Июнь 2005 г. *Том 175, № 6*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Геометрическая оптика и явление дифракции

А.В. Тимофеев

Излагаются основные положения геометрической оптики неоднородных волн, для описания которых необходимо использовать комплексные значения волнового вектора. Обобщение геометрической оптики на неоднородные волны позволяет включить в ее сферу анализ явления дифракции.

PACS numbers: **42.15.–i**, 42.25.Fx

Содержание

1. **Введение (637).**
2. **Геометрическая (лучевая) оптика (637).**
3. **"Комплексная" геометрическая оптика (639).**
4. **Обобщенная геометрическая оптика гауссовых волновых пучков (640).**
5. **Заключение (641).**

Список литературы (641).

1. Введение

Широко распространены представления, согласно которым дифракция представляет собой сугубо волновое явление и поэтому может рассматриваться только с помощью волновых уравнений. Волновые уравнения — это уравнения в частных производных порядка не ниже второго (порядок волновых уравнений обычно повышается при учете пространственной дисперсии среды). Использование таких уравнений, как правило, требует громоздкого математического аппарата. Упрощенный вариант волнового уравнения, пригодный для анализа эволюции огибающей коротких волн, был предложен М.А. Леонтовичем при исследовании дифракции радиоволн на поверхности Земли [1] (параболическое уравнение Леонтовича). Однако в общем случае неоднородной анизотропной среды анализ решений параболического уравнения также оказывается довольно сложным.

Альтернативный и, на наш взгляд, более простой подход к рассмотрению явления дифракции связан с расширением понятий волнового вектора $\mathbf{k}$ и эйконала

$$\psi(\mathbf{r}) = \int^{\mathbf{r}} \mathbf{k}(\mathbf{r})\,\mathrm{d}\mathbf{r}$$

на комплексные значения (неоднородные волны) [2].

А.В. Тимофеев. Российский научный центр "Курчатовский институт", 123182 Москва, пл. Курчатова 1, Российская Федерация
Тел. (095) 196-91-83
E-mail: avtim@nfi.kiae.ru

Статья поступила 17 февраля 2005 г.

Эволюция коротких однородных волн ($\mathrm{Im}\,\mathbf{k} = 0$) может быть проанализирована с помощью уравнений геометрической оптики (ГО). Эти уравнения в отличие от волновых являются обыкновенными дифференциальными уравнениями (см., например, [3]). Расширение ГО на неоднородные волны ($\mathrm{Im}\,\mathbf{k} \neq 0$) позволяет включить в ее схему и анализ явления дифракции.

Интерес к проблеме эволюции неоднородных волн возрос в последнее время в связи с развитием методов СВЧ-нагрева плазмы и генерации тока в термоядерных системах. В такие системы СВЧ-волны обычно вводятся в виде волновых пучков. В [4] общая схема комплексной ГО работы [2] (см. также [5, 6]) была реализована на примере простейшего волнового пучка с гауссовым распределением интенсивности в поперечном сечении. Оказалось, что эта система обыкновенных дифференциальных уравнений совпадает с полученной в [7] с помощью формализма параболического уравнения. Результаты работ [2,7] были использованы в численных кодах, созданных для анализа взаимодействия СВЧ-волн с плазмой [8 – 10].

Настоящая заметка ставит своей целью изложение основ "комплексной" ГО, в рамках которой с единых позиций может быть рассмотрена вся совокупность явлений, определяющих эволюцию волн малой длины (рефракция, фокусировка-дефокусировка, дифракция).

