

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Эффекты самодействия частиц в гравитационном поле

Н.Р. Хуснутдинов

Рассмотрена энергия и сила самодействия частиц, находящихся в гравитационном поле. Обсуждается явление самодействия частиц в гравитационном поле черных дыр и в пространстве космической струны как бесконечно тонкой, так и с конечным поперечным сечением, а также в пространстве точечного глобального монополя. Рассмотрены некоторые эффекты, связанные с самодействием.

PACS numbers: 04.62.+v, 04.70.-s, 11.27.+d

Содержание

1. Введение (603).
 2. Сила и энергия самодействия в пространствах черных дыр (605).
 3. Сила и энергия самодействия в пространствах топологических дефектов (610).
 4. Заключение (617).
 5. Приложение. Определения основных величин и понятий (618).
- Список литературы (619).

1. Введение

В плоском пространстве-времени Минковского¹ явление самодействия для электромагнитных частиц хорошо изучено и достаточно подробно описано в обзорах и монографиях (см., например, книги [1, 2] и обзоры [3, 4]). Происхождение силы самодействия связано с инерционными свойствами электромагнитного поля: излучение, испускаемое ускоренной частицей, уносит импульс, тормозя тем самым частицу. Другими словами, сила самодействия является реакцией излучения. Ковариантная 4-сила самодействия частицы с зарядом e и 4-скоростью u^μ в пространстве-времени Минковского описывается известной формулой Дирака – Лоренца

$$F_{DL}^\mu = \frac{2e^2}{3} \frac{D^2 u^\nu}{ds^2} (\delta_\nu^\mu + u^\mu u_\nu), \quad (1)$$

где δ_ν^μ — символ Кронекера. Эта сила, подробно изученная как в релятивистской, так и в нерелятивистской областях [1, 2], может вызывать существенные эффекты. Например, если заряженная частица движется

¹ Система единиц, принятая в обзоре, и основные величины определены в приложении.

Н.Р. Хуснутдинов. Казанский государственный педагогический университет, физический факультет, 420021 Казань, ул. Межлаук 1, Российская Федерация
Тел. (8432) 92-53-73. Факс (8432) 92-42-69
E-mail: nail@theory.kazan-spu.ru

Статья поступила 15 декабря 2004 г.,
после доработки 8 февраля 2005 г.

в электромагнитном поле, то сила самодействия существенно влияет на закон ее движения. Это приводит к тому, что энергия частицы после пролета области, заполненной электромагнитным полем, не может превысить некоторую пороговую величину, определяемую электромагнитным полем [2, с. 272].

Отметим основные особенности силы Дирака – Лоренца в плоском пространстве-времени (1). Во-первых, она пропорциональна производной от ускорения частицы и поэтому равна нулю для покоящейся, равномерно движущейся или равноускоренной частицы. Во-вторых, формула для силы самодействия (1) является справедливой для любой траектории движения частицы и не зависит от электромагнитного поля.

В общей теории относительности описание эффекта самодействия сильно усложняется, поскольку в рамках этой теории любой вид энергии "тяготеет", в том числе и поля. Это приводит к невозможности получения в явном виде функции Грина электромагнитного поля в произвольном внешнем гравитационном поле. Необходимо вычислять функцию Грина для каждой конфигурации гравитационного поля. Локальное разложение функции Грина полей в гравитационном поле [5] показывает, что кроме стандартных слагаемых появляется бесконечное множество дополнительных членов, зависящих от внешнего гравитационного поля. В пространстве-времени с четной размерностью меняется также структура сингулярностей функции Грина — кроме стандартной полюсной части появляется логарифмическая расходимость. В конечном счете это приводит к нарушению принципа Гюйгенса в том смысле, что плоская или сферическая световая волна, распространяясь в искривленном пространстве-времени, теряет свою форму, приобретая "хвосты" [6]. Свободная частица как локальный объект стремится, в соответствии с принципом эквивалентности, двигаться по геодезической линии. Связанное с частицей электромагнитное поле является нелокальным, протяженным объектом, для которого гравитационное поле служит средой распространения, приводящей к рассеянию. По этой причине кроме силы самодействия Дирака – Лоренца (1) появляется дополнительная, гравитационно-индуцированная сила самодействия, которая связана как с электромагнитным, так и гравита-

ционными полями частицы, поскольку гравитационное излучение также вызывает реакцию. Впервые анализ электромагнитной силы самодействия для заряженной частицы в произвольном гравитационном поле был проведен в работе Де Витта и Брема [6]; впоследствии этот анализ был дополнен Хоббсом [7, 8]. Получено следующее уравнение движения частицы с учетом силы самодействия:

$$m \frac{Du^\mu}{ds} = eF_{\text{ext}}^{\mu\nu} u_\nu + \frac{2e^2}{3} \frac{D^2 u^\nu}{ds^2} (\delta_\nu^\mu + u^\mu u_\nu) + \frac{e^2}{3} R_\beta^\nu u^\beta (\delta_\nu^\mu + u^\mu u_\nu) + e^2 u^\alpha \int_{-\infty}^s f_{\alpha\beta}^\mu u^{\beta'}(s') ds'. \quad (2)$$

Первое слагаемое в правой части (2) описывает электромагнитную силу Лоренца, действующую со стороны внешнего поля F_{ext} . Второе слагаемое представляет собой ковариантно-обобщенное выражение для силы Дирака – Лоренца (1). Третий член, полученный Хоббсом [7, 8], появляется вследствие локального распределения материи-энергии. Наконец, последнее, нелокальное слагаемое зависит от всей предыстории движения заряда. Происхождение этого слагаемого связано с рассеянием электромагнитного излучения гравитационным полем (на кривизне) и, как отмечалось выше, его появление в конечном счете приводит к нарушению принципа Гюйгенса. Подынтегральная функция $f_{\alpha\beta}^\mu$, которая не может быть получена в общем виде, зависит от кривизны пространства-времени. Поскольку, как будет видно ниже, функция $f_{\alpha\beta}^\mu$ удовлетворяет тождеству $u_\mu f_{\alpha\beta}^\mu = 0$, то выражение (2) для силы самодействия сохраняет условие перпендикулярности скорости и ускорения частицы.

Необходимо подчеркнуть коренные отличия гравитационно-индуцированной силы самодействия (2) от силы самодействия Дирака – Лоренца (1). Во-первых, гравитационно-индуцированная часть в выражении (2) в общем случае содержит не только локальное, но и нелокальное слагаемое, зависящее от всей предыстории движения заряда. Другими словами, гравитационно-индуцированная сила самодействия зависит как от локальных, так и глобальных свойств пространства-времени. Во-вторых, она зависит не от производной от ускорения, а от скорости и, таким образом, может быть отличной от нуля даже для покоящейся частицы.

Отметим кратко главные моменты вывода формулы (2), который основан на методе первоначально предложенном Дираком [9] для вывода силы самодействия в плоском пространстве-времени Минковского. Исходным уравнением является уравнение баланса энергии между частицей и полем, принимающее в отсутствие внешних сил негравитационной природы вид ковариантного закона сохранения суммарного тензора энергии-импульса частицы и поля

$$T^{\mu\nu}_{; \nu} = 0, \quad (3a)$$

где тензор энергии-импульса $T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}_{\text{mech}} + T^{\mu\nu}_{\text{el}}$ имеет две составляющие: механическую

$$T^{\mu\nu}_{\text{mech}}(x) = m_0 \int g_{\alpha}^{\mu}(x, x(s)) g_{\beta}^{\nu}(x, x(s)) \times u^{\alpha}(s) u^{\beta}(s) \delta^{(4)}(x - x(s)) \frac{ds}{\sqrt{-g}} \quad (3б)$$

и электромагнитную

$$T^{\mu\nu}_{\text{el}}(x) = \frac{1}{4\pi} \left(F^{\mu\alpha} F^{\nu}_{\alpha} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right). \quad (3в)$$

Здесь $g_{\alpha}^{\mu}(x, x')$ — бивектор параллельного переноса вдоль геодезической, соединяющей точки x' и x .

Затем это уравнение интегрируется по мировой трубке радиусом ε и длиной ds , окружающей мировую линию частицы, а в конце вычислений радиус трубки устремляют к нулю. Поскольку левая часть уравнения (3a) является вектором в точке x , необходимо вначале параллельно перенести этот вектор в точку, лежащую на мировой линии частицы внутри интервала ds , и затем уже интегрировать полученный бискаляр. Эта процедура приводит к следующему уравнению движения:

$$m_0 \frac{Du^\mu}{ds} ds = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int g_{\alpha}^{\mu}(x, x') T^{\alpha\beta'} d\Sigma_{\beta'}. \quad (4)$$

Левая часть соотношения (4) связана с механической частью тензора энергии импульса (3б), тогда как в правую часть вклад дает электромагнитная составляющая (3в).

Первый член разложения по степеням ε в правой части (4) расходится как $1/\varepsilon$. Поскольку структура этого слагаемого совпадает со структурой левой части, эту расходимость можно исключить, определив "наблюдаемую" массу m частицы как

$$m = m_0 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^2}{2\varepsilon}. \quad (5)$$

Стремящийся к бесконечности вклад фактически означает вклад от бесконечной собственной электромагнитной энергии частицы. Следующие слагаемые, конечные в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$, приводят к выражению (2), в котором функция

$$f_{\mu\nu\alpha} = v_{\mu\alpha'; \nu} - v_{\nu\alpha'; \mu} \quad (6)$$

выражается через бивектор $v_{\mu\nu'}$, определяемый фейнмановской векторной функцией Грина в форме Адамара

$$G_{\mu\nu'}^F(x, x') = \frac{1}{(2\pi)^2} \left\{ \frac{\Delta^{1/2}}{\sigma + i0} g_{\mu\nu'} + v_{\mu\nu'} \ln(\sigma + i0) + w_{\mu\nu'} \right\}. \quad (7)$$

Здесь $\sigma(x, x') = s^2/2$, s — интервал между точками x и x' вдоль кратчайшей из геодезических, их соединяющих; $g_{\mu\nu'}$ — бивектор параллельного переноса вдоль этой геодезической;

$$\Delta(x, x') = \frac{\det(\sigma_{;\mu\nu'}(x, x'))}{\det(g_{\mu\nu'}(x, x'))}$$

— определитель Ван Флека – Моррета. Величины $v_{\mu\nu'}$ и $w_{\mu\nu'}$ не имеют особенностей в пределе совпадения, когда $\sigma \rightarrow 0$. Можно также выразить величину $f_{\mu\nu\alpha}$ непосредственно через векторную запаздывающую функцию Грина следующим образом:

$$f_{\mu\nu\alpha} = 4\pi(G_{\nu\alpha'; \mu}^{\text{ret}} - G_{\mu\alpha'; \nu}^{\text{ret}}).$$

Такое представление предпочтительнее [10], поскольку выражение (7) для функции Грина в форме Адамара

корректно определено только локально. Происхождение нелокального слагаемого в уравнении (1) связано с тем, что запаздывающая функция Грина, получаемая из (7) и необходимая для вычисления правой части (4),

$$G_{\mu\nu'}^{\text{ret}}(x, x') = \frac{\theta(x, x')}{4\pi} \{ \Delta^{1/2} g_{\mu\nu'} \delta(\sigma) - v_{\mu\nu'} \theta(-\sigma) \},$$

содержит как локальный, так и нелокальный вклады. Здесь функция $\theta(x, x')$ определяется таким образом, что она равна единице, если событие x находится в причинном будущем события x' , и нулю в противоположном случае; $\theta(x)$ — обычная ступенчатая функция.

Более тщательное исследование эффекта самодействия в локальном репере было проведено Хоббсом [7], который устранил некоторые неточности работы [6] и получил выражение (2) с учетом локального слагаемого, пропорционального тензору Риччи. Используя уравнения Эйнштейна, это слагаемое можно выразить через локальное распределение материи-энергии.

