

## ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

## Оптика нестационарных сред

А.Б. Шварцбург

*Распространение и отражение электромагнитных волн в средах с зависящими от времени диэлектрическими параметрами рассматривается на основе точных аналитических решений уравнений Максвелла для таких сред. Точно решаемые модели, полученные без каких-либо предположений о малости или медленности изменений среды, показывают эффекты сильной дисперсии, обусловленной нестационарностью. Такая дисперсия определяется конечными временами релаксации диэлектрических параметров. Представлены зависящие от времени обобщенные законы Френеля и Снеллиуса, наглядно показывающие зависимость коэффициентов отражения от динамики отражающей среды. Рассмотрены сильные искажения электромагнитных полей, взаимодействующих с быстро ионизируемой плазмой. Эффекты связанной пространственно-временной деформации волновых полей в неоднородных изменяющихся со временем средах обсуждаются на примерах линий передач, неоднородных диэлектриков и быстрой ионизации в микроволновых резонаторах. Показана целесообразность обсуждения этих проблем во временном представлении.*

PACS numbers: 03.65.Ge, 03.65.Sq, 42.25. – p, 42.25.Bs, 42.25.Gy

## Содержание

1. Введение. Негармонические переменные электромагнитные поля (833).
2. Быстрая ионизация в резонаторе и динамика собственных мод (834).
  - 2.1. Монотонное насыщение ионизации.
  - 2.2. Немонотонная ионизация.
  - 2.3. Связь собственных мод при движущихся фронтах ионизации.
3. Динамические и адиабатические режимы отражения волн от нестационарных диэлектриков (839).
  - 3.1. Дисперсия нестационарных диэлектриков.
  - 3.2. Разрывы в отраженных полях.
  - 3.3. Отражение от плазмы при быстрой ионизации.
4. Фазовые эффекты в оптике нестационарных сред (845).
  - 4.1. Поляризационные явления при отражении от консервативной среды, изменяющейся во времени.
  - 4.2. Несинусоидальные бегущие волны в нестационарном диэлектрическом слое.
  - 4.3. Микроволновые аналогии оптических эффектов, зависящих от времени.
5. Электромагнитные поля в переменных пространственно-временных структурах (849).
  - 5.1. Переходные режимы в линии передачи с распределенными параметрами.
  - 5.2. Оптика нестационарных неоднородных слоев во временном представлении.
  - 5.3. Генерация фотонов в нестационарных диэлектриках.

6. Электродинамика сред с зависящим от времени поглощением (852).
    - 6.1. Насыщение поглощения.
    - 6.2. Тепловая модуляция отражательной способности полупроводников.
    - 6.3. Телеграфное уравнение для линии связи с нестационарными потерями.
  7. Заключение. Оптика негармонических волн во временной области (856).
    - 7.1. Пространственно-временная эволюция импульсов в свободном пространстве под действием дифракции.
    - 7.2. Моделирование негармонических импульсов с помощью функций Лагерра.
    - 7.3. Нестационарные волны в стационарных средах.
- Список литературы (860).

## 1. Введение. Негармонические переменные электромагнитные поля

Настоящий обзор посвящен физическим принципам и математическим основам оптики сред, электромагнитные свойства которых меняются во времени. В последнее время такие проблемы привлекают внимание в оптоэлектронике, радиофизике, динамике лабораторной и космической плазмы. Быстрые изменения диэлектрических параметров сплошных сред при лазерной накачке, фазовых переходах и процессах ионизации характеризуются конечными временами релаксации, которые могут стать соизмеримыми с периодом пробной волны. Эти времена релаксации определяют дисперсию диэлектрической проницаемости  $\varepsilon(t)$ , вызванную нестационарностью; такая дисперсия существенно влияет на спектры отражения и пропускания излучения. Переменная скорость распространения электромагнитных волн в таких средах может приводить к сильным искажениям отраженных и преломленных волн, преобразуя эти волны из гармонических в негармонические. Динамика нестациона-

А.Б. Шварцбург. Научно-технологический центр уникального приборостроения РАН, 117342 Москва, ул. Бултерова 15, Российская Федерация  
Тел. (095) 316-17-28  
E-mail: alexshvarts@mtu-net.ru

Статья поступила 19 ноября 2004 г.

нарных электромагнитных полей открывает ряд возможностей для оптимизации процессов переноса энергии и информации через такие среды. Текущий интерес к этим проблемам стимулируется несколькими научными целями:

- построить зависящие от времени обобщения законов Френеля и Снеллиуса, не ограниченные предположениями о малости или медленности изменений полей или сред;

- представить наглядно связь пространственных и временных изменений полей;

- найти методы быстрого неразрушающего контроля материалов и мишеней.

Кроме того, важной задачей является разработка аналитического подхода к этим вопросам, до недавнего времени рассматривавшимся исключительно с помощью численных методов.

Для понимания физики электромагнитных волновых процессов в средах с зависящими от времени диэлектрическими параметрами здесь обсуждается простейший случай, когда динамика релаксации среды определяется не полем бегущей волны, а внешними причинами, например нагревом, ионизацией или фазовыми переходами. Именно такой подход использовался при первых попытках объяснить кросс-модуляцию радиоволн в ионосфере, возникавшую, когда пробная волна распространялась через область плазмы с осциллирующим поглощением, вызванным нагревом этой области в сильном волновом поле [1]. Эффекты модуляции скорости высокочастотных радиоволн в линии связи с зависящими от времени параметрами были исследованы в [2] еще в 1958 г. Через несколько лет развитие лазерной физики привлекло внимание к динамике оптических процессов в средах с очень короткими временами релаксации диэлектрической проницаемости, сравнимыми с периодами световых волн; ряд таких проблем возник при анализе быстрой ионизации газов [3] и твердых тел [4]. Глубокие амплитудно-фазовые искажения коротких оптических импульсов, взаимодействующих с этими материалами, затрудняют возможность традиционного анализа таких взаимодействий в рамках представлений о синусоидальных переменных электромагнитных полях.

Другие механизмы формирования несинусоидальных волн связаны с нестационарной дифракцией волновых импульсов. Прохождение короткого импульса через отверстие может привести к угловому расщеплению импульса [5] или к формированию в дальней зоне импульса с огибающей, близкой к временной производной от его начальной огибающей [6]. Динамика несинусоидальных импульсов, содержащих одно колебание, распространяющихся в свободном пространстве, вызывает сейчас интерес в связи с перспективами аттосекундной оптики [7].

Математический формализм электродинамики нестационарных сред начал свое развитие как обобщение некоторых существующих моделей распространения волн в стационарных неоднородных средах. Так, одна из первых работ, посвященных распространению волн в линии связи с зависящей от времени скоростью  $v(t) = v_0 U(t)$  [2], была основана на модели  $U(t) = 1 + t/t_0$ , напоминающей хорошо известный рэлеевский профиль скорости, зависящей от координаты, в неоднородной среде  $v(z) = v_0(1 + z/L)$ . Модель ступенчатых изменений диэлектрической проницаемости  $\varepsilon(t)$  [9]

была полезна для представления сложных зависимостей  $\varepsilon(t)$  как последовательности ступенчатых изменений [10], напоминающих в свою очередь схему формальной замены непрерывного пространственно неоднородного профиля  $\varepsilon(z)$  некоторым ступенчатым профилем [11]. Отражение от нестационарного диэлектрика с  $\varepsilon(t)$ , заданной временной аналогией неоднородного слоя Эшштейна, было исследовано в [12]. Такая пространственно-временная аналогия является полезным инструментом для решения ряда вышеуказанных задач. Широко используется и аналогия между некоторыми уравнениями оптики нестационарных сред и электродинамики нестационарных линий связи.

Этот обзор построен следующим образом. Раздел 2 посвящен временным изменениям собственных мод резонатора, вызванных быстрой ионизацией газа внутри резонатора. Точные аналитические решения уравнений Максвелла для электромагнитных волн, распространяющихся как в диэлектрической среде с переменным во времени показателем преломления  $n(t)$ , так и в плазме с переменной электронной плотностью  $N(t)$ , найдены в разделе 3. Эти точно решаемые модели, содержащие несколько свободных параметров, наглядно представляют влияние конечных времен релаксации  $n(t)$  и  $N(t)$  на отражательную способность таких сред. Обобщенные формулы Френеля и Снеллиуса, найденные из этих моделей для произвольных частот, поляризации и углов падения отражающихся волн, рассмотрены в разделе 4. Некоторые особенности динамики волн в пространственно неоднородных нестационарных структурах и средах с зависящим от времени поглощением показаны в разделах 5 и 6. Тенденции связанных процессов эволюции коротких несинусоидальных импульсов в пространстве и во времени показаны в разделе 7; в конце этого раздела отмечены некоторые важные нерешенные вопросы обсуждаемой теории.

## 2. Быстрая ионизация в резонаторе и динамика собственных мод

Амплитудно-частотные вариации собственных мод резонатора, вызванные ионизацией нейтрального газа внутри него, привлекают сейчас большое внимание в электродинамике переменных во времени сред и физике лазерно-плазменных взаимодействий. Эти нестационарные явления зависят от пространственно-временных изменений плазменной частоты  $\Omega_p$ , определяемых структурой ионизационных фронтов. Простейшие случаи, рассмотренные ниже, связаны с моделью внезапной ионизации нейтрального газа внутри резонатора с помощью высоковольтного разряда, лазерного импульса или электронного пучка. Такая внезапная, или вспыхивающая, ионизация приводит к уменьшению диэлектрической постоянной  $\varepsilon$ , имеющей значение, близкое к единице, до значения  $\varepsilon = 1 - \Omega_p^2 \omega^{-2}$ . Это уменьшение ведет к росту собственных частот резонатора и к изменению интенсивностей собственных мод.

"Преобразование вверх" частоты радиоизлучения, взаимодействующего со слоем, где быстро растет плотность ионизации, было исследовано в [13, 14]. Этот нестационарный эффект приводит к формированию "сдвинутого вверх" спектра собственных мод  $\omega_\infty = (\omega_n^2 + \Omega_p^2)^{1/2}$  [15], где  $\omega_n$  — частота  $n$ -й моды в резонаторе, заполненном нейтральным газом. Для про-

стоты ниже обсуждается прямоугольный резонатор. Собственные частоты такого резонатора при идеальной проводимости стенок известны:

$$\omega_n = \pi c \sqrt{\left(\frac{p}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{g}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{j}{L_z}\right)^2}. \quad (2.1)$$

Здесь  $L_x$ ,  $L_y$  и  $L_z$  — размеры резонатора,  $p$ ,  $g$ ,  $j$  — положительные целые числа или нули, обозначенные как  $n = (p, g, j)$ .

Электрическое поле  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  в резонаторе определяется уравнением [16]

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{\Omega_p^2(\mathbf{r}, t)}{c^2} \mathbf{E}. \quad (2.2)$$

При выводе уравнения (2.2) предполагалось, что электроны в плазме имеют нулевую начальную скорость. Общее решение (2.2) можно записать в виде линейной суперпозиции собственных мод:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_n \psi_n \mathbf{E}_n(\mathbf{r}), \quad (2.3)$$

где  $\mathbf{E}_n(\mathbf{r})$  описывает пространственную структуру ортонормированных собственных мод:

$$\int_V \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) \mathbf{E}_{n'}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \delta_{nn'}. \quad (2.4)$$

Интегрирование в (2.4) проводится по полному объему резонатора  $V$ . Подставляя (2.3) в (2.2) и учитывая условие ортогональности (2.4), можно вывести уравнение эволюции для модовой амплитуды  $\psi_n$ :

$$\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial t^2} + (\omega_n^2 + C_{nn}) \psi_n = - \sum_{n \neq n'} C_{nn'} \psi_{n'}(t), \quad (2.5)$$

где коэффициенты межмодовой связи  $C_{nn'}$  имеют вид [17]

$$C_{nn'} = \int_V \Omega_p^2(\mathbf{r}, t) E_n E_{n'} d\mathbf{r}. \quad (2.6)$$

Как видно из (2.5), различные моды линейно связаны и колеблются с зависящей от времени частотой  $\Omega_n$ :

$$\Omega_n^2 = \omega_n^2 + C_{nn'}. \quad (2.7)$$

Собственные частоты  $\omega_n$  определены в (2.1).

Простейшая модель быстрой ионизации в резонаторе строится на предположении, что ионизация возникает равномерно во всем объеме  $V$ . Это означает, что плазменная частота не зависит от пространственных координат:  $\Omega_p^2 = \Omega_p^2(t)$ . В этом случае коэффициенты связи  $C_{nn'}$  есть

$$C_{nn'} = \Omega_p^2 \delta_{nn'}, \quad (2.8)$$

и правая часть в (2.5) обращается в нуль. Отсюда видно, что собственные моды в однородной неподвижной нестационарной среде остаются несвязанными. Именно этот случай будет рассмотрен в разделах 2.1 и 2.2, посвященных монотонным и немонотонным изменениям ионизации. В отличие от этого в разделе 2.3 показан простейший случай пространственно неоднородной ионизации, созданной фронтом ионизации, движущимся с постоянной скоростью.

## 2.1. Монотонное насыщение ионизации

Поскольку собственные моды в резонаторе, заполненном однородной плазмой, не связаны, уравнение (2.5) можно решать для каждой моды по отдельности. При этом временную зависимость плазменной частоты можно без потери общности представить в виде

$$\begin{aligned} \Omega_p^2(t) &= \Omega_0^2 W^2(t), \\ W^2(t) &= 1 - U^2(t), \quad U \Big|_{t=0} = 1. \end{aligned} \quad (2.9)$$

В представлении (2.9) плазменная частота возрастает от  $\Omega_p = 0$  в начале ионизации ( $t = 0$ ) до своего максимального значения  $\Omega_p = \Omega_0$ . Подстановка (2.9) в (2.5) приводит к безразмерному уравнению, описывающему эволюцию  $n$ -й моды:

$$\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial t^2} + \psi_n \{ \omega_n^2 + \Omega_0^2 [1 - U^2(t)] \} = 0. \quad (2.10)$$

Опуская для простоты индекс  $n$ , рассмотрим новую функцию  $F = \psi \sqrt{U}$ :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - \frac{U_t}{U} \frac{\partial F}{\partial t} + F \left[ \omega_n^2 + \Omega_0^2 (1 - U^2) + \frac{3}{4} \frac{U_t^2}{U^2} - \frac{U_{tt}}{2U} \right] = 0. \quad (2.11)$$

Вводя новую переменную

$$\tau = \int_0^t U(t') dt', \quad (2.12)$$

можно исключить из (2.11) слагаемое, содержащее первую производную  $\partial F / \partial t$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2} + F \left[ \frac{\omega_\infty^2}{U^2(\tau)} - \Omega_0^2 + \frac{U_\tau^2}{U^2} - \frac{U_{\tau\tau}}{2U} \right] &= 0, \\ \omega_\infty^2 &= \omega_n^2 + \Omega_0^2. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Модельная зависимость  $U(t)$  до сих пор считается произвольной, поэтому уравнение (2.13) будет использовано ниже для различных моделей  $U(t)$ .

Обсудим сначала монотонную зависимость, характеризующую лишь одним свободным параметром — характерным временем  $t_0$ :

$$U(t) = \left( 1 + \frac{t}{t_0} \right)^{-1}. \quad (2.14)$$

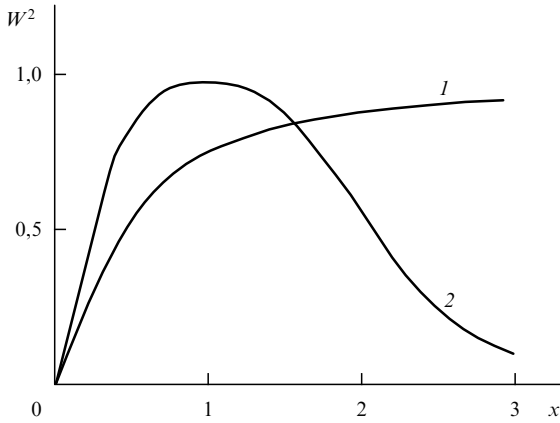
Момент  $t = 0$  соответствует началу ионизации, насыщение ионизации ( $U \rightarrow 0$ ,  $\Omega_p \rightarrow \Omega_0$ ) наступает за время  $t \gg t_0$  (рис. 1). Подставляя (2.14) в (2.12), получим явные выражения для новой переменной  $\tau$  и функции  $U(\tau)$ :

$$\tau = t_0 \ln \left( 1 + \frac{t}{t_0} \right), \quad U(\tau) = \exp \left( -\frac{\tau}{t_0} \right). \quad (2.15)$$

Вводя новую переменную  $\delta = U^{-1}$ , можно переписать основное уравнение (2.13) в виде уравнения Бесселя:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial \delta^2} + \frac{1}{\delta} \frac{\partial F}{\partial \delta} + F \left( \omega_\infty^2 t_0^2 - \frac{q^2}{\delta^2} \right) &= 0, \\ q^2 &= (\Omega_0 t_0)^2 + \frac{1}{4}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Решение уравнения (2.16) дается функцией Ганкеля  $H_q^{(2)}$ .



**Рис. 1.** Нормированная плотность ионизации  $W^2(t) = N(t)/N_0$  как функция нормированного времени  $x = t/t_0$ . Кривая 1 соответствует монотонному насыщению ионизации, кривая 2 — немонотонным изменениям  $W^2$ ; восходящая и нисходящая ветви кривой 2 представлены моделями (2.20) и (2.42) для случаев  $0 \leq t \leq t_m$  и  $t \geq t_m$ .

Наконец, пользуясь (2.12), мы получим зависящую от времени часть  $n$ -й собственной моды нестационарного электрического поля (2.3):

$$\psi_n = A_n \sqrt{1 + \frac{t}{t_0}} H_q^{(2)} \left[ \omega_\infty t_0 \left( 1 + \frac{t}{t_0} \right) \right]. \quad (2.17)$$

Здесь функция  $H_q^{(2)}$  выбрана для того, чтобы получить асимптотическую временную зависимость решения при  $t \gg t_0$  в виде гармонических колебаний  $\exp(-i\omega_\infty t)$ ,  $A_n$  — нормировочная постоянная. Предполагая, что в момент  $t = 0$  стационарные собственные моды имеют амплитуды  $A_{n0}$ , можно представить постоянную  $A_n$  в виде

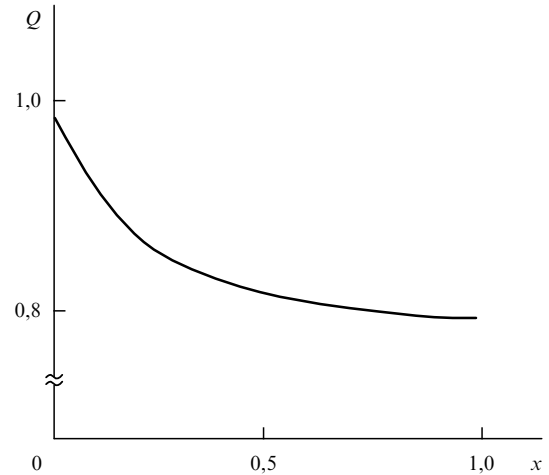
$$A_n = A_{n0} [H_q^{(2)}(\omega_\infty t_0)]^{-1}. \quad (2.18)$$

Подстановка (2.18) в (2.17) приводит к выражению, описывающему несинусоидальные колебания электрического поля, сопровождающие процесс роста ионизации. Этот результат не ограничен никакими допущениями о значениях собственных частот  $\omega_n$ , плазменной частоты  $\Omega_0$  и времени ионизации  $t_0$ . Асимптотика функции Ганкеля для больших значений аргумента дает выражение для электрического поля в пределе  $t \gg t_0$ , когда в процессе ионизации почти достигнуто стационарное состояние:

$$\psi_n = \frac{A_{n0}}{H_q^{(2)}(\omega_\infty t_0)} \sqrt{\frac{\pi}{2(\omega_\infty t_0)}} \exp[-i(\omega_\infty t + \varphi_n)], \quad (2.19)$$

$$\varphi_n = \omega_\infty t_0 - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} q.$$

Под действием ионизации собственные частоты резонатора возрастают от  $\omega_n$  до  $\omega_\infty$ , а амплитуды собственных мод могут уменьшиться; такой эффект для интенсивности электрической компоненты основной моды показан на рис. 2. Авторы [18] связывают это уменьшение с бесстолкновительным нагревом плазмы под действием формирующихся плазменных волн. Похожее ослабление электрического поля найдено в [19] в рамках ВКБ-приближения для модели  $U = \exp(-t/t_0)$ . Обе эти



**Рис. 2.** Временные изменения интенсивности основной собственной моды при вспышечной ионизации в полости при насыщении ионизации (2.14);  $Q$  — нормированная интенсивность электрической компоненты этой моды,  $x = t/t_0$  — нормированное время,  $(\Omega_p t_0)^2 = 0,75$ ,  $\Omega_p = \sqrt{3} \omega_0$ .

модели характеризуются одним свободным параметром — характерным временем  $t_0$ , определяющим рост электронной плотности в начале процесса ионизации. Ниже обсуждаются более сложные модели быстрой ионизации, содержащие два свободных параметра.