2. Геометрическая (лучевая) оптика

Часто при исследовании электромагнитных волн их поле задается на некоторой поверхности и требуется продолжить его на всю область распространения волн. Анализ этой задачи в общем случае представляет значительные трудности, поэтому при ее решении обычно используются различные приближения. Если характерная длина волны мала по сравнению с размером системы, то продуктивно коротковолновое квазиклассическое приближение, при котором для переменного электрического поля принимается пространственная зависимость

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}'(\mathbf{r}) \exp\left(\mathrm{i}\psi(\mathbf{r})\right),$$

где $\mathbf{E}' = \mathbf{e}E$, $\mathbf{e}$ — единичный вектор поляризации. Считается, что характерный масштаб L изменения амплитуды $\mathbf{E}'(\mathbf{r})$ велик по сравнению с длиной волны. Именно такие волны рассматриваются в настоящей работе, временну́ю зависимость электромагнитного поля будем предполагать гармонической $\propto \exp(-\mathrm{i}\omega t)$, среду — стационарной.

Подставляя в волновое уравнение, получающееся из уравнений Максвелла, квазиклассическое представление для электрического поля, получаем иерархию уравнений по степеням малого параметра $1/(kL)$. Уравнения нулевого порядка являются алгебраическими

$$a_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) E'_j = 0\,, \tag{1}$$

где $a_{ij} = k_i k_j - \delta_{ij} k^2 + (\omega/c)^2 \varepsilon_{ij}$, ε_{ij} — тензор диэлектрической проницаемости. Он считается эрмитовым, что эквивалентно предположению об отсутствии необратимых процессов обмена энергией волн со средой (диссипация, в случае плазмы также бесстолкновительное резонансное взаимодействие заряженных частиц с волнами).

Система (1) разрешима, если выполняется так называемое дисперсионное соотношение

$$D(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) = \left\| a_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) \right\| = 0\,. \tag{2}$$

Дисперсионное соотношение можно рассматривать как связь, накладываемую на компоненты волнового вектора волн данной частоты. Благодаря ей модуль вектора $\mathbf{k}$ зависит от направления. В коротковолновом квазиклассическом приближении сформулированная выше задача продолжения решения волнового уравнения сводится к выбору такой аналитической зависимости $\mathbf{k}(\mathbf{r})$, которая на "начальной" поверхности S переходит в заданную. Для этого приравняем нулю полную пространственную производную величины D по каждой из координат:

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}x_i} = \frac{\partial D}{\partial x_i} + \frac{\partial k_i}{\partial x_j}\frac{\partial D}{\partial k_j} = 0\,. \tag{3}$$

Здесь использовано равенство

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial k_i}{\partial x_j} = \frac{\partial k_j}{\partial x_i}\,.$$

Рассмотрим процедуру продолжения зависимости $\mathbf{k}(\mathbf{r})$ с "начальной" поверхности S. Так как электромагнитное поле задано на S, то могут быть определены производные вектора $\mathbf{k}$ по направлениям, касательным к S. После этого из уравнения (3) следует найти $(\mathbf{n}\nabla)\mathbf{k}$, где $\mathbf{n}$ — вектор нормали к поверхности S. Полная информация о величинах $\partial k_i/\partial x_j$ позволяет продолжить зависимость $\mathbf{k}(\mathbf{r})$ на расстояние $\mathrm{d}r$ по любому направлению. При этом поверхность S переходит в S' и т.д. Заметим, однако, что в (3) входит проекция величины $\partial k_i/\partial x_j$ на направление вектора $\partial D/\partial \mathbf{k}$, поэтому именно вдоль этого направления естественно продолжить зависимость $\mathbf{k}(\mathbf{r})$. Оно совпадает с направлением групповой скорости $\mathbf{V}_{\mathrm{gr}}$. Действительно, дисперсионное соотношение (2) можно рассматривать также как условие, определяющее частоту собственных (свободных) волн $\omega(\mathbf{r}, \mathbf{k})$, при этом

$$\frac{\partial \omega}{\partial k_i} = -\frac{\partial D}{\partial k_i}\left(\frac{\partial D}{\partial \omega}\right)^{-1}. \tag{4}$$

При продолжении зависимости $\mathbf{k}(\mathbf{r})$ вдоль направления вектора $\partial D/\partial \mathbf{k}$ имеют место равенства

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}k_i}{\mathrm{d}s} = -\dfrac{\partial D}{\partial x_i}\left|\dfrac{\partial D}{\partial \mathbf{k}}\right|^{-1}, \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s} = \dfrac{\partial D}{\partial k_i}\left|\dfrac{\partial D}{\partial \mathbf{k}}\right|^{-1}, \end{cases} \tag{5}$$

где s — расстояние вдоль направления групповой скорости.

