнение (15) еще не позволяет определить ток и флуктуации плотности заряда при заданных внешних полях. Несмотря на то, что выражение (15) не меняется при калибровочных преобразованиях, оно зависит от выбора начальной калибровки потенциалов. При решении полной системы из 3-х уравнений в уравнении (21) появляются перенормированные функции \bar{P} и \bar{Q} :

$$\bar{Q}_{\mu\nu}^A = Q_{\mu\nu}^A - 2Q_{1,\mu}^\Delta \frac{\Pi_{1,\nu}^A}{1 + \Pi_1^\Delta + \Pi_1^{\Delta^+}}, \quad (22)$$

$$\bar{\Pi}_{2,\nu}^A = \Pi_{2,\nu}^A - (\Pi_2^\Delta + \Pi_2^{\Delta^+}) \frac{\Pi_{1,\nu}^A}{1 + \Pi_1^\Delta + \Pi_1^{\Delta^+}}. \quad (23)$$

Можно удостовериться, что добавки к исходным функциям \bar{P} и \bar{Q} , стоящие в правых частях выражений (22), (23), возникают при учете изменений модуля параметра порядка во внешнем поле (см. также [11]). Если пренебречь этими изменениями, исключив из рассмотрения уравнение (18) и положив $\Delta_1 = 0$ в уравнениях (19) и (20), то уравнение для фазы (21) сохранит тот же вид, только все поляризационные операторы с чертой заменяются на исходные Π и Q . Вопрос о том, насколько существенны поправки к модулю параметра порядка может быть решен из анализа явного выражения для Δ_1 , полученного из той же системы уравнений:

$$\Delta_1 = \frac{ie(\Pi_{2,l}^A \bar{\Pi}_{1,0}^A - \Pi_{2,0}^A \bar{\Pi}_{1,l}^A) E_l}{\left[\bar{\Pi}_{2,l}^A(1 - V \bar{Q}_{00}^A) + \bar{\Pi}_{2,0}^A V \bar{Q}_{0l}^A \right] q_l - \bar{\Pi}_{2,0}^A \omega}, \quad (24)$$

где

$$\bar{\Pi}_{1,\nu}^A = \frac{\Pi_{1,\nu}^A}{1 + \Pi_1^\Delta + \Pi_1^{\Delta^+}}. \quad (25)$$

В разделе 8.3 приведены оценки поляризационных операторов, из которых следует, что для обычных сверхпроводников всегда возникает характерный малый параметр Δ/ε_F , по которому малы все поправки, связанные с изменением модуля параметра порядка. Поэтому в дальнейшем можно пренебречь разницей между поляризационными операторами с чертой и без.

После того, как мы определили с помощью уравнения (21) зависимость фазы θ от потенциалов \mathbf{A} , φ , остается только подставить $\theta(\mathbf{A}, \varphi)$ в формулы линейного отклика (15). Окончательные выражения, определяющие линейный отклик сверхпроводников на электромагнитное поле, выглядят следующим образом:

$$\delta n = \frac{ie(\bar{\Pi}_{2,l}^A \bar{Q}_{00}^A - \bar{\Pi}_{2,0}^A \bar{Q}_{0l}^A) E_l}{\left[\bar{\Pi}_{2,l}^A(1 - V \bar{Q}_{00}^A) + \bar{\Pi}_{2,0}^A V \bar{Q}_{0l}^A \right] q_l - \bar{\Pi}_{2,0}^A \omega}, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} j_k = & -\frac{e^2}{c} \left(Q_{kl}^A + \frac{n}{m} \delta_{kl} \right) \left(A_l - \frac{q_l q_l'}{q^2} A_l' \right) + \\ & + ie^2 \frac{\bar{Q}_{k0}^A \bar{\Pi}_{2,l}^A - [\bar{Q}_{kl}^A + (n/m) \delta_{kl}] \bar{\Pi}_{2,0}^A}{\left[\bar{\Pi}_{2,l}^A(1 - V \bar{Q}_{00}^A) + \bar{\Pi}_{2,0}^A V \bar{Q}_{0l}^A \right] q_l - \bar{\Pi}_{2,0}^A \omega} \frac{q_l q_l'}{q^2} E_l'. \end{aligned} \quad (27)$$

Мы видим, что нам удалось выполнить поставленную задачу — в полученные формулы потенциалы \mathbf{A} и φ вошли только в явно калибровочно инвариантных комбинациях: как электрическое поле $\mathbf{E} = -c^{-1} \partial \mathbf{A} / \partial t - \nabla \varphi$ и как поперечная часть вектор потенциала $A_{\Gamma,l} = [A_l - (q_l q_l' / q^2) A_l']$. Заметим, что, решая уравнение для фазы параметра порядка, мы фактически требуем соблюдения калибровочной инвариантности системы в произвольных полях. Поэтому не должен вызывать удивления тот факт, что в нашем подходе условие самосогласования (16) оказывается эквивалентным условию непрерывности тока, использованному Амбегакармом и Кадановым [10].

Учитывая соотношения между поляризационными операторами (эквивалентные тождеству Уорда (см. раздел 8.2)), можно записать выражения (26), (27) в более удобной форме, содержащей стандартные для

электромагнитного отклика ядра $Q_{kl}^A, Q_{k0}^A, Q_{00}^A$:

$$\delta n = ieq_k \left[\left(\bar{Q}_{kl}^A + \frac{n}{m} \delta_{kl} \right) \bar{Q}_{00}^A - \bar{Q}_{k0}^A \bar{Q}_{0l}^A \right] E_l \times \\ \times \left\{ q_{k'} \left(Q_{k'l'}^A + \frac{n}{m} \delta_{k'l'} \right) q_{l'} - 2\omega Q_{0l'}^A q_{l'} + \omega^2 Q_{00}^A - \right. \\ \left. - Vq_{k'}q_{l'} \left[\left(\bar{Q}_{k'l'}^A + \frac{n}{m} \delta_{k'l'} \right) \bar{Q}_{00}^A - \bar{Q}_{k'0}^A \bar{Q}_{0l'}^A \right] \right\}^{-1}, \quad (28)$$

$$j_k = -\frac{e^2}{c} \left(Q_{kl}^A + \frac{n}{m} \delta_{kl} \right) \left(A_l - \frac{q_l q_{l'}}{q^2} A_{l'} \right) + \\ + ie^2 \left[\left(\bar{Q}_{kl}^A + \frac{n}{m} \delta_{kl} \right) \bar{Q}_{00}^A - \bar{Q}_{k0}^A \bar{Q}_{0l}^A \right] \omega \times \\ \times \left\{ q_{k'} \left(\bar{Q}_{k'l'}^A + \frac{n}{m} \delta_{k'l'} \right) q_{l'} - 2\omega Q_{0l'}^A q_{l'} + \omega^2 Q_{00}^A - \right. \\ \left. - Vq_{k'}q_{l'} \left[\left(\bar{Q}_{k'l'}^A + \frac{n}{m} \delta_{k'l'} \right) \bar{Q}_{00}^A - \bar{Q}_{k'0}^A \bar{Q}_{0l'}^A \right] \right\}^{-1} \frac{q_l q_{l'}}{q^2} E_{l'}. \quad (29)$$

В линейном отклике (27) присутствует часть, связанная с продольным электрическим полем, которая может иметь резонансный характер на определенных частотах ω и волновых векторах \mathbf{q} . Сравнивая (27) и (21), видим, что резонанс в отклике соответствует ненулевому решению однородного уравнения для фазы, т.е. решению уравнения (21) при нулевых внешних полях \mathbf{A} и φ . Существование этих решений означает наличие таких специфических коллективных возбуждений в спектре сверхпроводника, для которых фаза параметра порядка является одной из коллективных переменных системы. В бесконечной системе решение однородного уравнения (21) позволяет определить закон дисперсии таких мод $\omega(q)$. Собственно из-за того, что в полных выражениях для отклика обязательно присутствует резонансная часть, связанная с коллективными возбуждениями, можно говорить, что для восстановления калибровочной инвариантности помимо одночастичных возбуждений необходимо учитывать коллективные моды, к обсуждению которых мы вернемся несколько позже. А сейчас рассмотрим несколько простых предельных случаев для общих выражений с тем, чтобы связать громоздкие формулы (28), (29) с известными более простыми выражениями.

4. Простые предельные случаи

Рассмотрим сначала случай статических полей, $\omega = 0$. Тогда в (29) остается вклад в ток только от первого члена, содержащего поперечную часть вектор-потенциала:

$$j_k = -\frac{e^2}{c} \left[Q_{kl}^A(\mathbf{q}, 0) + \frac{n}{m} \delta_{kl} \right] \left(A_l - \frac{q_l q_{l'}}{q^2} A_{l'} \right). \quad (30)$$

Это стандартное уравнение типа уравнения Лондонов, но полностью учитывающее эффекты пространственной дисперсии. При нулевой температуре и $\mathbf{q} \rightarrow 0$ легко установить (см. раздел 8.2), что $Q_{kl}^A \rightarrow 0$. Тогда (30) превращается в уравнение Лондонов, написанное из феноменологических соображений еще в 1935 г. и при-

водимое во всех учебниках по сверхпроводимости (см., например, [12])

$$\mathbf{j} = -\frac{ne^2}{mc} \mathbf{A}_{\text{tr}}. \quad (31)$$

При повышении температуры до T_c (T_c — критическая температура) и обращении параметра порядка в нуль ядро $Q_{kl}^A \rightarrow -(n/m) \delta_{kl}$, поэтому в нормальном металле лондоновский отклик отсутствует. Подчеркнем, что для однородного сверхпроводника автоматически получается, что ток \mathbf{j} пропорционален именно *поперечной* части вектор-потенциала \mathbf{A}_{tr} при *любой* начальной калибровке полей. Этот автоматизм достигается в нашем подходе определением фазы параметра порядка в произвольном внешнем поле из уравнения (21). Обратимся к нему еще раз. В статическом случае при конечных \mathbf{q} это уравнение выглядит очень просто:

$$q^2 \theta = -\frac{2ie}{c} q_l A_l, \quad (32)$$

или в координатном пространстве

$$\nabla^2 \theta = \frac{2e}{c} \text{div} \mathbf{A}. \quad (33)$$

В рассматриваемом пределе формула для тока (15) принимает вид

$$\mathbf{j} = -\frac{ne^2}{mc} \left(\mathbf{A} - \frac{c}{2e} \nabla \theta \right). \quad (34)$$

Мы видим, что подстановка фазы θ , являющейся решением неоднородного уравнения (33) в бесконечном пространстве, в формулу (34) приводит к исключению из отклика продольной части вектор-потенциала. Если сразу выбрана поперечная калибровка с $\text{div} \mathbf{A} = 0$, то единственным возможным решением (33) будет $\theta = \text{const}$. Однако в ограниченном сверхпроводнике, например в кольце из сверхпроводника, существуют ненулевые решения уравнения (33) даже при калибровке $\text{div} \mathbf{A} = 0$. В этом случае приходится вернуться к формуле (34) и подставить в нее независимое от \mathbf{A} дополнительное "поле" $\nabla \theta_0$, соответствующее решению однородного уравнения (33). Тем самым, вместо (31) получим:

$$\mathbf{j} = -\frac{ne^2}{mc} \left(\mathbf{A}_{\text{tr}} - \frac{c}{2e} \nabla \theta_0 \right). \quad (35)$$

Оказывается, что в сверхпроводнике с границами только полное решение уравнений Максвелла позволяет найти входящую в (35) независимую с точки зрения теории линейного отклика величину $\nabla \theta_0$. Поскольку этот вопрос мало обсуждается в литературе, рассмотрим простой пример того, в какой мере θ определяется внешним полем \mathbf{A} на границе сверхпроводника.

Пусть магнитное поле приложено параллельно плоской поверхности полубесконечного сверхпроводника, как показано на рис. 4. Из связи (31) (или (34)) и уравнений Максвелла немедленно получается уравнение для напряженности магнитного поля, приводящее к эффекту Мейснера, т.е. к затуханию поля в глубь сверхпроводника. Не повторяя этот вывод, воспользуемся сразу известным результатом, заключающимся в том,

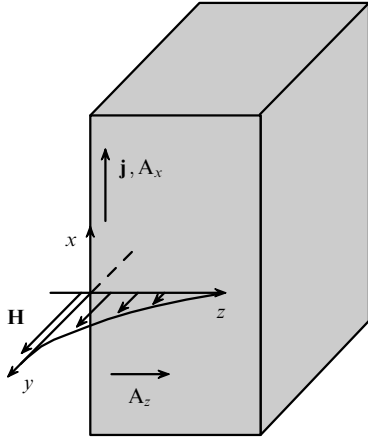


Рис. 4. Полубесконечный сверхпроводник в магнитном поле \mathbf{H} , приложенном параллельно его поверхности.