Общие заключения о структуре гравитационно-индуцированной силы самодействия и ее нелокального слагаемого можно сделать для конформно-плоских пространств [8], а также в приближении слабого гравитационного поля и нерелятивистского движения частиц [11]. Для конформно-плоских пространств бивектор $v_{\mu\nu'}$ является градиентом скалярной функции: $v_{\mu\nu'} = \Phi_{,\mu\nu'}$. По этой причине $f_{\mu\nu\alpha'} = 0$ и нелокальное слагаемое оказывается тоже равным нулю. Остается только локальная часть силы самодействия [8]. Вычисления в приближении слабого гравитационного поля и нерелятивистских частиц были проделаны в работе Де Виттов [11]. В таком приближении нелокальные уравнения движения (2) становятся локальными. Причина заключается в том, что эффекты запаздывания, приводящие к нелокальности, в случае нерелятивистского движения становятся несущественными [11]. В этом случае на заряд кроме силы самодействия Дирака – Лоренца (точка обозначает производную по времени $\dot{\mathbf{v}} = d\mathbf{v}/dt$)

$$\mathbf{f}_{\text{DL}} = \frac{2}{3} e^2 \ddot{\mathbf{v}}$$

(нерелятивистская форма выражения (1)) действует дополнительная, гравитационно-индуцированная сила самодействия

$$\mathbf{f}_G = e^2 \int \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^4} \varrho(\mathbf{x}') d^3x',$$

где $\varrho(\mathbf{x}')$ — плотность материи, порождающей слабое гравитационное поле. Полное уравнение движения в этом случае имеет вид

$$m(\dot{\mathbf{v}} + \nabla U) = \mathbf{f}_{\text{DL}} + \mathbf{f}_G,$$

где

$$U(\mathbf{x}) = - \int \frac{\varrho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'$$

является гравитационным потенциалом материи.

2. Сила и энергия самодействия в пространствах черных дыр

Дальнейшие исследования были связаны с конкретными пространствами и траекториями движения частиц.

Много работ посвящено исследованию явления самодействия в пространствах Шварцшильда,

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (8)$$

Райснера – Нордстрема,

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (9)$$

и Керра,

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma} \right) dt^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 - \frac{4JMr \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\varphi + \sin^2 \theta \left(r^2 + J^2 + \frac{2J^2 Mr \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) d\varphi^2. \quad (10)$$

Здесь $\Sigma = r^2 + J^2 \cos^2 \theta$, $\Delta = r^2 - 2Mr + J^2$, а M , Q и J — соответственно масса, заряд и угловой момент черной дыры. Элемент длины (8) описывает статическую массивную (массой M) черную дыру, образовавшуюся в результате коллапса массивного тела; формула (9) описывает массивную заряженную (зарядом Q) черную дыру и, наконец, (10) описывает массивную, стационарную, вращающуюся с угловым моментом J черную дыру. Горизонтом событий черной дыры (8) является радиус Шварцшильда $r_S = 2M$, черной дыры Райснера – Нордстрема — величина $r_Q = M + \sqrt{M^2 - Q^2}$, а черная дыра Керра имеет горизонт событий $r_J = M + \sqrt{M^2 - J^2}$. В этих пространствах результаты, полученные Де Виттами [11], непосредственно не применимы, поскольку гравитационное поле не является всюду слабым.

В статье Смита и Уилла [12] была исследована сила самодействия для покоящейся заряженной частицы в поле Шварцшильда. Первоначально этот вопрос обсуждался в работе Виленкина [13] для частиц, расположенных далеко от черной дыры. В этом случае все слагаемые в правой части (2) за исключением последнего равны нулю; частица отталкивается от черной дыры в радиальном направлении, а сила самодействия для частицы, находящейся в точке с координатой r , имеет вид

$$F_{\text{em}}^r = \frac{rs e^2}{2r^3} \sqrt{1 - \frac{r_S}{r}}, \quad |\mathbf{F}_{\text{em}}| = \frac{rs e^2}{2r^3}, \quad (11)$$

где $r_S = 2M$ — радиус Шварцшильда черной дыры. Эта формула была получена как в локальном, так и глобальном подходах.

Локальный подход, аналогичный методу Де Витта и Брема [6], основан на вычислении плотности внешней силы \mathcal{F}^μ , необходимой для поддержания в равновесии частицы в поле Шварцшильда, которая имеет вид 4-дивергенции:

$$\mathcal{F}^\mu = T^{\mu\nu}_{;\nu}, \quad (12)$$

где тензор энергии-импульса содержит две составляющие — механическую (3б) и электромагнитную (3в). Затем выражение для плотности силы (12) интегрируется в системе отсчета свободно падающего наблюдателя по шару радиусом ε , окружающему частицу, и в конце вычислений радиус сферы устремляют к нулю.

Для вычисления силы самодействия необходимо определить в явном виде электромагнитный 4-потенциал частицы в поле Шварцшильда, который зависит от траектории частицы. Для покоящейся в точке x_p частицы электромагнитный потенциал был получен Копсоном в работе [14]. Нулевая компонента векторного потенциала имеет следующий вид:

$$A_0^{\text{part}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_p) = \frac{e}{r_p r} \frac{(r-M)(r_p-M) - M^2 \cos \chi}{R}, \quad (13)$$

$$R^2 = (r-M)^2 + (r_p-M)^2 - 2(r-M)(r_p-M) \cos \chi - M^2 \sin^2 \chi,$$

где $\cos \chi = \cos \theta \cos \theta_p + \sin \theta \sin \theta_p \cos(\varphi - \varphi_p)$. Этот потенциал "неправильно" ведет себя на бесконечности:

$$A_0^{\text{part}}|_{r \rightarrow \infty} \approx \frac{e}{r} \frac{r_p - M}{r_p}.$$

На бесконечно большом расстоянии от черной дыры и частицы пространство-время становится плоским и электромагнитный потенциал частицы должен выражаться в кулоновском виде. Потенциал (13) имеет кулоновский вид только в том случае, когда частица находится далеко от черной дыры в асимптотически плоской области.

Для решения этой проблемы в работе [15] было предложено к решению (13) добавить решение однородного уравнения

$$A_0^{\text{hom}} = \frac{eM}{rr_p}. \quad (14)$$

В этом случае суммарный потенциал $A_0 = A_0^{\text{part}} + A_0^{\text{hom}}$,

$$A_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_p) = \frac{e}{r_p r} \frac{(r-M)(r_p-M) - M^2 \cos \chi}{R} + \frac{eM}{rr_p}, \quad (15)$$

имеет кулоновский вид на бесконечности

$$A_0|_{r \rightarrow \infty} \approx \frac{e}{r}, \quad (16)$$

а на горизонте черной дыры, при $r = 2M$ является постоянной величиной,

$$A_0|_{r=2M} = \frac{e}{r_p}. \quad (17)$$

Заряд, находящийся на горизонте черной дыры, создает кулоновское электрическое поле

$$A_0|_{r_p=2M} = \frac{e}{r}. \quad (18)$$

Потенциал заряженной частицы A_0 , покоящейся в поле Шварцшильда, в виде разложения по сферическим гармоникам и с учетом дополнительного слагаемого (14) был получен также в работах [16, 17].

Для полноты изложения приведем соответствующие формулы для других черных дыр. Электростатический

потенциал заряженной частицы в пространстве-времени черной дыры Райснера–Нордстрема (9) был получен в работе [18] (см. также [19]):

$$A_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_p) = \frac{e}{r_p r} \frac{(r-M)(r_p-M) - (M^2 - Q^2) \cos \chi}{R_Q} + \frac{eM}{rr_p},$$

$$R_Q^2 = (r-M)^2 + (r_p-M)^2 - 2(r-M)(r_p-M) \cos \chi - (M^2 - Q^2) \sin^2 \chi. \quad (19)$$

Легко видеть, что для этого потенциала выполняются те же условия (16)–(18), в которых в качестве радиуса Шварцшильда необходимо принять величину $r_Q = M + \sqrt{M^2 - Q^2}$.

Для частицы, находящейся на оси симметрии черной дыры Керра (10), электромагнитный потенциал получен в работе Лете [20]:

$$A_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_p) = \frac{e}{(r_p^2 + J^2)\Sigma} \left[(r_p r + J^2 \cos \theta) \times \left(M + \frac{(r-M)(r_p-M) - (M^2 - J^2) \cos \theta}{R_J} \right) + J^2 (r - r_p \cos \theta) \frac{(r-M) - (r_p-M) \cos \theta}{R_J} \right],$$

$$A_\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_p) = -\frac{eJ}{(r_p^2 + J^2)} \left\{ \frac{\sin^2 \theta}{\Sigma} \left[(r_p r + J^2 \cos \theta) \times \left(M + \frac{(r-M)(r_p-M) - (M^2 - J^2) \cos \theta}{R_J} \right) + J^2 (r - r_p \cos \theta) \frac{(r-M) - (r_p-M) \cos \theta}{R_J} \right] - R_J + (r - r_p \cos \theta) \frac{(r-M) - (r_p-M) \cos \theta}{R_J} - M(1 - \cos \theta) \right\},$$

$$R_J^2 = (r-M)^2 + (r_p-M)^2 - 2(r-M)(r_p-M) \cos \theta - (M^2 - J^2) \sin^2 \theta.$$

Если поместить заряд на горизонте керовской черной дыры, т.е. положить $r_p = r_J = M + \sqrt{M^2 - J^2}$, то потенциал заряда в полном соответствии с электромагнитным потенциалом вне черной дыры Керра–Ньюмена (см., например, [21]) будет иметь следующие ненулевые компоненты:

$$A_0 = \frac{er}{\Sigma}, \quad A_\varphi = -\frac{eJr \sin \theta}{\Sigma}.$$

Использование потенциала A_0 (15) в уравнении (12) приводит к силе самодействия (11). При получении выражения для силы необходимо сделать бесконечную перенормировку массы частицы, в соответствии с которой наблюдаемой является масса

$$m = m_{\text{bare}} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^2}{2\varepsilon}.$$

Бесконечное слагаемое возникает из электромагнитной части тензора энергии-импульса.

Глобальный подход основан на использовании закона сохранения энергии: работа силы по виртуаль-

ному радиальному перемещению заряда равна силе, умноженной на перемещение. Эта энергия переносится на бесконечность, и бесконечно удаленный наблюдатель измеряет изменение массы δM системы, которое может быть вычислено по формуле Картера [22] через вариацию площади поверхности горизонта δA и поверхностную гравитацию черной дыры κ :

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi} \delta A - \frac{1}{8\pi} \delta \int G_0^0 \sqrt{-g} d^3x + \frac{1}{16\pi} \int G^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^3x,$$

где $G_{\mu\nu}$ — тензор Эйнштейна. При достаточно медленном перемещении частицы энергия через горизонт не переносится и $\delta A = 0$. Последнее слагаемое тоже равно нулю, поскольку мы рассматриваем *пробную* частицу на фоне метрики Шварцшильда. Таким образом, остается только одно слагаемое, которое, используя уравнения Эйнштейна, можно переписать следующим образом:

$$\delta M = -\delta \int T_0^0 \sqrt{-g} d^3x.$$

Оба подхода дают одинаковый результат — суммарная сила, необходимая для поддержания в равновесии частицы в поле Шварцшильда, имеет вид

$$F_{\text{em}}^r = \frac{r_s m}{2r^2} - \frac{r_s e^2}{2r^3} \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}.$$

Отношение силы самодействия (второе слагаемое) к гравитационной силе притяжения (первое слагаемое)

$$\delta = \frac{\lambda}{r} \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}$$

достигает максимума на расстоянии $r_* = (3/2)r_s$, имея величину в максимуме

$$\delta = \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{\lambda}{r_s},$$

где $\lambda = e^2/m$. При критическом значении радиуса Шварцшильда, $r_s = 2\lambda/(3\sqrt{3})$, сила самодействия компенсирует гравитационное притяжение к черной дыре.

