Август 2005 г. **Том 175, № 8**

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

"Эрмитовы" состояния в квантовом взаимодействии вихрей

В.Ю. Забурдаев, А.С. Романов, К.В. Чукбар

На гейзенберговском и шрёдингеровском языках рассмотрены квантовые эффекты в динамике пары монопольных вихрей самой различной природы. Эта система оказалась очень тесным и универсальным образом связанной с линейным квантовым осциллятором, что позволило ввести для нее термин "эрмитова", характеризующий собственные функции такого осциллятора.

PACS numbers: 03.65.Ca, 03.65.Ge, 47.32.Cc

Содержание

1. Введение

Двумерные точечные вихри представляют собой, как известно, крайне любопытную механическую систему, весьма далекую по своим свойствам от привычных нам "натуральных" систем с четким делением энергии на кинетическую и потенциальную составляющие и обычными ньютоновскими законами движения (см., например, [1–4]). И если изучение их классической динамики — все же достаточно разработанная тематика [2] (хотя и здесь характер эволюции может быть весьма неожиданным [5–8]), то квантово-механические подходы находятся в самом зачатке (см. [4] и цитированную там литературу), простираясь немногим далее определения энергетического спектра (интересно, что не менее специфичная и в чем-то похожая гамильтонова динамика спинов развита гораздо сильнее [9, 10]). По этой причине представляется важным (даже с методической точки зрения) продвинуться в таком описании и исследовать не только энергетические, но и динамические особенности квантового движения вихрей.

В.Ю. Забурдаев, А.С. Романов, К.В. Чукбар. Российский научный центр "Курчатовский институт",
123182 Москва, пл. Курчатова 1, Российская Федерация
Тел. (095) 196-73-01
E-mail: chukbar@dap.kiae.ru

*Статья поступила 11 февраля 2005 г.,
после доработки 18 апреля 2005 г.*

2. Классические распределенные вихри

Напомним прежде всего главные черты и язык описания распределенных вихревых движений в текучих сплошных средах. Общим универсальным законом, характеризующим практически все основные свойства идеальных (бездиссипативных) течений, является закон вмороженности ротора обобщенного импульса жидких частиц среды в ее же течение:

$$\frac{\partial \operatorname{rot} \mathbf{p}}{\partial t} = \operatorname{rot}\left[\mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{p}\right], \tag{1}$$

представляющий собой следствие гамильтоновости движения жидких частиц и наличия интегрального инварианта Пуанкаре–Картана в классической механике [2, 3]. В качестве примера $\mathbf{p}$ можно привести обычный механический импульс $M\mathbf{v}$ в случае гидродинамики идеальной жидкости и механико-полевой $M\mathbf{v} + q\mathbf{A}/c$ в случае магнитной гидродинамики заряженной жидкости (плазмы или электронных пар сверхпроводника).

Здесь мы будем рассматривать лишь двумерные течения сплошных сред в плоскости xy, в которых ротор обобщенного импульса представляет собой (псевдо) скаляр Π: $\operatorname{rot} \mathbf{p} \equiv \Pi \mathbf{e}_z$. Поскольку в вихревом движении (однородную) среду можно, как правило, считать несжимаемой, то поле скоростей также задается одним (псевдо)скаляром — потоковой функцией $\mathbf{v} = \operatorname{rot}(\Psi \mathbf{e}_z)$ и вся специфика различных текучих сплошных сред (различных гидродинамик, различных типов вихрей) определяется линейной связью между двумя скалярами:

$$\Pi = L(\Psi) \tag{2}$$

(например, в гидродинамике идеальной жидкости оператор $L \propto \Delta$). Чрезвычайно важной характеристикой течения является функция Грина уравнения (2) ψ, позволяющая "обращать" задачу и находить течение по заданному профилю завихренности:

$$\Psi = \int \Pi(\mathbf{r}')\, \psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\, \mathrm{d}^2\mathbf{r}'$$

(в изотропной среде, очевидно, $\psi = \psi(r)$), поскольку именно через нее выражаются все ключевые интегралы