что поле H затухает по закону

$$H_y(z) = H_0 \exp\left(-\frac{z}{\lambda}\right), \quad (36)$$

где глубина затухания $\lambda = (4\pi ne^2/mc)^{1/2}$. Такое магнитное поле может быть описано вектор-потенциалом как в поперечной, так и в продольной калибровке. Если выбрать поперечную калибровку с $A_x = -\lambda H_0 \times \exp(-z/\lambda)$, то $\text{div } \mathbf{A} = 0$. Единственным решением однородного уравнения для фазы $\Delta\theta = 0$, совместным с уравнениями Максвелла, будет $\theta = \text{const}$. Уравнение Лондонов (31) имеет буквальную смысл: ток направлен по вектор-потенциалу \mathbf{A} . Однако ничто не мешает нам описывать *то же самое магнитное поле* H с помощью вектор-потенциала $A_z = xH_0 \exp(-z/\lambda)$, имеющего продольную часть, т.е. для которого $\text{div } \mathbf{A} = -A_z/\lambda \neq 0$. Тогда уравнение, определяющее фазу, будет иметь вид

$$\Delta\theta = -\frac{2e}{c} \frac{A_z}{\lambda}, \quad (37)$$

решением которого является:

$$\theta(x, z) = -\frac{2e}{c} \lambda x H_0 \exp\left(-\frac{z}{\lambda}\right). \quad (38)$$

Из формулы (34) получаем, что

$$j_z = -\frac{ne^2}{mc} \left[A_z - \frac{c}{2e} \frac{\partial\theta}{\partial z} \right] = 0,$$

а

$$j_x = \frac{ne}{2m} \frac{\partial\theta}{\partial x}.$$

Выражение для j_x при подстановке (38), конечно, совпадает с током, получающимся в "естественной" поперечной калибровке. Но выбрав "нестандартную" калибровку для вектор-потенциала, получим, что ток \mathbf{j} направлен совсем не по вектору \mathbf{A} . Только решив уравнение для θ и подставив ответ в формулу (34), мы восстановим правильно такую калибровочно-инвариантную величину, как ток.

Теперь представим себе, что есть массивное кольцо из сверхпроводника с цилиндрическим отверстием посередине. Можно считать, что на рис. 4 показан маленький

участок внутренней цилиндрической поверхности, а в целом ось x "свернута" в окружность. Тогда и в поперечной калибровке $A_x \neq 0$ допустимы ненулевые решения уравнения для фазы $\Delta\theta = 0$ вида $\partial\theta/\partial x = \text{const}$. Физическое ограничение для такого решения состоит в том, что при обходе по замкнутому контуру полное изменение фазы должно быть кратно 2π для однозначного определения всех величин. Именно это условие и приводит к эффекту квантования магнитного потока в отверстии в сверхпроводнике.

Последнее, на чем хотелось бы остановиться при рассмотрении статических полей, — это вопрос о том, сильно ли меняется экранировка заряда в сверхпроводниках по сравнению с нормальным металлом. Формула (28) при $\omega = 0$ значительно упрощается:

$$\delta n = \frac{ie Q_{00}^A(q)}{q^2 - 4\pi e^2 Q_{00}^A(q)} q_1 E_l. \quad (39)$$

При малых q (см. раздел 8.3) $Q_{00}^A = -2N_0$, где N_0 — плотность состояний на уровне Ферми. Сверхпроводимость дает поправки к этому значению $\simeq (\Delta/\varepsilon_F)^2$. Тогда (39) может быть переписано как

$$e\delta n = -\frac{1}{4\pi} \frac{\kappa^2}{q^2 + \kappa^2} \mathbf{q} \mathbf{E}_{\text{ext}}, \quad (40)$$

где κ — обратный радиус дебаевского (тома-фермиевского) экранирования, $\kappa^2 = 8\pi N_0 e^2$. Из выражения (40) видно, что статическая экранировка в сверхпроводниках с точностью до поправок $\simeq (\Delta/\varepsilon_F)^2$ описывается обычной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(q) = 1 + \kappa^2/q^2$, как и следовало ожидать. Появление сверхпроводящего спаривания, трактуемого как некоторое эффективное притяжение, никоим образом не меняет вид статической диэлектрической проницаемости и не приводит к реальному притяжению электронов в координатном пространстве.

Вычисление отклика сверхпроводников на произвольной частоте — задача несравненно более трудная, чем в статическом случае. Причем трудности носят не только "арифметический" характер, но и "концептуальный". Дело в том, что удобное разделение полей на продольные и поперечные (как это явно было сделано в формулах (28), (29)) возможно только в неограниченном пространстве. Даже для статического магнитного поля в сверхпроводнике с границей (конечных размеров) возникают, как мы видели, некоторые нетривиальные решения граничных задач. А ведь одним из важных вопросов, стоящих перед теорией, является вычисление отражения электромагнитных волн от поверхности сверхпроводников. Таким образом, для правильной интерпретации экспериментальных результатов, вообще говоря, требуется уметь решать именно граничные задачи в определенной геометрии. Одной из немногих попыток действовать в этом направлении была работа [30], в которой описывались нетривиальные моды на поверхности сверхпроводника.

В задаче об отражении электромагнитных волн до последнего времени, к сожалению, поступают самым простым образом, рассматривая строго нормальное падение электромагнитной волны на плоскую бесконечную поверхность сверхпроводника. В этом случае действительно остается только поперечная "лондоновская"

часть в токе (первое слагаемое в выражении (29)). Единственная величина, полностью определяющая отклик, — это ядро Q_{kl}^A , которое вычисляется для произвольной частоты ω , но при $\mathbf{q} = 0$ ($Q_{kl}^A = \delta_{kl}Q^A$). Удобнее описывать сверхпроводник в этом предельном случае не самой функцией Q_{kl}^A , а оптической проводимостью σ , которая связана с Q_{kl}^A соотношением $\sigma(\omega) = -e^2[Q^A(\omega) + n/m]/i\omega$. При этом ток обычным образом связан с электрическим полем: $j = \sigma(\omega)E$. Впервые поперечная проводимость была вычислена в работе Д. Маттиса и Дж. Бардина [13] для сверхпроводника с примесями, которые получили следующий результат (при $T = 0$):

$$\frac{\text{Re } \sigma_s}{\text{Re } \sigma_n} = \left[\left(1 + \frac{2\Delta}{\omega}\right) E(\Omega) - \frac{4\Delta}{\omega} K(\Omega) \right] \theta(\omega - 2\Delta). \quad (41)$$

Здесь E и K — эллиптические интегралы с аргументом $\Omega = (\omega - 2\Delta)/(\omega + 2\Delta)$, и проводимость сверхпроводника нормирована на проводимость в нормальном состоянии. На рисунке 5 показано взятое из работы [14] сравнение формулы (41) с экспериментом. Действительная часть проводимости определяет поглощение в системе, поэтому в модели БКШ из-за щели в спектре одночастичных состояний $\text{Re } \sigma_s = 0$ до частот $\omega = 2\Delta$. После этого порога начинают рождаться парами квази-частицы и квазидырки, и поглощение плавно нарастает. В рамках более детального подхода, основанного на уравнениях Элиашберга, также удается вычислить поперечную проводимость сверхпроводников. Однако в этом случае поведение $\text{Re } \sigma_s(\omega)$ оказывается более сложным. При этом действительная часть проводимости отлична от нуля и в области частот меньших Δ . Детали вычислений в модели сильной связи можно найти в обзоре [15] и приведенной там литературе.

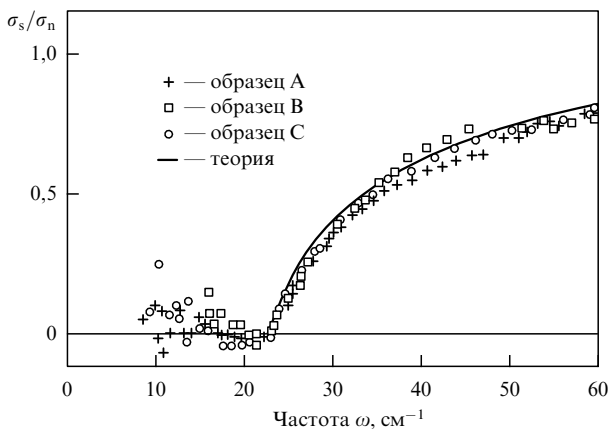


Рис. 5. Сравнение экспериментально измеренной действительной части оптической проводимости с теорией Маттиса–Бардина (из работы [14]).

5. Коллективные возбуждения в сверхпроводниках

Вернемся теперь к обсуждению возможности появления резонансов в отклике, связанных с возбуждением коллективных мод. Приведем еще раз уравнение для фазы (21) при отсутствии внешних полей, записанное так же, как и

(28), (29), только через поляризационные операторы Q

$$\left\{ q_k \left(Q_{kl}^A + \frac{n}{m} \delta_{kl} \right) q_l - 2\omega Q_{0l}^A q_l + \omega^2 Q_{00}^A - V(q) q_k q_l \left[\left(Q_{kl}^A + \frac{n}{m} \delta_{kl} \right) Q_{00}^A - Q_{k0}^A Q_{0l}^A \right] \right\} \theta = 0. \quad (42)$$

Первый, самый простой, тип коллективных возбуждений возникает в незаряженном ферми-газе с притяжением по модели БКШ. Слова "незаряженный ферми-газ" означают, что мы исключаем кулоновское взаимодействие между частицами, положив $V(q) = 0$ в (42). При нулевой температуре в пределе малых q и ω уравнение (42) имеет простой вид:

$$(q^2 v^2 - \omega^2) \theta(q, \omega) = 0. \quad (43)$$

При выводе (43) мы воспользовались предельными значениями поляризационных операторов при малых q, ω , приведенных в разделе 8.3. Впервые возможность существования коллективных колебаний со звуковым спектром обсуждалась в работах [3, 5] и было показано, что для квадратичного закона дисперсии ферми-частиц скорость "звука" $v = v_F/\sqrt{3}$ (v_F — скорость Ферми). Эти моды специфически присущи сверхпроводникам и связаны с длинноволновыми колебаниями фазы параметра порядка, а скорость распространения таких колебаний всегда порядка v_F .

В работе [10] был вычислен ток в сверхпроводнике с учетом боголюбовской моды, и получено выражение, которое является соответствующим пределом при $V(q) = 0$ и $T = 0$ общей формулы (29):

$$\mathbf{j} = -\frac{ne^2}{mc} \left[\mathbf{A}_{\text{tr}} + \frac{ic\omega \mathbf{E}_{\parallel}}{(q^2 v^2 - \omega^2)} \right], \quad (44)$$

где \mathbf{E}_{\parallel} — продольная часть электрического поля. Заметим, что при $\omega = 0$ и конечных \mathbf{q} это выражение для тока сводится к формуле Лондонов (31).

Могут ли существовать незаряженные ферми-системы (например, нейтронные звезды), в которых существует такая боголюбовская мода, остается непонятным. Также не ясно, имеет ли непосредственный смысл формула (44), так как она получена для ферми-частиц, взаимодействующих с электромагнитным полем обычным образом, но не испытывающих кулоновского отталкивания друг с другом. В обычных же сверхпроводниках кулоновским взаимодействием между электронами ни в коем случае пренебрегать нельзя. В длинноволновом пределе при $\mathbf{q} \rightarrow 0$ вклад кулоновского взаимодействия $V(q) = 4\pi e^2/q^2$ приводит к кардинальному изменению спектра коллективных мод. Если боголюбовская мода определялась первой строкой уравнения (42), то теперь из-за расходимости $V(q)$ при малых q в главном порядке остаются слагаемые, пропорциональные Q_{00}^A , так как при низких температурах $Q_{kl}^A \rightarrow 0$, $Q_{k0}^A \rightarrow 0$ (см. раздел 8.3):

$$\left[\omega^2 Q_{00}^A - \frac{4\pi e^2}{q^2} q_k q_l \frac{n}{m} \delta_{kl} Q_{00}^A \right] \theta = 0, \quad (45)$$

$$[\omega^2 - \omega_p^2] \theta = 0. \quad (46)$$

Равенство (46) является уравнением плазменных колебаний с частотой, определяемой стандартным соотноше-

нием $\omega_p^2 = 4\pi n e^2 / m$. Мы получили известный со времен выхода работы [5] факт, что кулоновское взаимодействие, как иногда говорят, "выталкивает" при малых q частоту звуковых колебаний до плазменной частоты ω_p . Качественно этот эффект объясняется следующим образом. Как уже говорилось, боголюбовская мода связана с появлением осцилляций фазы параметра порядка, неизбежно вызывающих осцилляции тока (см. (15)), которые, в свою очередь, приводят к появлению осцилляций электронной плотности. Любые изменения плотности заряда в металлах, в том числе и в сверхпроводниках, порождают сильные продольные электрические поля, приводящие к осцилляциям на плазменной частоте.