При замене электромагнитного поля массивным векторным полем Прока сила самодействия только меняет знак [13], оставаясь той же самой по величине (11), и частица будет притягиваться к черной дыре. Причина этого заключается в том, что требование конечности тензора энергии-импульса на горизонте черной дыры приводит к различным граничным условиям для 4-потенциалов безмассового электромагнитного и массивного полей [23, 24]. Тензор энергии-импульса электромагнитного поля (Зв) содержит только производные 4-потенциала, тогда как в тензоре энергии-импульса массивного поля Прока

$$T_{\text{Pr}}^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(H^{\mu\alpha} H_{\alpha}^{\nu} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} H^{\alpha\beta} H_{\alpha\beta} - \frac{m_B^2}{\hbar^2} \left[B^{\mu} B^{\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} B_{\alpha} B^{\alpha} \right] \right)$$

имеются слагаемые, пропорциональные квадрату массы поля m_B^2 и содержащие 4-потенциал в явном виде, без производных. (Здесь $H_{\mu\nu} = B_{\mu;\nu} - B_{\nu;\mu}$.) Из этого следует,

что физически осмысленные решения уравнений Прока должны, во-первых, удовлетворять граничному условию $B_0|_{r=2M} = 0$ на горизонте черной дыры [13, 23, 24], во-вторых, инвариант $B_{\mu} B^{\mu}$ должен быть конечен на горизонте черной дыры. Чтобы удовлетворить этим условиям, необходимо добавить подходящие решения однородного уравнения, не зависящие от массы поля, которые, в конечном счете, меняют знак силы самодействия. Хотя безмассовый предел в тензоре энергии-импульса не имеет особенностей, это не относится к граничным условиям. При малых значениях массы векторного поля $(m_B/\hbar)^{-1} \gg M$ и на расстояниях $M \ll r$, $r_p \ll (m_B/\hbar)^{-1}$ нулевая компонента B_0 векторного потенциала поля Прока имеет следующий вид [13]:

$$B_0 \approx A_0 - \frac{2Me}{rr_p} = A_0^{\text{part}} + \frac{Me}{rr_p},$$

где A_0 — нулевая компонента электромагнитного потенциала (15), рассмотренного выше. Таким образом, на горизонте черной дыры полученный потенциал равен нулю: $B_0|_{r=2M} = 0$, и в соответствии с теоремой об отсутствии "волос" заряд, находящийся на горизонте черной дыры, не создает поля вне дыры: $B_0|_{r_p=2M} = 0$. Как видно из вышеприведенной формулы, добавочное к решению Копсона слагаемое не зависит от массы поля m_B и в отличие от электромагнитного случая имеет другой знак. На большом расстоянии от черной дыры поле Прока описывается суперпозицией полей точечного заряда e и заряда $e' = -2Me/r_p$, находящегося под горизонтом черной дыры:

$$B_0|_{r \rightarrow \infty} \approx \frac{e^2}{r} - \frac{2Me}{rr_p}.$$

Причина такого различия массивного и безмассового векторного полей кроется в калибровочной инвариантности последнего. Потенциал электромагнитного поля не наблюдаем вследствие калибровочной инвариантности теории. Наблюдаемыми являются электрическое и магнитное поля. Массивное векторное поле Прока не обладает калибровочной инвариантностью, и наблюдаемой величиной является потенциал этого поля. Используя калибровочную инвариантность электромагнитного поля, всегда можно добиться "правильного" поведения потенциала на бесконечности и регулярности плотности энергии поля на горизонте. Требование конечности плотности энергии поля Прока на горизонте вместе с отсутствием калибровочной инвариантности теории приводит к различным граничным условиям на бесконечности, не зависящим от массы поля. Такое различие тесно связано с теоремой об отсутствии "волос" у черной дыры. Электромагнитный потенциал, создаваемый частицей, находящейся на горизонте черной дыры, не равен нулю, а имеет в точности кулоновский вид

$$A_0|_{r_p=2M} = \frac{e}{r},$$

и, таким образом, заряд, пересекая горизонт черной дыры, оставляет вне дыры электрический "волос". В случае массивного поля Прока ситуация иная. Заряд, пересекая горизонт, не оставляет "волос" во внешней области поля:

$$B_0|_{r_p=2M} = 0.$$

В случае скалярной частицы со скалярным зарядом q и с минимально связанным безмассовым полем сила самодействия для покоящейся частицы равна нулю [19, 25–28] как в поле Шварцшильда, так и в поле Райснера – Нордстрема. Для движущейся в поле Шварцшильда [26] или же покоящейся в поле Керра [29, 30] скалярной частицы это уже несправедливо. Уравнения движения для скалярной частицы аналогичны уравнению движения в электродинамике (2) [31]. Необходимо только сделать замены $e^2 \rightarrow q^2/2$ и

$$e^2 u^\alpha f^\mu_{\alpha\beta} u^{\beta'} \rightarrow q^2 (g^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu) G_{\nu},$$

где G — скалярная функция Грина.

Скалярный потенциал, создаваемый скалярным зарядом q , находящимся в точке x_p , имеет вид

$$V^{\text{part}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_p) = -\frac{q}{R} \sqrt{\frac{r_p - 2M}{r_p}}. \quad (20)$$

На больших расстояниях от черной дыры ($r \gg r_p$)

$$V^{\text{part}}|_{r \rightarrow \infty} \approx -\frac{q}{r} \sqrt{\frac{r_p - 2M}{r_p}}.$$

Скалярный заряд, находящийся на горизонте черной дыры, не создает скалярного поля вне черной дыры: $V^{\text{part}}|_{r_p=2M} = 0$, в соответствии с теоремой об отсутствии "волос". Последнее связано со структурой скалярного тока [26]. Дело в том, что для покоящегося скалярного заряда (спин 0) плотность тока имеет одну компоненту, которая пропорциональна $q/u^t = q\sqrt{g_{tt}}$, в то время как t -компонента электромагнитной плотности тока (спин 1) пропорциональна $eu^t/u^t = e$, а для tt -компоненты плотности энергии тензорного (ранг 2) поля имеем $m(u^t)^2/u^t = m/\sqrt{g_{tt}}$. Здесь g_{tt} является tt -компонентой метрики.

Потенциал, наведенный зарядом на горизонте черной дыры,

$$V^{\text{part}}|_{r=2M} = -\sqrt{\frac{r_p - 2M}{r_p}} \frac{q}{r_p - M - M \cos \chi}$$

не является постоянной величиной, как в случае электромагнитного поля, а зависит от положения заряда. В конечном счете потенциал (20) приводит к нулевой силе самодействия для покоящейся в поле Шварцшильда скалярной частицы. Если скалярное поле не является минимально связанным, то сила самодействия для покоящейся частицы уже не равна нулю [19, 28]. В этом случае имеется только радиальная составляющая силы

$$F_{\text{sc}}^r = \xi \frac{q^2 r_S}{r^3} \sqrt{1 - \frac{r_S}{r}}, \quad |F_{\text{sc}}| = \xi \frac{q^2 r_S}{r^3},$$

пропорциональная константе неминимальной связи ξ . Значения $\xi > 0$ соответствуют отталкиванию частицы от дыры.

В работах Паркера [32, 33] сила самодействия была вычислена для свободно падающего в поле Шварцшильда атома. Показано, что она равна нулю для электронейтрального атома. Объяснение этому следующее. Как было рассмотрено выше, для "правильного" поведения потенциала заряда на бесконечности к реше-

нию Копсона A_0^{part} (13) необходимо добавить решение однородного уравнения A_0^{hom} (14). Тогда локальное разложение потенциала вблизи заряда кроме кулоновской части, которую можно получить из (13), будет содержать дополнительное слагаемое вида $-eK_i \Delta x^i$, происхождение которого связано с добавленным решением однородного уравнения (14). Здесь $K_r = 1/r_p^2$, а остальные компоненты равны нулю. Это слагаемое отвечает не только за возникновение силы самодействия, но и за дополнительное взаимодействие с ядром. Сила самодействия (отталкивание), действующая на электрон атома, имеет вид: $f_i = e^2 K_i$, в то время как сила притяжения к ядру с зарядом Z равна $f'_i = -Ze^2 K_i$. Таким образом, суммарная сила, действующая на заряд, $F_i = (1 - Z)e^2 K_i$, или на атом с Z' электронами, $F_i = (Z' - Z)e^2 K_i$, будет равна нулю для электронейтрального атома. Таким образом, в электронейтральном атоме сила самодействия (отталкивание), действующая на электронные облака, компенсируется дополнительной силой притяжения к ядру.

В работе [33] также было показано, что другие компоненты векторного потенциала A_k тоже содержат дополнительные слагаемые, которые вблизи заряда имеют вид $-eL_{kj} \Delta x^j$, где величины L_{kj} образуют антисимметричную матрицу с постоянными коэффициентами. Эти слагаемые приводят к тому, что в месте нахождения заряда появляется магнитное поле $B_i = -e\epsilon_{ijk} L_{kj}$, действующее на заряд, определяющее силу, которую можно назвать силой самокручения (self-torque), $f'_j = -2e\mu_k L_{kj}$, где μ_k — магнитный дипольный момент электрона. По аналогии с рассмотренным выше случаем можно заключить, что для электронейтрального атома сила самокручения, действующая на электронные облака, компенсируется вследствие взаимодействия с ядром силой такой же величины. Таким образом, мы заключаем, что на свободно падающий электронейтральный атом не действуют дополнительные силы самодействия. Подчеркнем, что K_i и L_{kj} зависят только от глобальных свойств пространства-времени.

В недавних работах Лине [34–37] получено выражение для потенциала самодействия в сферически симметричных пространствах с элементом длины

$$ds^2 = -N^2(r) dt^2 + B^2(r)(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (21)$$

Электростатический потенциал самодействия частицы, покоящейся в точке r_p в пространстве черной дыры с поверхностной гравитацией $\kappa = N'(r_h)/B(r_h)$, имеет вид

$$U^{\text{em}}(r_p) = \frac{1}{2} e^2 s [a(r_p)]^2, \quad s = \frac{1}{a(r_h)} \left(1 - \frac{\kappa}{a(r_h)}\right), \quad (22)$$

где

$$a(r) = \int_r^\infty \frac{N(r)}{r^2 B(r)} dr$$

является потенциалом единичного заряда, находящегося под горизонтом, а r_h — радиус горизонта черной дыры. Суть подхода состоит в следующем. Электростатический потенциал, создаваемый заряженной частицей, находящейся вне горизонта черной дыры (21), представляется в

виде суммы решения в форме Адамара (в случае шварцшильдовской черной дыры — (13), а дыры Райснера – Нордстрема — (19)) и решения однородного уравнения Максвелла (уравнение (14) для шварцшильдовской черной дыры). Потенциал является симметричной функцией относительно положения заряда и точки наблюдения поля. Решение однородного уравнения Максвелла представляется в виде $esa(r)a(r_p)$, где $a(r) = A_0/e$ — потенциал, создаваемый единичным зарядом, находящимся под горизонтом (вне дыры — это центрально-симметричное решение однородных уравнений). Коэффициент пропорциональности s находится из теоремы Гаусса — поток поля через замкнутую поверхность, окружающую заряд, равен $4\pi e$. Вычисление энергии при такой конфигурации с учетом бесконечной перенормировки массы приводит к выражению (22).

Вычисления такого рода проводились в связи с оценкой верхней границы энтропии черной дыры [37–40], впервые полученной Заславским [41]. Дело в том, что при пересечении заряженной частицей горизонта черной дыры энергия самодействия также поглощается дырой, что должно приводить к изменению верхней границы энтропии. Было получено следующее ограничение на энтропию черной дыры:

$$S \leq 2\pi ml + \frac{\pi e^2}{\kappa} (sa(r_h) - 1) a(r_h), \quad (23)$$

что с учетом (22) дает

$$S \leq 2\pi \left(ml - \frac{1}{2} e^2 \right), \quad (24)$$

где m , l , e — масса, радиус и заряд объекта соответственно. Интересным является то, что известная оценка (24), согласно которой верхняя граница энтропии не зависит от параметров черной дыры, является следствием более глубокой формулы (23), в которой верхняя граница зависит как от параметров черной дыры, так и от энергии самодействия.