движения сплошной среды, записываемые в "представлении завихренности". Этот переход от $\mathbf{v}$ как базовой характеристики к $\operatorname{rot}\mathbf{p}$ эквивалентен (и аналогичен по удобству) переходу от полевого к зарядовому представлению в классической электродинамике. Действительно, нетрудно видеть, что энергия, обобщенный импульс и момент импульса жидкости в целом, сохраняющиеся вследствие исходной пространственно-временно́й симметрии системы, переписываюся в виде [5]

$$\mathcal{E} = \frac{nd}{2}\int \mathbf{p}\mathbf{v}\,\mathrm{d}^2\mathbf{r} = \frac{nd}{2}\int \Pi\Psi\,\mathrm{d}^2\mathbf{r} = \\ = \frac{nd}{2}\iint \Pi(\mathbf{r})\,\Pi(\mathbf{r}')\,\psi(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\mathrm{d}^2\mathbf{r}'\,\mathrm{d}^2\mathbf{r}\,,$$

$$\mathbf{P} = nd\int \mathbf{p}\,\mathrm{d}^2\mathbf{r} = nd\,\mathbf{e}_z \times \int \mathbf{r}\Pi(\mathbf{r})\,\mathrm{d}^2\mathbf{r}\,, \tag{3}$$

$$\mathbf{M} = nd\int \mathbf{r}\times\mathbf{p}\,\mathrm{d}^2\mathbf{r} = \frac{nd}{2}\,\mathbf{e}_z\int r^2\Pi(\mathbf{r})\,\mathrm{d}^2\mathbf{r}\,.$$

Здесь n — концентрация жидких частиц среды, а d — толщина среды вдоль оси z. Поскольку мы пренебрегаем "изгибами" вихрей, эта толщина должна быть либо очень велика ($d\to\infty$) по сравнению со всеми другими характерными масштабами задач, чтобы можно было пренебрегать "концевыми" эффектами, либо, наоборот, очень мала ($d\to 0$), чтобы всякое движение по z отсутствовало в принципе (вплоть до размерного квантования). Между прочим, вид ψ зависит не только от исходной связи $\mathbf{p}$ с $\mathbf{v}$, но и от того, что эта функция чувствительна к геометрии задачи (см. ниже). Специфическим для данного типа вихрей является, однако, лишь первый (энергетический) интеграл, в то время как остальные два абсолютно универсальны, и именно в этом заключена причина "универсальности" возникающих ниже ответов.

3. Точечные классические вихри

Точечными вихрями принято называть локальные особенности поля завихренности

$$\Pi = \sum_i \Gamma_i\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)\,,$$

характеризуемые своими интенсивностями Γ_i и координатами $\mathbf{r}_i$. В действительности завихренность не сосредоточена в отдельных точках, а "размазана" по некоторой области, называемой керном вихря, с размером a, но в случае малости этой величины по сравнению с другими параметрами задачи (кроме, быть может, d) — например, с расстояниями между соседними вихрями — этим обстоятельством в первом приближении можно пренебречь.

В данной работе мы будем рассматривать вихри лишь одинаковой интенсивности по амплитуде (см. следующий раздел) и знаку Γ_0. Для них интегралы (3) переписываются в виде

$$\mathcal{E} = N\Gamma_0^2\sum_{i>j}\psi(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j)\,,$$

$$\mathbf{P} = N\Gamma_0\,\mathbf{e}_z\times\sum_i \mathbf{r}_i\,,$$

$$M = \frac{N\Gamma_0}{2}\sum_i r_i^2\,.$$

Здесь введено обозначение $N\equiv nd$ для погонной (двумерной) концентрации среды и произведена "перенормировка" $\mathcal{E}$ за счет исключения (бесконечной при $a=0$) собственной энергии вихрей, никак не сказывающейся на их взаимном движении (тут можно снова провести аналогию с зарядами в классической электродинамике — их механическое движение удобно изучать, считая их точечными и опуская собственную энергию). Второй интеграл, выражающий сохранение "центра тяжести" для вихревой системы из одинаковых "частиц", тривиален и не оказывает существенного влияния на их относительную динамику.