Если движение по указанному направлению происходит с групповой скоростью, то уравнения (5) принимают вид обычных уравнений лучевой (геометрической) оптики:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}k_i}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial D}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial D}{\partial \omega}\right)^{-1} = -\dfrac{\partial \omega}{\partial x_i}\,, \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\partial D}{\partial k_i}\left(\dfrac{\partial D}{\partial \omega}\right)^{-1} = \dfrac{\partial \omega}{\partial k_i}\,. \end{cases} \tag{6}$$

Рассматриваемые нами уравнения нулевого порядка по параметру $1/(kL)$ позволяют найти зависимость $\mathbf{k}(\mathbf{r})$ и поляризацию электрического поля, характеризуемую вектором $\mathbf{e}$, но оставляют амплитуду E произвольной. Она определяется уравнениями первого порядка. Для их получения в величинах $a_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{k})$ в (1) произведем замену $\mathbf{k} \to \mathbf{k} - \mathrm{i}\nabla$. Оператор ∇ следует применять к медленно изменяющимся величинам $\mathbf{k}$, $\mathbf{e}$, E. В первом порядке по $1/(kL)$ получаем систему неоднородных алгебраических уравнений [11, 12]

$$a_{ij}\, \delta E'_j = \mathrm{i} f_i\,, \tag{7}$$

где $\delta E'_i$ — поправки к решениям уравнений нулевого порядка (1),

$$f_i = \frac{\partial a_{ik}}{\partial k_j}\, e_k\, \frac{\partial E}{\partial x_j} + \left[\frac{\partial a_{ik}}{\partial k_j}\left(\frac{\partial e_k}{\partial x_j} + \frac{\partial e_k}{\partial k_l}\frac{\partial k_l}{\partial x_j}\right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial k_j \partial k_l}\frac{\partial k_l}{\partial x_j}\, e_k\right] E\,.$$

Система (7) разрешима, если выполняется условие

$$e_i^{\mathrm{T}} f_i = 0\,, \tag{8}$$

где e_i^{T} — решение системы, транспонированной к (1),

$$e_i^{\mathrm{T}} a_{ij} = 0\,.$$

Следует отметить, что при отсутствии необратимых процессов тензор $a_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{k})$ является эрмитовым: $a_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = a^*_{ji}(\mathbf{r}, \mathbf{k})$. Тогда $e_i^{\mathrm{T}} = e_i^*$.

Несложные вычисления показывают, что вектор

$$e_j^{\mathrm{T}}\,\frac{\partial a_{jk}}{\partial k_i}\, e_k$$

параллелен вектору $\partial D/\partial k_i$, а следовательно, и групповой скорости (см. (4)). Продолжая зависимость $E(\mathbf{r})$ по направлению распространения лучей, приходим к уравнению

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}s} = -e_i^{\mathrm{T}}\left[\frac{\partial a_{ik}}{\partial k_j}\left(\frac{\partial e_k}{\partial x_j} + \frac{\partial e_k}{\partial k_l}\frac{\partial k_l}{\partial x_j}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial k_j \partial k_l}\frac{\partial k_l}{\partial x_j}\, e_k\right] \times \\ \times \left| e_i^{\mathrm{T}}\,\frac{\partial a_{ik}}{\partial k_j}\, e_k\right|^{-1} E\,, \tag{9}$$

которым следует дополнить систему (5).

Переход от пространственной производной к временнóй, как и для системы (5), (6), производится посредством множителя

$$-\left|\frac{\partial D}{\partial \mathbf{k}}\right|\left(\frac{\partial D}{\partial \omega}\right)^{-1}.$$

3. "Комплексная" геометрическая оптика

Распространение электромагнитных волн по неоднородной анизотропной среде сопровождается изменением их поляризации, волнового вектора (рефракцией), а также дифракцией. Первые два явления могут быть проанализированы в рамках обычной геометрической оптики (см. предыдущий раздел). В [2] показано, что явление дифракции можно включить в расширенную схему геометрической оптики, оперирующей с комплексными значениями волнового вектора, которая описывает эволюцию неоднородных волн.