Энергия и сила самодействия электромагнитной и скалярной частиц в пространстве заряженной черной дыры Райснера – Нордстрема (9) были изучены в работе Зельникова и Фролова [19]. Было показано, что сила имеет только радиальную составляющую, и получены выражения для сил самодействия электромагнитной,

$$F_{\text{em}}^r = \frac{r_s e^2}{2r^3} \sqrt{1 - \frac{r_s}{r} + \frac{Q^2}{r^2}}, \quad |\mathbf{F}_{\text{em}}| = \frac{r_s e^2}{2r^3},$$

и скалярной,

$$F_{\text{sc}}^r = \frac{2\xi q^2}{r^3} \sqrt{M^2 - Q^2} \sqrt{1 - \frac{r_s}{r} + \frac{Q^2}{r^2}},$$

$$|\mathbf{F}_{\text{sc}}| = \frac{2\xi q^2}{r^3} \sqrt{M^2 - Q^2},$$

частиц. Полная энергия частицы, покоящейся в поле такой черной дыры,

$$E_{\text{em}} = m_{\text{em}} \sqrt{1 - \frac{r_s}{r} + \frac{Q^2}{r^2}} + \frac{e^2 r_s}{4r^2}$$

является суммой энергии покоя частицы и энергии самодействия. Бесконечная собственная электромагнитная

энергия устраняется классической перенормировкой массы:

$$m_{\text{em}} = m_{\text{bare}} + \frac{e^2}{2\varepsilon}.$$

Для скалярной частицы соответственно имеем

$$E_{\text{sc}} = m_{\text{sc}} \sqrt{1 - \frac{r_s}{r} + \frac{Q^2}{r^2}} - \frac{\xi q^2 \sqrt{M^2 - Q^2}}{r^2},$$

где

$$m_{\text{sc}} = m_{\text{bare}} - \frac{q^2}{2\varepsilon}.$$

Сила самодействия в поле вращающейся черной дыры с метрикой Керра вычислена Гальцовым в работах [29, 42] для безмассовых полей спина 0, 1, 2, а в частном случае, соответствующем электромагнитному полю и положению частицы на оси симметрии, — Лете и Лине [30]. Метод вычислений в работе [29] основан на использовании радиационной функции Грина (полуразности запаздывающей и опережающей функций Грина) — части функции Грина, описывающей излучение. Было показано, что сила самодействия, действующая на покоящуюся в поле Керра частицу, имеет азимутальные составляющие

$$F_{\varphi}^{\text{sc}} = -\frac{1}{3} J q^2 M^2 \frac{\sin^2 \theta}{r^4},$$

$$F_{\varphi}^{\text{el}} = -\frac{2}{3} J e^2 M^2 \frac{\sin^2 \theta}{r^4},$$

$$F_{\varphi}^{\text{gr}} = -\frac{8}{5} J m^2 M^4 \frac{\sin^2 \theta}{r^6} \left(1 + \frac{3J^2}{4M^2} (5 \sin^2 \theta - 1) \right)$$

соответственно для скалярной, электромагнитной и массивной частиц ($r \gg M$). Здесь J — угловой момент черной дыры; q , e , m — скалярный, электромагнитный заряды и масса частицы соответственно. Вращающаяся черная дыра стремится сдвинуть частицу в направлении своего вращения. Поэтому вращение черной дыры вследствие сохранения суммарного углового момента замедляется. Это явление, обсуждавшееся ранее в работе Хокинга и Хартля [43], получило название приливного трения.

Гравитационной силе самодействия, возникающей вследствие реакции гравитационного излучения, посвящено множество работ, основанных на различных методах. Подход, аналогичный подходу Де Витта и Брема, был применен в работе [44] в первом приближении по массе пробной частицы, т.е. в приближении слабого гравитационного поля. Получено следующее уравнение движения частицы с учетом силы самодействия:

$$m \frac{Du^{\alpha}}{ds} = -m \left(\frac{1}{2} u^{\alpha} u^{\beta} u^{\gamma} u^{\delta} + g^{\alpha\beta} u^{\gamma} u^{\delta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} u^{\beta} u^{\gamma} - \frac{1}{4} u^{\alpha} g^{\beta\gamma} u^{\delta} - \frac{1}{4} g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma} \right) \psi_{\beta\gamma;\delta}(x(s)), \quad (25)$$

где

$$\psi_{\mu\nu}(x(s)) = \mp 2m \int_{\mp\infty}^{s_2} ds' v_{\mu\nu\alpha'\beta'}(x(s); x(s')) u^{\alpha'}(s') u^{\beta'}(s'), \quad (26)$$

верхний и нижний знаки соответствуют запаздывающим и опережающим граничным условиям. Величина $\psi_{\mu\nu}$ описывает "хвостовую" часть возмущения метрики $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$:

$$\psi_{\mu\nu}(x) = h_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x)h(x),$$

точечной частицей, движущейся по траектории $z^\alpha(s)$. Полное решение является суммой "хвостовой" $\psi_{(v)\mu\nu}$ и локальной $\psi_{(u)\mu\nu}$ частей. Как и в случае электромагнитной силы самодействия (2), "хвостовая" часть возмущения метрики определяется логарифмической частью функции Грина

$$G_F^{\mu\nu\alpha'\beta'}(x, x') = \frac{1}{(2\pi)^2} \left(\frac{u^{\mu\nu\alpha'\beta'}}{\sigma + i0} + v^{\mu\nu\alpha'\beta'} \ln(\sigma + i0) + w^{\mu\nu\alpha'\beta'} \right).$$

Для пространства Шварцшильда имеется также иной способ вычисления сил самодействия, развиваемый в работах [45–51], который основан на перенормировке каждого слагаемого в разложении потенциала по орбитальному моменту. Перенормировка заключается в вычитании необходимого числа членов асимптотического разложения при больших орбитальных моментах.

Недавно появился аксиоматический подход [10, 31]. Основную "аксиому сравнения" [10] можно сформулировать таким образом. Разность сил самодействия двух частиц, имеющих одинаковый заряд e и одинаковое ускорение, является обычной силой Лоренца от разницы (подходящим способом определенной) электромагнитных полей частиц. Фактически такая аксиома необходима, чтобы избежать расходимости, которая традиционно устранялась классической перенормировкой массы. Результаты, получаемые при применении этого подхода, находятся в согласии с результатами Де Витта и Брема [6], а также Мино, Сасаки и Тонако [44]. Следует отметить, что методы, использованные в работах [6, 10, 31, 44], позволяют получить только общую структуру силы самодействия, что, однако, важно для понимания природы самодействия.

3. Сила и энергия самодействия в пространствах топологических дефектов

В этом разделе рассмотрим эффекты самодействия в пространствах топологических дефектов. Достаточно подробно и полно топологические дефекты, их возникновение, эволюция и взаимодействие описаны в монографии [52] и обзорах [53, 54]. К настоящему времени исследованы вопросы самодействия в пространстве космической струны как бесконечно тонкой [53, 55], так и с конечным поперечным сечением [56, 57], а также в пространстве точечного глобального монополя [58].

Рассмотрим вначале пространство бесконечно тонкой космической струны [53, 55] с метрикой

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + \frac{r^2}{v^2} d\varphi^2 + dz^2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (27)$$

Такое пространство-время описывается сингулярным тензором кривизны [54]. Параметр v связан с линейной массой μ струны соотношением $v^{-1} = 1 - 4\mu$ [53]. Эта

ситуация интересна тем, что пространство-время является локально плоским и поэтому возникающая сила самодействия определяется только сингулярной структурой многообразия. Сила самодействия в пространстве бесконечно тонкой космической струны впервые была рассмотрена Лине [59, 60] и Смитом [61]. В этих работах для вычисления силы самодействия был использован следующий подход.

Рассмотрим покоящуюся частицу с зарядом e на расстоянии r от струны. В этом случае уравнение для нулевой компоненты векторного потенциала имеет вид

$$\Delta A^0 = -\frac{4\pi e}{\sqrt{g^{(3)}}} \delta(r - r') \delta(\varphi - \varphi') \delta(z - z'),$$

где (x', φ', z') — координаты частицы; $g^{(3)} = r^2/v^2$ — определитель трехмерной пространственной части метрики струны, $\Delta = g^{ik} \nabla_i \nabla_k$ — трехмерный оператор Бельтрами. Таким образом, компонента A^0 пропорциональна скалярной функции Грина трехмерного оператора Лапласа в коническом пространстве:

$$A^0(x) = 4\pi e G_v(x, x').$$

Потенциал, энергия и сила самодействия определяются через предел совпадения перенормированной функции Грина:

$$\Phi(x) = 4\pi e G_v^{\text{ren}}(x, x), \quad (28a)$$

$$U(x) = \frac{1}{2} e \Phi(x), \quad (28б)$$

$$\mathbf{F}(x) = -\nabla U(x). \quad (28в)$$

Для перенормировки и устранения расходимостей достаточно из точной функции Грина вычесть функцию Грина $G_M(x, x')$ в пространстве Минковского, которая получается из функции Грина в коническом пространстве предельным переходом $v \rightarrow 1$:

$$G_M(x, x') = G_{v=1}(x, x').$$

Таким образом,

$$G_v^{\text{ren}}(x, x') = G_v(x, x') - G_{v=1}(x, x').$$

Поскольку пространство-время является всюду плоским, то фейнмановскую функцию Грина можно получить в явном виде [62]:

$$G_v(x, x') = \frac{iv^2}{8\pi^2 r r'} \frac{\sinh v\eta}{\sinh \eta [\cosh v\eta - \cos(\Delta\varphi)]}, \quad (29)$$

где

$$\cosh \eta = 1 + \frac{1}{2rr'} (-\Delta t^2 + \Delta z^2 + \Delta r^2),$$

$$\Delta x = x - x'.$$

Квадрат интервала (27) простым преобразованием угловой переменной $\varphi = v\phi$ можно свести к соответствующему выражению для пространства-времени Минковского. Хотя элемент длины в этом случае формально выглядит как элемент длины пространства Минковского, информация о наличии струны содержится в граничных условиях — функции Грина периодичны по

угловой переменной ϕ с периодом $2\pi/v$. Если же опять вернуться к переменной φ , то функции Грина будут периодичны по переменной φ с периодом 2π , но тогда метрические коэффициенты будут отличаться от таковых пространства-времени Минковского. По этой причине получающаяся функция Грина отлична от функции Грина в пространстве-времени Минковского.

Подставляя функцию Грина (29) в формулу (28), получаем следующие выражения для энергии и силы самодействия:

$$U^{\text{em}}(r) = \frac{e^2}{2r} L_0(v), \quad F_r^{\text{em}}(r) = \frac{e^2}{2r^2} L_0(v), \quad (30)$$

где

$$L_0(v) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{v \coth(vx) - \coth(x)}{\sinh(x)} dx. \quad (31)$$

Численные расчеты, приведенные в [61], показывают почти линейную зависимость $L_0(v)$ от v . Для малого дефицита угла, когда $|v - 1| \ll 1$, эта зависимость имеет вид

$$L_0(v) \approx \frac{\pi}{8}(v - 1), \quad (32)$$

следовательно, заряженная частица отталкивается от струны в поперечном направлении с силой

$$F_r^{\text{em}} \approx \frac{\pi e^2}{16r^2}(v - 1). \quad (33)$$

В работах [63–65] была исследована электромагнитная сила самодействия в пространстве бесконечно тонкой струны для произвольной траектории движения частицы. Для вычисления силы самодействия использовался следующий подход. Рассмотрим частицу с зарядом e , движущуюся по траектории $x^\mu(\tau')$ с 4-скоростью $u^\mu(\tau')$. Вначале получаем выражение для 4-потенциала A^μ , создаваемого частицей в точке наблюдения x^μ (рис. 1а). Затем помещаем в эту точку некую фиктивную частицу с зарядом e , скоростью u^μ и вычисляем действующую на нее 4-силу Лоренца: $F^\mu = eF^{\mu\nu}u_\nu$ (рис. 1б). Далее помещаем фиктивный заряд на траекторию движения частицы: $x^\mu \rightarrow x^\mu(\tau)$, $u^\mu \rightarrow u^\mu(\tau)$. Таким образом, фиктивный заряд представляет собой исходную частицу в другой, более поздний момент времени τ . Чтобы найти силу самодействия, необходимо устремить частицы друг к другу, т.е. перейти к пределу $\tau \rightarrow \tau'$ (рис. 1в). Из общей теории функций Грина в искривленном пространстве-времени (см., например, [5, с. 170]) хорошо известно, что запаздывающая функция Грина имеет две составляющие — локальную и нелокальную. Локальная составляющая, пропорциональная дельта-функции $\delta(\sigma)$ от квадрата интервала между точками $x^\mu(\tau)$ и $x^\mu(\tau')$, определяет (после перенормировки массы) локальную часть силы самодействия — силу Дирака–Лоренца и вклад от материи-энергии (см. (2)). Нелокальная часть функции Грина, пропорциональная $\theta(-\sigma)$, дает нелокальную часть силы самодействия.