Нетрудно видеть, что в такой дискретной системе согласно базовому уравнению (1) каждый вихрь сносится продуцируемым всеми остальными вихрями течением, не меняя своей интенсивности, так что задача об эволюции сплошной среды (описываемая уравнениями в частных производных) сводится к механической задаче о движении отдельных "частиц" (описываемой уравнениями в обычных производных). В этом, собственно, и заключается притягательность такого представления Π (обеспечиваемого к тому же вполне физическими квантовыми эффектами, см. [4] и ниже). Хорошо известно, что эта механическая задача является гамильтоновой, причем роль гамильтониана выполняет $\Gamma_0^2\sum_{i>j}\psi(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j)$, канонических переменных — $x_i(t)$ и $y_i(t)$, а соответствующая скобка Пуассона задается формулой [1–4]

$$\{f,g\} \equiv \frac{1}{\Gamma_0}\sum_i\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i}\frac{\partial g}{\partial x_i}\right).$$

Отсюда проистекают следующие особенности вихревой динамики. Если сосредоточиться на движении в плоскости xy, то в резком отличии от ньютоновской механики мы видим, что местоположение частиц задает их скорость, а не ускорение (это обстоятельство позволило В.В. Козлову в [3] предложить называть механику точечных вихрей "картезианской"), т.е. монопольные вихри не обладают инерцией, движутся только вследствие "межчастичного" взаимодействия и не могут быть охарактеризованы никакой массой. Если же, обратив внимание на то, что для вихрей конфигурационное пространство является одновременно фазовым, посчитать одну их обычную координату (скажем, x) за обобщенную координату, а другую (тогда y) — за обобщенный импульс (снизив тем самым "эффективную" размерность вдвое), то заметим, что гамильтониан задачи H ни в коей мере не представим в виде простой суммы потенциальной $U(x)$ и кинетической $\propto y^2$ энергий. Такая ненатуральность (в строгом смысле этого слова) и приводит к многочисленным неожиданным особенностям поведения дискретной вихревой системы [6–8].

Поскольку квантовая механика и для обычных ньютоновских систем технически представляется гораздо сложнее классической, в данной работе рассмотрим лишь парное взаимодействие вихрей. Классическая динамика такой системы за счет перехода к переменным $\mathbf{R}=\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2$ и $\mathbf{r}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2$ определяется интегралами движения

$$\mathcal{E} = N\Gamma_0^2\psi(r)\,,\qquad \mathbf{P} = N\Gamma_0\,\mathbf{e}_z\times\mathbf{R}\,,\qquad M = \frac{N\Gamma_0}{4}\,r^2 + \mathrm{const}\,,$$

задающими законы $\mathbf{R}=\mathrm{const}$ и $r=\mathrm{const}$. Если ввести новые канонические переменные q, p, выразив их через

компоненты вектора $\mathbf{r}$ согласно соотношениям $q = \sqrt{N\Gamma_0/2}\,x$ и $p = \sqrt{N\Gamma_0/2}\,y$ (не путать с встречавшимся ранее каноническим импульсом жидких частиц среды), то классические (эффективно "одномерные") уравнения движения запишутся в виде

$$\begin{cases} \dot{q} = \{q, H\}\,, \\ \dot{p} = \{p, H\}\,, \end{cases} \qquad H = N\Gamma_0^2\psi\left(\sqrt{q^2+p^2}\right), \quad M = \frac{q^2+p^2}{2} \tag{4}$$

с уже обычной скобкой Пуассона. Мы сознательно наряду со специфическим гамильтонианом выписываем здесь и "универсализирующий" интеграл момента (для системы двух вихрей разного знака аналогичную роль играет интеграл импульса [4, 5]; однако этот вариант гораздо более напоминает движение обычных частиц — дипольный вихрь обладает "инерцией", — и здесь он не рассматривается). Квантование такой системы идеологически тривиально [4].