Следуя [2], проиллюстрируем этот подход на примере двумерных волн, распространяющихся в изотропной среде с диэлектрической проницаемостью ε. Такие волны описываются уравнением Гельмгольца

$$\Delta\Phi + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon\Phi = 0\,. \tag{10}$$

Здесь $\Phi(x, y)$ — единственная отличная от нуля компонента вектора Герца (z-компонента).

Будем считать волновой вектор и эйконал комплексными: $\mathbf{k} = \mathrm{Re}\,\mathbf{k} + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,\mathbf{k}$. Если $\mathrm{Im}\,\mathbf{k} \neq 0$, то в дисперсионном соотношении появляется мнимая часть даже при отсутствии необратимых процессов обмена энергией волн со средой:

$$D = \mathrm{Re}\,D + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,D =$$
$$= -(\mathrm{Re}\,\mathbf{k})^2 + (\mathrm{Im}\,\mathbf{k})^2 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon - 2\mathrm{i}\,\mathrm{Re}\,\mathbf{k}\,\mathrm{Im}\,\mathbf{k} = 0\,. \tag{11}$$

Для продолжения зависимости $\mathbf{k}(\mathbf{r})$ нужно, как и в предыдущем разделе, приравнять нулю градиент (11). Действительная часть получаемого таким образом уравнения имеет вид

$$\nabla(\mathrm{Re}\,D) = -2(\mathrm{Re}\,\mathbf{k}\nabla)\,\mathrm{Re}\,\mathbf{k} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \nabla\varepsilon +$$
$$+ 2(\mathrm{Im}\,\mathbf{k}\nabla)\,\mathrm{Im}\,\mathbf{k} = 0\,. \tag{12}$$

Данное уравнение показывает, что действительная часть волнового вектора меняется не только из-за неоднородности среды (второе слагаемое), проявляющейся, в частности, в рефракции волн, но также и из-за неоднородности самих волн (третье слагаемое). Последний эффект следует считать проявлением дифракции.

Сопоставим эти соображения с результатами анализа того же процесса с помощью параболического уравнения. Для вывода параболического уравнения в (10) положим

$$\Phi(\mathbf{r}) = \exp\,(\mathrm{i}ky)\,F(x, y)\,,$$

где $k = (\omega/c)\varepsilon$, $F(x, y)$ — медленно меняющаяся "огибающая". При этом для функции F получаем уравнение (параболическое)

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{i}}{2k}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0\,.$$

Известно автомодельное решение данного уравнения, описывающее эволюцию волнового пучка, который на "начальной" поверхности $y = 0$ имеет гауссово распределение амплитуды

$$F(x, y) = \frac{1}{(y - \mathrm{i}a)^{1/2}} \exp\left(\frac{\mathrm{i}kx^2}{2(y - \mathrm{i}a)}\right). \tag{13}$$

Волновой вектор, соответствующий этому решению, дается выражением

$$\mathbf{k} = k\left\{\frac{x(y + \mathrm{i}a)}{y^2 + a^2}\,,\ 0,\ 1 - \frac{x^2(y^2 - a^2 + 2\mathrm{i}ay)}{2(y^2 + a^2)^2}\right\}. \tag{14}$$

Оно показывает, что в плоскости $y = 0$ вектор $\mathrm{Re}\,\mathbf{k}$ параллелен оси $0Y$ во всем поперечном сечении пучка. Однако поскольку при гауссовом распределении $\partial(\mathrm{Im}\,\mathbf{k})^2/\partial x > 0$, он в соответствии с (13), (14) разворачивается веером наружу от оси, что и ведет к расширению пучка. При $y \gg a$ в секторе $x/y \leqslant 1/\sqrt{ak}$, в котором в основном сосредоточен пучок, он асимптотически превращается в радиально расходящийся.