В частном случае покоящейся частицы показано, что увеличение параметра $L_0(v)$ с увеличением дефицита угла v связано с возрастанием числа N замкнутых геодезических на конусе, которое определяется целой

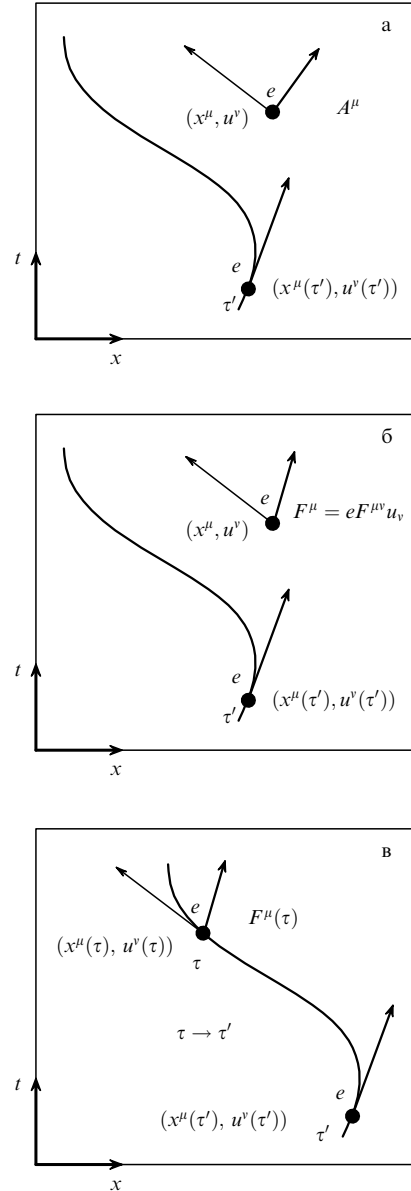


Рис. 1. Схематическое изображение процедуры вычисления силы самодействия. (а) Вначале получаем электромагнитный потенциал в месте нахождения пробного заряда. (б) Затем вычисляем силу Лоренца, действующую на пробный заряд. (в) Помещаем пробную частицу на траекторию движения, т.е. считаем, что она представляет собой исходную частицу в более поздний момент времени, и устремляем обе точки друг к другу.

частью $v/2$:

$$N = \left[\frac{v}{2} \right]. \quad (34)$$

Для сверхмассивной ($v \rightarrow \infty$, $\mu \rightarrow 1/4$) струны была также получена оценка [65]

$$L_0 \approx \frac{v}{\pi} \ln \frac{2v}{\pi}.$$

В этом предельном случае точные полевые уравнения приводят к метрике цилиндрического пространства [66]. Сверхмассивные космические струны обсуждались также в контексте топологической инфляции [67–73].

Более общая ситуация рассмотрена в работе Лине [60], в которой вычислена сила самодействия как для

электрически заряженной частицы, так и для частиц, являющихся зарядами массивного скалярного или векторного полей. В этих случаях энергия самодействия имеет вид

$$U(r) = \varepsilon \frac{q^2}{2r} L(v, mr),$$

где

$$L(v, mr) = \frac{v \sin(\pi v)}{\pi} \int_0^\infty \frac{\exp(-2mr \cosh x)}{\cos(\pi v) - \cosh(2vx)} \frac{dx}{\cosh(x)},$$

q является зарядом частицы, связанной со скалярным, векторным массивным или безмассовым полями, а ε равняется -1 для скалярного и $+1$ для векторного полей.

Таким образом, частица, взаимодействующая со скалярным полем, притягивается к струне, тогда как частица, взаимодействующая с векторным полем (массивным или безмассовым), отталкивается. Различие вызвано формой члена взаимодействия в лагранжиане скалярного поля [74]. Энергия самодействия в этом случае выражается в виде

$$U(x) = \varepsilon \frac{q}{2} \Phi(x).$$

В случае электромагнитного поля ($q = e$, $m = 0$, $\varepsilon = +1$) получаем формулу (30). Отметим, что для получения (30) необходимо принять во внимание тождество, справедливое при $v < 2$:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{v \sin(\pi v)}{\cos(\pi v) - \cosh(2vx)} \frac{dx}{\cosh(x)} &= \\ &= \int_0^\infty \frac{v \coth(vx) - \coth(x)}{\sinh(x)} dx. \end{aligned}$$

Энергия самодействия для безмассовых полей обратно пропорциональна расстоянию от струны (30), тогда как в массивном случае [60] она определяется экспоненциальной зависимостью

$$U(x) \approx \varepsilon \frac{mvq^2}{4\sqrt{\pi}} \cot\left(\frac{\pi v}{2}\right) \frac{\exp(-2mr)}{(mr)^{3/2}}, \quad mr \gg 1.$$

Гравитационная сила самодействия для пробной незаряженной частицы массой m была вычислена в работах [61, 75] в линейном по гравитационной постоянной G приближении. Было показано, что частица притягивается к струне с силой

$$F_r^{\text{gr}}(r) = -\frac{m^2}{2r^2} L_0(v). \quad (35)$$

Противоположные знаки в (35) и в выражении для силы самодействия в электромагнитном случае (30) обусловлены тем, что гравитационные заряды (массы) всегда притягиваются, тогда как одноименные электромагнитные заряды отталкиваются.

Электромагнитная и гравитационная силы самодействия для покоящейся частицы в пространстве-времени космической диспирации (дислокация + дисклинация) [76–78] были изучены в работе Де Лоренси и Морейры [79]. Это пространство получается из пространства Минковского отождествлением цилиндрических координат

по правилу

$$(t, r, \phi, Z) = \left(t, r, \phi + \frac{2\pi}{v}, Z + 2\pi\kappa\right).$$

Параметры v и κ описывают дисклинацию и дислокацию соответственно. В новых координатах $\phi = \phi v$, $z = Z - \kappa v \phi$ элемент длины имеет вид

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dt^2 + dr^2 + \frac{r^2}{v^2} d\phi^2 + (dz + \kappa d\phi)^2, \\ z &\in (-\infty, +\infty), \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi. \end{aligned}$$

Получено следующее выражение для энергии самодействия:

$$U^{\text{em}} = \frac{e^2}{2r} L(v, \kappa), \quad U^{\text{gr}} = -\frac{m^2}{2r} L(v, \kappa),$$

где функция $L(v, \kappa)$ выражается через предел совпадения перенормированной скалярной функции Грина:

$$\begin{aligned} L(v, \kappa) &= -\frac{\ln 2}{\pi} - \\ &- 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty \frac{x^2 - \pi^2(4n^2/v^2 - 1)}{[x^2 + \pi^2(2n/v + 1)^2][x^2 + \pi^2(2n/v - 1)^2]} \times \\ &\times \frac{dx}{\sqrt{\cosh^2(x/2) + (\pi\kappa/r)^2}}. \end{aligned}$$

Примечательно, что величина $L(v, \kappa)$ может быть как положительной, так и отрицательной [79] — сила самодействия может менять знак на разных расстояниях от струны. Естественным масштабом расстояний в этом пространстве является параметр дислокации κ . Как и ожидалось, в случае бесконечно малой дисклинации (или на больших расстояниях от струны), когда $\kappa/r \ll 1$, приведенное выше выражение для энергии самодействия сводится к выражению (31) для пространства бесконечно тонкой струны: $L(v, \kappa) \rightarrow L_0(v)$. В противоположной ситуации преобладания дисклинации (или на малых расстояниях от струны), когда $\kappa/r \gg 1$, получаем

$$L(v, \kappa) \approx -\frac{\ln 2}{\pi}.$$

Таким образом, при преобладании дисклинации или на малых расстояниях от струны энергия самодействия не зависит от параметров струны. В случае бесконечно тонкой струны ситуация прямо противоположная, а именно, электромагнитная сила самодействия притягивает частицу, гравитационная отталкивает.

Хотя пространство-время струны является локально-плоским, силу самодействия все же можно получить методом, использованным Де Виттами [11] в случае слабых гравитационных полей. В данной ситуации роль параметра, характеризующего слабость гравитационного поля, играет малый дефицит угла. Такие расчеты сделаны в работе [80], в которой получено следующее выражение (в первом приближении по гравитационной постоянной G):

$$U^{\text{el}}(x) = \frac{\pi e^2}{4} \int \frac{2T_0^0 - T_1^1 - T_2^2 - T_3^3}{\rho(x, x')} d^2x', \quad (36)$$

где $\rho(x, x')$ — евклидово расстояние в плоскости, перпендикулярной струне, T_ν^μ — тензор энергии-импульса струны. Для бесконечно тонкой струны, когда

$$T_0^0 = T_1^1 = \mu \delta^{(2)}(x'), \quad T_2^2 = T_3^3 = 0,$$

из (36) получаем известное выражение для электромагнитной энергии самодействия (см. (33)):

$$U^{\text{el}} = \frac{\pi e^2 \mu}{4r} = \frac{\pi e^2 (v-1)}{16r}.$$

Электромагнитная сила самодействия в пространстве многих космических струн изучалась в работах [81–87]. Полученные результаты справедливы для трехмерных пространств с метрикой $(a, b, c = 1, 2)$

$$ds^2 = -dt^2 + \gamma_{ab}(x^c) dx^a dx^b$$

или же для четырехмерных пространств с интервалом

$$ds^2 = -dt^2 + dz^2 + \gamma_{ab}(x^c) dx^a dx^b.$$

Эффективная двумеризация пространственной части достигается специальным выбором плотности тока

$$J^\mu(x^c) = (J^t(x^c), 0, 0, J^z(x^c)).$$

Поскольку двумерные римановы поверхности являются конформно-плоскими, можно ввести координаты, в которых

$$\gamma_{ab} = \exp[-\Omega(x^c)] \delta_{ab}.$$

В работе [81] была вычислена линейная плотность энергии \mathcal{U} и силы самодействия $\vec{\mathcal{F}}$ для стационарного тока, текущего вдоль направления струны через точку (x_1^1, x_1^2) ,

$$J^\mu(x^c) = (J^t, 0, 0, J^z) \frac{\delta(x^1 - x_1^1) \delta(x^2 - x_1^2)}{\sqrt{\gamma(x)}}.$$

Также было показано, что

$$\mathcal{U} = -\frac{1}{2} \Omega(J^{t^2} + J^{z^2}),$$

$$\vec{\mathcal{F}} = \frac{1}{2} \exp\left(\frac{\Omega}{2}\right) \nabla \Omega (J^{t^2} - J^{z^2}).$$

Для мультиконического пространства N параллельных струн в работах [88–90] были получены с конформным фактором

$$\Omega = \sum_{k=1}^N 2(1 - v_k^{-1}) \ln |\mathbf{x} - \mathbf{x}_k|$$

следующие выражения для энергии и силы самодействия:

$$\mathcal{U} = -(J^{t^2} + J^{z^2}) \sum_{k=1}^N (1 - v_k^{-1}) \ln |\mathbf{x} - \mathbf{x}_k|, \quad (37a)$$

$$\vec{\mathcal{F}} = \exp\left(\frac{\Omega}{2}\right) (J^{t^2} - J^{z^2}) \sum_{k=1}^N (1 - v_k^{-1}) \frac{\mathbf{n}_k}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k|}, \quad (37b)$$

где

$$\mathbf{n}_k = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_k}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k|}.$$

Таким образом, энергия самодействия (37a) является аддитивной величиной, тогда как сила самодействия (37b) вследствие зависимости ее от конформного множителя не аддитивна.

В частном случае одной струны ($N = 1$) сила самодействия тока, параллельного струне, была получена в работе [91]:

$$\vec{\mathcal{F}} = (J^{t^2} - J^{z^2})(v-1) \frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho^2},$$

где $\rho = v|\mathbf{x}|^{1/v}$. Формально эта сила совпадает с силой взаимодействия в пространстве Минковского двух токов: J^μ и "индуцированного" тока $J_{\text{ind}}^\mu = (v-1)J^\mu/2$. Знак силы зависит от знака квадрата 4-тока: пространственноподобный ток притягивается, тогда как времениподобный отталкивается.