4. Квантование интенсивностей и энергии взаимодействия вихрей

Первое, что дают квантово-механические эффекты, — это дискретизация возможных значений завихренности отдельного вихря Γ_0. Действительно, согласно правилу Бора на любом замкнутом контуре, охватывающем керн вихря, должно укладываться целое число волн де Бройля, т.е.

$$\oint \mathbf{p}\,\mathrm{d}\mathbf{r} = \int \Pi\,\mathrm{d}^2\mathbf{r} = 2\pi\hbar\cdot(\pm1, \pm2, \ldots)\,.$$

Поскольку вихри с кратным "зарядом" неустойчивы и распадаются на элементарные, то можно считать, что у нас $\Gamma_0 = 2\pi\hbar$ (выбор единого знака непринципиален — он сказывается лишь на направлении вращения). Стандартный "квантовый" вывод этой дискретности (см., например, в [4]) лингвистически имеет дело не с завихренностью, а с фазой волновой функции, но по сути совпадает с приведенным.

Квантование же уравнений движения (4) легко осуществляется заменой скобки Пуассона функций $\{f, g\}_{q,\,p}$ на коммутатор операторов $[\hat{f}, \hat{g}] \equiv \hat{f}\hat{g} - \hat{g}\hat{f}$ с учетом соотношения $[\hat{q}, \hat{p}] = \mathrm{i}\hbar$. Нетрудно видеть, что в этом варианте энергетический спектр системы из двух одинаковых вихрей может быть найден из правила Бора–Зоммерфельда (в [4] и в цитируемой там литературе этот способ назван "геометрическим" квантованием) согласно формуле

$$\oint p\,\mathrm{d}q = \pi(q^2+p^2) = 2\pi\hbar\left(k+\frac{1}{2}\right), \tag{5}$$

где интегрирование в фазовой (и одновременно в обычной!) плоскости идет по траектории движения классической системы — кругу с радиусом $\sqrt{q^2+p^2}$. Здесь и ниже k — главное квантовое число. Любопытно (на это обстоятельство, к сожалению, не обращено внимание в прекрасном обзоре [4]), что фактически речь идет о квантовании момента импульса вихревой системы

$$M = \hbar\left(k+\frac{1}{2}\right),$$

в котором вследствие гамильтоновой "одномерности" системы вместо привычной для обычных плоских движений 1 стоит 1/2 (ср. [11]). Нетрудно видеть, что найденный спектр $H(\sqrt{k+1/2}\,)$ по физическому смыслу соответствует очень высоковозбужденным, предельно квазиклассическим энергетическим уровням, поскольку согласно (4)

$$k \sim \frac{\pi N r^2}{2} \gg 1\,, \tag{6}$$

где r — физическое расстояние между двумя вихрями, конечно же, в приближении сплошной среды существенно превышающее $N^{-1/2}$. Несомненно, столь большой безразмерный фактор обязан своему появлению различиям в квантовании движения отдельных частиц и коллективных течений сплошной среды.

По-видимому, именно с этим обстоятельством связано отсутствие интереса в литературе к квантовым законам движения в вихревых системах. С практической точки зрения вполне достаточно ограничиваться классическими механическими уравнениями для систем точечных вихрей, учитывая дискретность лишь их интенсивностей (подобно тому как для многих плазменных задач возможно классическое описание движения заряженных частиц, внутренняя структура которых связана исключительно с квантовой физикой).

Тем не менее представляется очень важным идеологически рассмотреть особенности квантовой динамики столь нетривиальных гамильтоновых систем, проявляющейся даже в найденных ранее во многих работах энергетических спектрах $\mathcal{E}_k$. В качестве физических примеров "ненатуральных" вихревых гамильтонианов $H \propto \psi$ можно упомянуть $-\ln r$ для идеальной (или сверхтекучей) жидкости [1–3], функцию Макдональда $K_0(r/b)$ для плазмы и массивных сверхпроводников ($b = c/\omega_{\mathrm{pe}}$ — лондоновская или бесстолкновительно-скиновая длина) [4, 5, 12], комбинацию функций Струве и Неймана $\mathbf{H}_0(r/b') - N_0(r/b')$ для перловских вихрей в сверхпроводящих пленках и токовых плазменных слоях ($b' = c^2/(\omega_{\mathrm{pe}}^2 d)$) [4, 5, 12–14], переходящую при $r \gg b'$ в $1/r$, или $1/r^4$, характеризующую дальнее флуктуационное (ван-дер-ваальсовское) взаимодействие вихрей в слоистых сверхпроводниках [15, 16]. Самое интересное, что возникающие ответы оказываются весьма универсальными и одновременно применимыми как к указанным, так и к любым другим симметричным функциям $\psi(r)$.