Можно представить волновой пучок, отличный от гауссова, в определенной области которого выполняется условие $\partial(\mathrm{Im}\,\mathbf{k})^2/\partial x < 0$. В этой области пучок будет не расходиться, а сходиться. Если в поперечном направлении амплитуда спадает по простому экспоненциальному закону $\mathrm{Im}\,\mathbf{k} = \mathrm{const}$, то этот закон будет оставаться неизменным. Таким образом, эволюция неоднородных волн может быть довольно сложной и не сводится просто к сглаживанию распределения амплитуды.

В общем случае неоднородных волн ($\mathrm{Im}\,\mathbf{k} \neq 0$) в произвольной среде задача продолжения электромагнитного поля с "начальной" поверхности S на всю доступную область распространения является естественным обобщением задачи, рассмотренной в предыдущем разделе. Полагая в (3) $\mathrm{Im}\,\mathbf{k} \neq 0$ и разделяя действительную и мнимую части, получаем

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\,\mathrm{Re}\,D + \dfrac{\partial}{\partial x_j}\,\mathrm{Re}\,k_i\,\dfrac{\partial}{\partial k_j}\,\mathrm{Re}\,D - \dfrac{\partial}{\partial x_j}\,\mathrm{Im}\,k_i\,\dfrac{\partial}{\partial k_j}\,\mathrm{Im}\,D = 0\,, \\ \dfrac{\partial}{\partial x_i}\,\mathrm{Im}\,D + \dfrac{\partial}{\partial x_j}\,\mathrm{Im}\,k_i\,\dfrac{\partial}{\partial k_j}\,\mathrm{Re}\,D + \dfrac{\partial}{\partial x_j}\,\mathrm{Re}\,k_i\,\dfrac{\partial}{\partial k_j}\,\mathrm{Im}\,D = 0\,. \end{cases} \tag{15}$$

Поскольку направления $\nabla\,\mathrm{Re}\,D$ и $\nabla\,\mathrm{Im}\,D$, вообще говоря, не совпадают, то для продолжения зависимости $\mathbf{k}(\mathbf{r})$ с "начальной" поверхности S следует использовать общую процедуру, описанную в предыдущем разделе. Отметим, однако, что, хотя обобщение понятия групповой скорости на случай неоднородных волн отсутствует, его часто используют, если $|\mathrm{Re}\,\mathbf{k}| \gg |\mathrm{Im}\,\mathbf{k}|$. При выполнении этого условия, разлагая $D(\mathbf{k})$ по $\mathrm{Im}\,\mathbf{k}$ до второго порядка включительно, получаем

$$D(\mathbf{k}) \approx D(\mathrm{Re}\,\mathbf{k}) - \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\,k_i\,\mathrm{Im}\,k_j\,\frac{\partial^2 D}{\partial\,\mathrm{Re}\,k_i\,\partial\,\mathrm{Re}\,k_j} +$$
$$+ \mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,k_i\,\frac{\partial D}{\partial\,\mathrm{Re}\,k_i} = 0\,. \tag{16}$$

Из условия равенства нулю мнимой части (16) следует, что направление распространения слабо неоднородной волны ($|\mathrm{Re}\,\mathbf{k}| \gg |\mathrm{Im}\,\mathbf{k}|$) близко к направлению, в котором постоянна ее амплитуда [5]. В изотропных средах $\mathbf{V}_{\mathrm{gr}} \parallel \mathbf{k}$ и поэтому линии постоянной фазы и амплитуды должны пересекаться под углом, близким к прямому. В простейшем случае волн, описываемых уравнением Гельмгольца, эти линии ортогональны при произвольных значениях $\mathrm{Im}\,\mathbf{k}$ (см. (11)).

Мы рассмотрели процедуру продолжения комплексного волнового вектора. Для продолжения амплитудного множителя $E(\mathbf{r})$ следует использовать соотношение (9) с комплексными значениями $\mathbf{k}$, $\mathbf{e}$ и E.