## 2.2. Немонотонная ионизация

Рассмотрим процесс немонотонной ионизации, когда электронная плотность возрастает с начальной величины до своего максимума за некоторое конечное время  $T$ , а позже либо начинает падать, либо остается постоянной. Динамика собственных мод резонатора определяется уравнением (2.10), однако восходящая ветвь этой функции представлена здесь более гибкой моделью, содержащей два свободных параметра — характерное время  $t_0$  и безразмерную величину  $M$ :

$$U^2(t) = \left( \cos \frac{t}{t_0} + M \sin \frac{t}{t_0} \right)^{-2}, \quad (2.20)$$

$$M \geq 0, \quad U^2 \Big|_{t=0} = 1, \quad U^2 \Big|_{t=T} = (1 + M^2)^{-1} = U_m^2.$$

Параметры  $t_0$  и  $M$  определяются через начальный темп ионизации и время  $T$ :

$$\frac{\partial U^2}{\partial t} \Big|_{t=0} = -\frac{2M}{t_0} = -\frac{1}{t_1}, \quad \frac{\partial U^2}{\partial t} \Big|_{t=T} = 0, \quad (2.21)$$

$$t_0 = T(\arctan M)^{-1}. \quad (2.22)$$

Решение уравнений Максвелла (2.10) для модели (2.20), показанной на рис. 1, можно получить, пользуясь процедурой, описанной в разделе 2.1. Выполняя преобразование (2.11), можно прийти к уравнению (2.13), однако параметр  $\omega_\infty$  будет отличаться от значения, определенного в (2.13):

$$\omega_\infty^2 = \omega_n^2 + \Omega^2, \quad \Omega^2 = \Omega_0^2(1 + M^{-2}). \quad (2.23)$$

Подстановка (2.20) в (2.12) приводит к новой переменной  $\tau$ :

$$\tau = \frac{t_0}{\sqrt{1+M^2}} \ln \frac{1+m_+ \tan(t/(2t_0))}{1-m_- \tan(t/(2t_0))}, \quad (2.24)$$

$$m_{\pm} = \sqrt{1+M^2} \pm M, \quad m_+ m_- = 1. \quad (2.25)$$

Пользуясь (2.24) и (2.20), можно найти явное выражение для функции  $U(\tau)$ :

$$U(\tau) = \frac{\cosh \varphi}{\sqrt{1+M^2}}, \quad \varphi = \frac{\tau\sqrt{1+M^2}}{t_0} - \operatorname{arsinh} M, \quad (2.26)$$

$$\varphi|_{t=0} = \varphi_0 = -\ln(m_+), \quad \varphi|_{t=T} = 0. \quad (2.27)$$

Подстановка (2.23) и (2.26) в уравнение Максвелла (2.13) приводит, наконец, к уравнению, определяющему функцию  $F$ :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + F \left( -q^2 + \frac{D}{\cosh^2 \varphi} \right) = 0, \quad (2.28)$$

$$D = (\omega_{\infty} t_0)^2 - \frac{1}{4}, \quad q^2 = \frac{1}{4} + \frac{(t_0 \Omega_0)^2}{M^2}. \quad (2.29)$$

Уравнение (2.28) хорошо известно в квантовой механике [20]. Следует отметить, что, в отличие от традиционной квантовой механики, уравнение (2.28) записано в  $\varphi$ -пространстве.

Чтобы решить уравнение (2.28), целесообразно ввести новую функцию  $f$  и новую переменную  $u$ :

$$f = F(\cosh \varphi)^q, \quad u = \frac{1}{2}(1 - \tanh \varphi). \quad (2.30)$$

С помощью этих преобразований уравнение (2.28) сводится к стандартному гипергеометрическому уравнению

$$u(1-u) \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - [\gamma - u(1+\alpha+\beta)] \frac{\partial f}{\partial u} - \alpha\beta f = 0, \quad (2.31)$$

$$\alpha, \beta = \frac{1}{2} + q \pm \omega_{\infty} t_0, \quad \gamma = 1 + q. \quad (2.32)$$

Значение  $q$  определено в (2.29). Поскольку параметры (2.32) удовлетворяют условию

$$\alpha + \beta + 1 = 2\gamma, \quad (2.33)$$

решения уравнения (2.31) являются, как известно [18], гипергеометрическими функциями:

$$f_1 = f(\alpha, \beta, \gamma, u), \quad f_2 = f(\alpha, \beta, \gamma, 1-u). \quad (2.34)$$

Теперь можно записать электрическое поле в форме, удобной для последующего анализа. Представляя множитель  $U^{-1/2}$  в (2.11) с помощью (2.26) в виде

$$U^{-1/2} = \sqrt[4]{1+M^2} (\cosh \varphi)^{-1/2} \quad (2.35)$$

и используя (2.30) и (2.34), получим решения уравнения (2.10) для  $n$ -й моды:

$$\psi_{1,2} = A \sqrt[4]{1+M^2} f_{1,2} (\cosh \varphi)^{-1/2-q}. \quad (2.36)$$

Учитывая известные значения параметров  $\alpha$  и  $\beta$  (2.32), можно выбрать такую линейную суперпозицию решений

$f_1$  и  $f_2$ , которая обеспечит уменьшение модовой амплитуды в начале ионизации.

Эти результаты остаются в силе при произвольных соотношениях между частотами  $\omega_n$ ,  $\Omega_0$  и параметрами  $t_0$ ,  $M$ . Однако при некоторых значениях указанных величин можно упростить полученные результаты, сводя гипергеометрические функции к элементарным. Так, в случае

$$\beta = \frac{1}{2} + q - \omega_{\infty} t_0 = -m, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.37)$$

гипергеометрическая функция сводится, как известно, к полиному  $n$ -й степени, например, в простейшем случае  $n = 0$  уравнение (2.36) дает

$$f_1 = f_2 = 1, \quad A = (1+M^2)^{q/2} A_0, \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} \Big|_{t=0} = M t_0^{-1} \left( \frac{1}{2} + q \right).$$

Условие

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} \Big|_{t=0} < 0$$

выполняется, если  $q < -1/2$ , т.е. в квадратном корне, определяющем значения  $q$  (2.29), нужно выбрать знак минус. При этом амплитуда  $\psi$  монотонно убывает, достигая в момент наибольшей ионизации ( $t = T$ ) значения

$$\psi \Big|_{t=T} = A_0 (1+M^2)^{q/2+1/4} < A_0. \quad (2.39)$$

Другое простое решение уравнения (2.28) возникает в случае  $D = 0$ ,  $\omega_{\infty} t_0 = 0,5$ . Пользуясь определением  $\varphi_0$  (2.27), получим

$$\psi = \frac{A_0 \sqrt[4]{1+M^2} \exp[q(\varphi_0 - \varphi)]}{\sqrt{\cosh \varphi}}, \quad \psi \Big|_{t=T} = \frac{A_0 \sqrt[4]{1+M^2}}{(m_+)^q}, \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} \Big|_{t=0} = A_0 t_0^{-1} \left( \frac{M}{2} - q \sqrt{1+M^2} \right).$$

В отличие от предыдущего случая производная  $\partial \psi / \partial t|_{t=0}$  отрицательна при  $q > 1/2$ . Таким образом, решение (2.40) описывает монотонное убывание амплитуды электрического поля от  $\psi(0)$  до  $\psi(T)$ :

$$\frac{\psi(T)}{\psi(0)} = \frac{\sqrt[4]{1+M^2}}{(m_+)^q} < 1. \quad (2.41)$$

В зависимости от собственных частот резонатора и параметров процесса ионизации это убывание может стать значительным. Представляя падающую ветвь плотности ионизации с помощью модели

$$W^2(t) \Big|_{t \geq T} = \cosh^{-2} \left( \frac{t-T}{t_2} \right), \quad (2.42)$$

можно обеспечить непрерывную зависимость плазменной частоты  $\Omega_p(t)$  и ее первой производной от времени в момент наибольшей ионизации  $t = T$  при произвольных значениях характерного времени  $t_2$ . Для непрерывности второй производной плазменной частоты в тот же

момент  $t = T$  величина  $t_2$  должна составлять

$$t_2 = Mt_0. \quad (2.43)$$

Таким образом, модели (2.20) и (2.42) описывают зависимость ионизации от времени во всем интервале  $0 \leq t < \infty$  (см. рис. 1).

Уравнение Максвелла для электрического поля в резонаторе с убывающей плотностью ионизации (2.42) можно записать в виде, аналогичном (2.28):

$$\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial t^2} + \psi_n \left[ \omega_n^2 + \frac{\Omega_0^2}{\cosh^2 [(t-T)/t_2]} \right] = 0. \quad (2.44)$$

Пользуясь этой аналогией, можно представить решение уравнения (2.44) с помощью гипергеометрических функций  $f_1$  и  $f_2$ :

$$\psi = (\cosh x)^{-iq} [A f_1(x) + B f_2(x)]. \quad (2.45)$$

Здесь  $A$  и  $B$  — некоторые постоянные,

$$q = \omega_n t_2, \quad D = (\Omega_0 t_2)^2, \quad x = \frac{t-T}{t_2}. \quad (2.46)$$

Параметры этих гипергеометрических функций составляют

$$\alpha, \beta = \frac{1}{2} + iq \pm \sqrt{1 + 4(\omega_n t_2)^2}. \quad (2.47)$$

Решение (2.45) описывает рост амплитуд, вызванный уменьшением ионизации.

Динамика несвязанных собственных мод рассмотрена здесь для моделей пространственно однородной ионизации. Однако в более реалистических моделях, описывающих пространственно неоднородную электронную плотность или движущиеся фронты ионизации, моды оказываются связанными. В следующем разделе будет показано, что такая связь может существенно изменить картину временной модуляции мод.

### 2.3. Связь собственных мод при движущихся фронтах ионизации

Увеличение собственных частот резонатора, обусловленное однородной ионизацией, может быть усилено, если плотность электронов пространственно неоднородна. В этом случае временная эволюция каждой собственной моды оказывается связанной с эволюцией всех остальных мод. Чтобы представить наглядно основные черты такого процесса, целесообразно обсудить быструю ионизацию, созданную электронным пучком.

Предположим, что возмущение электронной плотности, связанное с электронным пучком, пересекает прямоугольный резонатор с некоторой постоянной скоростью  $v$ , двигаясь в  $z$ -направлении. Если предположить для простоты, что электронный пучок однороден в плоскости  $z = 0$  и пересекает границу  $z = L_z$  в момент  $t = 0$ , двигаясь в сторону плоскости  $z = 0$ , то можно считать

$$\Omega_p^2(\mathbf{r}, t) = \Omega_0^2 f(z + vt). \quad (2.48)$$

Чтобы рассчитать коэффициенты связи  $C_{mn'}(t)$  (2.6) для профиля плотности (2.48), следует принять во

внимание ортогональность собственных функций для поперечных стоячих электромагнитных волн. Подстановка (2.48) в (2.6) дает

$$C_{mn'}(t) = \frac{2}{L_z} I_{nn'} \delta_{pp'} \delta_{gg'}, \quad (2.49)$$

$$I_{nn'} = \int_0^{L_z} \sin\left(\frac{jz}{L_z}\right) \sin\left(\frac{j'z}{L_z}\right) f(z + vt) dz. \quad (2.50)$$

Простейшая модель для расчета коэффициентов связи  $C_{mn'}$  (2.49) связана с представлением профиля пучка с помощью функции Хэвисайда  $H$ :

$$\Omega_p^2(z, t) = \Omega_0^2 H(z + vt - L_z). \quad (2.51)$$

Подстановка (2.51) в (2.50) дает значения коэффициентов [21]

$$C_{mn'}(t) = \frac{\Omega_0^2}{\pi} \delta_{pp'} \delta_{gg'} \left\{ \frac{1}{j+j'} \sin\left[\frac{\pi}{L_z}(j+j')vt\right] - \frac{1}{j-j'} \sin\left[\frac{\pi}{L_z}(j-j')vt\right] \right\}, \quad j \neq j', \quad (2.52)$$

$$C_{mn'}(t) = \frac{\Omega_0^2}{2\pi j} \left\{ \frac{2\pi j}{L_z} vt + \sin\left[2\pi j\left(1 - \frac{vt}{L_z}\right)\right] \right\}, \quad j = j'. \quad (2.53)$$

Анализ (2.52) и (2.53) показывает, что при обсуждаемой геометрии задачи связь мод возникает в направлении распространения возмущений. Подстановка (2.52), (2.53) в (2.5) приводит к системе уравнений, описывающих эволюцию связанных мод в резонаторе.

Такая система уравнений решалась численно [21], однако некоторые качественные результаты можно выявить и без решений. Предположим, что в спектре мод преобладает мода  $n_1$ , так что в правых частях (2.5) можно оставить лишь слагаемые, соответствующие этой моде:

$$a_{n1} = A_{n1} \exp(-i\omega_{n1}t), \quad (2.54)$$

где  $A_{n1}$  — амплитуды моды  $n_1$ . Если пренебречь медленной эволюцией частоты  $\omega_n$ , то можно заметить из (2.5), что четыре моды  $a_n$  могут быть резонансно связаны. Эти моды удовлетворяют условию резонанса

$$\omega_n \pm \frac{\pi n v}{L_z} = \omega_{n1} \pm \frac{\pi n_1 v}{L_z}. \quad (2.55)$$

Этот резонанс можно объяснить, если рассматривать доминирующую моду как линейную суперпозицию двух волн с одинаковыми частотами и амплитудами, бегущими в противоположные стороны. Знак плюс (минус) в правой части (2.55) соответствует встречному или совпадающему направлению движения основной моды по отношению к движущемуся возмущению электронной плотности. Если резонансная мода соответствует отражению (прохождению) основной моды, то знак в левой части (2.55) противоположен (равен) знаку в правой части (2.55). Похожая ситуация возникает в свободном пространстве, когда  $K_z = \omega c^{-1}$ ,  $K'_z = \omega' c^{-1}$ , и резонансное условие (2.55) сводится к двойному эффекту доплеровского сдвига, дающего для волн, распространяющихся во встречном ( $\omega'$ ) и совпадающем ( $\omega''$ ) направлениях,

соответственно

$$\omega' = \frac{\omega(1 + \beta)}{1 - \beta}, \quad \omega'' = \frac{\omega(1 - \beta)}{1 + \beta}. \quad (2.56)$$

При анализе предполагалось, что частоты  $\omega_n$  и  $\omega_{n1}$  сохраняют постоянные значения. При этом резонансные моды удовлетворяют нестационарному дисперсионному уравнению (2.7), поэтому, строго говоря, существуют некоторые временные изменения  $\omega_n$  и  $\omega_{n1}$ . Это означает, что несколько мод могли бы удовлетворять резонансным условиям (2.55), когда фронт возмущений пересекает полость резонатора. Кроме того, сдвиг резонансной частоты вверх, вызванный движущимся фронтом ионизации, может значительно превысить значение такого сдвига в однородно ионизированной плазме, особенно при релятивистских скоростях ионизационных фронтов [21].

Выше было показано, что эффекты межмодовой связи могут привести к уширению спектра собственных мод. Этот результат согласуется с результатами экспериментов [22]. Похожий анализ можно выполнить и в случае, когда пространственно-временные изменения электронной плотности создаются фотоионизацией нейтрального газа в резонаторе [23]. Все эти эффекты исследованы здесь для стоячих волн в резонаторе. Динамика бегущих электромагнитных волн в полуограниченных нестационарных средах будет рассмотрена в разделе 3.

### 3. Динамические и адиабатические режимы отражения волн от нестационарных диэлектриков

Этот раздел посвящен амплитудно-фазовой и частотной модуляции электромагнитных волн, взаимодействующих с диэлектриками, оптические свойства которых зависят от времени. Такие ситуации встречаются в ряде "горячих" проблем лабораторной и космической плазмы, передачи энергии через нестационарные среды и оптической диагностики быстрых процессов. Временные изменения диэлектрической проницаемости характеризуются конечными временами релаксации, и нестационарная отражательная способность таких материалов зависит от соотношения этих времен релаксации и периодов электромагнитных волн. Некоторые тенденции процессов связанной амплитудно-фазовой деформации волн в нестационарных диэлектриках были показаны в [24, 25] с помощью численных методов. Однако аналитические методы в оптике нестационарных сред до сих пор менее разработаны, чем в оптике неоднородных сред.

Одна из первых попыток развить аналитический подход к нестационарной электродинамике была принята на модели "внезапного", скачкообразного изменения диэлектрической проницаемости [9]. Эта модель широко используется для анализа увеличения частот волн, взаимодействующих с быстро движущимся фронтом ионизации в газах. Такой фронт, созданный лазерной ионизацией нейтрального газа, имеет сверхкороткое время роста (около половины длительности импульса); характеристики плазмы за фронтом меняются медленно, с характерным временем, соответствующим рекомбинации ( $\sim$  нс). Скорость распространения фронта близка к групповой скорости лазерного импульса. Взаимодей-

ствие движущегося фронта с пробными фотонами другого слабого пробного лазерного импульса приведет к росту его частоты. Такой эффект, названный в [26] *ускорением фронтов*, обуславливает значительный голубой сдвиг под действием релятивистских ионизационных фронтов [27, 28]. Голубой сдвиг частоты пробного лазерного импульса с начальной частотой  $\omega_0$  после столкновения с фронтом, движущимся со скоростью  $v$  под углом  $\gamma$ , составляет [29]

$$\frac{\omega_{\text{уп}}}{\omega_0} = \frac{1 - \beta \cos \gamma}{1 - \beta^2} - \frac{\beta \sqrt{(\beta - \cos \gamma)^2 - \Omega_m^2 \omega^{-2} (1 - \beta^2)}}{1 - \beta^2}. \quad (3.1)$$

Здесь  $\Omega_m$  — максимальная плазменная частота на фронте ионизации; случаи встречного и однонаправленного распространения соответствуют значениям  $\gamma = 0$  и  $\gamma = \pi$ ;  $\beta = v/c$ .

Формула (3.1) была проверена в экспериментах [30], где было показано сокращение длины волны порядка 25 нм для пробных фотонов ( $\lambda = 560$  нм). Такие явления привлекают внимание в связи с возможностью их использования как средства диагностики при измерении релятивистских скоростей плазменных структур и для разработки новых типов перестраиваемых источников и генераторов ультракоротких волн [22]. Существенный голубой сдвиг фотонов был обнаружен при столкновении пробных фотонов с ускоренным фронтом ионизации, возникающим при распространении ионизирующего лазерного импульса в газе с градиентом плотности [31].

Все эти явления основаны на взаимодействии фотонов с движущимися поверхностями, напомиающем различные модификации доплеровского сдвига частоты. В отличие от этого настоящий раздел посвящен изменениям частоты, возникающим при взаимодействии излучения с неподвижным диэлектриком, диэлектрическая проницаемость которого меняется со временем. Кроме того, вышеуказанные примеры соответствуют предельному случаю, когда время релаксации нестационарной диэлектрической проницаемости среды  $t_0$  гораздо короче характерных времен переменного электромагнитного поля  $T$ . Противоположный предел соответствует адиабатическому приближению  $T \gg t_0$ . Однако в ряде проблем (как прикладных, так и академических) возникают ситуации, когда характерные времена  $t_0$  и  $T$  оказываются величинами одного порядка, поэтому для анализа динамики волн требуются точные аналитические решения уравнений Максвелла с зависящими от времени коэффициентами. Несколько таких точно решаемых моделей обсуждаются ниже.

Чтобы показать важную роль нестационарных вариаций диэлектрической проницаемости  $\varepsilon(t)$ , рассмотрим простейший случай, когда динамика релаксации среды определяется не полем бегущей волны, а некоторыми внешними источниками, например нагревом, ионизацией или фазовыми переходами. В частности, такой подход можно применить к оптике пробных волн в экспериментах по взаимодействию пробных волн с волной накачки с использованием ультракоротких импульсов накачки.

Для исследования этой проблемы используем модель нестационарной, пространственно однородной, немагнитной и консервативной среды и представим электрическую индукцию  $\mathbf{D}$ , наведенную внешним электрическим

полем  $\mathbf{E}(t)$ , в виде скалярного произведения

$$\mathbf{D} = \varepsilon(t) \mathbf{E}(t). \quad (3.2)$$

Диэлектрическую проницаемость  $\varepsilon(t)$  можно записать с помощью безразмерной функции  $U(t)$ :

$$\varepsilon(t) = n_0^2 U^2(t), \quad U|_{t=0} = 1. \quad (3.3)$$

Здесь  $n_0$  — значение показателя преломления до включения возмущения, а функция  $U(t)$  описывает временные изменения диэлектрической проницаемости.

Для исследования отражения и преломления волн на границе  $z = 0$  полупространства, заполненного диэлектриком (3.2), (3.3) или ионизируемой средой, нужно решить следующие проблемы:

- 1) найти модели зависящих от времени диэлектрических проницаемостей (3.2), (3.3) и получить соответствующие решения уравнений Максвелла, наглядно представляющие важную роль нестационарной дисперсии;
- 2) построить нестационарные обобщения формул Френеля, описывающих динамические и адиабатические режимы отражения;
- 3) показать связь между отражением ионизируемой среды и временами ионизации.

### 3.1. Дисперсия нестационарных диэлектриков

Конечные времена релаксации нестационарной диэлектрической проницаемости  $\varepsilon(t)$  определяют разнообразие режимов распространения электромагнитных волн в диэлектрике, характеризуемом временной зависимостью  $\varepsilon(t)$ . Чтобы выявить эти режимы, рассмотрим линейно поляризованную волну, падающую нормально на границу полупространства  $z \geq 0$ , заполненного нестационарным диэлектриком. Электрические и магнитные компоненты этой волны связаны уравнениями Максвелла:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t}, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial D_x}{\partial t}. \quad (3.5)$$

Среда предполагается немагнитной, электрическая индукция  $D_x$  определена в (3.2).

Решение системы (3.4), (3.5) включает три этапа.