В случае нетривиальной внутренней структуры тока (наличие ненулевых моментов) кроме индуцированного тока появляются индуцированные моменты [82, 83]. Энергия самодействия электрического дипольного момента совпадает с энергией взаимодействия диполя \mathbf{d} и индуцированного дипольного момента

$$\mathbf{d}_{\text{ind}} = -\frac{1}{24}(v^2 - 1)\mathbf{d}.$$

Для магнитного $\boldsymbol{\mu}$ и квадрупольного D^{ab} моментов имеем соответственно

$$\boldsymbol{\mu}_{\text{ind}} = -\frac{1}{24}(v^2 - 1)\boldsymbol{\mu}, \quad D_{\text{ind}}^{ab} = \frac{1}{1440}(11 + v^2)(v^2 - 1)D^{ab}.$$

Внутренняя структура тока приводит также к появлению момента силы самодействия [83].

Рассмотренное выше выражение для силы самодействия расходится при приближении частицы к струне. Причина этого кроется в принятой модели космической струны. Следует ожидать, что наличие нетривиальной внутренней структуры приведет к существенной модификации полученной картины. Такие расчеты были сделаны в работе [92] для космической струны с постоянной плотностью материи \mathcal{E} внутри нее [56, 57]. Метрика пространства такой струны определяется соотношениями:

$$ds_{\text{in}}^2 = -dt^2 + d\rho^2 + \frac{\rho_o^2}{\epsilon^2} \sin^2\left(\frac{\epsilon\rho}{\rho_o}\right) d\varphi^2 + dz^2 \quad (38a)$$

во внутренней ($\rho \leq \rho_o$) области струны и

$$ds_{\text{out}}^2 = -dt^2 + dr^2 + \frac{r^2}{v^2} d\varphi^2 + dz^2 \quad (38b)$$

во внешней ($r \geq r_o$), где ρ_o, r_o — радиусы струны в соответствующих координатах.

Условие C^1 -непрерывности метрических коэффициентов на поверхности струны приводит к следующим соотношениям:

$$\frac{r_o}{\rho_o} = \frac{\tan \epsilon}{\epsilon}, \quad \cos \epsilon = \frac{1}{v}.$$

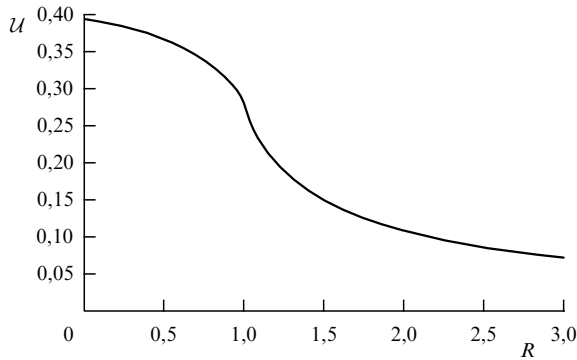


Рис. 2. Зависимость энергии самодействия \mathcal{U} от положения частицы $R = r/r_0$. Параметр конуса $\epsilon = 0,1$.

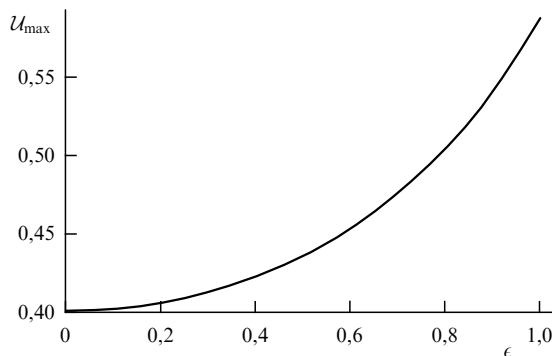


Рис. 3. Зависимость максимальной энергии самодействия U_{\max} (высота барьера) от ϵ . Для $\epsilon \leq 0,1$ функция $U_{\max} \approx 0,39$.

Параметр ϵ определяется через "энергетический" радиус струны $\rho_* = 1/\sqrt{8\pi\epsilon}$:

$$\frac{\rho_0}{\rho_*} = \epsilon.$$

Поскольку при отсутствии дефицита угла энергия и сила самодействия исчезают, удобнее выделить множитель

$$\frac{e^2}{2r_0} \frac{v^2 - 1}{v},$$

т.е. энергию самодействия U и высоту энергетического барьера U_{\max} заряженной частицы представить в следующем виде:

$$U = \frac{e^2}{2r_0} \frac{v^2 - 1}{v} \mathcal{U}(v, R), \tag{39a}$$

$$U_{\max} = \frac{e^2}{2r_0} \frac{v^2 - 1}{v} \mathcal{U}_{\max}(v). \tag{39б}$$

Высота энергетического барьера определяется значением энергии самодействия в центре струны, т.е. там, где она достигает максимального значения. Результаты численного анализа $\mathcal{U}(v, R)$ как функции $R = r/r_0$ показаны на рис. 2, а $\mathcal{U}_{\max}(v)$ как функции ϵ — на рис. 3.

На рисунке 4 изображены зависимости энергии самодействия заряженной частицы от собственного расстояния D до струны, измеренного в единицах радиуса струны r_0 , для пространств бесконечно тонкой струны и струны с конечным поперечным сечением. На расстоянии равном двум диаметрам струны значения энергий прак-

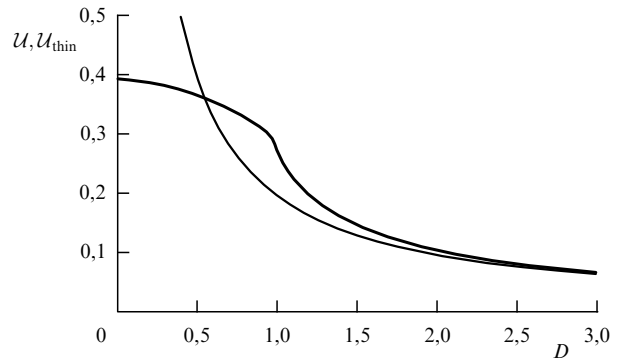


Рис. 4. Энергия самодействия частицы в пространстве-времени "толстой" космической струны \mathcal{U} (жирная кривая) и для частицы в пространстве-времени бесконечно тонкой струны $\mathcal{U}_{\text{thin}}$ (тонкая кривая) в зависимости от собственного расстояния D . Параметр конуса $\epsilon = 0,1$.

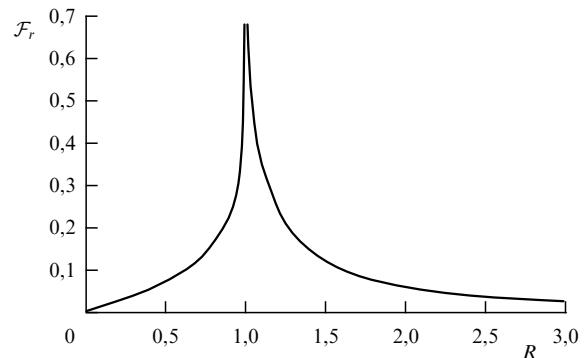


Рис. 5. Сила самодействия заряженной частицы в пространстве-времени струны Готта–Хискока \mathcal{F}_r в зависимости от положения частицы $R = r_p/r_0$. Параметр конуса $\epsilon = 0,1$.

тически совпадают. Существенно эти величины различаются лишь внутри струны.

Сила самодействия, отталкивающая частицу от струны, имеет только радиальную компоненту. Величина \mathcal{F}_r , которая определяется соотношением

$$F_r = \frac{e^2}{2r_0^2} \frac{v^2 - 1}{v} \mathcal{F}_r(v, R), \tag{40}$$

изображена на рис. 5. Вблизи поверхности струны при $R \approx 1$ сила логарифмически расходится по закону

$$F_r \approx -\frac{e^2}{2r_0^2} \frac{v^2 - 1}{8} \ln |R - 1|, \tag{41}$$

но работа против сил самодействия остается конечной величиной, равной высоте барьера U_{\max} . Такая расходимость связана, по-видимому, с выбранной моделью струны: метрика C^1 -гладкая, а кривизна претерпевает разрыв на поверхности струны (внутри струны пространство-время обладает постоянной кривизной, в то время как вне струны пространство-время является плоским). Высота барьера для струны с параметрами Великого объединения равна $U_{\max} = 2,8 \times 10^5$ ГэВ.

Рассмотрение проблемы вычисления энергии самодействия в пространстве-времени струны с конечным поперечным сечением важно в контексте струнного катализа распада барионов [93–99]. Дело в том, что

сила самодействия препятствует проникновению частиц во внутреннюю область струны, где собственно и может происходить распад барионов. Возникает энергетический барьер. Качественно этот вопрос был исследован в статье Перкинса и Дэвис [98]. Подробное исследование электромагнитной силы самодействия в пространстве струны с конечным поперечным сечением содержится в работе [92]. Следует ожидать, что ситуация качественно не изменится при рассмотрении струны с другой внутренней структурой.

Электромагнитный и гравитационный потенциалы самодействия для заряженной частицы в поле точечного глобального монополя с элементом длины ($0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$)

$$ds^2 = -dt^2 + \alpha^{-2} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (42)$$

исследованы в статье [100]. Параметр α связан с масштабом η , характеризующим спонтанное нарушение симметрии, соотношением $\alpha^2 = 1 - 8\pi\eta^2$ [58]. Это пространство, в отличие от пространства бесконечно тонкой струны, является искривленным. Для вычислений был использован тот же подход, что и в работах [59–61]. Перенормировка функции Грина достигалась вычитанием функции Грина пространства-времени Минковского. Полученные электромагнитный и гравитационный потенциалы самодействия имеют следующий вид:

$$U^{\text{em}}(r) = \frac{e^2}{2r} S(\alpha), \quad U^{\text{gr}}(r) = -\frac{m^2}{2r} S(\alpha), \quad (43)$$

где

$$S(\alpha) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{2l+1}{\sqrt{\alpha^2 + 4l(l+1)}} - 1 \right].$$

При малом дефиците телесного угла, когда $|1 - \alpha| \ll 1$, последнее выражение дает

$$S(\alpha) \approx \frac{\pi}{8}(1 - \alpha).$$

Таким образом, как и в случае бесконечно тонкой струны, электромагнитная сила самодействия отталкивает частицу, тогда как гравитационная притягивает.

Ранее этот метод был использован для вычисления силы самодействия частицы в поле сильной плоской гравитационной волны Бонди–Пирани–Робинсона [101], которая в групповых координатах описывается интервалом

$$ds^2 = -2 du dv + A(u)(dx^2)^2 + B(u)(dx^3)^2 - C(u) dx^2 dx^3.$$

Волна распространяется со скоростью света вдоль оси x^1 ; $u = (t - x^1)/\sqrt{2}$ и $v = (t + x^1)/\sqrt{2}$ — соответственно "запаздывающее" и "опережающее" времена. Хотя функция Грина имеет ненулевую нелокальную составляющую и пространство-время не является конформно-плоским, получающаяся сила самодействия оказывается полностью локальной для любой траектории частицы [102]. Это объясняется структурой нелокальной части функции Грина. Величина $v_{\mu\nu'}$ (6) зависит только от одной координаты u и имеет следующую структуру: $v_{\mu\alpha'} \sim \delta_{\mu}^{\alpha'} \delta_{\alpha'}^{\mu} v(u)$. Легко видеть, что в этом случае $f_{\mu\nu\alpha'} = 0$ и нелокальная часть силы самодействия действительно обнуляется.

Гравитационно-индуцированная сила самодействия может вызывать ряд интересных эффектов. Поскольку в пространстве струны она не равна нулю для покоящейся частицы и имеет форму кулоновского взаимодействия заряда e с фиктивным зарядом $e' = eL_0(v)/2$ (см. (30)), расположенным на струне, то это приводит к рассеянию частиц на струне, сечение которого пропорционально резерфордскому сечению (ε — энергия налетающей частицы):

$$d\sigma_{\text{self}} = \frac{1}{4} L_0^2(v) d\sigma_{\text{R}} = \frac{1}{4} L_0^2(v) \left(\frac{e^2}{2\varepsilon} \right)^2 \frac{\cos(\theta/2)}{\sin^3(\theta/2)} d\theta. \quad (44)$$

Аналогичный эффект имеется и в пространстве глобального монополя. При вычислении сечения необходимо только сделать замену $L_0(v) \rightarrow S(\alpha)$ (43). Наряду с указанными получены также другие типы сечений [95, 103, 104].