5. Гейзенберговское представление

Наиболее тесно примыкающей к классической методике описания динамических систем (4) является гейзенберговская идеология "дискретизации" непрерывных переменных. Оставшись маловостребованной в квантовой механике вследствие больших технических трудностей при решении практических задач [11], в нашем случае нетривиальных вихревых гамильтонианов она неожиданно оказывается чрезвычайно удобным и адекватным инструментом исследования.

Согласно этой идеологии в уравнениях (4) следует перейти от классических переменных q, p и H к бесконечным матрицам с заменой, как уже указывалось ранее, скобки Пуассона на коммутатор. При учете коммутационного соотношения для канонических пере-

менных $[\mathsf{q},\mathsf{p}] = \mathrm{i}\hbar\mathsf{E}$ (E — единичная матрица) отсюда получается

$$\begin{cases} \dot{\mathsf{q}} = \dfrac{1}{\mathrm{i}\hbar}\,[\mathsf{q},\mathsf{H}]\,, \\ \dot{\mathsf{p}} = \dfrac{1}{\mathrm{i}\hbar}\,[\mathsf{p},\mathsf{H}]\,, \end{cases} \qquad \mathsf{H} = N\Gamma_0^2\psi\left(\sqrt{\mathsf{q}^2+\mathsf{p}^2}\right). \tag{7}$$

Динамическая задача считается решенной, если удается найти такие q, p, удовлетворяющие (7), для которых матрица H диагональна, причем число, стоящее на k-м месте в ее диагонали, представляет при этом (уже найденное выше) $\mathcal{E}_k$.

Несмотря на существенную нелинейность классической задачи, квантовый ответ по сути идентичен найденному еще самим Гейзенбергом для (одномерного) гармонического (т.е. линейного) осциллятора: поскольку диагональной является уже конструкция $\mathsf{q}^2+\mathsf{p}^2$ (момент M!), нелинейная функция $\mathsf{H}(\sqrt{\mathsf{q}^2+\mathsf{p}^2}\,)$ тривиальна —

$$\mathsf{q} = \mathrm{i}\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots \\ -1 & 0 & \sqrt{2} & \cdots \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix},$$

$$\mathsf{p} = \sqrt{\frac{\hbar}{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \tag{8}$$

$$\mathsf{H} = N\Gamma_0^2\begin{pmatrix} \psi(1) & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \psi(\sqrt{3}\,) & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \psi(\sqrt{5}\,) & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

Для компактности мы выписали лишь амплитудные значения матриц. Напомним, что в общем случае фаза каждого элемента A_{ij} матрицы A есть $\exp\left[\mathrm{i}(\mathcal{E}_i-\mathcal{E}_j)t/\hbar\right]$ [11]. Поскольку во всех физических задачах $\psi(r)$ есть монотонно убывающая функция своего аргумента (см. [5, 7]), то собственная энергия $\mathcal{E}_k$ вихревой пары убывает с ростом k.

6. Шрёдингеровское представление

Теперь мы можем рассмотреть своеобразную "проекцию" реально двумерного движения в плоскости xy на ось q и посмотреть, к чему приводит шрёдингеровская идеология описания квантового движения вихрей.

Очевидно, речь должна идти о нахождении решения "знакомого" уравнения

$$\mathrm{i}\hbar\,\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \hat{H}\left(\sqrt{q^2-\hbar^2\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}q^2}}\,\right)\varphi \tag{9}$$

(мы выбрали φ для обозначения волновой функции, чтобы не возникало путаницы с уже использованной ψ). Вообще говоря, придание ясного математического смысла нелокальным операторам (типа корня квадратного или даже логарифма производной) не вполне тривиальная задача (см., например, [17]), однако в данном случае ее решение весьма просто. Можно воспользоваться полнотой собственных функций одномерного (в q) гармонического осциллятора и представить искомую волновую функцию φ в виде

$$\varphi = \sum_k c_k\varphi_k\,,$$

где

$$\varphi_k = \frac{1}{\sqrt[4]{\hbar}\,\sqrt{2^k k!}}\,\exp\left(-\frac{q^2}{2\hbar}\right)H_k\left(\frac{q}{\sqrt{\hbar}}\right),$$