А. Сводим эту систему к одному уравнению, определяющему индукцию  $D_x$ :

$$\frac{\partial^2 D_x}{\partial z^2} - \frac{n_0^2 U^2(t)}{c^2} \frac{\partial^2 D_x}{\partial t^2} = 0. \quad (3.6)$$

Вводя новую переменную  $\tau$ , имеющую размерность времени:

$$\tau = \int_0^t \frac{dt'}{U(t')}, \quad (3.7)$$

и новую функцию

$$F = \frac{D_x}{\sqrt{U(t)}}, \quad (3.8)$$

можно переписать уравнение (3.6) в виде

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{n_0^2}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2} = \frac{n_0^2}{c^2} F \left[ \frac{UU_{tt}}{2} - \frac{U_t^2}{4} \right]. \quad (3.9)$$

В. Зависимость диэлектрической проницаемости от времени все еще остается неизвестной. Однако благодаря новому представлению (3.7), (3.8) зависящий от времени коэффициент исключен из левой части уравнения (3.9). Нестационарность связана теперь с выражением в скобках в правой части уравнения (3.9). В частности, интересный класс функций  $U(t)$  соответствует простейшему случаю, когда выражение в скобках в уравнении (3.9) равно некоторой действительной постоянной  $T^{-2}$ ; величина  $T$  имеет размерность времени:

$$\frac{UU_{tt}}{2} - \frac{U_t^2}{4} = \frac{1}{T^2}. \quad (3.10)$$

Функция  $F$  определяется теперь уравнением с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{n_0^2}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2} = \frac{n_0^2}{c^2 T^2} F. \quad (3.11)$$

Уравнения (3.10) и (3.11) описывают зависимость диэлектрической проницаемости  $U(t)$  от времени и волновое поле, соответствующее этой модели  $U(t)$ . Нормализованная диэлектрическая проницаемость, заданная решением уравнения (3.10), удовлетворяющим условию  $U(0) = 1$ , имеет вид [32]

$$U(t) = 1 + \frac{s_1 t}{t_1} + \frac{s_2 t^2}{t_2^2}, \quad s_{1,2} = 0, \pm 1. \quad (3.12)$$

Здесь  $t_1$  и  $t_2$  — положительные свободные параметры. Постоянная  $T^{-2}$  выражается через эти параметры, которые в свою очередь связаны с максимумом профиля (3.12)  $U_m$  и длительностью  $d$ :

$$\frac{1}{T^2} = \frac{s_2}{t_2^2} - \frac{s_1^2}{4t_1^2}. \quad (3.13)$$

В зависимости от значений  $t_1$ ,  $t_2$  и  $s_1$ ,  $s_2$  функция  $U(t)$  обеспечивает удобные представления как падающих, так и восходящих ветвей зависимостей  $U(t)$ , показанных на рис. 3. Так, в случае  $s_1 = -1$ ,  $s_2 = 1$ ,  $t_2 \leq 2t_1$  функция  $U(t)$  достигает минимума (см. рис. 3) в момент  $t_m$ :

$$t_m = yt_2, \quad U_m = U(t_m) = 1 - y^2, \quad y = \frac{t_2}{2t_1} < 1. \quad (3.14)$$

Диэлектрическая функция возвращается к своему начальному значению  $U = 1$  за время  $t = 2t_m$ .

С. Решение уравнения (3.11), соответствующее модели (3.12), можно представить в виде волны, бегущей в пространстве  $(z, \tau)$ :

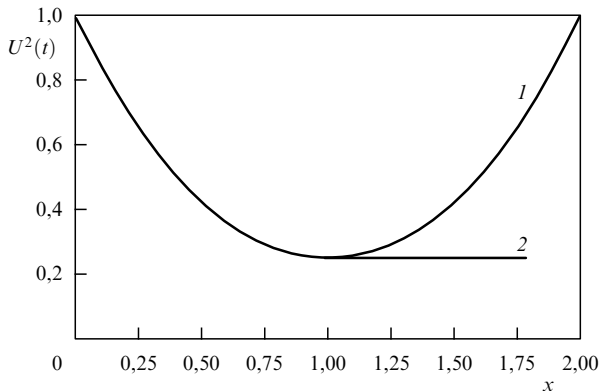
$$F = \exp [i(qz - \omega\tau)], \quad (3.15)$$

$$q = \frac{\omega n_0}{c} N, \quad N = \sqrt{1 - (\omega T)^{-2}}.$$

Электрическая индукция  $D_x$  находится при подстановке решения (3.15) в (3.8):

$$D_x = A \sqrt{U(t)} \exp [i(qz - \omega\tau)], \quad (3.16)$$





**Рис. 3.** Нормированная нестационарная диэлектрическая проницаемость  $U^2(t)$  (3.12),  $s_1 = -1, s_2 = 1, x = t/t_m < 1$ ; характерное время  $t_m$  определено в (3.14). При  $x \geq 1$  проницаемость  $U^2$  возвращается к своему начальному значению ( $U = 1$ , кривая 1) или остается постоянной ( $U = U_m$ , кривая 2).

$A$  — нормировочная постоянная. Наконец, подстановка (3.16) в (3.5) дает выражения для компонент поля в нестационарной среде (3.12) и параметра  $\tau$ :

$$E_x = \frac{A}{n_0^2} [U(t)]^{-3/2} \exp [i(qz - \omega\tau)]; \quad (3.17)$$

$$H_y = \frac{A}{n_0 N} [U(t)]^{-1/2} \exp [i(qz - \omega\tau)]; \quad (3.18)$$

$$\tau = \frac{t_2}{\sqrt{1-y^2}} \arctan \left( \frac{t\sqrt{1-y^2}}{t_2 - ty} \right), \quad s_1 = -1, \quad s_2 = 1; \quad (3.19)$$

$$\tau = \frac{t_2}{2\sqrt{1+y^2}} \ln \left[ \frac{1 + t(t_2 y_-)^{-1}}{1 - t(t_2 y_+)^{-1}} \right], \quad s_1 = 1, \quad s_2 = -1, \quad (3.20)$$

$$y_{\pm} = \sqrt{1+y^2} \pm y.$$

Таким образом, использование формализма "τ-пространства" приводит к явным выражениям для электромагнитного поля, имеющим смысл во время существования модели (3.12):  $0 \leq t \leq t_2^2/t_1 = 2yt_2$ . Чтобы исследовать поле во время  $t \geq 2yt_2$ , требуется продолжить зависимость  $U(t)$  в это время. Как будет показано ниже, такое продолжение может привести к некоторым особенностям в отражении от среды (3.12) в момент  $t = t_m$ .

Формулы для электромагнитных полей (3.17), (3.18), распространяющихся в нестационарной среде (3.12), получены без каких-либо ограничений на частоту и времена релаксации среды  $t_1$  и  $t_2$ . Эти формулы содержат фазовый множитель  $[i(qz - \omega\tau)]$ , выраженный через переменную  $\tau$ : в таком "τ-пространстве" пространственно-временная структура электромагнитных полей похожа на бегущие гармонические волны.

Рассмотрим амплитудно-фазовую структуру составляющих поля (3.17), (3.18), отмечая особенности этой структуры, связанные с сильной нестационарностью среды.

1. Распространение волн характеризуется дисперсией, вызванной нестационарностью и описываемой величиной  $q$  в уравнении (3.15). Этот эффект, не зависящий от естественной дисперсии среды, определяется временами релаксации переменной диэлектрической проницаемости. Вогнутый временной профиль диэлект-

рической проницаемости, показанный на рис. 3, приводит к нормальной дисперсии

$$N = \sqrt{1 - (\omega T)^{-2}};$$

эта формула, напоминающая волноводную дисперсию, указывает на появление частоты отсечки, регулируемой нестационарностью  $\omega_c = T^{-1}$ . В отличие от этого выпуклый профиль  $U(t)$  приводит к аномальной дисперсии

$$N = \sqrt{1 + (\omega T)^{-2}},$$

и частота отсечки в этом случае не возникает.

2. Распространение электромагнитной волны в нестационарном диэлектрике, описываемое с помощью "τ-пространства", сопровождается формированием зависящего от времени фазового сдвига  $\varphi$  между компонентами  $E_x$  и  $H_y$ . Подстановка (3.12) в (3.18) дает величину этого сдвига фаз

$$\varphi = \arcsin \left[ \frac{ys_1 + s_2 t/t_2}{\sqrt{(\omega t_2)^2 + (s_1 y + s_2 t/t_2)^2}} \right]. \quad (3.21)$$

В пространстве  $(z, t)$  огибающие электрических и магнитных компонент (3.17), (3.18) несинусоидальны, а зависящий от времени множитель (3.21) приводит к различию этих огибающих в любом сечении внутри среды.

3. Временные масштабы  $t_1$  и  $t_2$  и значения  $s_1$  и  $s_2$  являются свободными параметрами модели (3.12). В особом случае  $t_2 = 2t_1, s_1 = \pm 1, s_2 = 1$  нестационарная дисперсия исчезает ( $N = 1, T \rightarrow \infty$ ), и зависящий от времени множитель  $U(t)$  имеет вид

$$U = \left( s_1 + \frac{t}{2t_1} \right)^2. \quad (3.22)$$

В этом случае уравнение (3.11), определяющее поле  $F$ , сводится к волновому уравнению в свободном пространстве  $(z, \tau)$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2} = 0, \quad v = \frac{c}{n_0}. \quad (3.23)$$

Переменная  $\tau$  определяется при подстановке (3.22) в (3.8):

$$\tau = t \left( 1 + \frac{s_1 t}{2t_1} \right)^{-1}. \quad (3.24)$$

Представляя решение волнового уравнения (3.23) с помощью произвольной функции  $F[(\tau - z/v)t_0^{-1}]$  и пользуясь (3.8), можно найти индукцию  $D_x$ ; так, для среды с убывающей диэлектрической проницаемостью ( $s_1 = -1$ ) получим

$$D_x = \left( 1 - \frac{t}{2t_1} \right) F(u), \quad (3.25)$$

$$u = t_0^{-1} \left[ t \left( 1 - \frac{t}{2t_1} \right)^{-1} - \frac{z}{v} \right].$$

Эти результаты, полученные при решении уравнения (3.6), определяющего индукцию  $D_x$ , можно найти и из другого уравнения, описывающего магнитную компоненту  $H_y$ . Такое уравнение выводится при исключении

$D_x$  из уравнения Максвелла (3.4), (3.5):

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} - \frac{n_0^2 U^2(t)}{c^2} \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} = \frac{n_0^2}{c^2} \frac{\partial U^2}{\partial t} \frac{\partial H_y}{\partial t}. \quad (3.26)$$

Прямая подстановка показывает, что функция  $H_y$  (3.18) является решением уравнения (3.26). В разделе 4 будет показано, что оба полученных решения,  $D_x$  и  $H_y$ , найденные здесь для нормального падения, допускают обобщение для произвольных углов падения.

Уравнение (3.26) позволяет найти новый временной профиль  $U(t)$ , сводящий уравнение (3.26) к волновому уравнению в свободном пространстве (3.23). Этот профиль отличается от (3.22):

$$U^2(t) = \left(1 - \frac{t}{t_m}\right)^{4/3}, \quad 0 \leq t \leq t_m = \frac{2t_1}{3}. \quad (3.27)$$

Динамику сигнала с произвольной огибающей, движущегося в среде (3.27), можно представить с помощью решения уравнения (3.26):

$$H_y = A \left(1 - \frac{t}{t_m}\right)^{-1/3} F(u), \quad (3.28)$$

$$u = \frac{t_1}{t_0} \left[ \left(1 - \frac{t}{t_m}\right)^{1/3} - 1 + \frac{z}{v t_1} \right].$$

Здесь  $F$  — произвольная функция,  $A$  — нормировочная постоянная.

Примечательно, что в моделях (3.22) и (3.27) нестационарная дисперсия не возникает; в частности, распространение синусоидальных волн в таких средах характеризуется, в отличие от (3.15), волновым вектором  $q = \omega/v$ , т.е. дисперсионный фактор  $N$  в (3.15) сводится к единице.

Следует еще раз подчеркнуть, что выражения (3.25) и (3.28) имеют смысл для произвольных огибающих, включая часто обсуждаемые ультракороткие импульсы, содержащие одно или несколько колебаний поля. Такие огибающие можно рассматривать как точные аналитические решения во временной оптике нестационарных сред.

### 3.2. Разрывы в отраженных полях

Чтобы найти зависящий от времени коэффициент отражения  $R$ , следует использовать условия непрерывности для электрической и магнитной компонент поля на поверхности нестационарного диэлектрика  $z = 0$ . Рассмотрим нормальное падение цуга монохроматических линейно поляризованных волн с частотой  $\omega$  из вакуума на поверхность  $z = 0$ . Условия непрерывности для компонент  $E_x$  (3.17) и  $H_y$  (3.18) дают значения коэффициента отражения в этом случае:

$$R = \frac{N - n_0 U(1 + iU_t/(2\omega))}{N + n_0 U(1 + iU_t/(2\omega))}. \quad (3.29)$$

Формула (3.29) описывает простейшее временное обобщение закона Френеля, показывая явно влияние конечных времен релаксации  $t_1$  и  $t_2$  на отражение от диэлектриков. Рассмотрим с помощью (3.29) некоторые оптические эффекты, возникающие при уменьшении диэлектрической проницаемости, описываемой падающей ветвью кривой (3.12). Эта кривая (см. рис. 3)

показывает, как показатель преломления меняется от значения  $n = n_0$  ( $t = 0$ ) до своего минимума  $n = n_0(1 - y^2)$  в момент  $t = t_m$  (3.14). Предполагая, что это изменение инициируется быстрой ионизацией, можно рассматривать последующее восстановление невозмущенного значения  $n$  как медленный процесс, определяемый, например, рекомбинацией, с характерным временем порядка наносекунд; это значит, что в течение некоторого времени после  $t_m$  график  $n(t)$  можно приближенно представить горизонтальной линией (см. рис. 3). Некоторые существенные свойства нестационарного отражения во время  $0 \leq t \leq t_m$  отмечены ниже.

А. Коэффициенты отражения при  $t \leq 0$  определены своими стационарными значениями

$$R = \frac{1 - n_0}{1 + n_0}, \quad \frac{\partial n_0}{\partial t} = 0. \quad (3.30)$$

Начало процесса ионизации ведет к разрыву первой производной по времени от диэлектрической проницаемости:

$$\frac{\partial U^2}{\partial t} \Big|_{-0} = 0, \quad \frac{\partial U^2}{\partial t} \Big|_{+0} = -\frac{2s_1}{t_1}. \quad (3.31)$$

Этот разрыв проявляется в скачке коэффициента отражения от действительного значения  $n = n_0$  к комплексному

$$R \Big|_{+0} = \frac{N - n_0(1 - is_1/(2\omega t_1))}{N + n_0(1 - is_1/(2\omega t_1))}. \quad (3.32)$$

Переменная во времени фаза  $\varphi$  (3.29) также содержит разрыв в момент  $t = 0$ .

В. Непрерывное изменение коэффициента отражения, начатое в момент  $t = 0$ , прерывается другим разрывом в момент  $t = t_m$ . В этот момент диэлектрическая проницаемость и ее первая производная остаются непрерывными, но вторая производная  $U_{tt}$  в модели (3.12) имеет разрыв:

$$U_t \Big|_{t_m-0} = U_t \Big|_{t_m+0} = 0,$$

$$U_{tt} \Big|_{t_m-0} = \frac{4n_0(1 - y^2)}{t_2^2}, \quad (3.33)$$

$$U_{tt} \Big|_{t_m+0} = 0.$$

Этот разрыв приводит к скачкообразному изменению  $R$  от значения  $R_m = R(t_m)$  к стационарному значению  $R_2$ :

$$R_m = \frac{N - n_0(1 - y^2)}{N + n_0(1 - y^2)}, \quad R_2 = \frac{1 - n_0(1 - y^2)}{1 + n_0(1 - y^2)}. \quad (3.34)$$

График коэффициента отражения, содержащий эти особенности, показан на рис. 4.

С. Искажения отраженных огибающих, вызванные указанными изменениями коэффициента отражения, существуют в течение ограниченного интервала времени  $0 \leq t \leq t_m$ ; в течение этого интервала синусоидальные огибающие могут полностью деформироваться. Так, в случае, когда период пробной волны  $T_{\sim}$  сравним с характерным временем ионизации  $t_m$ , отраженный цуг гармонических волн может содержать одну или несколько негармонических волн, заключенных в интер-

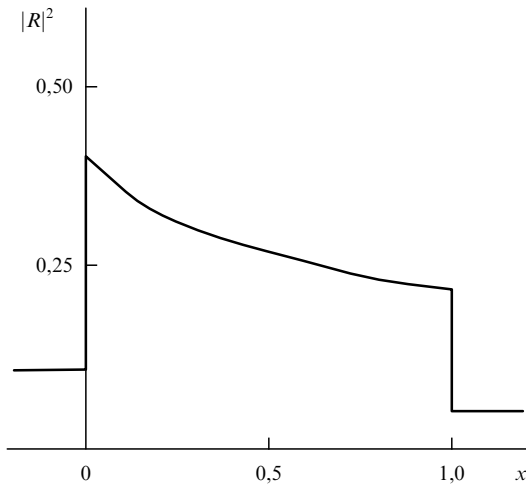


Рис. 4. Образование разрывов в зависящем от времени коэффициенте отражения по мощности  $|R|^2$  для модели диэлектрической проницаемости, показанной на рис. 3 (кривая 2);  $x = t/t_0$ .

вале  $0 \leq t \leq t_m$ . Этот короткоживущий всплеск излучения характеризуется значительным уширением спектра, определяемым временем  $t_m$ . Из-за такого эффекта дифракционная картина отраженной волны может содержать несколько слабых короткоживущих боковых лепестков, содержащих информацию о динамике ионизации. Регистрация этих лепестков была бы трудным, но перспективным экспериментом.

Следует подчеркнуть, что указанные эффекты в отражении, основанные на нестационарной дисперсии, были найдены с помощью точно решаемой модели нестационарной диэлектрической проницаемости (3.12). Коэффициент отражения оказался зависим не только от текущего значения  $\varepsilon(t)$ , но и от первой и второй производной  $\varepsilon(t)$ . Когда влияние этих производных, описываемое в выражении для коэффициента отражения (3.27) слагаемыми, содержащими  $(\omega t_1)^{-1}$  и  $(\omega T)^{-2}$ , существенно, можно говорить о динамическом режиме отражения. Фазовая модуляция отраженной волны, описываемая нестационарным фазовым сдвигом  $\varphi(t)$  (3.29), также присуща динамическому режиму отражения.

Противоположный случай, когда этими слагаемыми можно пренебречь, соответствует адиабатическому режиму; коэффициент отражения (3.27) в таком режиме можно записать в виде

$$R = \frac{1 - n_0 U(t)}{1 + n_0 U(t)}. \quad (3.35)$$

В этом приближении, соответствующем нестационарной геометрической оптике [33], фазовая модуляция отраженной волны не возникает. Наконец, если изменения  $U(t)$  тоже незначительны, выражение (3.35) сводится к стандартной формуле Френеля, которая, таким образом, оказывается частным случаем более общего выражения, зависящего от времени.

Следует отметить, что модель  $U(t)$  (3.12) содержит два свободных параметра — экстремум  $U_m$  и масштаб времени  $t_m$ ,  $U(t_m) = U_m$ . Если эти параметры заданы, то задан и начальный темп изменения диэлектрической проницаемости, описываемый производной  $U_t$  в момент  $t = 0$  (3.31). Однако для некоторых задач целесообразно,

задавая значения  $U_m$  и  $t_m$ , моделировать изменения  $U(t)$  с помощью иного значения  $U_t|_{t=0}$ . Это можно сделать с помощью другой точно решаемой модели нестационарной диэлектрической проницаемости, представленной обратной зависимостью [32]

$$\frac{t}{T} = \frac{1}{2} \left\{ M - \sqrt{U(U - U_m)} + (1 - M^2) \operatorname{arccosh} \left[ \frac{\sqrt{U} - M\sqrt{U - U_m}}{1 - M^2} \right] \right\}. \quad (3.36)$$

Как и (3.12), эта модель содержит два свободных параметра; эти параметры,  $M$  и  $T$ , выражаются через  $U_m$  и  $t_m$ :

$$M = \sqrt{1 - U_m}, \quad 0 \leq M \leq 1, \quad (3.37)$$

$$\frac{t_m}{T} = \frac{1}{2} \left[ M + (1 - M^2) \operatorname{arccosh} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - M^2}} \right) \right].$$

Однако наклон  $U_t|_{t=0}$  отличается от (3.31):

$$\frac{\partial U}{\partial t} \Big|_{t=0} = -\frac{2M}{T}. \quad (3.38)$$

Выше рассматривался длинный путь монохроматических волн, форма которых менялась при взаимодействии с нестационарным диэлектриком. Но такой подход неудобен для анализа взаимодействий изначально негармонических широкополосных импульсов, содержащих одно или несколько колебаний поля, с нестационарными средами. Указанные импульсы характеризуются зависящей от времени деформацией даже при распространении в свободном пространстве (см. раздел 7). Динамика таких импульсов в плазмopodobных средах рассматривается в рамках временного подхода в [34].

### 3.3. Отражение от плазмы при быстрой ионизации

Обсуждая волновые процессы в средах с переменной во времени диэлектрической проницаемостью, мы не уточняли до сих пор природу этих сред. Однако быстрые и глубокие изменения  $\varepsilon(t)$  часто связаны с ионизацией плазмы; поэтому целесообразно специально рассмотреть отражение электромагнитных волн от такой среды, тем более, что математические основы такого анализа отличаются от подхода, примененного в разделе 3.1.