Несколько неожиданным оказывается то, что несмотря на все вышесказанное о роли сильного кулоновского взаимодействия, в сверхпроводниках все-таки могут существовать длинноволновые колебания звукового типа. Впервые следы таких мод звукового типа наблюдали в своих экспериментах в 1973–1975 гг. Р. Карлсон и А. Голдман [16, 17], поэтому традиционно эти возбуждения называются модами Карлсона–Голдмана. В разделе 6 рассказано, как строится теория, описывающая эти эксперименты, а сейчас попробуем пояснить, в каком случае могут появляться решения уравнения (42) звукового типа. Будем рассматривать длинноволновый предел, $\omega \rightarrow 0$, $q \rightarrow 0$, считая отношение $\omega/q = v_0$ конечной величиной, равной скорости звука колебаний. В этом случае определяющей является часть уравнения (42), содержащая кулоновский потенциал $V(q)$. В рассматриваемом пределе все поляризационные операторы являются функциями только v_0 и температуры T и мы приходим к уравнению

$$\frac{q_k q_l}{q^2} \left\{ \left[Q_{kl}^A(v_0, T) + \frac{n}{m} \delta_{kl} \right] Q_{00}^A(v_0, T) - Q_{k0}^A(v_0, T) Q_{0l}^A(v_0, T) \right\} \theta = 0. \quad (47)$$

Найти простое аналитическое решение уравнения (47) в общем случае невозможно. Существует или нет решение этого уравнения зависит от температуры и от того, насколько сильно рассеяние на примесях в данном

сверхпроводнике. Для случая "чистого" и "грязного" сверхпроводника условия существования мод Карлсона–Голдмана различны. В любом случае такие моды могут существовать только при высокой температуре, близкой к критической. При температурах близких к нулю, исходя из свойств поляризационных ядер, легко показать, что в длинноволновом пределе возможны только колебания на плазменной частоте, а появление звуковых мод невозможно. Что представляют собой моды Карлсона–Голдмана на качественном уровне, можно объяснить следующим образом. Как мы уже упоминали, низкочастотный боголюбовский звук не может существовать в реальных сверхпроводниках из-за того, что колебания фазы вызывают колебания плотности заряда. Однако при температуре близкой к T_c кроме "сверхпроводящего" тока есть еще ток квазичастиц — "нормальная" составляющая тока. Если колебания фазы параметра порядка вызывают колебания сверхпроводящего тока, то "нормальный" ток может осциллировать в противофазе так, чтобы не допустить изменений плотности заряда. Это позволяет существовать в сверхпроводнике мягким колебаниям звукового типа. При понижении температуры число квазичастиц уменьшается, и в какой-то момент величины "нормального" тока уже не хватает, чтобы полностью скомпенсировать "сверхпроводящий" вклад. При этой температуре мягкие моды перестают существовать, а частота коллективных мод "выталкивается" на плазменную частоту.

Уже из этого качественного представления ясно, что мода Карлсона–Голдмана всегда будет затухающей, в отличие от боголюбовской моды. Во-первых, при наличии примесей нормальная составляющая тока будет диссипативной. Во-вторых, оказывается, что еще более губительное воздействие на звуковые моды оказывает затухание, связанное с рождением пар квазичастица–квазидырка в чистых сверхпроводниках. Этот эффект настолько сильный, что для чистых сверхпроводников s-типа в бездиссипативном режиме мода Карлсона–Голдмана не существует. Однако в чистых сверхпроводниках d-типа ситуация меняется из-за того, что большее количество нормальных возбуждений остается вплоть до низких температур. На рисунке 6, взятом из [18], схема-

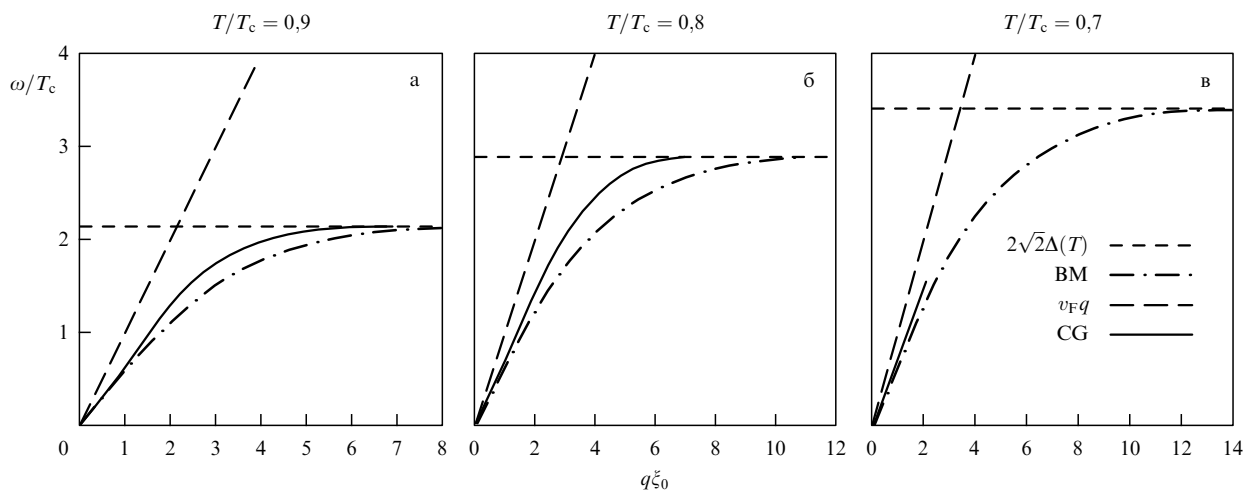


Рис. 6. Дисперсия коллективных возбуждений сверхпроводника без примесей с параметром порядка, имеющим d-симметрию, при температурах: (а) $T/T_c = 0,9$, (б) $T/T_c = 0,8$, (в) $T/T_c = 0,7$. Сплошная линия соответствует моде Карлсона–Голдмана (CG), штрихпунктирная — моде Боголюбова (BM). Рисунок взят из работы [18].

тично показано, как меняется область существования моды Карлсона–Голдмана для сверхпроводника d -типа при понижении температуры от T_c . На этом рисунке видно, что скорость мягкой моды в этом случае близка к v_F (см., кроме этого, [19]). Исследование сверхпроводников s -типа с примесями было проведено в [20–22], в появившихся впоследствии подробных работах, опирающихся на аппарат функций Грина в температурной технике [23–27], а также в [28, 29]. Несмотря на различие в подходах, скорость мягкой моды при температурах, близких к критической, в большинстве работ имеет один и тот же порядок: $v_0^2 \sim (\Delta(T)/T)v_F^2$.

Следует отметить, что слова "при таких-то условиях существуют моды Карлсона–Голдмана" надо воспринимать с некоторой осторожностью. Дело в том, что в уравнении (47) имеются и действительная, и мнимая части. Во многих работах условием существования моды Карлсона–Голдмана считают условие обращения в нуль действительной части (47). При этом вопрос о величине и роли мнимой части требует отдельного исследования. Есть и еще одна мало обсуждаемая проблема. Давайте вернемся к выражению для тока (29). Мы видим, что условие (47) соответствует не резонансу в отклике, как бывает обычно при совпадении частоты внешнего поля с частотой некоторой собственной моды системы, а условию равенства тока нулю. Это условие соответствует общепринятому качественному представлению, что существование низкочастотных мод обусловлено взаимной компенсацией сверхпроводящего и нормального тока. Но полное уравнение на собственные колебания фазы (42) содержит еще члены $\sim q^2, \omega^2$, которые были отброшены в уравнении (47). И если бы существовали точные решения уравнения для фазы, то появлялся бы резонанс в токе, а не обращение тока в нуль.

Обычно в работах, посвященных моде Карлсона–Голдмана рассматривают не функцию отклика, а только уравнение для фазы, аналогичное уравнению (42), но полученное в рамках того или иного упрощенного модельного рассмотрения задачи. В то же время мы видим, что такой подход может оказаться не имеющим непосредственного физического смысла, так как функции отклика могут не иметь резонанса на этих частотах как из-за затухания, так и из-за близости нулей числителя и знаменателя в формулах (28), (29). Тогда возникает вопрос, в каких физически измеримых величинах будут проявляться эти моды и каким образом — как резонансы или как нули некоторых функций отклика? Один из ответов мы знаем — это туннельные измерения в сверхпроводниках, которые рассмотрены в следующем разделе.

В заключении раздела хотелось бы сделать следующее замечание. Вопрос о существовании собственных коллективных мод в сверхпроводниках тесно связан с обсуждавшимся в разделе 3 вопросом об однородных решениях уравнения, определяющего фазу параметра порядка как функцию внешних полей. Для бесконечного неограниченного сверхпроводника решение этих уравнений сводится к решению алгебраических уравнений в фурье-пространстве. Возможность появления нетривиальных решений для сверхпроводника конечных размеров обсуждалась нами кратко только для статического случая. По существу, совершенно неисследованным остается вопрос о том, как меняются коллективные

моды в сверхпроводниках конечных размеров: пленках, небольших кристаллах в резонаторах и т.д. Трудность заключается в том, что уравнение (42) становится в этом случае интегро-дифференциальным. При этом отдельного исследования еще требует вопрос о виде накладываемых граничных условий. В этой области чуть ли не единственной остается работа [30], написанная в 1981 г. Между тем, для интерпретации результатов многочисленных работ по экспериментальному определению проводимости высокотемпературных сверхпроводников эта проблема имеет существенное значение.

6. Возбуждение коллективных мод в туннельных экспериментах

Мягкие моды в сверхпроводниках впервые наблюдались в экспериментах по измерению туннельной проводимости, описанных в работах [16, 17]. Схема использовавшегося туннельного контакта показана на рис. 7. В плоский зазор между двумя сверхпроводниками туннельного контакта было приложено магнитное поле, параллельное плоскости контакта. Именно введение в схему эксперимента магнитного поля позволило, как мы увидим ниже, определить в некоторой области закон дисперсии $\omega(q)$ коллективных мод.

Туннелирование электронов между двумя сверхпроводниками описывается гамильтонианом вида

$$H_t = \sum_{k,p} (T_{kp} \hat{c}_k^+ \hat{c}_p + \text{h.c.}), \quad (48)$$

где \hat{c}_k^+, \hat{c}_p^+ — операторы рождения электронов в левом и правом сверхпроводниках, а T_{kp} — матричный элемент перехода из состояния k одного сверхпроводника в состояние p другого. Мы опускаем спиновые индексы, подразумевая, что туннелирование происходит без переворота спина. Туннельный ток определяется недиагональными функциями Грина G_{kp}^{-+} [31], которые становятся отличными от нуля, как только появляются переходы электронов, описываемые гамильтонианом (48)

$$J_{\text{tun}} = 2e \sum_{k,p} (T_{pk} G_{kp}^{-+} - T_{kp} G_{pk}^{-+}). \quad (49)$$

Подобно тому, как в теории линейного отклика мы искали возмущение системы, вызванное действием внешнего поля, здесь возникает похожая задача построения

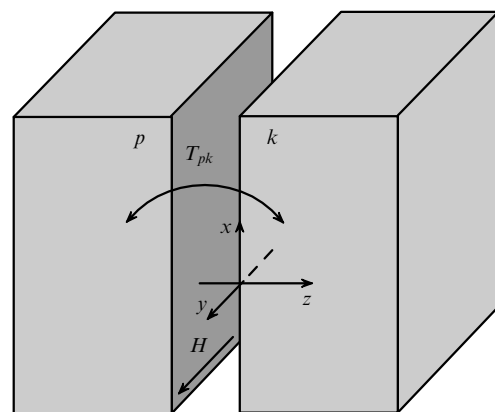


Рис. 7. Схема туннельного контакта, используемого для наблюдения коллективной моды Карлсона–Голдмана.

теории возмущений по туннельному гамильтониану (48). Можно сказать, что вычисляется "отклик" системы из двух сверхпроводников на амплитуду перехода T_{kp} , в то время как приложенный потенциал и магнитное поле учитываются точно в функциях Грина "нулевого" приближения.

Пусть для определенности приложенную к туннельному контакту разность потенциалов ϕ будем описывать как изменение потенциала только левого берега контакта. Тогда в функциях Грина сверхпроводников возникают в пространственно-временном представлении осциллирующие множители следующего вида [32, 33]:

$$\begin{aligned} G_k(r_1, t_1; r, t) &= \exp\left(-\frac{i}{2} q_H^k x_1\right) G_k(r_1 - r, t_1 - t) \times \\ &\quad \times \exp\left(\frac{i}{2} q_H^k x\right), \\ F_k(r_1, t_1; r, t) &= \exp\left(-\frac{i}{2} q_H^k x\right) F_k(r_1 - r, t_1 - t) \times \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{i}{2} q_H^k x_1\right), \\ G_p(r_1, t_1; r, t) &= \exp\left(\frac{i}{2} q_H^p x_1 - ie\phi t_1\right) G_p(r_1 - r, t_1 - t) \times \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{i}{2} q_H^p x + ie\phi t\right), \\ F_p(r_1, t_1; r, t) &= \exp\left(\frac{i}{2} q_H^p x_1 - ie\phi t_1\right) F_p(r_1 - r, t_1 - t) \times \\ &\quad \times \exp\left(\frac{i}{2} q_H^p x - ie\phi t\right). \end{aligned} \quad (50)$$

Соответственно, параметры порядка становятся осциллирующими функциями вида

$$\begin{aligned} \Delta_p(x, t) &= \Delta_p \exp(iq_H^p x - ie\phi t), \\ \Delta_k(x, t) &= \Delta_k \exp(-iq_H^k x), \end{aligned} \quad (51)$$

где $q_H^p = 2e\lambda_p/\hbar cH$, $q_H^k = 2e\lambda_k/\hbar cH$. Важно, что магнитное поле позволяет управлять величиной волнового вектора, а приложенное к контакту напряжение — частотой осцилляций.