В (15), как и в (5), величина D может быть заменена на частоту ω, определяемую соотношением (2) (см. примечание в конце предыдущего раздела).

4. Обобщенная геометрическая оптика гауссовых волновых пучков

Электромагнитные волны часто вводятся в экспериментальные устройства в виде узких волновых пучков. При анализе таких пучков комплексный эйконал удобно разложить в ряд по отклонению от оси пучка:

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi(s) + k_i(s)\xi_i + \frac{1}{2}\,\varkappa_{ij}(s)\xi_i\xi_j\,. \tag{17}$$

Здесь

$$\xi_j = \big(x_i - x_i(s)\big)(\delta_{ij} - l_i l_j)\,, \qquad \mathbf{l} = \frac{\partial D/\partial\mathbf{k}}{|\partial D/\partial\mathbf{k}|}$$

— единичный вектор, касательный к оси пучка, s — расстояние вдоль оси. Ось пучка определяется как лучевая траектория, соответствующая максимуму интенсивности.

В анизотропной среде направления групповой скорости и волнового вектора могут не совпадать, поэтому в разложении (17) присутствует слагаемое, линейное по ξ_i. Реальная часть величин $\varkappa_{ij}$ характеризует кривизну волнового фронта пучка, с которой может быть связана, например, его фокусировка, мнимая — распределение интенсивности в поперечном сечении. Волновые пучки с распределением интенсивности, описываемым (17), называют гауссовыми или гауссовоподобными. Пространственная ограниченность гауссовых пучков обязана тому, что вне оси $\mathrm{Im}\,k_i = \xi_j\,\mathrm{Im}\,\varkappa_{ij} \neq 0$.

Задача продолжения электромагнитного поля с начальной поверхности S, обсуждавшаяся в предыдущих разделах, требует рассмотрения совокупности лучевых траекторий. В случае гауссова пучка достаточно рассмотреть только одну осевую лучевую траекторию, а также эволюцию вдоль нее величин $\varkappa_{ij}$. Знания последних достаточно для описания лучевых траекторий, проходящих вблизи оси пучка. Расширение схемы геометрической оптики с включением в нее уравнений для величин $\varkappa_{ij}$ было произведено в [4].

Величины $\varkappa_{ij}$ имеют смысл производных волнового вектора на оси пучка:

$$\varkappa_{ij} = \frac{\partial k_i}{\partial x_j}\bigg|_{\xi=0}\,.$$

Уравнение для них получаем, приравнивая нулю полную вторую пространственную производную дисперсионного соотношения

$$\left(\frac{\partial D}{\partial k_k}\,\frac{\partial}{\partial x_k}\right)\varkappa_{ij} = -\frac{\partial^2 D}{\partial x_i\,\partial x_j} - \varkappa_{ik}\,\frac{\partial^2 D}{\partial x_j\,\partial k_k} - \varkappa_{jk}\,\frac{\partial^2 D}{\partial x_i\,\partial k_k} - \varkappa_{ik}\varkappa_{jl}\,\frac{\partial^2 D}{\partial k_k\,\partial k_l}\,.$$

Данное уравнение можно представить в виде производной по направлению распространения лучей и дополнить им систему уравнений (5)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\,\varkappa_{ij} = -\left|\frac{\partial D}{\partial\mathbf{k}}\right|^{-1}\left(\frac{\partial^2 D}{\partial x_i\,\partial x_j} + \varkappa_{ik}\,\frac{\partial^2 D}{\partial x_j\,\partial k_k} + \varkappa_{jk}\,\frac{\partial^2 D}{\partial x_i\,\partial k_k} + \varkappa_{ik}\varkappa_{jl}\,\frac{\partial^2 D}{\partial k_k\,\partial k_l}\right). \tag{18}$$

Здесь производные величины D рассчитываются на оси пучка и поэтому в отличие от величин $\varkappa_{ij}$ являются действительными. Так как на лучевых траекториях обращается в нуль как величина D, так и производные $\mathrm{d}D/\mathrm{d}x_i$, то домножая (18) на множитель

$$-\left|\frac{\partial D}{\partial\mathbf{k}}\right|\left(\frac{\partial D}{\partial\omega}\right)^{-1},$$

в этом уравнении можно перейти от пространственной производной к временно́й. При этом величина S в (18) заменится на частоту.