Отражательная способность ионизируемой плазмы существенно зависит от времени ионизации. Эта зависимость исследовалась численно (см. [24, 25] и указанную там литературу); мы рассмотрим некоторые аналитические модели нестационарной плотности ионизации. Обсудим сначала волновые эффекты, вызванные ростом электронной плотности  $N$  в полуограниченном пространстве от начального значения  $N_1$  в момент  $t = 0$  до асимптотического значения  $N_m$ , соответствующего насыщению ионизации. Временную зависимость плотности плазмы в этом случае можно промоделировать формулой

$$N(t) = 2N_1 - N_m + \frac{2(N_m - N_1)}{1 + \exp(-t/t_0)}, \quad (3.39)$$

$t_0$  — характерное время ионизации. Выражая компоненты поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  и электрический ток  $\mathbf{j}$ , индуцирован-

ный этим полем, через вектор-потенциал  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad (3.40)$$

$$\mathbf{j} = -\frac{e^2 N(t) \mathbf{A}}{mc}, \quad (3.41)$$

и рассматривая линейно-поляризованную волну ( $\psi = A_x, A_y = A_z = 0$ ), можно записать уравнение Максвелла, определяющее функцию  $\psi$ :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\psi}{c^2} \left[ 2\Omega_1^2 - \Omega_m^2 + \frac{2(\Omega_m^2 - \Omega_1^2)}{1 + \exp(-t/t_0)} \right]. \quad (3.42)$$

Решение этого уравнения ищется в виде

$$\psi = BF \exp[i(kz - \omega t)], \quad c^2 k^2 = \omega^2 - \Omega_m^2. \quad (3.43)$$

Подстановка (3.43) в (3.42) приводит к уравнению для функции  $F$ , зависящей от нормализованной переменной  $x = t/t_0$ :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2ip \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{t_0^2 (\Omega_1^2 - \Omega_m^2) \exp(-x)}{1 + \exp(-x)} F = 0, \quad p = \omega t_0. \quad (3.44)$$

Вводя новую переменную  $u = -\exp(-x)$ , можно свести (3.44) к стандартному гипергеометрическому уравнению (2.31). При этом значения параметров  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  в (2.31) есть

$$\alpha, \beta = it_0 \left[ \omega \pm \sqrt{\Omega_1^2 - \Omega_m^2 + \omega^2} \right], \quad \gamma = 1 + 2ip. \quad (3.45)$$

Решение уравнения (3.44) представляется гипергеометрическими рядами  $F(\alpha, \beta, \gamma, u)$ . Условие сходимости этих рядов [35]

$$\text{Re}(\alpha + \beta - \gamma) \leq 0 \quad (3.46)$$

выполняется для значений (3.45)  $\alpha + \beta - \gamma = -1$ . Таким образом, вектор-потенциал  $\psi$  (3.43) можно записать в виде

$$A_x = \psi = BF \left[ \alpha, \beta, \gamma, -\exp\left(-\frac{t}{t_0}\right) \right] \exp[i(kz - \omega t)]. \quad (3.47)$$

Подстановка (3.47) в (3.40) определяет компоненты  $E_x$  и  $H_y$ ; эти компоненты, выраженные через гипергеометрическую функцию  $F$ , не синусоидальны. Условия непрерывности  $E_x$  и  $H_y$  на поверхности  $z = 0$  дают коэффициент отражения

$$R = \frac{pF - iuF_u - pFN}{pF - iuF_u + pFN}, \quad N = \sqrt{1 - \Omega_m^2 \omega^{-2}}. \quad (3.48)$$

Здесь  $F_u$  — производная гипергеометрической функции; эту производную можно вычислить по формуле [35]

$$\frac{dF(\alpha, \beta, \gamma, u)}{du} = \frac{\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1, u). \quad (3.49)$$

Поскольку отношение  $F_u/F$  остается конечным, "дальняя" асимптотика ( $t \gg t_0$ ) коэффициента отражения  $R$  (3.48) сводится к стационарному пределу:

$$\lim_{t \gg t_0} R = \frac{1 - N}{1 + N}. \quad (3.50)$$

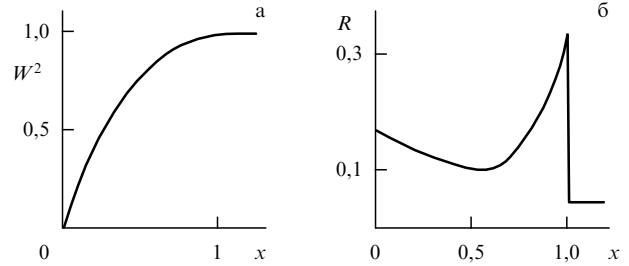


Рис. 5. Нестационарное отражение при быстрой ионизации плазмы: (а) рост нормированной плотности ионизации  $W = N(t)/N_m$ ,  $N(t)$  определено в (3.51),  $x = t/T_0$ ,  $G = 10^{17} \text{ см}^{-3}$ ,  $Q = 3,5$ ; при  $x \geq 1$   $W = 1$ ; (б) коэффициент отражения для переднего волнового фронта ( $\lambda = 0,8 \text{ мкм}$ ,  $t_0 = 1,25 \text{ фс}$ ) при условиях, соответствующих случаю (а); при  $x \geq 1$  значение  $R$  сохраняется.

Рассуждая аналогичным образом, можно исследовать отражение от нестационарной плазмы и в другом режиме ионизации, когда электронная плотность  $N(t)$  возрастает от начального значения  $N_1$  до максимума  $N_m$  за конечное время  $t_0$ . Такой режим можно представить моделью, содержащей три свободных параметра — характерное время  $t_0$  и безразмерные величины  $Q$  и  $G$ :

$$N(t) = N_1 + G \left[ \frac{\cosh^2 Q}{\cosh^2(t/t_0 - Q)} - 1 \right]. \quad (3.51)$$

Вводя характерное время  $T$ , определяемое начальным темпом роста ионизации (рис. 5а), можно найти величины  $G$  и  $Q$  из уравнения, следующего из (3.51):

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{2G \tanh Q}{t_0} = \frac{N_m}{T}, \quad (3.52)$$

$$Q = \text{artanh} \left( \frac{\sqrt{1 + 4s^2} - 1}{2s} \right), \quad s = \frac{2T}{t_0} \left( 1 - \frac{N_1}{N_m} \right). \quad (3.53)$$

Электронная плотность достигает своего максимума  $N_m$  за время  $T_m = t_0 \cosh Q$ .

Поле  $\psi$  описывается в этом случае уравнением, сходным с (3.42):

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\psi}{c^2} \left[ \Omega_1^2 - \Omega_m^2 + \frac{\Omega_m^2 \cosh^2 Q}{\cosh^2(t/t_0 - Q)} \right]. \quad (3.54)$$

Получая решение (3.54) в виде

$$\psi = BF \exp[i(kz - \omega t)], \quad k^2 c^2 = \omega^2 + \Omega_1^2 - \Omega_m^2, \quad (3.55)$$

можно свести (3.54) к известному уравнению (2.31), определяющему гипергеометрическую функцию  $F(u)$  с параметрами  $\alpha, \beta, \gamma$  и переменной  $u$ :

$$\alpha, \beta = \frac{1}{2} \left[ 1 \pm \sqrt{1 + 4(\Omega_m t_0 \cosh Q)^2} \right], \quad \gamma = 1 + ip, \quad (3.56)$$

$$u = \frac{1}{2} (1 - \tanh \varphi), \quad \varphi = \frac{t}{t_0} - Q. \quad (3.57)$$

Поскольку  $\text{Re}(\alpha + \beta - \gamma) = 0$ , ряды  $F(u)$ , согласно условию (3.46), сходятся. Продолжая эту аналогию с уравнением (3.47), можно видеть, что коэффициент отражения, связанный с режимом ионизации (3.51), вновь определяется формулой (3.48), где волновое число  $k$  и переменная  $u$  заданы в (3.55) и (3.57).

Примечательно, что при некоторых значениях параметров (3.56) решения уравнения (3.54), выраженные через гипергеометрические функции  $F$ , могут быть существенно упрощены. Такие функции, как известно, сводятся к полиномам, если параметры  $\alpha$  или  $\beta$  равны целым отрицательным числам. Так, полагая  $\beta = -n$ , мы найдем соответствующие значения произведения  $(\Omega_m t_0 \cosh Q)^2$  (3.56):

$$(\Omega_m t_0 \cosh Q)^2 = n(n+1), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.58)$$

Если условие (3.58) выполнено, решения  $F_n$  представляются полиномами  $n$ -го порядка по отношению к переменной  $u$ :

$$F_1 = \frac{1-2u}{\gamma}, \quad F_2 = 1 - \frac{6u}{\gamma} + \frac{12u^2}{\gamma(\gamma+1)}. \quad (3.59)$$

Полиномы  $F(u)$  можно переписать с помощью нормализованной временной переменной  $\varphi$  (3.57):

$$F_1 = \frac{\tanh \varphi + ip}{\gamma}, \quad (3.60)$$

$$F_2 = \frac{3 \tanh^2 \varphi - (1+p^2) + 3ip \tanh \varphi}{\gamma(\gamma+1)}.$$

При выводе формулы (3.59), (3.60) предполагается для простоты, что пробная волна падает на поверхность плазмы  $z = 0$  в момент  $t = 0$ .

Подстановка функций (3.59) в (3.40) и (3.48) приводит к простым выражениям для составляющих поля  $E$  и  $H$  и коэффициента отражения  $R$ ; так, в случае  $n = 3$  коэффициент отражения составляет

$$R_3 = \frac{-3 \tanh \varphi (1 - \tanh^2 \varphi) [10 \tanh \varphi + 2ip + 3ip^{-1}(1 - 5 \tanh^2 \varphi)]}{12 \tanh \varphi (5 \tanh^2 \varphi - 4 - p^2) - 2ip(18 \tanh^2 \varphi - 7 - p^2) - K},$$

$$K = -9ip^{-1}(1 - \tanh^2 \varphi)(1 - 5 \tanh^2 \varphi). \quad (3.61)$$

Сильные нестационарные искажения отраженных огибающих, описываемые коэффициентом  $R_3$ , показаны на рис. 5б. Этот рисунок иллюстрирует отражение от быстро ионизируемого слоя воздуха при нормальных условиях (молекулярная плотность дается числом Лошмидта  $N = 2,7 \times 10^{19} \text{ см}^{-3}$ ) для уровня ионизации 50 %, длине пробной волны  $\lambda = 0,8 \text{ мкм}$  и времени ионизации  $T = 1,25\lambda/c$ .

Следует отметить некоторые особенности отражения в интервале  $0 \leq t \leq T_m$ , видные из этого примера.

А. Амплитуда и фаза комплексного коэффициента отражения зависят от времени; при этом фазовый сдвиг в  $R$  исчезает к концу процесса ионизации, так что значение  $R$  в момент  $t = T_m$  становится чисто действительным:

$$R|_{T_m} = \frac{3(3+2p^2)}{9+14p^2+2p^4}. \quad (3.62)$$

В. Разрыв кривизны временного профиля ионизации  $N(t)$  в момент  $t = T_m$ ; модель (3.51) приводит к скачку коэффициента отражения  $R$  от значения (3.61), зависящего от темпа ионизации через параметр  $p$ , к стационарному значению (3.62), не зависящему от этого параметра. Такой скачок в свою очередь ведет к разрыву на заднем фронте отраженной огибающей.

С. При высокой частоте пробной волны  $\omega$  ( $\Omega_m^2 \omega^{-2} = 0,01$ ) значение показателя преломления плазмы близко к единице, поэтому стационарное значение коэффициента отражения (3.29) мало:  $R = 0,005$ . Максимальное значение коэффициента отражения (3.61) гораздо выше:  $R = 0,32$ . Таково изменение  $R$  во времени ультракороткого уединенного негармонического отраженного импульса на переднем фронте цуга пробных волн; полуширина такого импульса  $\Delta t$  меньше периода пробной волны  $t_{\sim}$ :  $\Delta t \approx 0,1 t_{\sim}$ . Этот эффект показывает важную роль темпа ионизации при динамическом режиме отражения от плазмы.

Кроме того, отражение от быстро ионизируемой плазмы открывает перспективы генерации ультракоротких импульсов без пьедестала, что важно для "плазменного зеркала" при экспериментах с экстремальными режимами взаимодействия лазерного излучения с плазмой [36–38]. Принцип "плазменного зеркала" связан с фокусировкой лазерного пучка на слабо отражающей границе между вакуумом и диэлектриком, через которую проходит значительная часть пьедестала. Когда интенсивность нарастает со временем, диэлектрик ионизируется за счет многофотонного поглощения; при этом характер отражения приближается к металлическому. Если плотность электронов для данной длины лазерной волны превышает критическое значение ( $N_c = 1,75 \times 10^{21} \text{ см}^{-3}$ ,  $\lambda = 800 \text{ нм}$ ), отражение диэлектрика возрастает скачком [39]. Физические основы ряда эффектов электронной динамики в сильном световом поле исследованы в [40].

#### 4. Фазовые эффекты в оптике нестационарных сред

Комплексные коэффициенты отражения, найденные выше для различных моделей сред с зависящими от времени диэлектрическими параметрами, описывают формирование нестационарных фазовых сдвигов в отраженных волнах. Такой эффект отмечался в разделе 3 для простого случая — отражения волн при нормальном падении. В отличие от этого, здесь обсуждаются разнообразные фазовые эффекты, возникающие как при отражении, так и при преломлении волн при наклонном распространении.

Поляризационная структура падающих волн приводит, как известно, к различиям в отражении S- и P-поляризованных волн. Нестационарные обобщения классических формул Френеля для отражения этих волн будут получены в разделе 4.1; там же найдены и обобщения закона Снеллиуса, показывающие различия в нестационарном преломлении S- и P-волн. Амплитудно-фазовые искажения гармонических полей в нестационарном диэлектрическом слое рассмотрены в разделе 4.2. Схожие явления, возникающие в микроволновой линии передачи с распределенными, зависящими от времени параметрами, обсуждаются в разделе 4.3.

##### 4.1. Поляризационные явления при отражении от консервативной среды, изменяющейся во времени

Этот раздел посвящен анализу волн, падающих на неподвижную поверхность  $z = 0$  нестационарного диэлектрика под произвольным углом  $\gamma$ . Рассматривая вначале модель зависящей от времени диэлектрической проницаемости  $U(t)$  (3.12), мы вычислим коэффициенты

отражения S- и P-поляризованных волн отдельно. Говоря для краткости про S- и P-волны, можно обобщить подход, развитый выше для нормального падения (раздел 3.1).

1. S-волна. Такая волна характеризуется электрической компонентой  $E_x$  и магнитными компонентами  $H_y$  и  $H_z$ . Исключая магнитные компоненты из уравнений Максвелла

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial z} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t}, & \frac{\partial E_x}{\partial y} &= \frac{1}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= \frac{1}{c} \frac{\partial D_x}{\partial t}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

можно получить уравнение, подобное уравнению (3.6) для электрической индукции  $D_x$ :

$$\frac{\partial^2 D_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 D_x}{\partial y^2} - \frac{n_0^2 U^2(t)}{c^2} \frac{\partial^2 D_x}{\partial t^2} = 0. \quad (4.2)$$

Пользуясь новой переменной  $\tau$  (3.7), можно записать решение уравнения (4.2) в виде

$$D_x = B\sqrt{U(t)} \exp [i(k_{\perp}z + k_{\parallel}y - \omega\tau)]. \quad (4.3)$$

Здесь  $k_{\parallel} = \omega c^{-1} \sin \gamma$ , величины  $k_{\parallel}$ ,  $k_{\perp}$  и  $\omega$  связаны дисперсионным уравнением

$$k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n_0^2 N^2, \quad N = \sqrt{1 - (\omega T)^{-2}}. \quad (4.4)$$

Параметры  $N$  и  $T$  определены в (3.13) и (3.15). Опуская далее для простоты фазовый множитель, найдем компоненты поля  $E_x$ ,  $H_y$  и  $H_z$ , удовлетворяющие уравнению Максвелла (4.1):

$$E_x = \frac{B}{n_0^2 U^{3/2}}, \quad \begin{cases} H_y \\ H_z \end{cases} = \frac{B(1 + iU_t/(2\omega))}{n_0 N U^{1/2}} \begin{cases} \cos \gamma \\ -\sin \gamma \end{cases}. \quad (4.5)$$

Здесь  $B$  — нормировочная постоянная; выражения (4.5) удовлетворяют условию  $\text{div } \mathbf{H} = 0$ .

Чтобы найти коэффициент отражения  $R_s$ , целесообразно ввести некоторый угол  $\beta$ , представляя компоненты  $H_y$  и  $H_z$  в виде

$$H_y = H \cos \beta, \quad H_z = -H \sin \beta, \quad H = \sqrt{H_y^2 + H_z^2}. \quad (4.6)$$

Пользуясь этим представлением и обозначая амплитуду падающей волны через  $E_i$ , можно записать условия непрерывности на границе  $z = 0$ :

$$\begin{aligned} E_i(1 + R_s) &= B n_0^{-2} U^{-3/2}, & E_i(1 - R_s) \cos \gamma &= H \cos \beta, \\ E_i(1 + R_s) \sin \gamma &= H \sin \beta. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Пользуясь условиями (4.7), определим угол  $\beta$ :

$$\sin \gamma = n_s \sin \beta, \quad n_s = n_0 U N^{-1} \left(1 + \frac{iU_t}{2\omega}\right), \quad (4.8)$$

и найдем комплексный коэффициент отражения  $R_s$ :

$$R_s = \frac{\cos \gamma - \sqrt{n_s^2 - \sin^2 \gamma}}{\cos \gamma + \sqrt{n_s^2 - \sin^2 \gamma}}. \quad (4.9)$$

Формулу (4.8) можно рассматривать как обобщенный закон Снеллиуса. Значение  $\beta$  в (4.8) комплексно:  $\beta = \beta_1 + i\beta_2$ . Это означает, что плоскости равных фаз и равных амплитуд не параллельны и соответственно нормали к этим плоскостям образуют некоторый угол; похожая структура поля и комплексный угол преломления возникают, как известно, при анализе распространения волн в поглощающем диэлектрике [41]. Разделение действительной и мнимой частей в (4.8) приводит к уравнениям, определяющим значения  $\beta_1$  и  $\beta_2$ :

$$\tan \beta_1 = \frac{1}{gl} \sqrt{\frac{1}{2}(-G + \sqrt{G^2 + 4g^2 l^2})}, \quad (4.10)$$

$$g = \frac{U_t}{2\omega}, \quad l = \frac{N \sin \gamma}{n_0 U}, \quad \tanh \beta_2 = -g \tan \beta_1. \quad (4.11)$$

Величина  $G$  для случая S-поляризации составляет

$$G = G_s = l^2(g^2 - 1) + (1 + g^2)^2. \quad (4.12)$$

2. P-волна. В отличие от поля S-волны поле P-волны характеризуется магнитной составляющей  $H_x$  и электрическими составляющими  $E_y$  и  $E_z$ , связанными уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_x}{\partial z} &= \frac{1}{c} \frac{\partial D_y}{\partial t}, & -\frac{\partial H_x}{\partial y} &= \frac{1}{c} \frac{\partial D_z}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial H_x}{\partial t}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Исключая составляющие электрической индукции  $D_y$  и  $D_z$  из системы (4.13), сводим эту систему к одному уравнению, аналогичному уравнению (3.35):

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} - \frac{n_0^2 U^2(t)}{c^2} \frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2} = \frac{n_0^2}{c^2} \frac{\partial U^2}{\partial t} \frac{\partial H_x}{\partial t}. \quad (4.14)$$

Используя вновь модель (3.12) и переменную  $\tau$ , найдем решение уравнения (4.14):

$$H_x = \frac{B}{\sqrt{U}} \left(1 + \frac{iU_t}{2\omega}\right) \exp [i(k_{\perp}z + k_{\parallel}y - \omega\tau)]. \quad (4.15)$$

Следуя схеме, примененной выше для случая S-волн, найдем составляющие  $E_y$  и  $E_z$ , удовлетворяющие уравнению  $\text{div } \mathbf{E} = 0$ . Сравнивая составляющие  $H_x$ ,  $E_y$  и  $E_z$  для P-волны с составляющими  $E_x$ ,  $H_y$  и  $H_z$  для S-волны (4.5), можно видеть, что принцип двойственности, допускающий в уравнениях Максвелла замену  $\mathbf{E} \Leftrightarrow -\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{H} \Leftrightarrow \mathbf{D}$ , остается в силе и для нестационарных сред.

Условия непрерывности для P-волны приводят к нестационарному обобщению закона Снеллиуса

$$\sin \gamma = n_p \sin \beta, \quad n_p = n_0 N U \left(1 + \frac{iU_t}{2\omega}\right)^{-1} \quad (4.16)$$

и к значению коэффициента отражения для P-волн

$$R_p = \frac{(n_0 U)^2 \cos \gamma - \sqrt{n_p^2 - \sin^2 \gamma}}{(n_0 U)^2 \cos \gamma + \sqrt{n_p^2 - \sin^2 \gamma}}. \quad (4.17)$$

Действительная часть комплексного угла преломления  $\beta$  вычисляется в этом случае из уравнения (4.10) при

подстановке

$$G = G_p = l^2(g^2 - 1) + N^4. \quad (4.18)$$

Мнимая часть  $\beta$  определяется выражением

$$\tanh \beta_2 = g \tanh \beta_1. \quad (4.19)$$

Безразмерные параметры  $l$  и  $g$  были найдены в (4.11). Примечательно, что комплексные углы преломления для S- и P-волн различны при одинаковом угле падения. В специальном случае  $s_2 = 0$  (3.13) можно показать, что  $N^2 = 1 + g^2$ , и поэтому действительные части  $\beta_1$  для S- и P-волн совпадают; однако даже в этом случае мнимые части  $\beta_2$  для S- и P-волн имеют противоположные знаки.

3. Отражение от нестационарных сред обсуждалось выше с помощью модели нестационарной диэлектрической проницаемости. В отличие от этого, проблемы отражения и преломления волн для плазмы с быстро меняющейся ионизацией обсуждались в разделе 3.3 вне рамок такой концепции. Хотя задача в разделе 3.3 рассматривалась для нормального падения, обобщение на случай наклонного падения не представляет труда. Так, рассматривая, например, наклонное падение S-волны на поверхность плазмы с растущей ионизацией (3.51), можно использовать решения (3.55), (3.56), соответствующие этой модели, и вывести по аналогии с (4.8), (4.9) нестационарный закон Снеллиуса

$$\sin \gamma = \frac{\sin \beta}{1 - iK}, \quad K = \frac{1}{2p \cosh^2 \varphi} \frac{F_u}{F}. \quad (4.20)$$

Коэффициент отражения для этой быстро ионизируемой области составляет

$$R_s = \frac{\cos \gamma - \sqrt{(1 - iK)^2 - \sin^2 \gamma}}{\cos \gamma + \sqrt{(1 - iK)^2 - \sin^2 \gamma}}. \quad (4.21)$$

Попытка рассчитать отражение P-волн в рамках такого подхода встречает некоторые аналитические трудности. Легко найти составляющие  $H_x$ ,  $E_y$  и  $E_z$ , характеризующие поляризационную структуру P-волны; так, составляющая  $H_x$  удовлетворяет уравнению, схожему с (3.54):

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2} = \frac{\Omega^2}{c^2} H_x \left[ \frac{\cosh^2 Q}{\cosh^2(t/t_0 - Q)} - 1 \right]. \quad (4.22)$$

Как было показано в (3.56), решение уравнения (4.22) можно представить в виде

$$H_x = F(\alpha, \beta, \gamma, u) \exp [i(k_{\perp z} + k_{\parallel y} - \omega t)];$$

здесь  $F$  — гипергеометрическая функция (3.56). Компоненты вектор-потенциала  $A_y$  и  $A_z$  определяются уравнением, совпадающим с (4.22). Подстановка  $A_y$  и  $A_z$  в (3.40) позволяет вычислить компоненты электрического поля  $E_y$  и  $E_z$ . Проблема возникает при расчете коэффициента отражения  $R_p$ , основанном на непрерывности электрической индукции  $D_z$ . Эта функция, определенная согласно (4.13) выражением

$$D_z = c \int \frac{\partial H_x}{\partial z} dt, \quad (4.23)$$

содержит под интегралом гипергеометрическую функцию  $F(\alpha, \beta, \gamma, u)$ ; полученный интеграл находится численно, а величины  $\beta$  и  $R_p$  вычисляются стандартным образом.