В работе [103] Эвереттом было вычислено сечение рассеяния скалярных частиц на единицу длины струны с конечным поперечным сечением r_0 :

$$\frac{d\sigma}{d\theta dl} = \frac{\pi\hbar}{2p_{\perp}} \frac{1}{\ln^2(p_{\perp}r_0/\hbar)}. \quad (45)$$

Здесь p_{\perp} — поперечная по отношению к струне составляющая импульса частицы. Это сечение возникает при прямом взаимодействии частиц со струной ненулевого поперечного размера и не зависит от константы связи. В работе [103] было рассмотрено модельное взаимодействие скалярных частиц со скалярным полем внутри струны. Аналогичное выражение получено в работе [97] для рассеяния заряженных фермионов, взаимодействующих с магнитным полем внутри струны. Используя эти результаты, Виленкин [53] получил выражение для потерь энергии струны, движущейся со скоростью v сквозь среду,

$$\frac{dE}{dl dt} \approx \frac{\hbar n v^2}{\ln^2(p_{\perp}r_0/\hbar)},$$

где n — плотность числа частиц.

Сечение рассеяния на струне, вычисленное в работах [95, 104], которое полностью идентично сечению Ааронова–Бома [105]

$$\frac{d\sigma}{d\theta dl} = \frac{\hbar}{2\pi p_{\perp}} \frac{\sin^2(\pi\alpha)}{\sin^2(\theta/2)}, \quad (46)$$

приводит к потерям энергии

$$\frac{dE}{dl dt} = \frac{2\hbar n v^2}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}},$$

где $\alpha = e\Phi/2\pi$ — поток поля в единицах элементарного потока.

Причина этого взаимодействия заключается в следующем. Как показано в работе [95], струны, возникающие в полевых моделях в результате спонтанного нарушения симметрии, содержат внутри себя магнитное поле, тогда как во внешней области струны поле переходит в чистую калибровку без магнитного поля. Таким образом, конфигурация полей идентична конфигурации поля соленоида [105], что и приводит к возникновению такого сечения.

Оба сечения (45) и (46) не связаны с конической структурой пространства-времени, а обусловлены или специфическим распределением полей, порождающих струну, или взаимодействием частиц с полями внутри струны. При вычислении указанных сечений предполагалось, что пространство-время является пространством-временем Минковского. Происхождение же сечения (44) непосредственно связано с конической структурой пространства-времени.

Ускорение, вызываемое силой самодействия, приводит, как известно, к излучению электромагнитных волн. Действительно, энергия самодействия частицы в поле монополя выражается в виде кулоновского взаимодействия частицы, обладающей зарядом $e_1 = e$, с некоторой фиктивной частицей, имеющей заряд $e_2 = eS(\alpha)/2$, который находится в центре монополя (43). Для бесконечно тонкой струны (30) фиктивный заряд равен $e_2 = eL_0(v)/2$. Взаимодействие кулоновского типа приводит к тормозному излучению [2]. В ультрарелятивистском случае [2, с. 260] получено следующее выражение для энергии, излученной за все время движения:

$$E = \frac{\pi e_1^4 e_2^2 \gamma^2}{4m^2 \rho^3},$$

где γ и ρ — релятивистский фактор и прицельное расстояние соответственно.

В то же время в пространстве-времени топологических дефектов существует другой процесс излучения электромагнитных волн, не связанный с ускорением, а вызываемый силами самодействия. В работах [106–112] было показано, что частицы в пространстве-времени космической струны излучают даже при движении по геодезической линии. Такой процесс запрещен в пространстве-времени Минковского, но разрешен в пространстве космической струны. В указанных работах эти явления достаточно подробно исследованы на фоне пространства-времени бесконечно тонкой космической струны. В работе [113] аналогичные явления были изучены для заряженной частицы в поле другого топологического дефекта — точечного глобального монополя, описываемого метрикой (42). При ультрарелятивистском движении частицы энергия, излученная за счет силы самодействия, гораздо меньше энергии, излученной при геодезическом движении частицы [113].

Рассмотрим квантовые явления, связанные с самодействием. Говоря о квантовых явлениях в гравитационном поле, необходимо сделать некоторые общие пояснения. В настоящее время не существует удовлетворительной теории, объединяющей в себе как теорию относительности, так и квантовую теорию. Определенные успехи достигнуты в теории струн (см., например, обзор [114]), где показано, что в низкоэнергетическом пределе этой теории может быть получена теория относительности Эйнштейна. По этой причине интенсивное развитие получила полуклассическая теория гравитации, в рамках которой все поля кроме гравитационного являются квантованными (см. монографии [5, 42, 115–117]). Полуклассическое приближение нарушается, когда характерный масштаб гравитационного поля² l_{gr} становится сравнимым с планковской длиной $l_{Pl} =$

$= \sqrt{G\hbar/c^3} \approx 10^{-33}$ см [118]. На таких масштабах необходимо применять полную квантовую теорию гравитации.

Дальнейшие рассуждения касаются полуклассической теории гравитации. С точки зрения квантовой теории поля все материальные поля должны быть квантованы, т.е. представлены в виде совокупности элементарных возбуждений. Динамика этих возбуждений описывается одночастичными уравнениями. Характерным масштабом в этих уравнениях является комптоновская длина волны частиц $l_C = \hbar/mc$. На масштабах больших этой длины, можно говорить о возбуждениях как о частицах. Требование общей ковариантности теории относительности приводит к тому, что все уравнения должны быть инвариантны относительно группы Пуанкаре преобразований координат. Заменяя частные производные ковариантными, несложно получить ковариантные обобщения уравнений для скалярной и векторной частиц, а коэффициенты Фока – Иваненко позволяют ковариантно обобщить уравнение Дирака для частицы со спином 1/2. При ковариантном обобщении уравнений остается свобода в добавлении слагаемых, обращающихся в нуль при исчезновении гравитационного поля. Например, требование конформной инвариантности уравнений для скалярной частицы приводит к тому, что в уравнение необходимо добавить слагаемое, пропорциональное скалярной кривизне R [119].

Если характерный масштаб изменения гравитационного поля сравним с комптоновской длиной волны, $l_{gr} \sim l_C$, то возможно проявление эффекта рождения пар из вакуума. При таких условиях приливное взаимодействие "разрывает" виртуальную пару и превращает ее в реальную. Наиболее известным в полуклассической теории гравитации является эффект Хокинга [120], получивший название "испарение черных дыр". После завершения коллапса возникает стационарный поток частиц с эффективной температурой

$$T = \frac{\hbar \kappa}{2\pi c k_B},$$

где k_B — постоянная Больцмана, κ — поверхностная гравитация. В статическом случае

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi G M k_B},$$

где M — масса черной дыры. Таким образом, черная дыра не является черной, а светится с планковским спектром.

В случае большого радиуса кривизны гравитационного поля по сравнению с комптоновской длиной волны частиц рождением частиц можно пренебречь. Гравитационное поле проявляет себя в том, что вакуумные средние флуктуаций квантованных полей становятся отличными от нуля. Это приводит к эффекту поляризации вакуума [5, 42, 115–117]. В рамках полуклассической теории гравитации все эти явления необходимо учитывать в уравнениях Эйнштейна. Вместо классического тензора энергии-импульса необходимо рассматривать тензор энергии-импульса с квантовыми поправками. Соответствующие уравнения носят название полуклассических уравнений Эйнштейна. Эффект рождения частиц будет существенным в случае сильного гравитационного поля, когда характерный размер изменения гравитационного поля становится сравнимым с планков-

² Характерный масштаб гравитационного поля определяется таким образом, чтобы характерные компоненты тензора кривизны удовлетворяли соотношению $|R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}| \approx l_{gr}^{-2}$.

ским. Следует также отметить, что построенная таким образом полуклассическая теория гравитации является неперенормируемой. Контрчлены, необходимые для устранения возникающих расходимостей, имеют квадратичную по кривизне структуру, не совпадающую со структурой первоначального лагранжиана. По этой причине перенормированные однопетлевые уравнения Эйнштейна содержат высшие производные от метрики. Более глубокое и полное рассмотрение этих вопросов можно найти в монографиях [5, 21, 42, 115–117].

Гравитационно-индуцированная сила самодействия приводит к различным квантовым явлениям. Поскольку частица обладает дополнительной энергией самодействия даже в состоянии покоя, то необходимо учитывать влияние этой энергии на состояние частицы. Дополнительная энергия самодействия может не только влиять на состояния рассеяния частиц, но приводит также к связанным состояниям. Вопрос о наличии связанных состояний в спектре нерелятивистских бесспиновых частиц был рассмотрен в работе [121], а для релятивистских частиц со спином 0 и 1/2 — в работе [122].

Поскольку электромагнитная (33) и гравитационная (35) силы самодействия имеют одинаковую структуру, то можно рассматривать их совместное действие на квантовую частицу. Наличие или отсутствие связанных состояний определяется знаком величины $Z = (e^2 - m^2)/\hbar$. Для положительных значений Z (в случае преобладания сил отталкивания над силами притяжения) связанные состояния отсутствуют. При отрицательных Z (преобладание притяжения над отталкиванием), например в случае массивной незаряженной частицы, наоборот, связанные состояния существуют. Для частицы со спином 1/2 спектр, определяемый локализованными решениями уравнения Дирака ($U = Z\hbar/r$)

$$\left[\gamma^\mu(x) \tilde{\nabla}_\mu + \frac{m}{\hbar} + U \right] \Psi = 0,$$

имеет вид

$$E_{N,M} = \pm \sqrt{m^2 + p_3^2} \left[1 - \frac{m^2}{m^2 + p_3^2} \frac{Z^2}{(N + \sqrt{v^2 M^2 + Z^2})^2} \right]^{1/2}, \quad (47)$$

где N — главное квантовое число, $N = 0, 1, \dots$, M — полный орбитальный момент, полуцелый, $M = n + 1/2$, $n = 0, \pm 1, \dots$. Величина p_3 представляет собой продольную (вдоль струны) компоненту импульса. В случае бесспиновой релятивистской скалярной частицы, волновая функция которой удовлетворяет уравнению Клейна–Гордона

$$\{\square - (m + U)^2\} \Psi = 0,$$

спектр имеет аналогичную структуру, необходимо только произвести замены $N \rightarrow N + 1/2$ и $M \rightarrow n$, $n = 0, \pm 1, \dots$ (полный орбитальный момент, целый):

$$E_{N,n} = \pm \sqrt{m^2 + p_3^2} \times \left[1 - \frac{m^2}{m^2 + p_3^2} \frac{Z^2}{(N + 1/2 + \sqrt{v^2 n^2 + Z^2})^2} \right]^{1/2}. \quad (48)$$

В нерелятивистском пределе $c \rightarrow \infty$ ($Z \rightarrow \infty$, $m \rightarrow \infty$) получаем следующую величину энергии связанных состояний (без энергии покоя):

$$E_{N,n} = - \frac{m(e^2 - Gm^2)^2}{2\hbar^2 (N + 1/2 + v|n|)^2},$$

в полном соответствии с [121].

Полученный спектр при $p_3 = 0$, $v = 1$ и $Z = -Gmm_0$ совпадает со спектром связанных состояний электрона массой m в ньютоновском гравитационном поле массы m_0 [123, 124]. Следует отметить коренное различие в природе спектра (47) и полученного в [123, 124]. В случае плоского пространства имеется только притяжение между электроном и массой m_0 , которое и приводит к связанным состояниям, рассмотренным в [123, 124]. Поэтому величина Z всегда отрицательна, $Z = -Gmm_0$. В пространстве-времени космической струны, как хорошо известно [53], отсутствует ньютоновское взаимодействие между струной и частицей. Происхождение спектров (48) и (47) связано с наличием специфического взаимодействия частицы со струной — самодействием. Причем как масса, так и заряд приводят к такого рода взаимодействию. Связанные состояния отсутствуют, если электромагнитная сила самодействия (отталкивание) преобладает над силой гравитационного самодействия частицы (притяжение). В противном случае появляются связанные состояния, поскольку суммарная сила самодействия становится притягивающей.