Уравнение (18) вместе с уравнениями обычной геометрической оптики (5) составляют систему, полностью определяющую пространственную эволюцию гауссовых пучков.

Отметим, что уравнение (18) впервые было получено в [11], где с его помощью анализировалась эволюция однородных волновых полей и поэтому величины $\varkappa_{ij}$ считались действительными. При этом предположении с помощью (18) можно исследовать явления фокусировки-дефокусировки волновых пучков. В [4] было замечено, что в силу специфики пространственной зависимости гауссовых волновых пучков их эволюция также может быть проанализирована с помощью уравнения (18), в котором величины $\varkappa_{ij}$ необходимо считать комплексными.

Уточним: комплексными являются лишь те из совокупности величин $\varkappa_{ij}$, которые определяют поперечную пространственную структуру гауссова пучка. В то же время величины

$$\frac{\mathrm{d}k_i}{\mathrm{d}s} = l_j\,\frac{\mathrm{d}k_i}{\mathrm{d}x_j}\,,$$

характеризующие изменение волнового вектора на оси пучка, при отсутствии необратимых процессов должны быть действительными. Последнее не очевидно, так как уравнение (18) на первый взгляд связывает все величины $\varkappa_{ij}$. Однако из этого уравнения для производной

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{d}k_i}{\mathrm{d}s}\right)$$

можно получить следующее выражение:

$$\frac{\mathrm{d}^2 k_i}{\mathrm{d}s^2} = -\left|\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}\mathbf{k}}\right|^{-1}\left(\hat{L}\,\frac{\partial D}{\partial x_i} + \frac{\mathrm{d}k_i}{\mathrm{d}s}\,\hat{L}\left|\frac{\partial D}{\partial\mathbf{k}}\right|\right), \tag{19}$$

где

$$\hat{L} = \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\mathrm{d}k_i}{\mathrm{d}s}\,\frac{\partial}{\partial k_i}\,.$$

Из (19) следует, что величины $\mathrm{d}k_i/\mathrm{d}s$ составляют замкнутую совокупность, и поскольку в начальной точке лучевой траектории в соответствии с уравнениями геометрической оптики $\mathrm{d}k_i/\mathrm{d}s = 0$, то данное соотношение будет выполняться и в дальнейшем.

Амплитуда электрического поля на оси гауссова пучка может быть найдена из условия постоянства потока энергии в пучке

$$V_{\mathrm{gr}}\,W = \mathrm{const}\,,$$

где

$$W = \int \mathrm{d}S_{\perp}\, w$$

(интеграл берется по поперечному сечению пучка),

$$w = \frac{1}{8\pi}\, e_i e_j^{*}\, \frac{\partial}{\partial\omega}\, \omega\varepsilon_{ij}|E|^2$$

— плотность энергии. Простые вычисления дают

$$W = \frac{1}{16\pi}\, e_i e_j^{*}\, \frac{\partial}{\partial\omega}\, \omega\varepsilon_{ij}|E|^2\, \frac{1}{(\varkappa_{11}\varkappa_{22} - \varkappa_{12}^2)^{1/2}}\,,$$

где $\varkappa_{11} = h_{1i}h_{1j}\,\mathrm{Im}\,\varkappa_{ij}$, $\varkappa_{12} = h_{1i}h_{2j}\,\mathrm{Im}\,\varkappa_{ij}$, $\varkappa_{22} = h_{2i}h_{2j}\,\mathrm{Im}\,\varkappa_{ij}$, векторы $\mathbf{h}_1$, $\mathbf{h}_2$ вместе с вектором $\mathbf{l}$ образуют ортонормированную тройку.