В заключение отметим некоторые свойства нестационарного отражения, общие для всех рассматриваемых проблем.

А. Комплексные углы преломления и эффективные показатели преломления  $n_s$  (4.8) и  $n_p$  (4.16) для S- и P-волн различны. Это различие вызывает своеобразный эффект "короткоживущего двулучепреломления" при наклонном распространении волн в нестационарном изотропных и однородных диэлектриках. При нормальном падении различия между S- и P-поляризациями исчезает, коэффициенты отражения по мощности  $|R_s|^2$  и  $|R_p|^2$  становятся равными; при этом  $R_s = -R_p$ , и значения  $\beta_1$  и  $\beta_2$  зануляются:  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ .

В. Вследствие комплексных значений  $n_s$  и  $n_p$  коэффициент отражения  $R_s$  не может дорасти до значения  $R_s = 1$ , соответствующего полному внутреннему отражению; аналогично, коэффициент  $R_p$  (4.17) не может упасть до значения  $R_p = 0$ , соответствующего эффекту Брюстера. Таким образом, быстрые изменения диэлектрической проницаемости препятствуют проявлению этих классических эффектов в оптике нестационарных сред.

С. Временные изменения коэффициента отражения можно использовать для оптического измерения времен релаксации при быстрых фазовых переходах в некоторых материалах. Так, исследования неравновесной сверхпроводимости показали важную роль параметра порядка в эволюции сверхпроводника под действием фотонов или инъекции носителей [42]. Нарушая равновесие между фотонной и сверхпроводящей подсистемами, такие возмущения могут быстро изменить параметр порядка (например, энергетическую щель). Возвращение к равновесию характеризуется некоторым временем релаксации, возрастающим вблизи критической температуры.

Оптические измерения с разрешением во времени [43] выявили сильные изменения времени релаксации носителей при переходе образцов в сверхпроводящее состояние. Исследования температурной зависимости времени релаксации носителей в высокотемпературной сверхпроводящей пленке, выполненные в [37], основаны на поглощении ультракороткого светового импульса носителями в пленке. Последующий перенос энергии между электронами и фотонами исследовался при оптических измерениях температурной зависимости отражения как функции времени задержки после импульса возбуждения. Термооптическое возмущение уменьшало параметр порядка  $\Delta$ , изменяя плотность сверхпроводящих носителей. Малые относительные изменения коэффициента отражения по мощности  $\delta|R|^2/|R|^2 \approx 1,5 \times 10^{-4}$ , измеренные с помощью светового импульса длительностью 80 фс, исчезали за время релаксации порядка одной или нескольких пикосекунд. Другой механизм быстрой температурной перестройки отражения твердого тела будет рассмотрен в разделе 6.

#### 4.2. Несинусоидальные бегущие волны в нестационарном диэлектрическом слое

Выше было показано, что при распространении электромагнитных волн через изменяющуюся во времени среду время накопления амплитудно-фазовых искажений ограничено: эти искажения могут стать существенными, если

время релаксации будет сравнимо с периодом волны. Такое накопление развивается на расстоянии всего нескольких длин волн, поэтому можно говорить про нестационарный слой. Чтобы выявить искажения преломленных волн, ограничимся простейшим случаем — нормальным падением волн на границу  $z = 0$ .

Обсуждая модель (3.12) и соответствующее представление преломленной волны в форме (3.15), следует обратить внимание на фазовый множитель  $[i(qz - \omega\tau)]$ , выраженный через переменную  $\tau$  (3.7). В таком  $\tau$ -пространстве пространственно-временная структура поля напоминает бегущую гармоническую волну. Можно отметить некоторые особенности такой структуры.

А. Электрическое поле (3.17) можно рассматривать как нестационарную волну, движущуюся в  $(z, \tau)$ -пространстве с постоянной фазовой скоростью. Однако в физическом пространстве фазовая скорость переменна во времени. Эти изменения приводят к глубоким искажениям формы волн. Чтобы найти эти искажения, следует вычислить амплитуду преломленной волны в плоскости  $z = 0$ . Эта амплитуда выражается, как известно, через коэффициент отражения  $R$ :  $E_t = E_0(1 + R)$ . Пользуясь формулой (3.27) для коэффициента отражения  $R$  и формулой (3.17) для электрической компоненты преломленной волны  $E_t$ , получим явное выражение

$$E_t = \frac{2E_0 N \exp[i(qz - \omega\tau)]}{U\sqrt{U} [N + n_0 U(1 + iU_t/(2\omega))]} . \quad (4.24)$$

В. Форма магнитной составляющей в преломленной волне  $H_t$  (3.18) отличается от  $E_t$  дополнительной амплитудно-фазовой модуляцией:

$$H_t = \frac{n_0 U}{N} \left( 1 + \frac{iU_t}{2\omega} \right) E_t . \quad (4.25)$$

С. Нормализованная диэлектрическая проницаемость  $U$  (3.12) уменьшается до своего минимального значения  $U_m = 1 - y^2$  за время  $t_m = t_2 y$  (3.14). В момент  $t_m$  производная  $U_t$  обращается в нуль, так что положение волнового фронта  $z_0$  в этот момент определяется уравнением

$$qz_0 - \omega\tau(t_m) = 0 . \quad (4.26)$$

Параметр  $\tau(t)$  для обсуждаемой здесь падающей ветви  $U(t)$  определен в (3.19), при этом  $\tau(t_m) > t_m$ . При распространении в возмущенной области передний край цуга волн будет деформирован.

Применяя такой же подход, можно исследовать распространение пробной волны через быстро ионизируемый слой плазмы, созданный газовым разрядом или быстрой ионизацией твердой мишени (например, кварца [4]), описываемой моделью (3.51). Рассмотрим пропускание цуга волн, отражение которых показано на рис. 5б, для тех же самых параметров плазмы и волны. В этом случае выполнено условие (3.58) с  $n = 3$ , и поэтому компоненты преломленной волны можно представить с помощью (3.61), (3.62); однако постоянную  $B$  следует заменить на амплитуду преломленной волны на поверхности  $z = 0$ . Предположим, что толщина слоя плазмы  $d$  превосходит расстояние  $z_0 = cT_m$ , проходимое передним фронтом волны за время ионизации  $T_m = t_0 Q$  (3.51). Тогда остаток пути  $d - z_0$  волна проходит в плазме с постоянной плотностью. Прощедшая волна может

частично отразиться от плоскости  $z = d$ . Если эта плоскость соответствует границе между ионизованным и неионизованным воздухом, коэффициент отражения можно найти из граничного условия

$$E_t(1 + R) = H_t(1 - R) . \quad (4.27)$$

При этом преломленная волна, распространяющаяся в области  $z \geq d$ , определяется как  $E = E_t(1 + R)$ . Передний фронт преломленной волны деформируется; при расчете по модели (3.51) эта деформация соответствует формированию разрыва в момент  $t = T_m$ . Сравнение рис. 5а и рис. 5б показывает, что эти нестационарные эффекты хорошо выражены вблизи точки  $t = T_m$ , где кривизна ионизационной кривой претерпевает разрыв.

### 4.3. Микроволновые аналогии оптических эффектов, зависящих от времени

Примечательно, что одно из первых исследований распространения электромагнитных волн в нестационарной среде было выполнено несколько десятилетий тому назад, но не в оптическом, а в микроволновом диапазоне. В работе [2] было показано, что скорость волн, бегущих в линии передачи с распределенной индуктивностью  $L$ , можно модулировать при временных изменениях индуктивности. В связи с отмеченной аналогией между микроволновыми и соответствующими оптическими явлениями целесообразно исследовать такие микроволновые эффекты более подробно.

Рассмотрим модель линии без потерь, характеризуемой зависящей от времени индуктивностью  $L = L_0 U^2(t)$ . Распределение тока  $I$  и напряжения  $V$  в этой линии описывается, как известно, системой уравнений [44]

$$\frac{\partial V}{\partial z} + L_0 U^2 \frac{\partial I}{\partial t} + RI = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial z} + C \frac{\partial V}{\partial t} + GV = 0 . \quad (4.28)$$

Здесь  $L_0$ ,  $C$ ,  $R$  и  $G$  — невозмущенные значения индуктивности, емкости, сопротивления и параметра утечки на единицу длины; сопротивлением и токами утечки ниже (для простоты) пренебрегается. Параметры  $L_0$  и  $C$  определяются, например, для полосковой линии, образованной двумя металлическими полосками и слоем диэлектрика между ними, по формулам [44]

$$L_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{d}{b}, \quad C = \frac{10^{-9}}{36\pi} \epsilon_r \frac{b}{d} . \quad (4.29)$$

Здесь  $\epsilon_r$  — эффективная диэлектрическая проницаемость этого слоя,  $d$  и  $b$  — его толщина и ширина;  $L_0$  и  $C$  выражены здесь в Гн м<sup>-1</sup> и Ф м<sup>-1</sup> соответственно. Представляя ток  $I$  и напряжение  $V$  через некоторую производящую функцию  $\psi$ :

$$I = -C \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad V = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (4.30)$$

можно свести систему (4.28) к одному уравнению, напоминающему ранее рассмотренное уравнение (3.6):

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{U^2(t)}{v_0^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 . \quad (4.31)$$

Описывая временные вариации индуктивности с помощью модели  $U(t)$  (3.12):

$$L = L_0 \left( 1 + \frac{s_1 t}{t_1} + \frac{s_2 t^2}{t_2^2} \right)^2 = L_0 U^2(t), \quad (4.32)$$



можно представить решения (4.31) в виде, совпадающем с (3.16):

$$\psi = B\sqrt{U(t)} \exp [i(qz - \omega\tau)]; \quad (4.33)$$

переменная  $\tau$  определена в (3.19), (3.20). Подставляя производящую функцию  $\psi$  (4.33) в (4.30), получим явные выражения для тока и напряжения

$$\begin{aligned} I &= i\omega CU^{-1} \left(1 + \frac{iU_t}{2\omega}\right) \psi, \\ V &= iq\psi, \\ q &= \frac{\omega}{v_0} N, \quad N^2 = 1 - (\omega T)^{-2}, \quad Z = \sqrt{\frac{C}{L_0}}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Величина  $Z$  характеризует, как известно, импеданс линии с постоянными значениями  $L_0$  и  $C$ . Рассматривая величину  $v_0/U(t)$  в (4.31) как модулированную во времени скорость волн, можно толковать формирование негармонических волн тока и напряжения (4.34) как результат модуляции скорости. Конечное время релаксации индуктивности определяет частотную дисперсию линии передачи. Выражения для нестационарного напряжения и тока (4.30) напоминают формулы (3.17), (3.18) для несинусоидальных электрических и магнитных полей. Применение правил Кирхгофа для напряжения и тока вместо условий непрерывности для компонент электромагнитного поля позволяет исследовать отражение волн в однородной линии передачи, возникающее при включении переменной индуктивности в некотором участке этой линии. Так, коэффициент отражения по току  $R_c$ , найденный из уравнений (4.34), есть

$$R_c = \frac{Z_0(1 + iU_t/(2\omega)) - NUZ}{Z_0(1 + iU_t/(2\omega)) + NUZ}. \quad (4.35)$$

Значение  $R_c$  оказывается комплексным, хотя рассматривается линия без потерь; мнимая часть  $R_c$  связана с нестационарной индуктивностью.

Эффект модуляции скорости можно использовать для оптимизации параметров перестраиваемой линии задержки. Предположим, например, что индуктивность  $L(t)$  (4.32) возрастает ( $s_1 = 1$ ,  $s_2 = -1$ ) от начального значения  $L_0$  до максимального значения  $L_m$  за время  $T$ . Найдем расстояние  $l$ , пройденное точкой пересечения нуля, которая попадает на вход линии в момент  $t = 0$ .

Условие  $ql - \omega\tau = 0$  (4.33) определяет расстояние  $l$ ; рассчитывая величину  $\tau(t)$  из (3.20), получим

$$l = \frac{v_0 T}{2y\sqrt{1+y^2}} \ln \left( \frac{y_+}{y_-} \right), \quad y_{\pm} = \sqrt{1+y^2} \pm y. \quad (4.36)$$

Параметр  $y = t_2/(2t_1)$  выражается через величины  $L_0$  и  $L_m$ :

$$y = \sqrt{\sqrt{\frac{L_m}{L_0}} - 1}. \quad (4.37)$$

С другой стороны, та же точка на огибающей волны, бегущей в линии с постоянной индуктивностью  $L_0$ , пройдет за это время расстояние  $l_0 = v_0 T < l$ ; так, в случае  $y = 0,5$  получим  $l = 0,85l_0$ . Таким образом, нестационарная индуктивность в переходном режиме приводит к замедлению волны.

В заключение этого раздела полезно отметить адиабатический предел полученных выражений. Этот предел соответствует случаю "медленной" модуляции диэлектрической проницаемости, когда  $U_t/\omega \rightarrow 0$ ,  $U_{tt}/\omega^2 \rightarrow 0$ ,  $N \rightarrow 1$ . В этом пределе различающиеся выражения для эффективных показателей преломления  $n_s$  (4.8) и  $n_p$  (4.16) вырождаются в совпадающие значения

$$n_s = n_p = n_0 U(t). \quad (4.38)$$

Подстановка (4.38) в формулы Френеля (4.9) и (4.17) дает адиабатические значения коэффициентов отражения  $R_s$  и  $R_p$  для S- и P-поляризованных волн. Следует отметить и особый случай, когда  $N = 1$ , хотя величины  $U_t$  и  $U_{tt}$  сохраняют конечные значения. Такая ситуация, возникающая в модели (3.12), когда  $s_2 = 1$ ,  $y = 1$ , была указана выше для зависимости (3.22).

## 5. Электромагнитные поля в переменных пространственно-временных структурах

Анализ проблем распространения электромагнитных волн в нестационарных средах до сих пор был ограничен предположением о пространственно однородных изменениях этих сред. Однако в ряде проблем следует учитывать как временные, так и пространственные изменения диэлектрических параметров, влияющих на распространение волн. Простейшие примеры таких эффектов, связанных с движением фронта ионизации, разделяющего газы объемы с различными диэлектрическими проницаемостями, упоминались кратко в разделе 3. Более сложный эффект отражения от движущегося фронта ионизации наблюдался в ходе быстрой ионизации твердой мишени (например, кварца [4]), приводящей к формированию так называемого "плазменного зеркала". Колебания этого зеркала, вызванные переменным давлением пучка накачки, приводят к эффектам фазовой модуляции отраженной волны, включающим, в частности, и генерацию гармоник.

Оптические эффекты бегущих возмущений, образующих непрерывно меняющиеся пространственно-временные структуры, исследуются обычно с помощью компьютерного моделирования; подробное описание такой техники приведено, например, в [45]. Развитие аналитической теории таких явлений остается "горячей" проблемой в электродинамике сплошных сред. В отличие от этого, аналитический подход к теории взаимодействия волн с неподвижными пространственно-временными структурами разработан гораздо лучше. Математическая схема такой теории основана на представлении диэлектрической проницаемости среды в виде произведения двух функций, из которых одна зависит только от пространственных координат, а другая — только от времени:

$$\varepsilon(\mathbf{r}, t) = n_0^2 W^2(\mathbf{r}) U^2(t). \quad (5.1)$$

Некоторые проблемы, исследуемые в рамках такого подхода, обсуждаются ниже для нестационарных ЭМ волн, бегущих в линии передачи (раздел 5.1), стоячих в резонаторе (раздел 5.2) и движущихся через неоднородный слой (раздел 5.3). Несмотря на различия в физической постановке этих задач они связаны математически благодаря представлению пространственно-временных

зависимостей диэлектрических проницаемостей в виде (5.1).

### 5.1. Переходные режимы в линии передачи с распределенными параметрами

В отличие от рассмотренного в разделе 4.3 переходного режима в линии с зависящей от времени индуктивностью и постоянной емкостью, ниже обсуждается более сложная система, параметры которой меняются как во времени, так и в пространстве. Чтобы упростить анализ, рассмотрим еще раз зависящую от времени индуктивность  $L(t)$  в виде (4.31), предполагая, что емкость на единицу длины распределена по закону

$$C(z) = C_0 W^2(z), \quad W(z) = \left(1 + \frac{s_1 z}{L_1} + \frac{s_2 z^2}{L_2^2}\right)^{-1}. \quad (5.2)$$

Уравнение для производящей функции  $\psi$  (4.30), описывающей обсуждаемую линию передачи, выводится аналогично (4.31) с учетом распределения (5.2):

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{W^2(z)}{v_0^2 U^2(t)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0, \quad \theta = \int_0^t \frac{dt_1}{U^2(t_1)}. \quad (5.3)$$

Последующий анализ можно рассматривать как обобщение уравнения (4.31) и его решения (4.33). Введем новую функцию и новые переменные  $\eta$  [46] и  $\tau_1$ :

$$F = \frac{\psi}{\sqrt{W(z)U(t)}}, \quad \eta = \int_0^z W(z') dz', \quad \tau_1 = \int_0^\theta \frac{d\theta'}{U(\theta')}. \quad (5.4)$$

Рассматривая модели (4.32) и (5.2) и накладывая дополнительное условие  $U^2(t)U^2(\theta) = 1$ , получим уравнение, определяющее функцию  $F$ :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} - \frac{1}{v_0^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \tau_1^2} = \frac{D^2 F}{v_0^2}, \quad D^2 = T^{-2} - (pv_0)^2. \quad (5.5)$$

Простейший пример пары функций, связанных с вышеупомянутым условием  $U^2(t)U^2(\theta) = 1$ , дается формулами

$$U(t) = 1 + \frac{t}{t_1}, \quad U(\theta) = \left(1 + \frac{\theta}{t_1}\right)^{-1};$$

характерное время  $T$  для модели (4.32) определено в (3.13), параметр  $p^2$  связан с профилем неоднородности (5.2):

$$p^2 = \frac{s_2}{L_2^2} - \frac{s_1^2}{4L_1^2}. \quad (5.6)$$

Параметр  $D^2$  (5.5) характеризует одновременное влияние эффектов дисперсии, обусловленных неоднородностью и нестационарностью. Решение уравнения (5.5) можно представить как гармоническую волну в пространстве  $(\eta, \tau_1)$ . Подстановка этого решения в (5.4) определяет производящую функцию для линии передачи:

$$\psi = \sqrt{W(z)U(t)} \exp[i(q\eta - \omega\tau_1)], \quad (5.7)$$

$$q = \frac{\omega}{v_0} N, \quad N^2 = 1 - \frac{D^2}{\omega^2}. \quad (5.8)$$

Уравнение (5.7) описывает ряд переходных режимов в линии передачи с неоднородно распределенной ем-

костью. Рассмотрим, например, пространственные изменения емкости, заданные распределением (5.2), вдоль отрезка линий длины  $l$ ; емкость  $C$  убывает от  $C_0$  до значения  $C_m$  в точке  $z = 0,5l$  и затем возрастает до значения  $C_0$  в точке  $z = l$ . Подстановка (5.2) в (5.4) дает значения переменной  $\eta(z)$  в этом случае:

$$\eta(z) = \frac{l}{2Y\sqrt{1-Y^2}} \arctan\left(\frac{2Y\sqrt{1-Y^2}z/l}{l-2Y^2z/l}\right), \quad (5.9)$$

$$Y = \sqrt{1 - \sqrt{\frac{C_0}{C_m}}}. \quad (5.10)$$

Длина отрезка  $l$  соответствует значению  $\eta_0 = \eta(l)$ :

$$\eta_0 = \frac{l}{2Y\sqrt{1-Y^2}} \arctan\left(\frac{2Y\sqrt{1-Y^2}}{1-2Y^2}\right). \quad (5.11)$$

Следует отметить особый случай, когда вклады в дисперсию линии передачи, обусловленные неоднородной емкостью и нестационарной индуктивностью, взаимно компенсируются. Похожая ситуация отмечалась в разделе 3.1 для специального случая временных изменений показателя преломления однородной среды (3.22). Однако взаимодействие пространственных и временных изменений скорости волн  $v(z, t) = v_0/(U(t)W(z))$  может обеспечить, как было показано, гибкое изменение параметров, приводящее к особому режиму распространения в линии передачи  $D = 0$ . В этом случае уравнение (5.5) принимает вид

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} - \frac{1}{v_0^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2} = 0. \quad (5.12)$$

Уравнение (5.12) описывает распространение импульса произвольной формы  $F(\tau_1 - \eta/v_0)$  в пространстве  $(\tau_1, \eta)$  без искажений; при этом зависимости  $\eta = \eta(z)$  и  $\tau_1 = \tau_1(t)$  описывают контролируемую деформацию импульса в физическом пространстве  $(z, t)$ .