Теория возмущений по туннельному гамильтониану (48) может быть построена точно так же, как в случае отклика на внешнее поле. Поправка первого порядка к функции Грина G_{kp}^{-+} дается выражением:

$$G_{kp}^{(1)-+} = (G_k T_{kp} G_p)^{-+} + (F_k T_{kp} F_p^+)^{-+}. \quad (52)$$

Этого приближения достаточно для того, чтобы получить обычное выражение для тока (включая и джозефсоновский ток) в туннельном контакте между двумя сверхпроводниками. Однако интересующий нас резонанс, связанный с коллективными модами, может проявиться в туннельных характеристиках на постоянном токе, как мы ниже увидим, только в третьем порядке по T_{kp} . Но при вычислении поправок более высокого порядка приходится опять учитывать тот факт, что при "включении" туннельной связи между сверхпроводниками возникают также поправки к параметрам порядка и флуктуации плотности. Для простоты будем считать, что критические температуры сверхпроводников значительно отличаются, и предположим, что температура близка к T_c у более "слабого" сверхпроводника (что

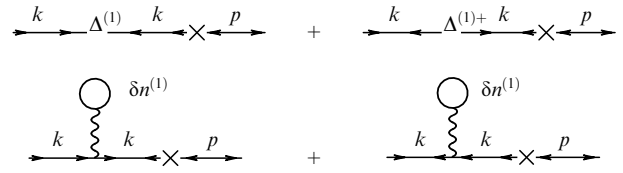


Рис. 8. Часть диаграмм третьего порядка по туннельному матричному элементу T_{kp} (обозначен на рис. крестом) для функции G_{kp}^{-+} , содержащая поправки $\Delta^{(1)}$ к параметру порядка и флуктуации плотности электронов $\delta n^{(1)}$ сверхпроводника k .

соответствует реальной постановке эксперимента). Тогда изменения параметра порядка сверхпроводника с более низкой T_c будут более существенными и достаточно учитывать только их. Пусть для определенности это будет берег контакта с индексом k . При вычислении функции G_{kp}^{-+} в третьем порядке по T_{kp} возникают поправки, показанные на рис. 8, в которых изменение недиагональной функции Грина определяется как "явным" действием туннельного матричного элемента T_{kp} , так и "неявным", через изменение параметра порядка Δ_k и плотности δn_k :

$$\begin{aligned} G_{kp}^{(3)-+} &= (G_k \Delta_k^{(1)} G_{-k} T_{kp} F_p^+)^{-+} + (F_k \Delta_k^{(1)+} F_k T_{kp} F_p^+)^{-+} + \\ &\quad + (G_k (V\delta n_k) F_k T_{kp} F_p^+)^{-+} + \\ &\quad + (F_k (V\delta n_k) G_{-k} T_{kp} F_p^+)^{-+} \dots \end{aligned} \quad (53)$$

Входящие в (53) поправки к параметру порядка $\Delta_k^{(1)}$ и плотности δn_k , в соответствии с общим подходом, должны подчиняться уравнению самосогласования, аналогичному уравнениям (16) и (20) (рис. 9а). Дальнейший ход решения, однако, существенно зависит от того, какой именно туннельный контакт мы рассматриваем, так как контактам различного типа соответствуют различные зависимости матричных элементов T_{kp} от импульсов k и p . Так, для точечного контакта хорошим приближением является замена T_{kp} на не зависящую от импульсов константу. При этом суммирование по импульсам правого и левого берегов контакта выполняется независимо,

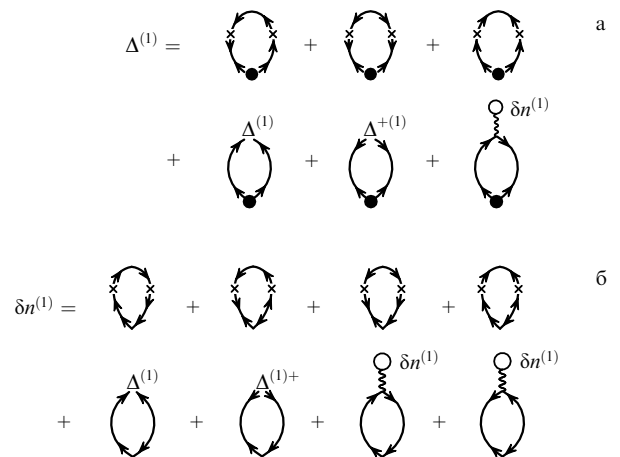


Рис. 9. Вид уравнения самосогласования: (а) для квадратичной по T_{kp} поправки к параметру порядка сверхпроводника k ; (б) для флуктуации плотности электронов сверхпроводника k во втором порядке по туннельному матричному элементу T_{kp} .

что сильно упрощает вычисления. Такое приближение часто используется для вывода классического выражения для туннельного тока в первом порядке по T_{kp}^2 [33]. Однако замена в более высоких порядках T_{kp} на константу является в нашем случае слишком грубым приближением. Для реального контакта рассматриваемого типа из-за неровностей поверхностей, дефектов на поверхностях и других технологических причин, приводящих к неидеальности контакта, следует считать, что туннельный матричный элемент является случайной функцией координат x и y как одного берега контакта, так и другого. Тогда в предположении о том, что эта случайная функция обладает гауссовым распределением и нет корреляций между случайными неоднородностями поверхностей разных сверхпроводников, в теории возникает усреднение вида:

$$\begin{aligned} \langle T_{kp} T_{p_1 k_1} \rangle &= T_{k-k_1, p-p_1}^2 \text{ или } \langle T_{\mathbf{r}_1 \mathbf{r}'_2} T_{\mathbf{r}'_3 \mathbf{r}_4} \rangle = \\ &= T_{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_2}^2 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4) \delta(\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_3), \end{aligned} \quad (54)$$

где $\mathbf{r} = (x, y)$ — точка на поверхности одного сверхпроводника, а $\mathbf{r}' = (x', y')$ — другого, и явно выписана зависимость только от компонент импульса, параллельных плоскости контакта. Использование такого усреднения приводит к тому, что поправки второго порядка как к параметру порядка, так и к плотности электронов, явно разделяются на три пространственно-временные "гармоники": постоянный вклад и две части, пропорциональные $\exp[i(q_H^p + q_H^k)x - i2e\phi t]$ и $\exp[-i(q_H^p + q_H^k)x + i2e\phi t]$. Поясним сказанное на примере выражения, соответствующего третьей диаграмме в правой части на рис. 9а. Обозначим вклад от этой диаграммы $D_3(\mathbf{r}, t)$:

$$\begin{aligned} D_3(\mathbf{r}, t) &= ig \int [G_k(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_1, t_1) T_{\mathbf{r}_1 \mathbf{r}'_2} F_p(\mathbf{r}'_2, t_1; \mathbf{r}'_3, t_2) \times \\ &\times T_{\mathbf{r}'_3 \mathbf{r}_4} G_k(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_4, t_2)]^{-+} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 dt_1 dt_2. \end{aligned} \quad (55)$$

Использование усреднения (54) дает

$$\begin{aligned} D_3(\mathbf{r}, t) &= ig \int [G_k(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_1, t_1) T_{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_2}^2 F_p(\mathbf{r}'_2, t_1; \mathbf{r}'_2, t_2) \times \\ &\times G_k(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_1, t_2)]^{-+} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 dt_1 dt_2. \end{aligned} \quad (56)$$

Если выделить явную зависимость функций Грина от фазовых осцилляций (50), то выражение для $D_3(\mathbf{r}, t)$ можно переписать через исходные функции Грина сверхпроводника, зависящие только от разности переменных \mathbf{r} и t . Окончательно вклад от $D_3(\mathbf{r}, t)$ выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} D_3(\mathbf{r}, t) &= D_3 \exp(iq_H^p x - i2e\phi t), \\ D_3 &= ig \widetilde{T}^2 \int d\mathbf{e} \int d\mathbf{p} d\mathbf{p}_1 [G_k(\mathbf{p} + \mathbf{q}_H, \mathbf{e} + e\phi) \times \\ &\times F_p(\mathbf{p}_1, \mathbf{e}) G_k(-\mathbf{p}, -\mathbf{e} + e\phi)]^{-+}, \end{aligned} \quad (57)$$

где

$$\mathbf{q}_H = (q_H^p + q_H^k) \hat{\mathbf{x}}, \quad \widetilde{T}^2 = \int \exp[-iq_H^p(x_1 - x)] T_{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}}^2 d\mathbf{r}_1, \quad (58)$$

$\hat{\mathbf{x}}$ — единичный вектор по оси x . Аналогичным образом легко показать, что вторая и третья диаграммы в правой

части рис. 9а дадут вклады, пропорциональные соответственно $\exp[-i(q_H^p x + 2q_H^k x - 2e\phi t)]$ и $\exp(-iq_H^k x)$. Такое же разделение на три гармоники происходит и при вычислении поправок к плотности электронов, диаграммный ряд для которой показан на рис. 9б. Поэтому удобно сразу записать δn_k и $\Delta_k^{(1)}$ как сумму вкладов трех разных гармоник:

$$\begin{aligned} \Delta_k^{(1)}(x, t) &= \left\{ \Delta_1 + \Delta_2 \exp[-i(q_H^p x + q_H^k x - 2e\phi t)] + \right. \\ &\quad \left. + \Delta_3 \exp[i(q_H^p x + q_H^k x - 2e\phi t)] \right\} \exp(-iq_H^k x), \\ \delta n_k(x, t) &= \delta n_1 + \delta n_2 \exp[-i(q_H^p x + q_H^k x - 2e\phi t)] + \\ &\quad + \delta n_3 \exp[i(q_H^p x + q_H^k x - 2e\phi t)]. \end{aligned} \quad (59)$$

В экспериментах Карлсона – Голдмана сверхпроводник с более низкой T_c представлял собой тонкую пленку толщиной много меньшей как глубины проникновения, так и длины когерентности. В этих условиях δn и Δ фактически постоянны поперек пленки, и (58) описывает изменение этих средних по толщине пленки величин от времени и координаты x вдоль пленки. Строго говоря, в этом случае в определение величины q_H^k войдет не глубина проникновения λ (см. (51)), а толщина пленки d , но это не изменит существенно результат. В формуле (57) для D_3 мы намеренно следили только за зависимостью от координат x, y в плоскости контакта, не выписывая явно интеграл по поперечной координате z . Дело в том, что конкретное значение интеграла по переменной z является, вообще говоря, модельно-зависимым и для контактов разного типа, разной геометрии будет различным. Для обсуждения дальнейшего это, однако, несущественно.

Если в выражении (53) произвести выделение осциллирующих множителей в функциях Грина (50), то легко убедиться, что вклад в постоянный ток получится при подстановке Δ_3 в первый член (53), Δ_2^+ во второй и δn_3 в третий и четвертый. Остальные возможные комбинации дают поправки к осциллирующей части туннельного тока (как самого джозефсоновского тока, так и его гармоник), а также тривиальные поправки к амплитуде постоянного тока, не содержащие резонансного вклада от коллективных мод. Поэтому задача заключается в решении только системы уравнений для определения постоянных Δ_2^+, Δ_3 и δn_3 , которая следует из уравнений самосогласования (см. рис. 9) после подстановки в них разложения по гармоникам (59) и приравнивания коэффициентов при каждой гармонике. Эта система имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta_2^+ [1 + \Pi^{\Delta^*}(-q)] + \Pi^{\Delta^+}(-q) \Delta_3 - \Pi_0^{\Delta^*}(-q) V(q) \delta n_2^* &= D_2^+(q), \\ \Delta_3 [1 + \Pi^{\Delta}(q)] + \Pi^{\Delta^+}(q) \Delta_2^+ - \Pi_0^{\Delta}(q) V(q) \delta n_3 &= D_3(q), \end{aligned} \quad (60)$$

$$\begin{aligned} \delta n_2^* [1 - V(q) Q_{00}^{\Delta^*}(-q)] + Q_0^{\Delta}(q) \Delta_3 + Q_0^{\Delta^*}(-q) \Delta_2^+ &= \delta N_2^*(q), \\ \delta n_3 [1 - V(q) Q_{00}^{\Delta}(q)] + Q_0^{\Delta}(q) \Delta_3 + Q_0^{\Delta^*}(-q) \Delta_2^+ &= \delta N_3(q). \end{aligned} \quad (61)$$

Для краткости здесь объединены в обозначение q компоненты преобразования Фурье по t и x : $q \equiv (\omega = 2e\phi, q_x = q_H^p + q_H^k)$. Обратим внимание, что

поляризационные ядра здесь те же самые, что и в теории линейного отклика, но теперь в них вместо частоты и волнового вектора приложенного электромагнитного поля стоит джозефсоновская частота и волновой вектор, задаваемый в данной геометрии контакта постоянным магнитным полем.