H_k — полиномы Эрмита. Тогда, поскольку

$$\left(\sqrt{q^2-\hbar^2\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}q^2}}\,\right)\varphi_k = \sqrt{2k+1}\,\hbar\varphi_k\,,$$

очевидно

$$\hat{H}\varphi = \sum_k c_k\mathcal{E}_k\varphi_k\,.$$

Отсюда следует, что собственными функциями гамильтониана при парном взаимодействии вихрей будут собственные функции (ср. с предыдущим разделом) оператора $\hat{M}$, совпадающие с обычными функциями Эрмита. Этот ответ абсолютно универсален (что, несомненно, как было обещано, является проявлением всеобщности закона (1)) и годится для любого типа вихрей в любой изотропной среде. Различие гидродинамик проявляется всего лишь в спектре $\mathcal{E}_k \propto \psi(2k+1)$ и временно́й зависимости φ_k. Эти различия, однако, бывают важными, например, вследствие неэквидистантности энергетических уровней здесь не существует когерентных состояний, характерных для обычного осциллятора [11].

Интересно, что приведенное решение является абсолютно точным, а отнюдь не квазиклассическим. Мы можем сделать вывод о том, что физически высоковозбужденные уровни квантового движения двух (любых) взаимодействующих монопольных вихрей описываются классическими (в квантовой физике) функциями Эрмита (ср. с предыдущим разделом). По этой причине нам кажется целесообразным ввести термин "эрмитовы" состояния по аналогии с популярными в последнее время "ридберговскими" состояниями в сильно возбужденных атомах и ионах [18], причем подчеркнем еще раз, что в вихревой механике это свойство "сводимости" к базовой модели является точным.

7. Анизотропные вихри

Изотропия исходной текучей среды, приводящая к возникновению "дополнительного" к специфической энергии единого интеграла движения M, отнюдь не является обязательным атрибутом вихревой задачи. Еще одним примером нетривиального гамильтониана может служить задача о движении вихрей в слоистой сверхпроводящей среде типа ВТСП-керамики, в которой течение электронов разрешено лишь в плоскости xy [15]. На далеких (по сравнению с лондоновской длиной) расстояниях два одинаково наклоненных (т.е. параллельных линии $x=0$, $y-z\tan\alpha=0$) вихря взаимодействуют по закону

$$\psi \propto \frac{\tan^2\alpha(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\,,$$

так что их классическое движение (скажем, в плоскости $z = 0$) описывается уравнениями (4) с гамильтонианом

$$H = \frac{A}{2}\left[(q^2 - p^2)\,\frac{1}{(q^2+p^2)^2} + \frac{1}{(q^2+p^2)^2}(q^2 - p^2)\right], \quad (10)$$

где A — коэффициент пропорциональности. Мы с самого начала симметризовали гамильтониан, имея в виду последующий переход к квантовому описанию, где составляющие его операторы не коммутируют. На самом деле вблизи нуля координат (при $r \leqslant c/\omega_{\mathrm{pe}}$) линии уровня ψ представляют собой замкнутые эллипсы (см. [15]), понятным образом отклоняясь от (10), но этот эффект может быть учтен в теории возмущений системы (4), (10).

Квантование уровней энергии движения по Бору–Зоммерфельду (5) с учетом обстоятельства, что классическая траектория движения, задаваемая условием $H = \mathcal{E}$, представляет собой лемнискату Бернулли (ее "лепестки" согласно сделанному замечанию относительно перезамыкания линий уровня H изолированы друг от друга), дает спектр (относительно площади лемнискаты см. [19])

$$\mathcal{E}_k = \frac{A}{2\pi\hbar(2k+1)}\,, \quad (11)$$

причем здесь вполне допустимы и отрицательные значения k, описывающие движение по лепесткам, развернутым на 90°. На самом деле квантовое "туннельное" взаимодействие разделенных при классическом движении лепестков должно приводить к расщеплению (четно-нечетные состояния) энергетических уровней и их малому сдвигу относительно (11), но этот эффект также может быть учтен в теории возмущений.