Примечательно, что математический формализм, развитый выше, оказывается полезен и при анализе другого типа проблем — распространении альфвеновской волны через неоднородную нестационарную плазму. Рассмотрим, например, циркулярно поляризованную волну Альфвена, распространяющуюся вдоль внешнего однородного магнитного поля  $H_0$  (ось  $z$ ). Предположим, что плотность плазмы  $N$  зависит от координаты, а магнитное поле меняется во времени:

$$N = N_0 W^2(z), \quad H = H_0 U^2(t). \quad (5.13)$$

Безразмерные функции  $W(z)$  и  $U(t)$  удовлетворяют условиям

$$W|_{z=0} = 1, \quad U|_{t=0} = 1; \quad (5.14)$$

связанные поперечные возмущения скорости плазмы  $v$  и магнитного поля  $H$ , вызванные альфвеновской волной, описываются уравнениями магнитной гидродинамики [47]

$$\frac{\partial H_\perp}{\partial t} = H_0 U(t) \frac{\partial v_\perp}{\partial z}, \quad (5.15)$$

$$\frac{\partial v_\perp}{\partial t} = \frac{H_0 U(t)}{4\pi N_0 W^2(z)} \frac{\partial H_\perp}{\partial z}. \quad (5.16)$$

Вводя нормированные переменные

$$v = \frac{v_{\perp}}{v_A}, \quad b = \frac{H_{\perp}}{H_0}, \quad (5.17)$$

где  $v_A = H_0/\sqrt{4\pi N_0}$  — альфвеновская скорость, и выбирая производящую функцию  $\psi(z, t)$  так, что

$$b = \frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad v = \frac{1}{v_A U(t)} \frac{\partial\psi}{\partial t}, \quad (5.18)$$

мы сведем систему (5.15), (5.16) к одному уравнению [48]

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \frac{W^2(z)}{v_A^2 U^2(t)} \left( \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \frac{U_t}{U} \frac{\partial\psi}{\partial t} \right) = 0. \quad (5.19)$$

Использование новой переменной

$$\tau = \int_0^t U(t') dt' \quad (5.20)$$

позволяет исключить неизвестные временные изменения магнитного поля  $U(t)$  из уравнения (5.19):

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \frac{W^2(z)}{v_A^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial \tau^2} = 0. \quad (5.21)$$

Следует отметить сходство уравнений (5.21) и (5.3). Рассматривая еще раз профиль плотности плазмы (5.2) и продолжая эту аналогию, можно представить решение (5.21) в форме

$$\psi = \sqrt{W(z)} \exp [i(q\eta - \omega\tau)]. \quad (5.22)$$

Переменная  $\eta$  определена в (5.4), волновое число  $q$  зависит от параметра неоднородности  $p$  (5.6):

$$q = \frac{\omega}{v_A} \sqrt{1 - \frac{(pv_A)^2}{\omega^2}}. \quad (5.23)$$

Подстановка (5.22) в (5.18) приводит к явным выражениям для скорости плазмы  $v_{\perp}$  и поперечной компоненты магнитного поля  $H_{\perp}$  в альфвеновской волне, бегущей в неоднородном плазменном слое. В отличие от волн в однородной магнитоактивной плазме, обсуждаемая волна Альфвена характеризуется сильной дисперсией, зависящей от неоднородности.

Поскольку решение (5.22) не зависит от конкретной модели временной зависимости  $U(t)$ , это решение представляется достаточно общим. В частности, случай  $q = 0$  (5.23) соответствует распространению альфвеновского импульса произвольной формы в плазме (5.13) вдоль переменного во времени магнитного поля. Такой анализ может представлять интерес для задач как газовой, так и полупроводниковой плазмы.

## 5.2. Оптика нестационарных неоднородных слоев во временном представлении

Наряду с моделью пространственно-временных изменений диэлектрической проницаемости  $\varepsilon(z, t)$ , представленной в (5.1), интересно обсудить и факторизованное представление  $\varepsilon(z, t)$  в форме

$$\varepsilon(z, t) = n_0^2 \left[ 1 - \frac{t}{TF(z)} \right]^2. \quad (5.24)$$

Здесь  $T$  — масштаб времени,  $F(z)$  — произвольная функция. Модель (5.24) можно использовать для анализа временной задержки, характеризующей распространение электромагнитного импульса через неоднородный диэлектрический слой, меняющийся во времени.

Чтобы рассчитать времена задержки, рассмотрим характеристики волнового уравнения с диэлектрической функцией  $\varepsilon(z, t)$ , определенной в (5.24). Уравнения, определяющие эти кривые при положительном наклоне на  $(z, t)$ -плоскости, имеют вид

$$\frac{dt}{dz} = \frac{1}{v_0} \left[ 1 - \frac{t}{TF(z)} \right]. \quad (5.25)$$

Это уравнение решается при умножении на интегрирующий множитель  $\theta(z)$  [51]:

$$v_0 \left[ \frac{d(t\theta)}{dz} - t \frac{d\theta}{dz} \right] = \theta - \frac{t\theta}{TF(z)}. \quad (5.26)$$

Приравнявая в (5.26) члены, содержащие множитель  $t$ , можно найти функцию

$$\theta = \exp \left( \frac{1}{v_0 T} \int_0^z \frac{dz'}{F(z')} \right). \quad (5.27)$$

Остающиеся слагаемые в (5.26) определяют характеристики, проходящие через точку  $(0, t_0)$  на плоскости  $(z, t)$ :

$$v_0(t\theta - t_0) = \int_0^z \theta(z') dz'. \quad (5.28)$$

Выше отмечалось, что уравнение характеристик (5.28) справедливо при произвольном пространственном профиле  $F(z)$  внутри слоя. Чтобы дать пример аналитического расчета времени распространения, рассмотрим простейший профиль диэлектрической проницаемости  $F(z) = 1 + z/L$ ; здесь  $L$  — некоторый масштаб пространственной неоднородности. Применение уравнений (5.27) и (5.28) приводит к простым выражениям для времени распространения  $t_{\sim}$  через слой толщины  $d$ :

$$\frac{t_{\sim}}{T} = \frac{t_0}{T\theta(d)} + \frac{q}{q+1} \left[ 1 + \frac{d}{L} - \frac{1}{\theta(d)} \right], \quad (5.29)$$

$$\theta(d) = \left( 1 + \frac{d}{L} \right)^q, \quad q = \frac{L}{v_0 T}.$$

Результат (5.29) имеет смысл в предположении  $t_{\sim} < T$ ,  $t_0 < T$ .

Целесообразно проверить формулу (5.29), переходя к пределу, соответствующему нестационарному слою с исчезающей пространственной неоднородностью ( $L \rightarrow \infty$ ,  $F \rightarrow 1$ ) при той же толщине  $d$ . В этом случае предел функции  $\theta(d)$  равен

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \theta(d) = \exp(a), \quad a = \frac{d}{v_0 T}, \quad (5.30)$$

и уравнение (5.29) приводит к выражению

$$\frac{t_{\sim}}{T} = 1 + \left( \frac{t_0}{T} - 1 \right) \exp(-a). \quad (5.31)$$

С другой стороны, можно предположить с самого начала, что слой пространственно однороден, и, таким

образом, модель (5.24) сводится к  $\varepsilon = n_0^2(1 - t/T)^2$ . Расчет времени распространения  $t_{\sim}$  при помощи волнового уравнения с такой моделью  $\varepsilon(t)$  приводит вновь к результату (5.31).

### 5.3. Генерация фотонов

#### в нестационарных диэлектриках

Выше было показано, что взаимодействие бегущей ЭМ волны с нестационарным диэлектриком приводит к спектральному уширению волнового поля, так что можно говорить о генерации новых гармоник. Похожий эффект будет обсуждаться ниже для собственных мод в резонаторе, заполненном диэлектриком с изменяющейся во времени  $\varepsilon(t)$ . Такие изменения могут быть вызваны, например, нелинейной модуляцией диэлектрической проницаемости среды волной накачки [52]. Другая возможность таких изменений связана с использованием резонатора с подвижными хорошо отражающими стенками [53]. Интересная ситуация, обусловленная зеркалом, движущимся в полости, связана с резонансным возмущением, возникающим при колебаниях зеркала с периодом одной из собственных частот резонатора. В этом случае поле в резонаторе сильно связано с движущимся зеркалом. В частности, можно ожидать генерацию мод в микроволновом резонаторе при колебаниях зеркала с гиперзвуковыми частотами, если амплитуды таких колебаний достаточно велики [54].

Рассмотрим механизм генерации собственных мод, пользуясь факторизованным представлением диэлектрической проницаемости (5.1). Вектор-потенциал  $\mathbf{A}$  и электрическую индукцию  $\mathbf{D}$  для  $n$ -й моды также можно записать в факторизованном виде:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{g}(\mathbf{r}) u(t), \quad \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{g}(\mathbf{r}) v(t). \quad (5.32)$$

Предположим, что функция  $g(r)$  удовлетворяет уравнению [12]

$$\text{rot rot } \mathbf{g} = \frac{\omega_n^2}{c^2} \varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{g}. \quad (5.33)$$

Здесь  $\omega_n$  — частота  $n$ -й моды, определенная, например, для прямоугольного резонатора в (2.1). Решения уравнения (5.33) следует выбрать в виде действительных вектор-функций, удовлетворяющих условию ортогональности

$$\int \varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{g}_n(\mathbf{r}) \mathbf{g}_m(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \delta_{nm}. \quad (5.34)$$

Выражая из (3.40) компоненты поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  через вектор-потенциал  $\mathbf{A}$  и пользуясь уравнениями Максвелла, мы получим обыкновенные дифференциальные уравнения для зависящих от времени множителей в выражениях для вектор-потенциала  $\mathbf{A}$  и электрической индукции  $\mathbf{D}$ :

$$\frac{du}{dt} = -\frac{cv}{u^2(t)}, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{u\omega_n^2}{c}. \quad (5.35)$$

Систему (5.35) можно заменить одним дифференциальным уравнением второго порядка

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{\omega_n^2 v}{u^2(t)} = 0. \quad (5.36)$$

Уравнение (5.36) напоминает уравнение движения осциллятора с частотой, зависящей от времени. Такие осцилляторы хорошо известны в классической [55] и в квантовой [18] механике. Рассмотрим как первый пример случай параметрического возбуждения, когда свойства среды осциллируют гармонически с частотой  $\Omega$ , равной удвоенной частоте  $n$ -й моды  $\Omega = 2\omega_n$ ; такой режим можно создать, например, изменяя плотность среды под действием мощной внешней монохроматической волны накачки, бегущей в поперечном направлении. Представляя величину  $u^{-2}(t)$  в (5.36) как сумму

$$u^{-2}(t) = 1 + \kappa \cos(2\omega_n t), \quad |\kappa| \ll 1, \quad (5.37)$$

и пользуясь теорией параметрической генерации [55], можно искать решение (5.36) в виде

$$v(t) = \mu(t) \exp(-i\omega_n t) + \nu(t) \exp(i\omega_n t); \quad (5.38)$$

здесь  $\mu(t)$  и  $\nu(t)$  — медленно меняющиеся амплитуды, зависящие от времени. Подставляя (5.38) и (5.37) в (5.36), пренебрегая производными второго порядка от медленно меняющихся амплитуд и выполняя усреднение по быстрым колебаниям с частотой  $\omega_n$ , мы получим пару уравнений

$$\frac{d\mu}{dt} = -\frac{i\omega_n \kappa \nu}{4}, \quad \frac{d\nu}{dt} = \frac{i\omega_n \kappa \mu}{4}, \quad (5.39)$$

решения которых есть

$$\mu(t) = \cosh\left(\frac{\omega_n \kappa t}{4}\right), \quad \nu(t) = i \sinh\left(\frac{\omega_n \kappa t}{4}\right). \quad (5.40)$$

Если  $n$ -я собственная мода не была возбуждена в начальный момент  $t = 0$ , то количество фотонов, соответствующих этой моде, в некоторый момент  $t$  составит [12]

$$|v(t)|^2 = \sinh^2\left(\frac{\omega_n \kappa t}{4}\right); \quad (5.41)$$

при больших значениях параметра  $\omega_n \kappa t \gg 4$  эта величина возрастает со временем по экспоненте. Для реального резонатора с конечной добротностью  $Q$  формула (5.41) имеет смысл для времен  $t$ , меньших, чем время установления колебаний  $t_c = Q/\omega_n$ . Даже при таких больших значениях  $Q$ , как  $10^7$  и величине параметра связи  $\kappa \sim 10^{-4} - 10^{-5}$  количество фотонов, определяемое формулой (5.41), трудно зарегистрировать в эксперименте.

Модификация такой схемы колеблющегося резонатора связана с ускоренным движением диэлектрика, когда, например, полость, образованная двумя параллельными идеально отражающими плоскостями, остается неподвижной, а диэлектрический слой, расположенный между этими плоскостями, быстро выдвигается. Расчет [53] показывает, что такое движение будет сопровождаться генерацией фотонов.

## 6. Электродинамика сред с зависящим от времени поглощением

При обсуждении волновых явлений в средах с быстро меняющимися диэлектрическими параметрами в предыдущих разделах пренебрегалось эффектами поглоще-

ния. Предполагалось, что диссипативные искажения ЭМ поля развиваются медленнее, чем процессы, вызванные нестационарностью. При этом не зависящее от времени поглощение нетрудно исследовать в рамках модели (3.12), заменяя  $U(t)$  на сумму  $U(t) + Y$ , где  $Y = \text{const}$ . В отличие от этого, здесь исследуются некоторые волновые процессы, характеризующиеся временной зависимостью сопротивления или поглощения.

Один из первых изученных процессов такого рода был связан с динамикой молнии. Зависящее от времени сопротивление в канале молнии на единицу длины, возрастающее при ионизации воздуха, моделировалось в [56] зависимостью  $R(t) \sim \exp(t/t_0) - 1$  при  $t_0$  порядка микросекунд. Похожие эффекты обсуждались и в наносекундном диапазоне для искровых разрядов в лабораторных высоковольтных установках [57].

Другое проявление нестационарной проводимости связано с кросс-модуляцией радиоволн в столкновительной плазме ионосферы [47]. Нагрев электронов мощной волной приводит к периодической модуляции электронной температуры и соответственно зависящей от температуры частоты столкновений электронов с молекулами. Эти колебания вызывают температурные изменения проводимости плазмы и, таким образом, приводят к модуляции поглощения другой, пробной волны, распространяющейся в возмущенной области. Характерные времена модуляции поглощения при таком тепловом эффекте, как известно, значительно превосходят время столкновений между электронами и тяжелыми частицами [47].

Временные изменения поглощения в оптических системах могут развиваться гораздо быстрее. Такие эффекты иллюстрируются ниже на примере оптических фильтров с насыщающимся поглощением (раздел 6.1) и перестройкой отражательной способности некоторых полупроводников с помощью теплового изменения поглощения (раздел 6.2). Некоторые задачи, связанные с телеграфным уравнением с нестационарной проводимостью, обсуждаются в разделе 6.3.

### 6.1. Насыщение поглощения

Процессы отражения и преломления в слое с нестационарным поглощением привлекают внимание при создании волновых фильтров с насыщением поглощения. Такие фильтры можно исследовать при соответствующем обобщении модели (3.12)  $\varepsilon(t) = n_0^2 U_1^2(t)$ :

$$U_1(t) = \begin{cases} 1 + i\rho_0 \left( 1 \mp \frac{t}{T_1} \pm \frac{t^2}{T_2^2} \right), & 0 \leq t \leq t_m, \\ 1 + i\rho_m, & \rho_m = \rho_0(1 \mp y^2), \quad t \geq t_m, \quad y = \frac{T_2}{2T_1}. \end{cases} \quad (6.1)$$

Мнимая часть нормированного комплексного показателя преломления  $U_1(t)$  меняется от начального значения до экстремального значения за время насыщения  $t_m$ . Такое насыщение поглощения можно рассматривать как результат взаимодействия пробного пучка с пучком накачки, когда нелинейное поглощение волны накачки приводит к переходу молекул на новый уровень, обеспечивающий поглощение пробной волны. Время  $t_m$ , зависящее от мощности волны накачки и кинетики перехода, может составлять всего несколько пикосекунд или может даже стать сравнимым со временем нараста-

ния фронта импульса накачки. Чтобы выделить роль этих эффектов, обусловленных насыщением поглощения, ниже предполагается, что действительная часть  $U_1(t)$  сохраняет постоянное значение.

Решение уравнения (3.6) легко модифицируется при новом представлении  $U_1$  (6.1). Подстановка (6.1) в (3.3) дает волновое число  $q$ ; так, в случае роста поглощения значение  $q$  составляет

$$q = \frac{\omega n_0}{c} N, \quad N = \sqrt{1 - \frac{\rho_0^2}{4\omega^2 T_1^2} + i\rho_0 \left( 1 - \frac{1}{\omega^2 T_2^2} \right)}. \quad (6.2)$$

Решение уравнения (3.6) в интервале  $0 \leq t \leq t_m$  можно записать в виде бегущей волны (3.16)

$$\psi = \sqrt{U_1} \exp[i(qz - \omega t)],$$

зависящей от волнового числа  $q$  (6.2) и переменной  $\tau$ :

$$\frac{\tau}{T_2} = -\frac{i}{2S\sqrt{\rho_0}} \ln \left( \frac{1 + t/t_-}{1 - t/t_+} \right), \quad t_{\pm} = ST_2 \pm t_m, \quad (6.3)$$

$$S = \sqrt{\rho_0(1 + y^2) - 1}, \quad y = \frac{T_2}{2T_1}.$$

Целесообразно отметить некоторые особенности такой бегущей волны.

A. Распространение волны характеризуется дисперсией, описываемой комплексным параметром  $N$  (6.2) и зависящей от времен релаксации переменного поглощения.

B. Значение  $\text{Im} N$  определяет пространственный масштаб экспоненциального затухания волнового поля. При убывании поглощения мнимая часть выражения для  $N$  заменяется на  $i\rho_0[1 - (\omega T_2)^{-2}]$ . Из-за дисперсии, вызванной убывающим поглощением, затухание исчезает при частоте  $\omega = T_2^{-1}$ , параметр  $N$  в этом случае имеет действительное значение:  $N = \sqrt{1 - y^2}$ .

C. В предельном случае исчезающего поглощения волновое число  $q$  и переменная  $\tau$  стремятся к значениям  $q = \omega n_0/c$  и  $\tau = t$ , соответствующим бегущей волне в стационарной среде.

Действуя по схеме, развитой в разделе 3.1 для консервативной среды, можно найти коэффициенты отражения и пропускания и для обсуждаемой среды. Насыщение поглощения приводит к изменению коэффициента отражения  $R$ , например, для нормального падения от начального значения  $R_1$  до значения  $R_2$ :

$$R_1 = \frac{1 - n_0(1 + i\rho_0)}{1 + n_0(1 + i\rho_0)}, \quad R_2 = \frac{1 - n_0(a + ib)}{1 + n_0(a + ib)}, \quad (6.4)$$

$$a, b = \sqrt{\sqrt{1 + \rho_0^2(1 + y^2)^2} \pm 1}.$$

Выводить сложные выражения для модуля  $|R_2|^2$  и фазы  $\varphi_2$  нет смысла, так как расчет этих величин на компьютере легко программируется.

В зависимости от режима насыщения затухания (6.1) это насыщение может привести как к росту, так и к падению отражения. Так, рассматривая среду с  $n_0 = 1,7$ ,  $\rho_0 = 1$ , можно найти из (6.4), что коэффициент отражения по мощности  $|R_1|^2$  перед началом процесса насыщения

составляет  $|R_1|^2 = 0,33$ . Насыщение при  $y = 1$  приводит к падению отражения:

$$|R_2|^2 = 0,27 < |R_1|^2,$$

а в случае  $\rho_m = 25\rho_0$  ( $y = 4,9$ ) коэффициент отражения возрастает:

$$|R_2|^2 = 0,72 > |R_1|^2.$$

Режим ослабленного пропускания (коэффициент пропускания  $|T_2|^2 = 1 - |R_2|^2 = 0,28$  уменьшается по сравнению с начальным значением  $|T_1|^2 = 0,67$ ) указывает на эффект насыщения поглощения. Немонотонные изменения  $|R_2|^2$ , сопровождающие рост поглощения, могут стать еще более сложными, если принять во внимание изменения действительной части  $U_1(t)$ . Такое же рассмотрение остается в силе и при ослаблении поглощения, и в случае усиливающей среды.

## 6.2. Тепловая модуляция отражательной способности полупроводников

Этот раздел посвящен тепловой перестройке отражательной способности некоторых полупроводников со свободными носителями, принадлежащими к группе  $A^{III}B^V$ , например, InP, InSb или GaAs. Хорошо известный метод такой перестройки основан на модуляции плотности свободных носителей в полупроводниковой плазме, вызванной мощным лазерным излучением, приводящим к переходу электронов в зону проводимости. В отличие от этого, тепловая модуляция проводимости, связанная с джоулевым нагревом носителей в столкновительной плазме полупроводников, не требует генерации новых носителей, так как основана на изменении их частоты столкновений; при этом расход энергии на такой процесс значительно меньше.

Возмущения диэлектрических параметров полупроводников, обусловленные тепловыми возмущениями частоты столкновений носителей, обычно невелики. Однако такие возмущения могут быть значительно усилены при специальном выборе параметров процесса кросс-модуляции, когда плазменная частота  $\Omega_p$ , частота отраженной волны  $\omega$  и частота столкновений  $\nu$  удовлетворяют условию

$$\Omega_p \approx \omega \approx \nu. \quad (6.5)$$

Если это условие выполнено, то и действительная, и мнимая части диэлектрической проницаемости:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \varepsilon &= \varepsilon_L \left[ 1 - \frac{\Omega_p^2}{\omega^2 + \nu^2(T_e)} \right], \\ \operatorname{Im} \varepsilon &= \frac{\nu(T_e) \varepsilon_L \Omega_p^2}{\omega [\omega^2 + \nu^2(T_e)]}, \end{aligned} \quad (6.6)$$

могут быть глубоко промодулированы при тепловых возмущениях  $\nu(T_e)$ ; здесь  $T_e$  — температура носителей,  $\varepsilon_L$  — статическое значение диэлектрической проницаемости,  $\Omega_p^2 = 4\pi e^2 N / (m^* \varepsilon_L)$ ; для простоты здесь рассматривается лишь один тип носителей (например, электроны с эффективной массой  $m^*$  и плотностью  $N$ ). Коэффициент отражения для волн, падающих нормально на поверхность среды (6.6), можно записать в виде

$$R = \frac{1-n}{1+n}, \quad n = \sqrt{\operatorname{Re} \varepsilon + i \operatorname{Im} \varepsilon}. \quad (6.7)$$

Чтобы оптимизировать режим перестройки отражения, контролируемый формулами (6.6), надо учесть следующие обстоятельства.

А. Различные физические механизмы рассеяния носителей, взаимодействующих с кристаллической решеткой полупроводника, характеризуются разными зависимостями  $\nu(T_e)$ . Интересно рассмотреть условия, когда рассеяние на ионизованных примесях преобладает над другими механизмами рассеяния, так как рассеяние на ионизованных примесях отличается сильной температурной зависимостью [58]

$$\nu(T_e) = \nu_0 f^{-3/2}. \quad (6.8)$$

Здесь  $f$  — нормализованная температура носителей  $T_e$  ( $f = T_e/T_{e0}$ ),  $T_{e0}$  и  $\nu_0$  — невозмущенные значения параметров  $T_e$  и  $\nu$ . Такая ситуация возникает, например, в InAs n-типа в низкотемпературном интервале  $10 \text{ K} < T_e < 120 \text{ K}$  [59].