С точностью до сделанных ранее оговорок о возможном различном интегрировании функций Грина по координате z , стоящие в правых частях (60), (61) функции определяются формулами, аналогичными (57):

$$\begin{aligned} D_2^+ &= -ig\widetilde{T}^2 \int d\varepsilon \int d\mathbf{p} d\mathbf{p}_1 [F_k^+(\mathbf{p} + \mathbf{q}_H, \varepsilon + e\phi) \times \\ &\quad \times F_p(\mathbf{p}_1, \varepsilon) F_k^+(\mathbf{p}, \varepsilon - e\phi)]^{-+}, \\ \delta N_3 &= -2i\widetilde{T}^2 \int d\varepsilon \int d\mathbf{p} d\mathbf{p}_1 [G_k(\mathbf{p} + \mathbf{q}_H, \varepsilon + e\phi) \times \\ &\quad \times F_p(\mathbf{p}_1, \varepsilon) F_k^+(\mathbf{p}, \varepsilon - e\phi)]^{-+}, \\ \delta N_2^* &= \delta N_3. \end{aligned} \quad (62)$$

Из уравнений очевидно, что всегда выполнено равенство $\delta n_2^* = \delta n_3$, что есть прямое следствие действительности флуктуаций плотности (59). В результате получаем более простую систему из трех уравнений для амплитуд гармоник Δ_2^+ , Δ_3 и δn_3 . Существенные упрощения при решении этой системы возникают, если, как это обсуждалось в разделе 3, пренебречь вкладами порядка Δ/ε_F в тех поляризационных ядрах, которые фигурируют в уравнениях (60), (61). В этом приближении (см. раздел 8.3) $\Pi_0^A(q) = -\Pi_0^{A*}(-q)$, $\Pi^A(q) = \Pi^{A*}(-q)$, $\Pi^{\Delta^+}(q) = \Pi^{\Delta^+}(-q)$, $Q_0^A(q) = -Q_0^{A*}(-q)$. Тогда искомые выражения для Δ_2^+ , Δ_3 , δn_3 будут иметь вид

$$\begin{aligned} \Delta_2^+(q) &= \frac{1}{2} \frac{D_2^+(q) + D_3(q)}{1 + \Pi^A(q) + \Pi^{\Delta^+}(q)} + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{[D_2^+(q) - D_3(q)][1 - V(q)Q_{00}^A(q)] - 2\delta N_3(q)V(q)\Pi_0^A(q)}{[1 + \Pi^A(q) - \Pi^{\Delta^+}(q)][1 - V(q)Q_{00}^A(q)] + 2\Pi_0^A(q)V(q)Q_0^A(q)}, \end{aligned} \quad (63)$$

$$\begin{aligned} \Delta_3(q) &= \frac{1}{2} \frac{D_2^+(q) + D_3(q)}{1 + \Pi^A(q) + \Pi^{\Delta^+}(q)} - \\ &- \frac{1}{2} \frac{[D_2^+(q) - D_3(q)][1 - V(q)Q_{00}^A(q)] - 2\delta N_3(q)V(q)\Pi_0^A(q)}{[1 + \Pi^A(q) - \Pi^{\Delta^+}(q)][1 - V(q)Q_{00}^A(q)] + 2\Pi_0^A(q)V(q)Q_0^A(q)}, \end{aligned} \quad (64)$$

$$\delta n_3(q) = \frac{[D_2^+(q) - D_3(q)]Q_0^A(q) + \delta N_3(q)[1 + \Pi^A(q) - \Pi^{\Delta^+}(q)]}{[1 + \Pi^A(q) - \Pi^{\Delta^+}(q)][1 - V(q)Q_{00}^A(q)] + 2\Pi_0^A(q)V(q)Q_0^A(q)}. \quad (65)$$

Используя соотношения между поляризационными ядрами (см. раздел 8.2), легко показать, что выражение в знаменателе (65), а также в знаменателях вторых слагаемых (63), (64) совпадает с выражением, стоящим в знаменателе формул линейного отклика (26)–(29). Поэтому условие обращения в нуль знаменателей в формулах (63), (65) совпадает с условием существования в сверхпроводнике, который мы идентифицировали индексом k , коллективных мод (42) с $\omega = 2e\phi$ и $\mathbf{q} = \mathbf{q}_H$. Мы видим, что резонансным образом ведет себя вели-

чина $(\Delta_2^+ - \Delta_3)$ в то время, как сумма $(\Delta_2^+ + \Delta_3)$ такого резонансного вклада не содержит. (Здесь есть некоторая аналогия с тем, что в линейном отклике коллективные моды в основном связаны с колебаниями фазы параметра порядка, а изменения модуля параметра порядка несущественны.) Оставляя только те слагаемые в (53), в которых могут появляться резонансы, соответствующие возбуждению коллективных мод, можно записать вклад в постоянный ток (49) в следующем компактном виде:

$$\begin{aligned} J_{\text{tun}}^{(4)}(H, \phi) &= \\ &= 2e\text{Re}[(\widetilde{D}_2 - \widetilde{D}_3^+)(\Delta_2^+ - \Delta_3) + 2(\delta\widetilde{N}_2 + \delta\widetilde{N}_3^+)V(q_H)\delta n_3], \end{aligned} \quad (66)$$

где использованы обозначения, аналогичные определениям (57), (62):

$$\begin{aligned} \widetilde{D}_2 &= \widetilde{T}^2 \int d\varepsilon \int d\mathbf{p} d\mathbf{p}_1 [F_k(\mathbf{p}, \varepsilon + e\phi) \times \\ &\quad \times F_k(\mathbf{p} - \mathbf{q}_H, \varepsilon - e\phi) F_p^+(\mathbf{p}_1, \varepsilon)]^{-+}, \\ \widetilde{D}_3^+ &= -\widetilde{T}^2 \int d\varepsilon \int d\mathbf{p} d\mathbf{p}_1 [G_k(\mathbf{p}, \varepsilon + e\phi) \times \\ &\quad \times G_k(-\mathbf{p} + \mathbf{q}_H, -\varepsilon + e\phi) F_p^+(\mathbf{p}_1, \varepsilon)]^{-+}, \\ \delta\widetilde{N}_2 &= \widetilde{T}^2 \int d\varepsilon \int d\mathbf{p} d\mathbf{p}_1 [G_k(\mathbf{p}, \varepsilon + e\phi) \times \\ &\quad \times F_k(\mathbf{p} - \mathbf{q}_H, \varepsilon - e\phi) F_p^+(\mathbf{p}_1, \varepsilon)]^{-+}, \\ \delta\widetilde{N}_3^+ &= -\widetilde{T}^2 \int d\varepsilon \int d\mathbf{p} d\mathbf{p}_1 [F_k(\mathbf{p}, \varepsilon + e\phi) \times \\ &\quad \times G_k(-\mathbf{p} + \mathbf{q}_H, -\varepsilon + e\phi) F_p^+(\mathbf{p}_1, \varepsilon)]^{-+}. \end{aligned} \quad (67)$$

Несмотря на то, что полученный вклад в ток (66) имеет порядок T_{kp}^4 в то время, как обычный ток $\sim T_{kp}^2$, он может оказаться существенным. Если знаменатель в выражениях (63)–(65) обращается в нуль (становится малым) при некоторых значениях приложенного напряжения, меньших, чем суммарная щель $\Delta_p + \Delta_k$, то появляется резонансный пик в той области напряжений, где обычный нормальный ток подавлен. Как уже говорилось, условие появления такого резонанса совпадает с условием существования коллективных мод с $\omega = 2e\phi$ и $q = q_H$. Меняя величину магнитного поля и определяя напряжение, при котором наблюдается пик на вольт-амперной характеристике, можно таким образом определить закон дисперсии этих мод. Заметим, что на туннельных характеристиках могут наблюдаться резонансы, связанные и с другими коллективными возбуждениями. Так, в экспериментальной работе [34] были обнаружены пики на вольт-амперных характеристиках туннельных контактов, соответствующие частотам определенных оптических фононов. Теоретическое объяснение этого эффекта было дано в работе [35], в которой для описания туннельных экспериментов с возбуждением или поглощением оптических фононов применялся подход, аналогичный теории, рассмотренной в настоящем разделе. Конечно, в экспериментах Карлсона и Голдмана совпадение резонансов на туннельных характеристиках с резонансами отклика на продольное электрическое поле не является случайным. Видимо, на качественном уровне это можно объяснить тем, что любой процесс туннели-

рования сопровождается переносом заряда (электронов) из одного сверхпроводника в другой, поэтому и возникает отклик на этот внесенный заряд, являющийся источником продольного поля. На феноменологическом уровне вклад флуктуационных поправок в туннельные характеристики рассматривался в работе Д. Скалапино [36] еще до работ Карлсона и Голдмана. Впоследствии такая феноменологическая теория была более подробно описана в [37, 38]. Микроскопическая теория в рамках температурной диаграммной техники, аналогичная подходу, изложенному в этом разделе, была впервые развита в работе М. Динтера [27] 1978 г.

7. Заключение

В настоящем обзоре нам прежде всего хотелось показать общие принципы построения теории отклика для сверхпроводников. Чтобы не увеличивать объем обзора мы не касались теории для сверхпроводников с примесями. Большинство приведенных формул было выведено для чистых сверхпроводников (или в бесстолкновительном пределе при наличии рассеяния на примесях). Однако описанный в настоящей работе подход легко обобщается на случай грязных сверхпроводников с примесями. Все формулы для тока и заряда (26)–(29) будут иметь тот же самый вид, как и уравнение (42) для определения коллективных мод. Разница заключается в том, что входящие в эти формулы поляризаационные операторы должны вычисляться с учетом рассеяния на примесях. Как проводятся такие вычисления достаточно хорошо известно [18, 28, 29, 32]. Вид поляризаационных ядер при учете рассеяния на примесях можно найти, например, в работе [18].

В заключение хотелось бы еще раз остановиться на том, какую проблему мы считаем наиболее актуальной для дальнейшего развития теории. Практически не исследован вопрос о том, как модифицирует коллективные моды граница сверхпроводника, могут ли появляться специфические поверхностные колебания, причем этот вопрос еще более остро стоит в сверхпроводниках малых размеров. Для правильной интерпретации многих экспериментов по измерению проводимости (импеданса) сверхпроводников в широком диапазоне частот необходимо правильно оценивать эффекты, связанные с зарядами на границе, т.е. с продольным электрическим полем. Трудность теоретического описания при этом состоит в том, что необходимо решать уравнения для определения изменений фазы (21), (42) не в бесконечном пространстве, а в ограниченном объеме. В реальном же пространстве эти уравнения становятся очень сложными интегральными уравнениями и могут быть решены, видимо, только в некоторых предельных случаях.

Настоящая работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 02-02-16925 и программы Президента РФ по поддержке ведущих научных школ № 1909-2003-02.

8. Приложения

8.1. Нормальные и аномальные функции Грина сверхпроводника в диаграммной технике Келдыша

Для нахождения линейного отклика сверхпроводников на внешнее возмущение с помощью диаграммной техники Келдыша [8] наряду с (10) необходимо знание

следующих функций Грина:

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}^{+-}(x, x') &= -i\langle \widehat{\psi}_{\alpha}(x) \widehat{\psi}_{\beta}^{+}(x') \rangle, \\ F_{\alpha\beta}^{+-}(x, x') &= -i\langle \widehat{\psi}_{\alpha}(x) \widehat{\psi}_{\beta}(x') \rangle, \\ G_{\alpha\beta}^R(x, x') &= -i\langle \{ \widehat{\psi}_{\alpha}(x) \widehat{\psi}_{\beta}^{+}(x') \} \rangle \theta(t - t'), \\ F_{\alpha\beta}^R(x, x') &= -i\langle \{ \widehat{\psi}_{\alpha}(x) \widehat{\psi}_{\beta}(x') \} \rangle \theta(t - t'), \\ G_{\alpha\beta}^A(x, x') &= i\langle \{ \widehat{\psi}_{\alpha}(x) \widehat{\psi}_{\beta}^{+}(x') \} \rangle \theta(t' - t), \\ F_{\alpha\beta}^A(x, x') &= i\langle \{ \widehat{\psi}_{\alpha}(x) \widehat{\psi}_{\beta}(x') \} \rangle \theta(t' - t). \end{aligned} \quad (68)$$

Здесь фигурные скобки обозначают антикоммутиатор двух операторов, а $x = (t, \mathbf{r})$. В дальнейшем ограничимся рассмотрением функций (68) в отсутствие внешних полей, поскольку именно они входят в выражения для поляризаационных операторов Π и Q (раздел 8.2). Эти функции зависят только от разностей координат и времен, $x - x'$, и их спиновая зависимость имеет вид $G_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} G$ и $F_{\alpha\beta} = i\sigma_{\alpha\beta}^y F$.