Гауссов волновой пучок — удобный объект для анализа с помощью параболического уравнения. Гауссово распределение электрического поля описывается простейшим (наиболее крупномасштабным) решением параболического уравнения (см., например, (13)).

В случае произвольной неоднородной анизотропной среды использование параболического уравнения оказывается довольно трудоемким. В работе [7] была получена система уравнений для параметров простейшего решения параболического уравнения, эквивалентная (18). Гауссов пучок в неоднородной изотропной среде подробно рассматривался в [13]. Еще более простой случай однородной изотропной среды обсуждался в предыдущем разделе. Гауссов пучок в такой среде характеризуется единственным параметром

$$\varkappa_{xx} = \frac{k}{y - \mathrm{i}a}\,, \qquad k = \frac{\omega}{c}\,\sqrt{\varepsilon}$$

(см. (13)).

Нетрудно видеть, что данное выражение удовлетворяет уравнению (18). Действительно, в рассматриваемом случае $D = -k_x^2 - k_y^2 + k^2$ и уравнение (18) принимает вид

$$\frac{\mathrm{d}\varkappa_{xx}}{\mathrm{d}y} = -\frac{\varkappa_{xx}^2}{k}\,.$$

Таким образом, рассмотренные выше подходы к исследованию эволюции гауссовых пучков эквивалентны.

5. Заключение

Проведенное рассмотрение показывает, что дисперсионное соотношение, получаемое как условие разрешимости системы уравнений Максвелла, содержит всю информацию о пространственной структуре коротких электромагнитных волн. Эта информация может быть извлечена с помощью формализма ГО. Обобщение ГО на неоднородные волны, характеризуемые комплексным волновым вектором, позволяет учесть явление дифракции.

Работа поддержана грантом поддержки ведущих научных школ 2024.2003.2.

Список литературы

1. Леонтович М А *Изв. АН СССР. Сер. Физ.* **8** 16 (1944)
2. Choudhary S, Felsen L B *IEEE Trans. Antennas Propag.* **AP-21** 827 (1973)
3. Борн М, Вольф Э *Основы оптики* (М.: Наука, 1970)
4. Тимофеев А В *Физ. плазмы* **21** 646 (1995)
5. Mazzucato E *Phys. Fluids B* **1** 1855 (1989)
6. Nowak S, Orefice A *Phys. Fluids B* **5** 1945 (1993)
7. Pereverzev G V, in *Reviews of Plasma Physics* Vol. 19 (Ed. B B Kadomtsev) (New York: Consultants Bureau, 1995) p. 1; Preprint IPP 4/260 (Garching: Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, 1993)
8. Звонков А В и др. *Физ. плазмы* **24** 424 (1998)
9. Poli E, Pereverzev G V, Peeters A G *Phys. Plasmas* **6** 5 (1999)
10. Poli E et al. *Fusion Eng. Design* **53** 9 (2001)
11. Бернштейн А, Фридленд Л, в сб. *Основы физики плазмы* Т. 1 (Под ред. М Н Розенблюта, Р З Сагдеева) (М.: Энергоатомиздат, 1983) с. 393
12. Бескин В С, Гуревич А В, Истомин Я Н *ЖЭТФ* **92** 1277 (1987)
13. Пермитин Г В, Смирнов А И *ЖЭТФ* **109** 736 (1996)

Geometrical optics and the diffraction phenomenon

A.V. Timofeev
Russian Research Centre "Kurchatov Institute",
pl. Kurchatova 1, 123182 Moscow, Russian Federation
Tel. (7-095) 196-91 83
E-mail: avtim@nfi.kiae.ru

The main points of the geometrical optics of inhomogeneous waves described with complex wave vectors are discussed. When extended to allow for wave inhomogeneity, geometrical optics apply to the diffraction phenomenon.

PACS numbers: **42.15.–i**, 42.25.Fx

Bibliography — 13 references *Received 17 February 2005*

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **175** (5) 637 – 641 (2005) *Physics – Uspekhi* **48** (5) (2005)