В. Чтобы показать возможности теплового контроля волновых пучков в условиях (6.5), рассмотрим отражение миллиметрового излучения с длиной волны  $\lambda = 3 \text{ мм}$ , соответствующего атмосферному окну прозрачности, от пластинки InAs. Пользуясь значениями соответствующих параметров [60]  $\varepsilon_L = 12,2$ ,  $m^* = 0,07m$ ,  $\nu_0 = 2,5 \times 10^{12} \text{ рад с}^{-1}$ ,  $N = 3 \times 10^{14} \text{ см}^{-3}$  и рассматривая нагрев электронов от  $T_{e0} = 40 \text{ K}$  до  $T_e = 110 \text{ K}$  ( $f = 2,75$ ), можно найти коэффициенты отражения по мощности для невозмущенной ( $f = 1$ ,  $|R|^2 = |R_1|^2$ ) и возмущенной ( $f = 2,75$ ,  $|R|^2 = |R_2|^2$ ) проводимостей:  $|R_1|^2 = 0,3$ ,  $|R_2|^2 = 0,6$ . Итак, даже умеренный нагрев может привести к усилению отражения вдвое.

С. Время установления электронной температуры в обсуждаемых условиях составляет около  $t_c \approx 10 \text{ пс}$  [62]; таким образом, интенсивность отраженной волны может быть удвоена за время, близкое к ее периоду.

Этот пример позволяет отметить проблему поиска материалов, характеризующихся подходящими значениями параметров  $N$  и  $T_{e0}$ , обеспечивающими быструю электрооптическую модуляцию отражения в спектральном диапазоне между микроволновым и дальним ИК излучением и, в частности, в важном для приложений субмиллиметровом диапазоне.

## 6.3. Телеграфное уравнение для линии связи с нестационарными потерями

Насыщение поглощения при кросс-модуляции ЭМ волн, обсуждавшееся в разделе 6.1, соответствует случаю, когда и действительная, и мнимая части диэлектрической проницаемости (6.6) зависят от параметров поглощения. В отличие от этого здесь рассматривается другая модель среды с зависящей от времени проводимостью, описывающая ряд физически интересных ситуаций. Хорошо известная задача, приводящая к этой модели, связана с распространением ЭМ волны в линии передачи с потерями, описываемой уравнениями (4.28). Чтобы выделить эффекты, обусловленные нестационарным поглощением, рассмотрим, например, рост токов утечки, связанный с нарастающим пробоем в линии. При этом предполагается, что параметр  $G$  в (4.28), характеризующий токи утечки, зависит от времени:

$$G = G_0 P(t), \quad P \Big|_{t=0} = 1. \quad (6.9)$$

Для простоты ниже сопротивлением  $R$  пренебрегается.

Выражая напряжение и ток в линии через производящую функцию  $\psi$  (4.30), можно свести систему (4.28) к одному уравнению, формально совпадающему с телеграфным уравнением с переменной во времени проводимостью:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{v_0^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{P(t)}{v_0^2 T} \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad T = \frac{C}{G_0}. \quad (6.10)$$

Здесь  $C$  — емкость на единицу длины; скорость  $v_0$  определена в (4.31). Зависящий от времени коэффициент  $P(t)$  в правой части (6.10) является неизвестной функцией времени. Чтобы определить такую функцию, допускающую точное решение уравнения (6.10), будем искать решение в виде

$$\psi = F \exp \left[ - \int_0^t \alpha(t') dt' \right]. \quad (6.11)$$

Подстановка представления (6.11) в телеграфное уравнение (6.10) приводит к уравнению, определяющему функцию  $F$ :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{1}{v_0^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{1}{v_0^2} \left( MF + B \frac{\partial F}{\partial t} \right), \quad (6.12)$$

$$M = \alpha^2 - \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \frac{\alpha P}{T}, \quad B = \frac{P}{T} - 2\alpha.$$

Вводя дополнительные условия

$$M = 0, \quad B = \text{const} = \frac{1}{t_0}, \quad (6.13)$$

можно свести (6.12) к стандартной форме телеграфного уравнения с постоянными коэффициентами:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{1}{v_0^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{1}{v_0^2 t_0} \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (6.14)$$

Значение параметра  $t_0$ , имеющего размерность времени, будет установлено ниже.

Теперь будем искать временную зависимость потерь утечки  $P(t)$  и функцию  $\alpha(t)$  из уравнений (6.12). Выражая функцию  $\alpha(t)$  из (6.12):

$$\alpha = \frac{1}{2t_0} (\gamma P - 1), \quad \gamma = \frac{t_0}{T}, \quad (6.15)$$

и подставляя выражение (6.15) в условие  $M = 0$  (6.12), получим уравнение, определяющее функцию  $P(t)$ :

$$2t_0 \gamma \frac{\partial P}{\partial t} = 1 - \gamma^2 P^2. \quad (6.16)$$

Решение уравнения (6.16), удовлетворяющее условию  $P(0) = 1$ , можно записать в одной из следующих двух форм:

$$P_1 = \left[ \gamma \tanh \left( \text{artanh} \gamma^{-1} + \frac{t}{2t_0} \right) \right]^{-1}, \quad \gamma \geq 1, \quad (6.17)$$

$$P_2 = \gamma^{-1} \tanh \left( \text{artanh} \gamma + \frac{t}{2t_0} \right), \quad \gamma \leq 1, \quad (6.18)$$

$$P = 1, \quad \gamma = 1,$$

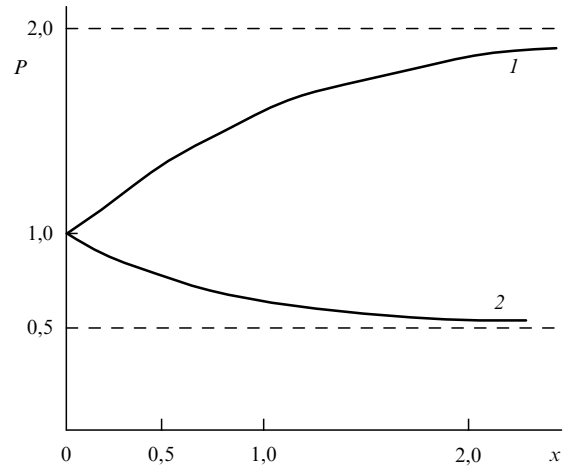


Рис. 6. Нормированная нестационарная проводимость  $P$  (6.17), (6.18) как функция времени,  $x = t/t_0$ . Кривые 1 и 2 соответствуют значениям  $\gamma = 0,5$  и  $\gamma = 2$ .

зависящих от отношения между временами  $t_0$  и  $T$ . В пределе  $t \gg 2t_0$  функции  $P_{1,2}$  достигают своих асимптотических значений  $\gamma^{-1}$ . Как видно из выражений (6.17), (6.18), масштаб времени  $t_0$  характеризует время релаксации насыщающихся потерь и асимптотическое значение параметра утечки  $G = 1/t_0$ . Рисунок 6, представляющий модели (6.17) и (6.18), показывает насыщение потерь, которые возрастают (убывают) со временем при  $\gamma > 1$  ( $\gamma < 1$ ).

Теперь можно построить функцию  $\psi$  (6.11), описывающую поле в нестационарном проводнике. Решение телеграфного уравнения (6.10) можно записать в виде затухающей волны:

$$F = \exp [i(qz - \omega t)], \quad q = \omega v^{-1} N, \quad N^2 = 1 + \frac{i}{\omega t_0}. \quad (6.19)$$

Подставляя значения  $P(t)$  из (6.17) и (6.18) и находя затем экспоненциальный множитель в выражении (6.11), получим, например, для быстрой релаксации ( $\gamma < 1$ )

$$\exp \left( - \int_0^t \alpha dt' \right) = \frac{\exp [t/(2t_0)]}{\sqrt{1 + \gamma^2}} \left[ \cosh \left( \text{artanh} \gamma + \frac{t}{2t_0} \right) \right]^{-1}. \quad (6.20)$$

Собирая результаты (6.19) и (6.20), мы приходим к простому решению нестационарного телеграфного уравнения (6.10)

$$\psi = 2\Delta^{-1} \exp [i(qz - \omega t)], \quad (6.21)$$

$$\Delta = 1 + \gamma + (1 - \gamma) \exp \left( - \frac{t}{t_0} \right).$$

Подстановка производящей функции  $\psi$  (6.21) в (4.30) приводит к простым выражениям для тока  $I$  и напряжения  $V$  в линии передачи с зависящими от времени потерями. Такое рассмотрение тривиально обобщается и на случай конечного сопротивления  $R$ .

Интересно отметить особый случай обсуждаемой модели, соответствующий значению  $B = 0$  в уравнениях (6.12). В этом случае уравнение (6.12) для функции  $F$

принимает форму волнового уравнения в свободном пространстве

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0. \quad (6.22)$$

Решением этого уравнения является произвольная дважды дифференцируемая функция  $F(t - z/v)$ . Функция  $P(t)$ , определенная из условий  $M = 0$ ,  $B = 0$ , убывает согласно формуле

$$P = \left(1 + \frac{t}{2T}\right)^{-1}. \quad (6.23)$$

Вычисляя экспоненциальный множитель в функции  $F$  (6.11) для модели (6.23), получим решение телеграфного уравнения, описывающего распространение импульса произвольной формы  $F$ :

$$\psi = \left(1 + \frac{t}{2T}\right) F\left(\frac{t - z/v}{t_0}\right).$$

Подстановка (6.21) в (4.30) позволяет найти огибающие тока и напряжения в электромагнитном импульсе, бегущем в нестационарной линии с убывающим параметром утечки  $G = G_0(1 + t/(2T))^{-1}$ .

Следует отметить, что развитый здесь анализ нестационарного телеграфного уравнения может быть полезен и для некоторых проблем в смежных областях физики. Так, в [61] было показано, что модель случайных блужданий с переменной скоростью  $v = v_0 U(t)$  сводится к уравнению (6.10), где  $P(t) = 1/U(t)$ ; при этом функция имеет смысл плотности вероятности. Если время изменения поля достаточно велико ( $tP(t) \gg T$ ), то уравнение (6.10) сводится к уравнению, описывающему квазистационарное поле

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{P(t)}{v^2 T} \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (6.24)$$

В этом случае замена временной переменной

$$\tau(t) = \int_0^t \frac{dt'}{P(t')} \quad (6.25)$$

преобразует уравнение (6.24) в обычное квазистационарное уравнение, описывающее, например, диффузию поля в пространстве  $(z, \tau)$  с коэффициентом диффузии  $v^2 T$ .

## 7. Заключение. Оптика негармонических волн во временной области

Укажем некоторые следствия из обсуждаемых результатов и отметим недостаточно разработанные проблемы. Выше рассматривались значительные искажения отраженных и преломленных волн, взаимодействующих с нестационарными средами; в частности, было показано, что такое взаимодействие может преобразовывать синусоидальные волны в несинусоидальные. Выполняя соответствующие обобщения законов преломления и отражения, можно говорить об оптике несинусоидальных волн.

Однако другие виды несинусоидальных волн могут возникать и в стационарной среде, и даже в пустом

пространстве благодаря связанным пространственно-временным деформациям дифрагированных импульсов. В последнее десятилетие успехи в генерации импульсов, содержащих всего несколько колебаний поля, с помощью широкополосных радаров при длительности импульса  $t_0$  порядка наносекунды [62], оптических приборов ТГц-диапазона ( $t_0 \sim 0,1 - 1$  пс) [63] и фемтосекундных оптических систем ( $t_0 \sim 5 - 10$  фс) [64] вызвали большой интерес в радиофизике и оптоэлектронике. При исследовании быстрого взаимодействия таких сигналов со сплошными средами следует учитывать пространственно-временную эволюцию сигналов на пути от источника к мишени; чтобы понять фундаментальное значение связи пространственных и временных деформаций импульса, целесообразно показать сначала, как развиваются эти процессы при параксиальном распространении трехмерного импульса в свободном пространстве (раздел 7.1). Гибкая модель огибающих, характеризуемых хорошо выраженным передним фронтом с конечным наклоном, произвольным числом негармонических колебаний и экспоненциально затухающим "хвостом", описана в разделе 7.2. Эффекты связи дифракции и дисперсии, включающие деформацию импульса, красный сдвиг частот и обращение поляризации для импульса, распространяющегося в диспергирующей среде, обсуждаются в разделе 7.3.

### 7.1. Пространственно-временная эволюция импульсов в свободном пространстве под действием дифракции

Взаимодействие между поперечными, продольными и временными искажениями локализованных импульсов, бегущих в направлении  $z$ , описывается параксиальным уравнением для электрического поля  $E(\mathbf{r}, z, t)$  [65]

$$\Delta_{\perp} E = \frac{2}{c} \frac{\partial^2 E}{\partial z \partial t'}, \quad \Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad t' = t - \frac{z}{c}. \quad (7.1)$$

Решение уравнения (7.1) в неразделенных переменных имеет вид

$$E(\mathbf{r}, z, t') = \frac{iL_R}{q} F\left(t' - \frac{r^2}{2cq}\right). \quad (7.2)$$

Здесь  $r^2 = x^2 + y^2$ ,  $q = z + iL_R$ ,  $L_R$  — дифракционная длина,

$$L_R = \frac{ka_0^2}{2}, \quad (7.3)$$

$k$  — волновое число,  $a_0$  — радиус наименьшего сечения параксиального пучка,  $F$  — произвольная функция. Дифракция пульсирующего пучка, возникающая из-за его конечных поперечных размеров, вызывает в процессе распространения изменения в форме импульса в осевой области, описываемые множителем  $iL_R/q$  в уравнении (7.2). Записывая этот множитель в форме

$$\frac{iL_R}{q} = \frac{\exp(i\varphi)}{\sqrt{1 + (z/L_R)^2}}, \quad \varphi = \arctan\left(\frac{z}{L_R}\right), \quad (7.4)$$

можно связать величину  $[1 + (z/L_R)^2]^{-0,5}$  с ослаблением амплитуды импульса; при этом фаза  $\varphi$  определяет эволюцию формы импульса: выражение (7.2), действительное при  $z = 0$ , становится мнимым на больших



расстояниях  $z \gg L_R$ . Параметр  $\varphi$  в (7.4) известен как фазовый сдвиг Гоу, принимающий значения от  $-0,5\pi$  до  $+0,5\pi$ . Независимо от выбора функции  $F$  связь ее пространственных и временных изменений обусловлена комплексным сдвигом во времени, зависящим от координат  $r^2/(2cq)$ . Действительная часть этого сдвига

$$t_s = -\frac{zr^2}{2c|q|^2} \quad (7.5)$$

является временем прихода импульса для каждой плоскости  $z$ . Этот сдвиг связан с параксиальным сферическим фронтом радиуса  $R(z)$ :

$$R(z) = \frac{|q|^2}{2} = z \left[ 1 + \left( \frac{L_R}{z} \right)^2 \right]. \quad (7.6)$$

Мнимая часть этого временного сдвига  $iL_R r^2/(2c|q|^2)$  определяет пространственное распределение ослабления импульса.

Рассмотрим эффекты пространственно-временной связи, выбирая функцию  $F$ , соответствующую трехмерному пульсирующему волновому пучку, содержащему несколько колебаний поля и описываемому так называемым импульсом со спектром Пуассона [66]:

$$F = \text{Re } f(t), \quad f(t) = \left( 1 - \frac{it'}{t_0} \right)^{-m}. \quad (7.7)$$

Здесь  $t_0$  и целое число  $m \geq 1$  — свободные параметры;  $t' = t - z/c$  — временное запаздывание для точек на оси  $z$  ( $x = 0, y = 0$ ). Представление такой огибающей, показанной на рис. 7, с помощью неразделенных переменных является полезным аналитическим приемом для исследования связанных деформаций локализованных полей с криволинейными фронтами, вызванных дифракцией и дисперсией.

Можно отметить некоторые важные свойства импульсов с пуассоновским спектром.

А. Эта гибкая модель пригодна для представления импульсов любой длительности, содержащих произвольное число колебаний.

В. Ширина импульса на уровне  $1/e$ , равная

$$T = t_0 \sqrt{\exp\left(\frac{2}{m}\right) - 1}, \quad (7.8)$$

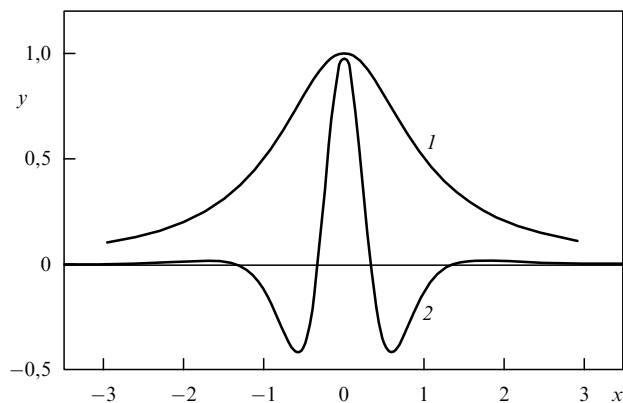


Рис. 7. Импульсы с пуассоновским спектром (7.7) при значениях параметра  $m = 1$  (кривая 1) и  $m = 2$  (кривая 2);  $x = t/t_0$  — нормированное время.

описывает большое семейство импульсов: значение  $m = 1$  связано с единичным максимумом  $F$ , а большие значения параметра  $m$  соответствуют возрастающему числу колебаний с почти постоянной частотой  $\omega = m/t_0$  в центральной части импульса. Предел  $m \gg 1$  приводит к модулированному гауссову импульсу

$$F = \exp\left(-\frac{t^2}{T^2}\right) \cos(\omega t).$$

С. Для анализа динамики трехмерной структуры импульсов (7.7) следует заменить время запаздывания  $t'$  на "сдвинутое" время  $t' - r^2/(2cR)$ , где  $R$  и  $r$  — радиусы кривизны волнового фронта (7.6) и расстояние от оси пучка до наблюдаемой точки волнового фронта соответственно.

Чтобы исследовать формирование пространственно-временной структуры импульса (7.7) в процессе его распространения, можно переписать решение (7.2), сделав вышеупомянутую замену  $t' \rightarrow t' - r^2/(2cR)$ :

$$E(\mathbf{r}, z, t') = \frac{iL_R}{q} \left[ \frac{it_0}{t' - r^2/(2cR) + i(t_0 + r^2 L_R/(2c|q|^2))} \right]^m. \quad (7.9)$$

Согласно определению (7.7) следует использовать действительную часть (7.9).

Решение (7.9) выявляет ряд пространственно-временных искажений начального импульса.

1. Ширина импульса на уровне  $1/e$  возрастает по сравнению с (7.8):

$$T = t_0 \left( 1 + \frac{r^2 L_R}{2c|q|^2} \right) \sqrt{\exp\left(\frac{2}{m}\right) - 1}. \quad (7.10)$$

2. Частота колебаний сдвигается в красную сторону:

$$\omega_m = m \left( t_0 + \frac{r^2 L_R}{2c|q|^2} \right)^{-1}. \quad (7.11)$$

3. Фактор Гоу  $iL_R/q$  описывает временные искажения импульса, включая изменение его поляризации при распространении от  $z \ll -L_R$  к  $z \gg L_R$  (рис. 8).

Эти деформации наблюдались в экспериментах по дифракции ультракоротких импульсов [67].

## 7.2. Моделирование негармонических импульсов с помощью функций Лагерра

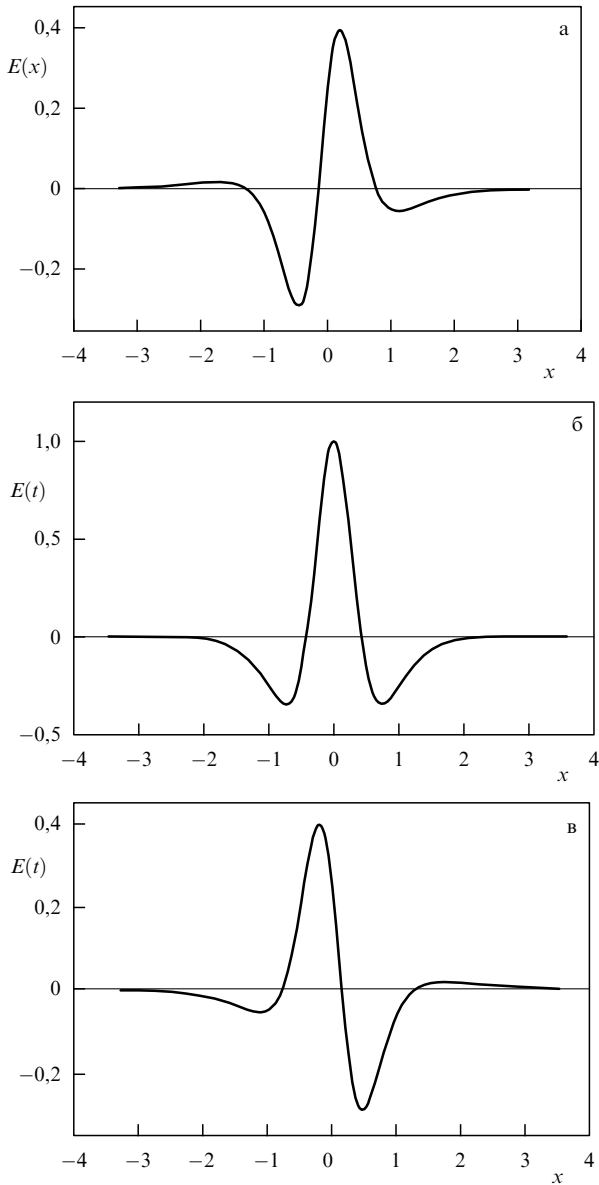
Эффекты пространственно-временной деформации импульсов в свободном пространстве рассматривались выше с помощью простой модели импульсов с пуассоновским спектром. Однако динамика такой деформации зависит от формы импульса, которая может существенно отличаться от традиционных моделей квазимонохроматических сигналов с прямоугольными или гауссовыми огибающими:

а) ультракороткий импульс содержит всего несколько колебаний поля, форма которых обычно далека от синусоидальной;

б) передний и задний фронты импульса несимметричны;

с) расстояния между нулями огибающей неравны.

Гибкие модели огибающих плоских волн, имеющих свойства а)–с), можно представить рядами функций



**Рис. 8.** Деформация импульса с пуассоновским спектром (7.7) при  $m = 4$  и обращение его полярности на оси пучка при распространении от  $z = -2L_R$  (а) через точку  $z = 0$  (б) и далее до  $z = 2L_R$  (в).