К сожалению, использование в гейзенберговском представлении матриц q и p из (8) здесь не приводит к успеху — H оказывается не диагональной, а двудиагональной: ненулевыми у нее являются компоненты H_{ij} с $i = j \pm 2$. Однако согласно классической работе [20], если мы сумеем диагонализовать эту матрицу с помощью матрицы S преобразованием $\mathsf{H}_0 = \mathsf{S}^{-1}\mathsf{H}\mathsf{S}$, то получим $\mathsf{q}_0 = \mathsf{S}^{-1}\mathsf{q}\mathsf{S}$ и $\mathsf{p}_0 = \mathsf{S}^{-1}\mathsf{p}\mathsf{S}$ соответственно (поскольку это преобразование сохраняет коммутационное соотношение между каноническими переменными). Так как мы уже знаем собственные значения H_0, то нам известна и матрица $\mathsf{H} - \lambda_k\mathsf{E}$, $k = 1, 2, \ldots$, служащая для нахождения собственных векторов преобразования с последующим конструированием S. Иными словами, мы и в новой задаче располагаем по крайней мере рекуррентным соотношением для построения ее гейзенберговского описания.

Определенные затруднения возникают и при проведении шрёдингеровской идеологии. Разложение собственных функций φ_k оператора $\hat{H}$ по эрмитовым функциям, конечно, позволяет избавиться от неприятного знаменателя в (10), но числитель разрешает установить опять лишь рекуррентное соотношение на коэффициенты разложения c_i^k (здесь k — индекс собственной функции, а не степень, а i — текущий индекс, а не мнимая единица):

$$\frac{c_i^k}{\pi(2k+1)} = c_{i+2}^k (i+2)(i+1)\left[\frac{1}{(2i+5)^2} + \frac{1}{(2i+1)^2}\right] + \\ + \frac{c_{i-2}^k}{2}\left[\frac{1}{(2i+1)^2} + \frac{1}{(2i-1)^2}\right].$$

Видно, что четные и нечетные функции Эрмита входят в разложение независимо (это очевидно уже из симметрии задачи, см. выше). Разрешение этой рекуррентности нам не известно, поэтому мы можем привести явное выражение лишь для функции с $k = \infty$ ($\mathcal{E} = 0$), т.е. соответствующей "сепаратрисному" (вдоль $x = \pm y$) движению по лемнискате. Она является решением уравнения

$$\hbar^2\,\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}q^2} + q^2\varphi = 0\,,$$

т.е.

$$\varphi_\infty \propto \sqrt[4]{\frac{q^2}{\hbar}}\,J_{\pm 1/4}\left(\frac{q^2}{2\hbar}\right),$$

где $J_{\pm 1/4}$ — функция Бесселя (наличие двух решений связано с вырождением данного инфинитного движения и "слиянием" на сепаратрисе движений с $k > 0$ и $k < 0$). В полном соответствии с осцилляционной теоремой [11] такая функция φ имеет бесконечное число нулей.

Но все-таки и в анизотропном случае, несмотря на сильные его отличия от первоначального варианта, мы можем существенно продвинуться в изучении двумерной вихревой системы, основываясь на стандартном решении задачи об одномерном гармоническом осцилляторе, причем и в гейзенберговском, и в шрёдингеровском подходах.

8. Заключение

Таким образом, мы продемонстрировали, что квантовая динамика вихревой системы, несмотря на кардинальные отличия в гидродинамиках различных сплошных сред (идеальная жидкость, плазма, сверхпроводники и т.п.), оказывается в чем-то очень универсальной и единой. Базируясь на разработанном для обычного линейного осциллятора языке описания, она тем самым может быть охарактеризована как "эрмитова" (в смысле тесной связи с функциями Эрмита, а не самосопряженности). Природа этой связи лежит в совпадении дополнительного интеграла момента в двумерном "картезианском" вихревом движении с гамильтонианом одномерной "ньютоновской" системы.