Фурье-образы функций (68), введенные согласно

$$\begin{aligned} G(p) &= \iint G(x - x') \exp[-ip(x - x')] d^4(x - x'), \\ F(p) &= \iint F(x - x') \exp[-ip(x - x')] d^4(x - x'), \quad p = (\varepsilon, \mathbf{p}), \end{aligned}$$

удовлетворяют уравнениям Горькова, которые удобно представить в матричном виде:

$$\begin{aligned} \widehat{G}_0^{-1}(p) \widehat{G}^{R,A}(p) &= \widehat{1}, \\ \widehat{G}_0^{-1}(p) \widehat{G}^{-+}(p) &= 0, \end{aligned} \quad (69)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \widehat{G}_0^{-1}(p) &= \begin{pmatrix} \varepsilon - \xi_{\mathbf{p}} & -\Delta_0 \\ -\Delta_0^+ & \varepsilon + \xi_{\mathbf{p}} \end{pmatrix}, \\ \widehat{G}^{R,A}(p) &= \begin{pmatrix} G_0^{R,A}(p) & F_0^{R,A}(p) \\ -F_0^{+R,A}(p) & -G_0^{A,R}(-p) \end{pmatrix}, \\ \widehat{G}^{-+}(p) &= \begin{pmatrix} G_0^{-+}(p) & F_0^{-+}(p) \\ -(F_0^+)^{-+}(p) & -G_0^{+-}(-p) \end{pmatrix}, \\ \xi_{\mathbf{p}} &= \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \mu. \end{aligned}$$

В результате решения уравнений (69) получим

$$\begin{aligned} G_0^{-+}(p) &= 2\pi i [u_p^2 n_{\mathbf{p}} \delta(\varepsilon - \varepsilon_{\mathbf{p}}) + v_p^2 (1 - n_{\mathbf{p}}) \delta(\varepsilon + \varepsilon_{\mathbf{p}})], \\ F_0^{-+}(p) &= 2\pi i u_p v_p [n_{\mathbf{p}} \delta(\varepsilon - \varepsilon_{\mathbf{p}}) - (1 - n_{\mathbf{p}}) \delta(\varepsilon + \varepsilon_{\mathbf{p}})], \\ G_0^{+-}(p) &= -2\pi i [u_p^2 (1 - n_{\mathbf{p}}) \delta(\varepsilon - \varepsilon_{\mathbf{p}}) + v_p^2 n_{\mathbf{p}} \delta(\varepsilon + \varepsilon_{\mathbf{p}})], \\ G_0^R(p) &= \frac{u_p^2}{\varepsilon - \varepsilon_{\mathbf{p}} + i0} + \frac{v_p^2}{\varepsilon + \varepsilon_{\mathbf{p}} + i0}, \\ F_0^R(p) &= u_p v_p \left(\frac{1}{\varepsilon - \varepsilon_{\mathbf{p}} + i0} - \frac{1}{\varepsilon + \varepsilon_{\mathbf{p}} + i0} \right). \end{aligned}$$

Здесь $n_{\mathbf{p}} = (\exp(\varepsilon_{\mathbf{p}}/T) + 1)^{-1}$ — распределение Ферми для квазичастиц, $u_{\mathbf{p}}^2 = (1 + \xi_{\mathbf{p}}/\varepsilon_{\mathbf{p}})/2$, $v_{\mathbf{p}}^2 = (1 - \xi_{\mathbf{p}}/\varepsilon_{\mathbf{p}})/2$ — фак-

торы когерентности. Выражения для остальных функций Грина легко получить с учетом соотношений, которые следуют из определений (68): $G_0^A(p) = G_0^{R^*}(p)$, $F_0^A(p) = F_0^R(-p)$ и $F_0^{+-}(p) = F_0^{-+}(-p)$.

8.2. Поляризационные операторы Q и Π .

Тождество Уорда

В выражениях линейного отклика (26)–(29) важную роль играют поляризационные операторы Q и Π . Их явный вид можно получить с помощью диаграмм, изображенных на рис. 1 (с замкнутыми свободными концами сплошных линий) и рис. 2б:

$$\begin{aligned} Q_{kl}^A(q) = & -2i \frac{1}{m^2} \int \left(p_k + \frac{q_k}{2} \right) \left(p_l + \frac{q_l}{2} \right) \left[G_0^R(p+q) G_0^{-+}(p) + \right. \\ & + G_0^{-+}(p+q) G_0^A(p) - F_0^R(p+q) (F^+)_{0^{-+}}(p) - \\ & \left. - F_0^{-+}(p+q) (F^+)_{0^A}(p) \right] \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}, \end{aligned} \quad (70)$$

$$\begin{aligned} Q_{k0}^A(q) = Q_{0k}^A(q) = & -2i \frac{1}{m} \int \left(p_k + \frac{q_k}{2} \right) \left[G_0^R(p+q) G_0^{-+}(p) + \right. \\ & + G_0^{-+}(p+q) G_0^A(p) + F_0^R(p+q) (F^+)_{0^{-+}}(p) + \\ & \left. + F_0^{-+}(p+q) (F^+)_{0^A}(p) \right] \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}, \end{aligned} \quad (71)$$

$$\begin{aligned} Q_{00}^A(q) = & -2i \int \left[G_0^R(p+q) G_0^{-+}(p) + G_0^{-+}(p+q) G_0^A(p) - \right. \\ & - F_0^R(p+q) (F^+)_{0^{-+}}(p) - \\ & \left. - F_0^{-+}(p+q) (F^+)_{0^A}(p) \right] \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}, \end{aligned} \quad (72)$$

$$\begin{aligned} Q_k^A(q) = & -2i \frac{1}{m} \int \left(p_k + \frac{q_k}{2} \right) \left[G_0^R(p+q) (F^+)_{0^{-+}}(p) + \right. \\ & \left. + G_0^{-+}(p+q) (F^+)_{0^A}(p) \right] \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}, \end{aligned} \quad (73)$$

$$\begin{aligned} Q_0^A(q) = & -2i \int \left[G_0^R(p+q) (F^+)_{0^{-+}}(p) + \right. \\ & \left. + G_0^{-+}(p+q) (F^+)_{0^A}(p) \right] \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}, \end{aligned} \quad (74)$$

а также на рис. 2а:

$$\begin{aligned} \Pi_l^A(q) = & 2ig \frac{1}{m} \int \left(p_l + \frac{q_l}{2} \right) \left[G_0^R(p+q) F_0^{-+}(p) + \right. \\ & \left. + G_0^{-+}(p+q) F_0^A(p) \right] \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}, \end{aligned} \quad (75)$$

$$\begin{aligned} \Pi_0^A(q) = & 2ig \int \left[G_0^R(p+q) F_0^{-+}(p) + \right. \\ & \left. + G_0^{-+}(p+q) F_0^A(p) \right] \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}, \end{aligned} \quad (76)$$

$$\begin{aligned} \Pi^\Delta(q) = & ig \int \left[G_0^R(p+q) G_0^{+-}(-p) + \right. \\ & \left. + G_0^{-+}(p+q) G_0^R(-p) \right] \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}, \end{aligned} \quad (77)$$

$$\begin{aligned} \Pi^{\Delta^+}(q) = & -ig \int \left[F_0^R(p+q) F_0^{-+}(p) + \right. \\ & \left. + F_0^{-+}(p+q) F_0^A(p) \right] \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}, \end{aligned} \quad (78)$$

где k и l — "пространственные" индексы, интегрирование производится по 4-импульсу $p \equiv (\varepsilon, \mathbf{p})$. Параметр порядка в отсутствие внешних полей Δ_0 выбран вещественным. При этом становятся равными с точностью до коэффициентов поляризационные операторы Π^A и Q^A : $Q_k^A = \Pi_k^A/g$, $Q_0^A = \Pi_0^A/g$ и, кроме того, $\Pi^{\Delta^+}(q) = \Pi^{\Delta^+*}(-q)$. Требование калибровочной инвариантности линейного отклика (или эквивалентного условия непрерывности тока) означает на языке Π - и Q -ядер выполнение следующих тождеств:

$$\left[Q_{kl}^A(q) + \frac{n}{m} \delta_{kl} \right] q_l - Q_{k0}^A(q) \omega = -4i\Delta_0 Q_{2k}^A(q), \quad (79)$$

$$Q_{0l}^A(q) q_l - Q_{00}^A(q) \omega = -4i\Delta_0 Q_{20}^A(q), \quad (80)$$

$$\Pi_{1l}^A(q) q_l - \Pi_{10}^A(q) \omega = -2i\Delta_0 [\Pi_2^A(q) - \Pi_2^{\Delta^+}(q)], \quad (81)$$

$$\Pi_{2l}^A(q) q_l - \Pi_{20}^A(q) \omega = 2i\Delta_0 [1 + \Pi_1^A(q) - \Pi_1^{\Delta^+}(q)]. \quad (82)$$

Здесь нижние первые индексы 1 и 2 обозначают действительную и мнимую часть соответствующего поляризационного оператора (17). Подобные тождества ранее были получены в пределе малых \mathbf{q} и ω в работе [29].

Можно показать явным образом как связаны соотношения (79)–(82) с тождеством Уорда для сверхпроводника, записанным в стандартном виде [9]:

$$\sum_{v=0}^3 q_v \hat{\Gamma}_v(p+q, p) = \hat{\tau}_3 \hat{G}_0^{-1}(p) - \hat{G}_0^{-1}(p+q) \hat{\tau}_3. \quad (83)$$

Здесь

$$\hat{\tau}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

определение матрицы $\hat{G}_0^{-1}(p)$ дано в разделе 8.1. Вершинная функция $\hat{\Gamma}_v$, содержащаяся в (83), входит в выражение для линейной по потенциалам $A = (c\varphi, \mathbf{A})$ поправки к одночастичной функции Грина следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{G}^{-+(1)}(p+q, p) = & -\frac{e}{c} \hat{G}_0^R(p+q) \sum_v \hat{\Gamma}_v(p+q, p) \times \\ & \times \hat{G}_0^{-+}(p) A_v(q) - \frac{e}{c} \hat{G}_0^{-+}(p+q) \sum_v \hat{\Gamma}_v(p+q, p) \hat{G}_0^A(p) A_v(q). \end{aligned} \quad (84)$$

Для взаимодействия в модели БКШ эта вершинная функция уже не содержит келдышевских индексов $(-, +)$ и определяется соотношением: $\hat{\Gamma}_v = \hat{\Gamma}_v^{-+,-} + \hat{\Gamma}_v^{-+,-} = -\hat{\Gamma}_v^{++,-} - \hat{\Gamma}_v^{++,+}$.