Лагерра  $L_n(t')$ , определенных в интервале  $0 \leq t < \infty$  [32]:

$$F(t') = \sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n(t'). \tag{7.12}$$

Функции Лагерра

$$L_n(x) = \frac{\exp(x/2)}{n!} \frac{d^n}{dx^n} [x^n \exp(-x)], \tag{7.13}$$

как известно, ортонормированы в интервале  $0 \leq x < \infty$ :

$$\int_0^{\infty} L_n(x) L_m(x) dx = \delta_{nm}. \tag{7.14}$$

Поведение функций  $L_n$  вблизи переднего края импульса  $x \rightarrow 0$  (рис. 9а):

$$L_n(0) = 1, \quad \left. \frac{\partial L_n(x)}{\partial x} \right|_{x=0} = -\left(n + \frac{1}{2}\right), \tag{7.15}$$

показывает, что ни одна из функций  $L_n$  не может сама представить сигнал с нулевой начальной точкой. Однако такой сигнал можно представить линейной комбинацией (7.12), удовлетворяющей условию

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1. \tag{7.16}$$

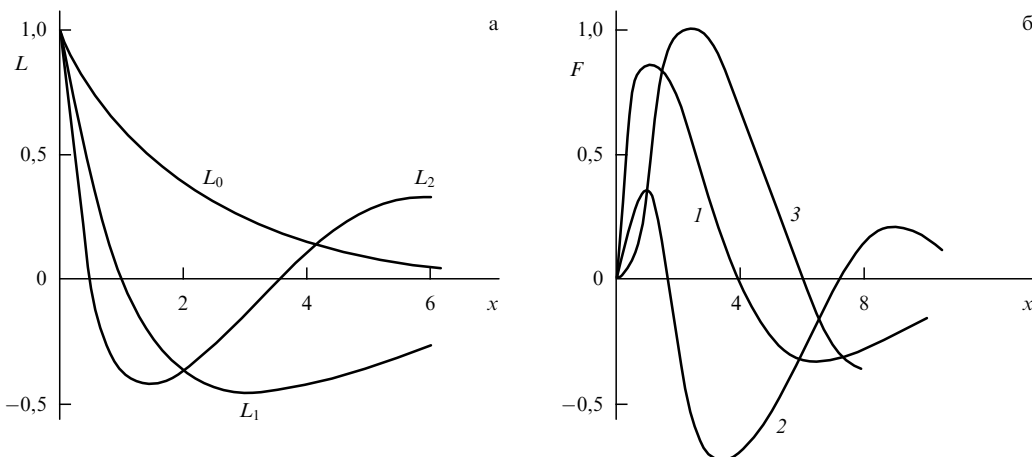
Простейший пример обсуждаемой огибающей, заданный выражением (7.12)

$$F_m(t') = B[L_m(t') - L_{m+2}(t')], \tag{7.17}$$

иллюстрируется на рис. 9б для случая  $m = 0$ ,  $a_0 = 1$ ,  $a_2 = -1$ ; остальные коэффициенты в (7.12) равны нулю. Чтобы сравнить огибающие (7.17) для различных значений параметра  $m$ , такие огибающие, соответствующие значениям  $m = 0, 1, 2$ , также показаны на рис. 9б.

Огибающие (7.17) имеют ряд свойств, удобных для моделирования импульсов, содержащих одно или несколько колебаний.

1. В отличие от гауссовых или пуассоновских импульсов, простирающихся от  $-\infty$  до  $+\infty$ , огибающие  $F_m$  (7.17) имеют хорошо выраженный передний фронт вблизи точки  $t = 0$  и контролируемый наклон в этой



**Рис. 9.** (а) Огибающие Лагерра  $L_0(x)$ ,  $L_1(x)$  и  $L_2(x)$ ; (б) кривые 1, 2 и 3 соответствуют огибающим  $F_0$ ,  $F_1$  и  $F_2$  (7.17);  $x = t/t_0$ .

области:

$$F_m(0) = 0, \quad \left. \frac{\partial F_m}{\partial t'} \right|_{t'=0} = \frac{2B}{t_0}. \quad (7.18)$$

2. Огибающие  $F_m$  могут содержать произвольное количество негармонических колебаний. Временная структура огибающей  $F_m$  имеет  $m + 2$  точек пересечения нуля, разделенных неравными промежутками,  $m + 2$  различных экстремумов и экспоненциально затухающий "хвост".

3. Огибающие  $F_m$  обладают интегральным свойством

$$\int_0^\infty F_m(x) dx = 0. \quad (7.19)$$

До сих пор обсуждались плоские волны. Однако, пользуясь процедурой, примененной в разделе 7.1 для импульсов с пуассоновским спектром, можно построить трехмерное решение уравнения (7.1), соответствующее лаггерровским огибающим  $F_m$ , в виде неразделяющегося решения (7.2):

$$E(\mathbf{r}, z, t) = \frac{iL_R}{q} F_m(u), \quad u = \frac{t' - r^2/(2cq)}{t_0}. \quad (7.20)$$

После этого все тенденции пространственно-временной эволюции импульсов в свободном пространстве, представленные в разделе 7.1 для модели импульса со спектром Пуассона, могут быть выявлены и для огибающих  $F_m$ ; однако анализ  $F_m$  требует более долгих вычислений.

Тенденции формирования негармонических волн обсуждались выше в рамках модели однородной среды без дисперсии. Однако проявление тех же тенденций в диспергирующей среде приводит к обогащению этого процесса новыми эффектами.

### 7.3. Нестационарные волны в стационарных средах

Динамика негармонических импульсов с криволинейными фазовыми фронтами в диспергирующих средах зависит от конкуренции дифракционных и дисперсионных возмущений. Математические основы анализа дисперсионных эффектов в паракиальных бесселевых волновых пучках и пучках гауссовых импульсов были разработаны в [68, 69]. Во избежание долгих математических выкладок, приведенных в этих работах, рассмотрим качественно физические основы таких процессов. Наиболее важные явления пространственно-временной связи, возникающие при конкуренции эффектов дисперсии и дифракции, связаны с кривизной волнового фронта. В ходе распространения более низкие частоты, дифрагирующие на большие углы и поэтому движущиеся с меньшей горизонтальной скоростью, отстают от более высоких частот, дифрагирующих на меньшие углы. С другой стороны, в среде с дисперсией имеется дополнительная кривизна фронта импульса, возникающая из-за разницы групповых скоростей между приосевой частью импульса и периферийными частями, где частоты подвержены красному смещению. При нормальной дисперсии красные компоненты, дифрагирующие вдали от оси, распространяются быстрее, чем голубые компоненты вблизи оси; противоположная ситуация возникает при аномальной дисперсии. Нормальная дисперсия вы-

прямляет фазовые фронты, изгибая их в сторону, противоположную дифракционному изгибу; в случае аномальной дисперсии обе кривизны складываются.

Пространственное разделение частот, возникающее между приосевой и периферийной частями дифрагирующего импульса, может представлять интерес для контроля угловой расходимости импульса. Динамика процессов деформации в пульсирующих пучках определяется конкуренцией между дифракцией, увеличивающей кривизну волнового фронта, и дисперсией, связанной с красным смещением частоты в периферийной части импульса. Радиус кривизны фронта импульса, возникающей при сложении изгибов от дифракции и дисперсии, был найден для гауссовых пульсирующих пучков в [66]:

$$\frac{1}{R_T} = \left( 1 \mp \frac{L_R}{L_D} \right) \frac{1}{R}. \quad (7.21)$$

Здесь  $R$  — радиус кривизны в свободном пространстве (7.6);  $L_R$  — дифракционная длина (7.3); знак минус (плюс) в (7.21) соответствует нормальной (аномальной) дисперсии;  $L_D$  — дисперсионная длина, зависящая от характерной длительности импульса:

$$L_D = \frac{2(\Delta t)^2}{|K_{\omega\omega}|}, \quad K_{\omega\omega} = \frac{\partial^2 K}{\partial \omega^2}. \quad (7.22)$$

Как видно из (7.21), нормальная дисперсия может ослабить выпуклость волнового фронта и даже превратить его в вогнутый. В особом случае  $L_R = L_D$  волновой фронт в рамках обсуждаемой модели остается плоским.

Для иллюстрации возможности управляемого изменения кривизны волнового фронта оценим величины, входящие в формулу (7.21). Рассмотрим гауссов импульс с полушириной  $\Delta t = 1,4$  фс и несущей частотой  $\omega = 1,75 \times 10^{15}$  рад  $\text{с}^{-1}$  ( $\lambda = 1,06$  мкм), распространяющейся в стекле; волновое число  $k$  и величина  $K_{\omega\omega}$  составляют соответственно  $k = 91,930$   $\text{см}^{-1}$  и  $K_{\omega\omega} = 217,8$   $\text{см}^{-1} \text{фс}^2$ ; дисперсионная длина равна  $L_D = 1,8 \times 10^{-3}$  см. Предполагая, что начальная ширина пучка  $a_0$  в (7.3) составляет 2; 6,3; 19 мкм, найдем, что отношения  $L_R/L_D$  равны соответственно 0,1; 1; 10. В случае малого поперечного размера ( $L_R/L_D = 0,1$ ) дифракция гораздо сильнее дисперсии, и фронт импульсов остается выпуклым. В случае  $a_0 = 6,3$  мкм дисперсия уничтожает дифракционную кривизну. Наконец, в случае  $a_0 = 19$  мкм ( $L_R/L_D = 10$ ) сильная дисперсия приводит к вогнутости фронта импульса.

Выше предполагалось, что дифрагирующий импульс, падая на поверхность диспергирующей среды, характеризуется сферическим фазовым фронтом. Строго говоря, пространственно-временная структура падающего импульса в дальней зоне определяется зависящим от времени дифракционным интегралом

$$E(x, y, z, t) = \frac{1}{c} \iint \frac{\partial}{\partial t} E_0 \left( x', y', 0, t - \frac{z}{c} \right) \frac{z}{R^2} dx' dy', \quad (7.23)$$

где  $R^2 = x^2 + y^2 + z^2$ . Согласно (7.23) дифрагированный импульс может расслоиться на два частично перекрывающихся импульса, если угол наблюдения достаточно велик [68]. Чем короче импульс, тем глубже минимум, возникающий при его расслоении. Однако проблема

управляемого взаимодействия таких сложных импульсов с диспергирующими средами до сих пор не изучена.

Распространение электромагнитных волн в нестационарных средах рассматривалось здесь на основе точных аналитических решений уравнений Максвелла для таких сред. Обобщение классических формул Френеля с помощью этих решений показало определяющее влияние дисперсии, вызванной нестационарностью, на весь комплекс процессов отражения и преломления волн в средах, меняющихся со временем. Динамические режимы отражения, приводящие к спектральному уширению и быстрой амплитудно-фазовой деформации ЭМ волн, рассмотрены в рамках точно решаемых моделей нестационарной диэлектрической проницаемости; указаны и отдельные модели, описывающие такие эффекты при быстрой ионизации плазмы. Свойства несинусоидальных волн, образующихся в нестационарных средах, наглядно представлены с помощью специального математического преобразования, переводящего эти волны в гармонические поля в некотором специальном пространстве. Широко используются и качественные аналогии между нестационарными диэлектриками и линией передачи с параметрами, переменными во времени.

Электродинамика нестационарных сред становится сейчас актуальной и быстро развивающейся частью теории волн. Однако следует отметить и некоторые проблемы, которые пока разработаны недостаточно.

1. Оптика сред с движущимися пространственно-временными возмущениями показателя преломления.

2. Поиск оптимальных режимов распространения направленных пучков и ультракоротких импульсов, содержащих всего несколько колебаний, через нестационарные среды.

3. Нестационарная электродинамика случайных сред.

4. Анализ сверхбыстрых оптических эффектов во временной области.

5. Развитие квантового подхода к нестационарным оптическим проблемам, объясняющего, в частности, генерацию фотонов в сжатых состояниях при неадиабатических возмущениях вакуума электромагнитного поля (см., в частности, [12, 58] и приведенную там литературу).

Экспериментальные методы оптики нестационарных сред также находятся сейчас в процессе становления. Для развития этих методов требуется высокое временное разрешение при наблюдении быстрых волновых процессов и короткоживущих состояний среды в пикосекундном и фемтосекундном диапазонах. В отличие от электронной техники, используемой для измерений коротких радиоимпульсов, излучаемых широкополосными радарными [71], аналогичные измерения нестационарных световых полей требуют разработки новых широкополосных оптических систем. Такие системы успешно используются, например, для получения спектров релаксационных колебаний больших молекул в ТГц-диапазоне [72] и при измерении импульсных электрических полей с помощью спектрально-фазовой интерферометрии [73]. Особое внимание привлекают уникальные свойства нестационарных оптических импульсов, возникающих при взаимодействии лазерного излучения с быстро ионизируемой плазмой, время ионизации которой короче периода волны накачки, и, в частности, генерация цугов высоких гармоник этой волны ( $n > 200$ ) [74]. Развитие таких методов формирует экспериментальную базу

возникающего сегодня нового направления в оптике нестационарных сред — аттосекундной оптики [75].

Автор благодарит Т. Ареки, С. Хароша и А. Мигуса за интерес к работе и полезные обсуждения.

## Список литературы

1. Гинзбург В Л *Изв. АН СССР. Сер. физ.* **12** 393 (1948)
2. Morgenthaler F R *IEEE Trans. Microwave Theory Techn.* **MTT-6** 167 (1958)
3. Salieres S et al., in *Advances in Atomic, Molecular and Optical Physics* Vol. 41 (Eds B Bederson, H Walther) (New York: Academic Press, 1999) p. 83
4. Geindre J-P et al. *Opt. Lett.* **26** 1612 (2001)
5. Bertolotti M, Ferrari A, Sereda L *J. Opt. Soc. Am. B* **12** 1519 (1995)
6. Kaplan A E *J. Opt. Soc. Am. B* **15** 951 (1998)
7. Kuo S P, Ren A *IEEE Trans. Plasma Sci.* **PS-21** 53 (1993)
8. Rayleigh J W S *Proc. London Math. Soc.* **11** 51 (1880)
9. Felsen L, Whitman G *IEEE Trans. Antennas Propag.* **AP-18** 242 (1970)
10. Mendonça J T, Guerreiro A, Martins A M *Phys. Rev. A* **62** 033805 (2000)
11. Abeles F, in *Progress in Optics* Vol. 2 (Ed. E Wolf) (Amsterdam: North-Holland, 1963) p. 249
12. Dodonov V V, Klimov A B, Nikonov D E *Phys. Rev. A* **47** 4422 (1993)
13. Kuo S P *Phys. Rev. Lett.* **65** 1000 (1990)
14. Joshi C J et al. *IEEE Trans. Plasma Sci.* **PS-18** 814 (1990)
15. Kalluri D K, Goteti V R *J. Appl. Phys.* **72** 4575 (1992)
16. Banos A (Jr), Mori W B, Dawson J M *IEEE Trans. Plasma Sci.* **PS-21** 57 (1993)
17. Mendonça J T, Oliveira e Silva L *IEEE Trans. Plasma Sci.* **PS-24** 147 (1996)
18. Niikura H et al. *Nature* **417** 917 (2002)
19. Oliveira e Silva L, Mendonça J T *IEEE Trans. Plasma Sci.* **PS-24** 503 (1996)
20. Шифф Л *Квантовая механика* 2-е изд. (М.: ИЛ, 1959)
21. Yu W et al. *J. Phys. D: Appl. Phys.* **26** 2093 (1993)
22. Savage R L (Jr), Joshi C, Mori W B *Phys. Rev. Lett.* **68** 946 (1992)
23. Esarey R E, Joyce G, Sprangle P *Phys. Rev. A* **44** 3908 (1991)
24. Koretzky E, Kuo S P, Kim J J. *Plasma Phys.* **59** 315 (1998)
25. Ogusu K *J. Opt. Soc. Am. B* **17** 1894 (2000)
26. Wilks S C et al. *Phys. Rev. Lett.* **62** 2600 (1989)
27. Kapteyn H C, Murnane M M *J. Opt. Soc. Am. B* **8** 1657 (1991)
28. Mori W B *Phys. Rev. A* **44** 5118 (1991)
29. Mendonça J T, Oliveira e Silva L *Phys. Rev. E* **49** 3520 (1994)
30. Dias J M et al. *Phys. Rev. Lett.* **78** 4773 (1997)
31. Oliveira e Silva L, Mendonça J T *IEEE Trans. Plasma Sci.* **PS-24** 316 (1996)
32. Shvartsburg A, Petite G, in *Progress in Optics* Vol. 44 (Ed. E Wolf) (Amsterdam: Elsevier Sci., 2002) p. 143
33. Bernstein I, in *Handbook of Plasma Physics* Vol. 1 (Eds M Rosenbluth, R Sagdeev) (Amsterdam: North-Holland, 1983) p. 367
34. Shvartsburg A B *Impulse Time-Domain Electromagnetics of Continuous Media* (Boston: Birkhäuser, 1999)
35. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами* (Под ред. М Абрамовица, И Стиган) (М.: Наука, 1979)
36. Kapteyn H C et al. *Opt. Lett.* **16** 490 (1991)
37. Gold D M *Opt. Lett.* **19** 2006 (1994)
38. Teubner U et al. *Phys. Rev. A* **67** 013816 (2003)
39. Chwalek J M et al. *Appl. Phys. Lett.* **57** 1696 (1990)
40. Федоров М В *Электрон в сильном световом поле* (М.: Наука, 1991)
41. Борн М, Вольф Э *Основы оптики* (М.: Наука, 1970)
42. Jiang Z, Jacquemin R, Eberhardt W *Appl. Opt.* **36** 4358 (1997)
43. Eesley G L et al. *Phys. Rev. Lett.* **65** 3445 (1990)
44. Джексон Дж *Классическая электродинамика* (М.: Мир, 1965)
45. Tang N, Sutherland R L *J. Opt. Soc. Am. B* **14** 3412 (1997)
46. Shvartsburg A B, Petite G, Hecquet P *J. Opt. Soc. Am. A* **17** 2267 (2000)
47. Гинзбург В Л *Распространение электромагнитных волн в плазме* (М.: Наука, 1967)

48. Stenflo L, Shvartsburg A B, Weiland J *Contrib. Plasma Phys.* **37** 393 (1997)
49. Musielak Z E, Fontenla J M, Moore R L *Phys. Fluids B* **4** 13 (1992)
50. Loka H S, Benjamin S D, Smith P W E *IEEE J. Quantum Electron.* **34** 1426 (1998)
51. Åberg I, Kristensson G, Wall D J N *J. Math. Phys.* **37** 2229 (1996)
52. Mèplan O, Gignoux C *Phys. Rev. Lett.* **76** 408 (1996)
53. Cirone M, Rzazewski K, Mostowski J *Phys. Rev. A* **55** 62 (1997)
54. Law C K, Eberly J H *Phys. Rev. Lett.* **76** 1055 (1996)
55. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Механика* (М.: Наука, 1973)
56. Mattos M A da F, Christopoulos C *J. Phys. D: Appl. Phys.* **23** 40 (1990)
57. Райзер Ю П *Физика газового разряда* (М.: Наука, 1987)
58. Moss T S (Ed.) *Handbook on Semiconductors* Vol. 2 (Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1980)
59. Anderson D A, Apsley N *Semicond. Sci. Technol.* **1** 187 (1986)
60. Winnerl S et al. *Phys. Status Solidi B* **204** 58 (1997)
61. Masoliver J, Weiss G H *Phys. Rev. E* **49** 3852 (1994)
62. Samaddar S, Mokole E, in *Ultra-Wideband, Short-Pulse Electromagnetics 3* (Eds C E Baum, L Carin, A P Stone) (New York: Plenum Press, 1997) p. 147
63. McGowan R W, Gallot G, Grischkowsky D *Opt. Lett.* **24** 1431 (1999)
64. Brabec T, Krausz F *Rev. Mod. Phys.* **72** 545 (2000)
65. Einziger P D, Raz S *J. Opt. Soc. Am. A* **4** 3 (1987)
66. Porras M A *Phys. Rev. E* **58** 1086 (1998)
67. Feng S, Winful H G, Hellwarth R W *Opt. Lett.* **23** 385 (1998)
68. Porras M A *Opt. Lett.* **26** 44 (2001)
69. Porras M A *J. Opt. Soc. Am. B* **16** 1468 (1999)
70. Wang Z, Xu Z, Zhang Z *Opt. Lett.* **22** 354 (1997)
71. Guo Y, Überall H J *Electromagn. Waves Appl.* **8** 355 (1994)
72. Mokhtari A E A, Chesnoy J *IEEE J. Quantum Electron.* **25** 2528 (1989)
73. Iaconis C, Walmsley A *Opt. Lett.* **23** 792 (1998)
74. Corkum P B *Phys. Rev. Lett.* **71** 1994 (1993)
75. Paul P M et al. *Science* **292** 1689 (2001)

### Optics of non-stationary media

#### A.B. Shvartsburg

*Science and Technology Center of Unique Instrumentation, Russian Academy of Sciences,  
ul. Butlerova 15, 117342 Moscow, Russian Federation  
Tel. (7-095) 316-1728  
E-mail: alexshvarts@mtu-net.ru*

Propagation and reflection of electromagnetic waves in time-varying dielectric media are studied using the analytical solutions of the relevant Maxwell equations. Exactly solvable models that impose no small or slow change requirements on a medium reveal strong non-stationarity-induced dispersion effects, due to the finite time relaxation of the dielectric parameters. The generalized time-dependent Fresnel and Snell laws visualizing the dependence of reflection coefficients on the dynamics of reflecting media are presented. The drastic distortion of EM fields interacting with rapidly ionizing plasmas is examined. The coupled spatiotemporal reshaping of wave fields in heterogeneous time-varying media is considered for transmission lines, heterogeneous dielectrics, and for flash ionization in microwave cavities. The efficiency of the time-domain approach in treating these problems is demonstrated.

PACS numbers: 03.65.Ge, 03.65.Sq, **42.25.** – p, 42.25.Bs, 42.25.Gy

Bibliography — 75 references

*Received 19 November 2004*

*Uspekhi Fizicheskikh Nauk* **175** (8) 833–861 (2005)

*Physics–Uspekhi* **48** (8) (2005)