Практическое наблюдение разобранной квантовой динамики представляется очень трудной, хотя и не безнадежной задачей. Очевидно, наиболее подходящим объектом для измерений были бы тонкие пленки сверхтекучего гелия. Действительно, поскольку у них и d, и a (по крайней мере, в принципе) могут быть порядка атомных размеров, то необходимое условие $r > a$ не препятствует режиму с $k \sim 1$ (см. (6)), т.е. большому "дробовому" эффекту в возможных дистанциях r. Однако и разрешать требуется атомные размеры и энергии. Потенциально столь же тонкие сверхпроводящие пленки обладают макроскопическими a ("длиной когерентности", или размером куперовской пары), никак не меньшими 100 Å, поэтому для них $k > 10^4$.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 03-02-16765 и гранта НШ-2292.2003.2, а также системы инициативных проектов РНЦ "Курчатовский институт".

Список литературы

1. Сэффмэн Ф Дж *Динамика вихрей* (М.: Научный мир, 2000)
2. Арнольд В И, Козлов В В, Нейштадт А И, в сб. *Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления* Т. 3 (Под ред. Р В Гамкрелидзе) (М.: ВИНИТИ, 1985) с. 3
3. Козлов В В *Общая теория вихрей* (Ижевск: Изд. дом "Удмуртский университет", 1998)
4. Blatter G et al. *Rev. Mod. Phys.* **66** 1125 (1994)
5. Кингсеп А С, Чукбар К В, Яньков В В, в сб. *Вопросы теории плазмы* Вып. 16 (Под ред. Б Б Кадомцева) (М.: Энергоатомиздат, 1987) с. 209
6. Чукбар К В *Физика плазмы* **25** 83 (1999)
7. Смирнов В В, Чукбар К В *ЖЭТФ* **120** 145 (2001)
8. Забурдаев В Ю, Смирнов В В, Чукбар К В *Физика плазмы* **30** 241 (2004)
9. Garg A, Stone M *Phys. Rev. Lett.* **92** 010401 (2004)
10. Fel'dman E B, Rudavets M G *Письма в ЖЭТФ* **81** 54 (2005)
11. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Квантовая механика: Нерелятивистская теория* (М.: Наука, 1974)
12. Абрикосов А А *Основы теории металлов* (М.: Наука, 1987)
13. Pearl J *Appl. Phys. Lett.* **5** 65 (1964)
14. Татаринова Е Б, Чукбар К В *ЖЭТФ* **92** 809 (1987)
15. Чукбар К В, Яньков В В *Письма в ЖЭТФ* **61** 487 (1995)
16. Blatter G, Geshkenbein V *Phys. Rev. Lett.* **77** 4958 (1996)
17. Самко С Г, Килбас А А, Маричев О И *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения* (Минск: Наука и техника, 1987)
18. Буреева Л А, Лисица В С *Возмущенный атом* (М.: ИздАТ, 1997) с. 38
19. Савелов А А *Плоские кривые*. Систематика, свойства, применения (Москва – Ижевск: РХД, 2002) с. 155
20. Born M, Heisenberg W, Jordan P *Z. Phys.* **35** 557 (1926) [Гейзенберг В *Избранные труды* (М.: УРСС, 2001) с. 127]

"Hermitian" states of quantum interacting vortices

V.Yu. Zaburdaev, A.S. Romanov, K.V. Chukbar
Russian Research Center "Kurchatov Institute",
pl. Kurchatova 1, 123182 Moscow, Russian Federation
Tel. (*7-095*) *196-73 01*
E-mail: *chukbar@dap.kiae.ru*

Both the Schrödinger picture and Heisenberg picture are used to discuss quantum effects in the dynamics of a pair of monopole vortices of a widely varying nature — a system to which, due to its close and universal relation to the linear quantum oscillator, the "hermiticity" property of oscillator eigenfunctions can be reasonably ascribed.

PACS numbers: 03.65.Ca, 03.65.Ge, 47.32.Cc

Bibliography — 20 references *Received 11 February 2005, revised 18 April 2005*

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **175** (8) 881 – 886 (2005) *Physics – Uspekhi* **48** (8) (2005)