Рассмотрим сначала сверхпроводник без кулоновского взаимодействия между электронами. В этом слу-

чае вершинная функция имеет вид

$$\widehat{\Gamma}_v(p+q, p) = \begin{pmatrix} \gamma_v(p+q, p) & P_v(q) \\ P_v^*(-q) & -\gamma_v(-p, -p-q) \end{pmatrix},$$

где $\gamma(p+q, p) = [1, m^{-1}(\mathbf{p} + \mathbf{q}/2)]$ — "свободная" вершинная функция (вершинная функция в нормальном состоянии), P_v — ядро, связывающее поправку к параметру порядка $\Delta^{(1)}$ с внешним потенциалом A_v , $\Delta^{(1)}(q) = P_v(q) A_v(q)$ (см. рис. 3). Для нахождения функции P_v необходимо решить уравнение самосогласования (16) (при $V=0$). Отметим, что именно P_v обеспечивает перенормировку "свободной" вершины за счет притягивающего взаимодействия между электронами, приводящего к сверхпроводимости ($P_v \propto g$). Таким образом, в рассматриваемом случае уравнением, определяющим вершинную матрицу, является уравнение (16) (при $V=0$). Решение этого уравнения приводит к следующему выражению для ядра P_v в отсутствие кулоновского взаимодействия:

$$P_v(q) = \frac{P_v^A(q)[1 + P^{\Delta*}(-q)] - P_v^{A*}(-q)P^{\Delta+}(q)}{[1 + P^{\Delta}(q)][1 + P^{\Delta*}(-q)] - P^{\Delta+}(q)P^{\Delta*+}(-q)}. \quad (85)$$

Для вывода тождества Уорда в форме (83) необходимо вычислить комбинацию $\sum_v q_v P_v(q)$. Используя соотношения между P -ядрами (81), (82), получим

$$\begin{aligned} \sum_v q_v P_v(q) &= \\ &= \frac{\sum_v q_v P_v^A(q)[1 + P^{\Delta*}(-q)] - \sum_v q_v P_v^{A*}(-q)P^{\Delta+}(q)}{[1 + P^{\Delta}(q)][1 + P^{\Delta*}(-q)] - P^{\Delta+}(q)P^{\Delta*+}(-q)} = \\ &= -2\Delta_0 \left\{ \frac{[1 + P^{\Delta}(q) - P^{\Delta+}(q)][1 + P^{\Delta*}(-q)]}{[1 + P^{\Delta}(q)][1 + P^{\Delta*}(-q)] - P^{\Delta+}(q)P^{\Delta*+}(-q)} + \right. \\ &\left. + \frac{[1 + P^{\Delta*}(-q) - P^{\Delta*+}(-q)]P^{\Delta+}(q)}{[1 + P^{\Delta}(q)][1 + P^{\Delta*}(-q)] - P^{\Delta+}(q)P^{\Delta*+}(-q)} \right\} = -2\Delta_0. \quad (86) \end{aligned}$$

Аналогичные комбинации для диагональных элементов вершинной матрицы $\widehat{\Gamma}_v$ равны

$$\begin{aligned} \sum_v q_v \gamma_v(p+q, p) &= \xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} - \xi_{\mathbf{p}} - \omega, \\ \sum_v q_v \gamma_v(-p, -p-q) &= \xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} - \xi_{\mathbf{p}} + \omega. \quad (87) \end{aligned}$$

В результате левая часть (83) принимает вид

$$\sum_v q_v \widehat{\Gamma}_v(p+q, p) = \begin{pmatrix} \xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} - \xi_{\mathbf{p}} - \omega & -2\Delta_0 \\ 2\Delta_0 & \xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} - \xi_{\mathbf{p}} + \omega \end{pmatrix}. \quad (88)$$

Нетрудно убедиться в том, что матрица, стоящая в правой части (88), совпадает с $\widehat{\tau}_3 \widehat{G}_0^{-1}(p) - \widehat{G}_0^{-1}(p+q) \widehat{\tau}_3$. Таким образом, мы показали, что вершинная функция $\widehat{\Gamma}_v$ удовлетворяет тождеству Уорда (83), если выполняются соотношения (81), (82). Один из возможных способов доказательства (79)–(82) продемонстрирован в конце данного раздела.

Кулоновское взаимодействие в рамках приближения RPA учитывается путем определенной модификации потенциалов поля, а именно, замены A_v на $A_v - \delta_{v0} c e^{-1} V \delta n$, причем флуктуации плотности δn опре-

деляются затем самосогласованным образом. В выражении (84) такая замена приводит к перенормировке вершинной матрицы

$$\begin{aligned} \widehat{\Gamma}_v(p+q, p) &\rightarrow \widehat{\Gamma}'_v(p+q, p) = \widehat{\Gamma}_v(p+q, p) + \\ &+ \widehat{\Gamma}_0(p+q, p) V(q) Q_{0v}(q) = \\ &= \begin{pmatrix} \gamma_v(p+q, p) + V(q) Q_{0v}(q) & P_v(q) + P_0(q) V(q) Q_{0v}(q) \\ P_v^*(-q) + P_0^*(-q) V(q) Q_{0v}(q) & -\gamma_v(-p, -p-q) - V(q) Q_{0v}(q) \end{pmatrix}. \quad (89) \end{aligned}$$

Здесь Q_{0v} — ядро, связывающее δn с потенциалом A_v ,

$$\delta n(q) = -\frac{e}{c} Q_{0v}(q) A_v(q), \quad (90)$$

P_v определяется формулой (85). Явный вид ядра Q_{0v} может быть легко установлен сравнением (90) с формулой (26).

Учет кулоновского взаимодействия в рамках приближения RPA не влияет на функции Грина \widehat{G}_0 , поскольку в отсутствие внешнего поля флуктуации плотности равны нулю. Поэтому правая часть тождества Уорда (83) остается неизменной. Таким образом, вершинная матрица, определенная согласно (89), удовлетворяет тождеству Уорда, если выполняется соотношение

$$\sum_v Q_{0v}(q) q_v = 0. \quad (91)$$

Отметим, что (91) является условием, обеспечивающим калибровочную инвариантность выражения (90) для флуктуации плотности $\delta n(q)$. Это условие выполняется автоматически в рамках рассматриваемого подхода нахождения линейного отклика сверхпроводника, так как формула (26) явно калибровочно инвариантна. В результате для вершинной матрицы $\widehat{\Gamma}'_v$ имеем то же самое тождество, что и для $\widehat{\Gamma}_v$:

$$\begin{aligned} \sum_v q_v \widehat{\Gamma}'_v(p+q, p) &= \sum_v q_v \widehat{\Gamma}_v(p+q, p) = \\ &= \widehat{\tau}_3 \widehat{G}_0^{-1}(p) - \widehat{G}_0^{-1}(p+q) \widehat{\tau}_3. \quad (92) \end{aligned}$$

Вернемся теперь к соотношениям (79)–(82). Из формул (70)–(78) видно, что поляризационные операторы определяются одноптичными выражениями, являющимися суммами сверток "свободных" нормальных и аномальных функций Грина в различных комбинациях. Функции G_0 и F_0 связаны между собой уравнениями Горькова (69). На использовании этих уравнений основан один из способов доказательства соотношений (79)–(82), который мы продемонстрируем на примере вывода первого из них. Умножим определение (70) на q_l и вычтем из него (71), умноженное на ω :

$$\begin{aligned} Q_{kl}^A(q) q_l - Q_{k0}^A(q) \omega &= \\ &= -2i \frac{1}{m} \int \left(p_k + \frac{q_k}{2} \right) \left[\frac{(p_l + q_l/2) q_l}{2m} - \omega \right] \times \\ &\times [G_0^R(p+q) G_0^{-+}(p) + G_0^{-+}(p+q) G_0^A(p)] \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} - \\ &- 2i \frac{1}{m} \int \left(p_k + \frac{q_k}{2} \right) \left[-\frac{(p_l + q_l/2) q_l}{2m} - \omega \right] \times \\ &\times [F_0^R(p+q) (F^+)_{0^{-+}}(p) - F_0^{-+}(p+q) (F^+)_{0^A}(p)] \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}. \quad (93) \end{aligned}$$

Перепишем выражения в квадратных скобках следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{(p_l + q_l/2) q_l}{2m} - \omega &= \xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} - \xi_{\mathbf{p}} - \omega = \\ &= (\xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} - \varepsilon - \omega) - (\xi_{\mathbf{p}} - \varepsilon) \end{aligned}$$

и, аналогично,

$$-\frac{(p_l + q_l/2) q_l}{2m} - \omega = -(\xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} + \varepsilon + \omega) + (\xi_{\mathbf{p}} + \varepsilon).$$

Нетрудно видеть, что комбинации в круглых скобках являются диагональными элементами матриц $\widehat{G}_0^{-1}(p+q)$ и $\widehat{G}_0^{-1}(p)$, стоящих в уравнениях Горькова (см. раздел 8.1). Это позволяет использовать уравнения (69) для дальнейшего упрощения:

$$\begin{aligned} Q_{kl}^A(q) q_l - Q_{k0}^A(q) \omega &= \\ &= 2i \frac{1}{m} \int \left(p_k + \frac{q_k}{2} \right) [G_0^{-+}(p) - G_0^{-+}(p+q)] \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} + \\ &+ 4i\Delta_0 \frac{1}{m} \int \left(p_k + \frac{q_k}{2} \right) [G_0^R(p+q)(F^+)_{0^{-+}}(p) + \\ &+ G_0^{-+}(p+q)(F^+)_{0^A}(p)] \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} + \\ &+ 4i\Delta_0 \frac{1}{m} \int \left(p_k + \frac{q_k}{2} \right) [F_0^R(p+q) G_0^{-+}(p) + \\ &+ F_0^{-+}(p+q) G_0^A(p)] \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}. \end{aligned} \quad (94)$$

После несложных преобразований первый интеграл в правой части (94) примет вид

$$2i \frac{1}{m} q_k \int G_0^{-+}(p) \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} = -q_k \frac{n}{m}. \quad (95)$$

Заметив, что согласно определению (73) второй интеграл в (94) равен (с учетом коэффициента) $-2\Delta_0 Q_k^A(q)$, а третий — $2\Delta_0 Q_k^{A*}(-q)$, получим в результате соотношение (79). Доказательство остальных тождеств (80)–(82) может быть проведено аналогичным образом.

8.3. Поведение поляризационных операторов Q и Π в пределе малых q и ω

Нахождение явного вида поляризационных операторов как функций \mathbf{q} и ω , вообще говоря, представляет собой довольно сложную задачу. Даже в рассматриваемом здесь "чистом" случае в формулах (70)–(78) аналитически точно можно вычислить только интеграл по частоте ε . Однако для большинства задач достаточно знать выражения для Π - и Q -ядер в пределе малых \mathbf{q} ($q \ll p_F$) и ω ($\omega \ll \Delta_0$). После интегрирования по частоте ε поляризационные операторы Q_{kl}^A , Q_{k0}^A , Q_{00}^A , Q_{1k}^A и Q_{10}^A принимают вид

$$\begin{aligned} Q_{kl}^A(q) &= \frac{1}{m^2} \int p_k p_l \left\{ \left(1 + \frac{\xi_+ \xi_- + \Delta_0^2}{\varepsilon_+ \varepsilon_-} \right) (n_- - n_+) \times \right. \\ &\times \frac{\varepsilon_+ - \varepsilon_-}{(\omega + i\delta)^2 - (\varepsilon_+ - \varepsilon_-)^2} + \left(1 - \frac{\xi_+ \xi_- + \Delta_0^2}{\varepsilon_+ \varepsilon_-} \right) \times \\ &\left. \times (1 - n_- - n_+) \frac{\varepsilon_+ + \varepsilon_-}{(\omega + i\delta)^2 - (\varepsilon_+ + \varepsilon_-)^2} \right\} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}, \end{aligned} \quad (96)$$

$$\begin{aligned} Q_{k0}^A(q) &= \frac{1}{m} \int p_k \frac{1}{\varepsilon_- \varepsilon_+} \left\{ \left(\xi_- \varepsilon_+ + \xi_+ \varepsilon_- \right) (n_- - n_+) \times \right. \\ &\times \frac{\omega + i\delta}{(\omega + i\delta)^2 - (\varepsilon_+ - \varepsilon_-)^2} + (\xi_+ \varepsilon_- - \xi_- \varepsilon_+) \times \\ &\left. \times (1 - n_- - n_+) \frac{\omega + i\delta}{(\omega + i\delta)^2 - (\varepsilon_+ + \varepsilon_-)^2} \right\} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}, \end{aligned} \quad (97)$$

$$\begin{aligned} Q_{00}^A(q) &= \int \left\{ \left(1 + \frac{\xi_+ \xi_- - \Delta_0^2}{\varepsilon_+ \varepsilon_-} \right) (n_- - n_+) \times \right. \\ &\times \frac{\varepsilon_+ - \varepsilon_-}{(\omega + i\delta)^2 - (\varepsilon_+ - \varepsilon_-)^2} + \left(1 - \frac{\xi_+ \xi_- - \Delta_0^2}{\varepsilon_+ \varepsilon_-} \right) \times \\ &\left. \times (1 - n_- - n_+) \frac{\varepsilon_+ + \varepsilon_-}{(\omega + i\delta)^2 - (\varepsilon_+ + \varepsilon_-)^2} \right\} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}, \end{aligned} \quad (98)$$

$$\begin{aligned} Q_{1k}^A(q) &= -\frac{1}{m} \int p_k \frac{\Delta_0}{2\varepsilon_- \varepsilon_+} \left\{ (n_- - n_+) \frac{(\omega + i\delta)(\varepsilon_+ + \varepsilon_-)}{(\omega + i\delta)^2 - (\varepsilon_+ - \varepsilon_-)^2} - \right. \\ &\left. - (1 - n_- - n_+) \frac{(\omega + i\delta)(\varepsilon_+ - \varepsilon_-)}{(\omega + i\delta)^2 - (\varepsilon_+ + \varepsilon_-)^2} \right\} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}, \end{aligned} \quad (99)$$

$$\begin{aligned} Q_{10}^A(q) &= -\int \frac{\Delta_0}{2\varepsilon_- \varepsilon_+} \left\{ (n_- - n_+) \frac{(\xi_+ + \xi_-)(\varepsilon_+ - \varepsilon_-)}{(\omega + i\delta)^2 - (\varepsilon_+ - \varepsilon_-)^2} - \right. \\ &\left. - (1 - n_- - n_+) \frac{(\xi_+ + \xi_-)(\varepsilon_+ + \varepsilon_-)}{(\omega + i\delta)^2 - (\varepsilon_+ + \varepsilon_-)^2} \right\} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}, \end{aligned} \quad (100)$$

где $\xi_{\pm} = \xi_{\mathbf{p} \pm \mathbf{q}/2}$, $\varepsilon_{\pm} = \varepsilon_{\mathbf{p} \pm \mathbf{q}/2}$, $n_{\pm} = n_{\mathbf{p} \pm \mathbf{q}/2}$, $\delta = +0$.

Перейдем теперь к анализу явного вида ядер в конкретных предельных случаях. Рассмотрим сначала статический случай ($\omega = 0$).

Для нахождения первого уравнения Лондонов необходимо знать ядро Q_{kl}^A в пределе $\mathbf{q} \rightarrow 0$. При температуре $T \leq T_c$ оно имеет вид

$$\begin{aligned} Q_{kl}^A(\mathbf{q} \rightarrow 0, 0) &= \delta_{kl} \frac{2}{3m^2} \int p^2 \left(-\frac{\partial n_{\mathbf{p}}}{\partial \varepsilon_{\mathbf{p}}} \right) \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} = \\ &= \delta_{kl} \frac{n_s(T) - n}{m}. \end{aligned} \quad (101)$$

Формула (101) является определением сверхтекучей плотности n_s . Нетрудно видеть, что при $T = 0$ функция распределения квазичастиц $n(\varepsilon_{\mathbf{p}}) = 0$, и поэтому в рассматриваемом пределе $Q_{kl}^A \rightarrow 0$. Если температура равна критической, $T = T_c$, параметр порядка Δ_0 обращается в нуль, и интеграл в (101) равен

$$\begin{aligned} Q_{kl}^A(\mathbf{q} \rightarrow 0, 0) &= \delta_{kl} \frac{2}{3m^2} \int p^2 \left(-\frac{\partial n(\xi_{\mathbf{p}})}{\partial \xi_{\mathbf{p}}} \right) \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} = \\ &= -\delta_{kl} \frac{n}{m}. \end{aligned} \quad (102)$$

Результат (102) является ожидаемым для нормального состояния и находится в полном соответствии с тожде-

ством (79). Отметим, что при этом сверхтекучая плотность $n_s = 0$.

Поляризационный оператор Q_{00}^A , найденный в том же пределе $\mathbf{q} \rightarrow 0$, содержит необходимую информацию о статической экранировке в сверхпроводнике. Вычислим его при $T = 0$

$$\begin{aligned} Q_{00}^A(\mathbf{q} \rightarrow 0, 0) &= - \int \left(1 - \frac{\xi_{\mathbf{p}}^2 - \Delta_0^2}{\varepsilon_{\mathbf{p}}^2}\right) \frac{1}{2\varepsilon_{\mathbf{p}}} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} = \\ &= - \int \frac{\Delta_0^2}{(\xi_{\mathbf{p}}^2 + \Delta_0^2)^{3/2}} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \approx \\ &\approx -N_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(\xi/\Delta_0)}{(1 + (\xi/\Delta_0)^2)^{3/2}} = -2N_0, \quad (103) \end{aligned}$$

здесь N_0 — плотность состояний на поверхности Ферми.

Для ядер Q_{kl}^A и Q_{k0}^A при нулевой температуре, конечных частотах $\omega \neq 0$ и $\mathbf{q} = 0$ выполняется равенство: $Q_{kl}^A(0, \omega) = Q_{k0}^A(0, \omega) = 0$.

Убедимся теперь в том, что в пределе малых, но конечных ω и \mathbf{q} в выражениях линейного отклика поправкой к модулю параметра порядка Δ_1 можно пренебречь. В окончательных выражениях для флуктуации плотности δn (26), (28) и тока j (27), (29) учет поправки Δ_1 сводится к замене исходных поляризационных операторов на поляризационные операторы с чертой. Из (22), (23) видно, что роль, которую играет такая замена, определяется в основном величиной ядер Q_1^A (напомним, что P_1^A равны им с точностью до коэффициента) и P_2^A (ранее указывалось, что $P_2^+ = 0$). Найдем выражение для ядра Q_{10}^A , рассмотрев для простоты случай $T = 0$:

$$\begin{aligned} Q_{10}^A(\mathbf{q}, \omega) &\approx - \int \frac{\Delta_0 \xi_{\mathbf{p}}}{2\varepsilon_{\mathbf{p}}^3} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \approx \\ &\approx -\frac{1}{2} \int_{-\varepsilon_F}^{+\infty} \frac{\xi}{(\xi^2 + \Delta_0^2)^{3/2}} N(\xi + \varepsilon_F) d\xi \propto -N_0 \frac{\Delta_0}{\varepsilon_F}. \quad (104) \end{aligned}$$

Из (104) видно, что в результате вычисления возникает характерный малый параметр Δ_0/ε_F . Его появление обусловлено тем, что в нулевом порядке по Δ_0/ε_F ядро Q_{10}^A обращается в нуль, поскольку в этом приближении подынтегральное выражение является нечетным по переменной ξ и интегрирование происходит в симметричных пределах. В результате, с точностью до Δ_0/ε_F , Q_0^A оказывается чисто мнимой величиной, т.е. выполняется соотношение $Q_0^A(q) = -Q_0^{A*}(-q) = iQ_{20}^A(q)$. Аналогичным образом легко убедиться в том, что в таком же приближении имеют место равенства $P_0^A(q) = -P_0^{A*}(-q) = P_{20}^A(q)$, $P^A(q) = P^{A*}(-q) = P_1^A(q)$ и $P^{\Delta^+}(q) = P^{\Delta^+*}(-q) = P_1^{\Delta^+}(q)$. Вычислим теперь относительный вклад, вносимый вторым слагаемым из (22) в ядро \bar{Q}_{00}^A . Подставив (104) в (22), получим

$$\begin{aligned} \frac{Q_{00}^A - \bar{Q}_{00}^A}{Q_{00}^A} &= - \frac{2Q_{10}^A g Q_{10}^A}{Q_{00}^A (1 + P_1^A + P_1^{\Delta^+})} \approx \\ &\approx \frac{g[(N_0/2)(\Delta_0/\varepsilon_F)]^2}{gN_0^2} \propto \left(\frac{\Delta_0}{\varepsilon_F}\right)^2 \ll 1. \quad (105) \end{aligned}$$

Таким образом, в пределе малых \mathbf{q} и ω поправка к Q_{00}^A за счет второго слагаемого в (22) незначительна. Тем же способом можно показать, что и отличие поляризацион-

ных операторов \bar{P}_2^A от P_2^A (23) мало по параметру $(\Delta_0/\varepsilon_F)^2$, возникающему так же, как и в рассмотренном выше случае из-за нечетности (в нулевом приближении) по ξ подынтегрального выражения для ядра P_2^A .

Приведенные оценки показывают, что мал не только вклад поправки к модулю параметра порядка в выражениях для флуктуации плотности заряда и плотности тока, но и сама эта поправка является малой величиной (см. (24)).

Следует подчеркнуть, что такой результат не является универсальным и в значительной мере обусловлен тем, что для квадратичного закона дисперсии спектра свободных электронов вблизи поверхности Ферми плотность состояний меняется слабо и ее можно считать константой (N_0). Однако спектр электронов может быть устроен таким образом, что вблизи уровня Ферми имеется особенность в плотности состояний и тогда подынтегральные выражения в ядрах Q_{1k}^A и P_2^A уже нельзя считать приближенно (в указанном выше смысле) нечетными по ξ . В этом случае поправка к модулю параметра порядка и вносимый ею вклад в j и δn могут оказаться существенными.

Список литературы

1. Bardeen J, Cooper L N, Schrieffer J R *Phys. Rev.* **108** 1175 (1957)
2. Bogolyubov N N *Nuovo Cimento, X Ser.* **7** 794 (1958)
3. Боголюбов Н Н, Толмачев В В, Ширков Д В *Новый метод в теории сверхпроводимости* (М.: Изд-во АН СССР, 1958)
4. Anderson P W *Phys. Rev.* **110** 827 (1958)
5. Anderson P W *Phys. Rev.* **112** 1900 (1958)
6. Горьков Л П *ЖЭТФ* **34** 735 (1958)
7. Боголюбов Н Н *ЖЭТФ* **34** 58 (1958)
8. Келдыш Л В *ЖЭТФ* **47** 1515 (1964)
9. Шриффер Дж *Теория сверхпроводимости* (М.: Наука, 1970)
10. Ambegaokar V, Kadanoff L *Nuovo Cimento, X Ser.* **22** 914 (1961)
11. Kosztin I et al. *Phys. Rev. B* **61** 11662 (2000)
12. Шмидт В В *Введение в физику сверхпроводников* (М.: Изд-во МЦНМО, 2001)
13. Mattis D C, Bardeen J *Phys. Rev.* **111** 412 (1958)
14. Palmer L H, Tinkham M *Phys. Rev.* **165** 588 (1968)
15. Максимов Е Г *УФН* **170** 1033 (2000)
16. Carlson R V, Goldman A M *Phys. Rev. Lett.* **31** 880 (1973)
17. Carlson R V, Goldman A M *Phys. Rev. Lett.* **34** 11 (1975)
18. Ohashi Y, Takada S *Phys. Rev. B* **62** 5971 (2000)
19. Sharapov S G, Beck H *Phys. Rev. B* **65** 134516 (2002)
20. Артеменко С Н, Волков А Ф *ЖЭТФ* **69** 1764 (1975)
21. Овчинников Ю Н *ЖЭТФ* **72** 773 (1977)
22. Schön G "Collective modes in superconductors", in *Nonequilibrium Superconductivity* (Modern Problem in Condensed Matter Sciences, Vol. 12, Eds D N Langenberg, A I Larkin) (Amsterdam: North-Holland, 1986) p. 589
23. Kulik I O, Entin-Wohlman O, Orbach R *J. Low Temp. Phys.* **43** 591 (1981)
24. Wong K Y M, Takada S *Phys. Rev. B* **37** 5644 (1988)
25. Ohashi Y, Takada S *Phys. Rev. B* **59** 4404 (1999)
26. Dinter M *Phys. Rev. B* **18** 3163 (1978)
27. Dinter M *J. Low Temp. Phys.* **32** 529 (1978)
28. Belitz D et al. *Phys. Rev. B* **39** 2072 (1989)
29. Zha Yuyao, Levin K, Liu D Z *Phys. Rev. B* **51** 6602 (1995)
30. Lozovik Yu E, Apenko S M *J. Low Temp. Phys.* **43** 383 (1981)
31. Mahan G D *Many-Particle Physics* (New York: Plenum Press, 1981)
32. Абрикосов А А, Горьков Л П, Дзялошинский И Е *Методы квантовой теории поля в статистической физике* (М.: Физматгиз, 1962); 2-е изд. (М.: Добросвет, 1998)
33. Кулик И О, Янсон И К *Эффект Джозефсона в сверхпроводящих туннельных структурах* (М.: Наука, 1970)
34. Ponomarev Ya G et al. *Solid State Commun.* **111** 513 (1999)

35. Maksimov E G, Arseyev P I, Maslova N S *Solid State Commun.* **111** 391 (1999)
36. Scalapino D J *Phys. Rev. Lett.* **24** 1052 (1970)
37. Shenoy S R, Lee P A *Phys. Rev. B* **10** 2744 (1974)
38. Kadin A M, Goldman A M *Phys. Rev. B* **25** 6701 (1982)

Theory of the gauge-invariant response of superconductors to an external electromagnetic field

P.I. Arseev, S.O. Loiko, N.K. Fedorov

P.N. Lebedev Physics Institute, Russian Academy of Sciences,

Leninskii prosp. 53, 119991 Moscow, Russian Federation

Tel. (7-495) 132-62 71. Fax (7-495) 135-85 33

E-mail: ars@lpi.ru; stol@lpi.ru; fedorov@lpi.ru

A method for consistently calculating a linear response to an external electromagnetic field, which provides a result in an explicit gauge-invariant form, is proposed. Based on the diagrammatic technique for non-equilibrium processes it proves possible, as a consequence of self-consistency equations for the order parameter in the field of arbitrary gauge, to derive an equation which determines the phase of the order parameter as a function of the external field. The method automatically takes into account the existence of collective excitations in superconductors, which must be taken into consideration in accordance with the continuity equation. Possible types of collective excitations in clean superconductors at different temperatures are considered. A microscopic theory explaining the possibility of the observation of collective modes in superconducting tunnel junctions is presented.

PACS numbers: 74.20.Fg, 74.25.Nf, **74.81. – g**

Bibliography — 38 references

Received 9 February 2005, revised 20 May 2005

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **176** (1) 3–21 (2006)

Physics – Uspekhi **49** (1) (2006)