Сделаем некоторые численные оценки. Масштабом энергии полученного спектра, характеризующим расстояние между уровнями, является величина

$$E_{\text{scale}} = Z^2 mc^2.$$

Для нейтральной частицы имеем

$$\begin{aligned} E_{\text{scale}} &= L_0^2 \left(\frac{Gm^2}{\hbar c} \right)^2 mc^2 = L_0^2 \left(\frac{m}{m_{\text{Pl}}} \right)^4 mc^2 = \\ &= 0,2 \times 10^{-96} \left(\frac{L_0}{L_0^{\text{GUT}}} \right)^2 \left(\frac{m}{m_{\text{el}}} \right)^5 [\text{эВ}]. \end{aligned}$$

Здесь $L_0^{\text{GUT}} \approx (\pi/8) \times 10^{-6}$ — характерное значение параметра L_0 в модели Великого объединения, $m_{\text{Pl}} = \sqrt{\hbar c/G}$ — планковская масса, m_{el} — масса электрона.

Таким образом, для элементарных частиц полученный спектр является практически непрерывным. Существенного эффекта следует ожидать для очень массивных частиц. Например, для частицы с массой $m = 60m_{\text{Pl}} \approx 10^{-3}$ г масштаб энергий E_{scale} равен 1 эВ.

4. Заключение

Поскольку явление самодействия частицы, находящейся в гравитационном поле, в обзоре изложено достаточно подробно, отметим некоторые качественные моменты. Поле точечной частицы представляет собой нелокальный объект, который "чувствует" не только локальные, но и глобальные свойства пространства-времени. По этой причине явление самодействия частиц, находящихся в гравитационном поле, обладает рядом особенностей. Отметим основные из них.

Сила самодействия в общем случае зависит от всей предыстории движения частицы. В некоторых ситуациях сила самодействия имеет локальный характер, например, в случае слабого гравитационного поля, когда запаздыванием можно пренебречь, или же при определенных траекториях движения. Интересным является то, что сила самодействия может быть отличной от нуля даже для частицы, находящейся в покое. Это вполне понятно из качественных соображений. Если гравитационное поле неоднородно, то даже для покоящейся частицы воздействие со стороны собственного поля на частицу тоже неоднородно. В отсутствие гравитационного поля происхождение самодействия иное — самодействие обусловлено силой реакции излучения, испущенного частицей. Для появления этого эффекта необходимо ускоренное движение частицы.

Сила самодействия возникает также, когда гравитационное поле локализовано в некоторой, даже с исчезающе малыми размерами, области, как, например, в случае бесконечно тонкой космической струны. Интересным является то, что при этом ньютоновский потенциал струны отсутствует: частица "не чувствует" струну, однако существует специфическое взаимодействие через нелокальный объект — поле частицы.

Работа автора была частично поддержана РФФИ, грант № 05-02-17344.

5. Приложение.

Определения основных величин и понятий

В обзоре принята геометрическая система единиц, в которой гравитационная постоянная и скорость света $G = c = 1$. Там, где необходимо, эти постоянные выписаны в явном виде. Масса черной дыры обозначена как M , а m , e и q — соответственно масса, электрический и скалярный заряды частицы.

Поверхностная гравитация κ черной дыры характеризует напряженность гравитационного поля вблизи поверхности черной дыры. Точное определение κ [125]:

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2}(\nabla^\mu \chi^\nu)(\nabla_\mu \chi_\nu),$$

где все величины вычисляются на горизонте; χ^μ — поле Киллинга, нормальное к горизонту черной дыры. Вводя в рассмотрение ускорение a^μ орбиты χ^ν

$$a^\mu = \frac{\chi^\nu \nabla_\nu \chi^\mu}{-\chi^\alpha \chi_\alpha},$$

можно переписать это определение следующим образом:

$$\kappa = \lim (Va),$$

где $a = (a^\mu a_\mu)^{1/2}$, $V = (-\chi^\mu \chi_\mu)^{1/2}$; \lim означает приближение к горизонту черной дыры. В статическом случае можно показать, что поверхностная гравитация представляет собой силу, которая необходима для поддержания единичной массы в покое на горизонте черной дыры. (Локальная сила a , разумеется, становится бесконечной.) Этим объясняется название величины κ . Для заряженной черной дыры Керра – Ньюмена, т.е. черной дыры с массой M , зарядом Q и угловым моментом J , поверхностная гравитация имеет вид

$$\kappa = \frac{(M^2 - J^2 - Q^2)^{1/2}}{2M[M + (M^2 - J^2 - Q^2)^{1/2}] - Q^2}.$$

Пространство-время описывается элементом длины

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

где $g_{\mu\nu}$ — метрика пространства-времени. Сигнатура соответствует следующему выбору знаков в метрике Минковского: $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$. Индексы, обозначенные греческими буквами α, β, \dots , включают в себя время, в отличие от обозначенных латинскими i, j, \dots . Ковариантная производная вектора v^μ , обозначаемая точкой с запятой, имеет вид

$$v_{;v}^\mu = \partial_\nu v^\mu + \Gamma_{\alpha\nu}^\mu v^\alpha,$$

$$\frac{Dv^\mu}{ds} = u^\nu \nabla_\nu v^\mu.$$

Здесь $u^\nu = dx^\nu/ds$ — касательный вектор. Частная производная обозначается запятой: $\partial_\nu v^\mu = v_{;\nu}^\mu$.

Бивектор параллельного переноса $g_{;\alpha'}^\mu(x, x')$ является двухточечным объектом, т.е. вектором, как в точке x , так и в точке x' и определяется соотношением

$$v^\mu(x) = g_{;\alpha'}^\mu(x, x') v^{\alpha'}(x'),$$

где вектор v^μ в точке x получается из вектора $v^{\alpha'}$ в точке x' параллельным переносом вдоль геодезической. Подробное обсуждение этого объекта можно найти в монографиях [5, 116]. Необходимость использования бивектора параллельного переноса в выражении (36) связана с тем, что интегрировать можно только скаляры, и $g_{;\alpha'}^\mu(x, x') u^{\alpha'}(x')$ представляет собой скаляр в точке x' и вектор в точке x .

Тензоры Римана, Риччи, Эйнштейна и скалярная кривизна определяются стандартным образом:

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = \partial_\gamma \Gamma_{\beta\delta}^\alpha - \partial_\delta \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha + \Gamma_{\gamma\sigma}^\alpha \Gamma_{\beta\delta}^\sigma - \Gamma_{\delta\sigma}^\alpha \Gamma_{\beta\gamma}^\sigma,$$

$$R_{\beta\delta} = R^\alpha{}_{\beta\alpha\delta}, \quad G_{\beta\delta} = R_{\beta\delta} - \frac{1}{2} g_{\beta\delta} R, \quad R = R^\beta{}_\beta.$$

Скалярное поле ϕ в теории относительности подчиняется ковариантно-обобщенному уравнению Клейна – Гордона – Фока

$$\left[\square - \frac{m^2}{\hbar^2} - \xi R \right] \phi = 0,$$

где $\square = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu$ — четырехмерный оператор Бельтрами; ξ — константа неминимальной связи. При специальном выборе $\xi = 1/6$ уравнение поля становится конформно-инвариантным, а при $\xi = 0$ поле называется минимально связанным.

Если безмассовое скалярное поле имеет источник, характеризующийся зарядом q , то оно подчиняется уравнению

$$[\square - \xi R] \phi = -4\pi j,$$

где скалярный ток имеет вид

$$j = q \int \delta^{(4)}(x - x(s)) \frac{ds}{\sqrt{-g}}.$$

Теорема об отсутствии "волос" черной дыры. Суть теоремы заключается в том, что после завершения коллапса внешний наблюдатель может измерить только четыре величины, характеризующие черную дыру, —

массу M , электрический Q и магнитный Q_m заряды и угловой момент J . Каждая из этих величин по образному выражению, введенному Уиллером, является "волосом".

Массивное тело, падающее на черную дыру, возмущает сферически симметричное пространство-время Шварцшильда, и дальнейшая эволюция черной дыры связана с излучением радиационных мод. В работах [126, 127] и [128, 129] соответственно для электромагнитного и гравитационного полей было показано, что все радиационные моды с орбитальным моментом, большим спина поля, излучаются. После излучения всех радиационных мод пространство-время будет снова представлять собой пространство-время Шварцшильда с измененной массой. Позднее этот результат был получен с других позиций в работах [23, 24]. Подробно этот вопрос изложен в монографии [21]. В настоящее время доказано, что теорема выполняется не для всех полей (см., например, обзор [130]). Например, самоогласованное рассмотрение полей Янга–Миллса и уравнений Эйнштейна показывает, что сферически симметричное решение уравнений описывается не только сохраняющимися величинами массы, зарядов и углового момента, но и характеризуется наличием короткодействующего внешнего неабелева поля.

Топологические дефекты возникают в результате фазовых переходов в различных полевых моделях. Существует четыре вида дефектов: монополи, космические струны, доменные стенки и текстуры, а также различные их гибридные соединения. Мы коснемся только первых двух видов. Вследствие необычного уравнения состояния материи внутри этих объектов пространство-время тоже приобретает необычные свойства. В наиболее чистом виде это проявляется при рассмотрении топологических дефектов, не имеющих внутренней структуры, т.е. точечного монополя и бесконечно тонкой струны. Пространство-время прямой, бесконечно тонкой космической струны с метрикой (27) всюду локально плоское за исключением самой струны, где кривизна принимает дельтаобразный вид

$$R^r{}_{\varphi r\varphi} = R^r{}_{,r} = R^{\varphi}{}_{\varphi} = (v - 1) \frac{\delta(r)}{r}.$$

Глобально пространство-время имеет дефицит плоского угла. Сечение $t = \text{const}$ и $z = \text{const}$ представляет собой коническое пространство. Струны, появляющиеся в теории Великого объединения, когда все известные взаимодействия объединяются в одно единое взаимодействие, характеризуются следующими параметрами: $r_0 \approx 10^{-29}$ см, $v - 1 \approx 10^{-6}$.

В отличие от пространства космической струны пространство-время точечного глобального монополя с метрикой (42) является искривленным:

$$R^{\theta\varphi}{}_{\theta\varphi} = R^{\theta}{}_{,\theta} = R^{\varphi}{}_{,\varphi} = \frac{1 - \alpha^2}{\alpha^2 r},$$

и характеризуется дефицитом телесного угла. Подробное изложение теории топологических дефектов можно найти в монографии [52] и обзорах [53, 54].

Список литературы

1. Соколов А А, Тернов И М *Релятивистский электрон* (М.: Наука, 1974)
2. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Наука, 1973)

3. Клепиков Н П *УФН* **146** 317 (1985)
4. Кривичкий В С, Цытович В Н *УФН* **161** (3) 125 (1991)
5. Де Витт Б *Динамическая теория групп и полей* (М.: Наука, 1987)
6. DeWitt B S, Brehme R W *Ann. Phys.* (New York) **9** 220 (1960)
7. Hobbs J M *Ann. Phys.* (New York) **47** 141 (1968)
8. Hobbs J M *Ann. Phys.* (New York) **47** 166 (1968)
9. Dirac P A M *Proc. R. Soc. London Ser. A* **167** 148 (1938)
10. Quinn T C, Wald R M *Phys. Rev. D* **56** 3381 (1997)
11. DeWitt C M, DeWitt B S *Physics* **1** 3 (1964)
12. Smith A G, Will C M *Phys. Rev. D* **22** 1276 (1980)
13. Vilenkin A *Phys. Rev. D* **20** 373 (1979)
14. Copson E T *Proc. R. Soc. London Ser. A* **118** 184 (1928)
15. Linet B *J. Phys. A: Math. Gen.* **9** 1081 (1976)
16. Cohen J M, Wald R M *J. Math. Phys.* **12** 1845 (1971)
17. Hanni R S, Ruffini R *Phys. Rev. D* **8** 3259 (1973)
18. Leaute B, Linet B *Phys. Lett. A* **58** 5 (1976)
19. Зельников А И, Фролов В П *ЖЭТФ* **82** 321 (1982)
20. Léauté B *Ann. Inst. Henri Poincaré Sect. A* **27** 167 (1977)
21. Новиков И Д, Фролов В П *Физика черных дыр* (М.: Наука, 1986)
22. Carter H, in *General Relativity: An Einstein Centenary Survey* (Eds S W Hawking, W Israel) (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1979) p. 359
23. Teitelboim C *Phys. Rev. D* **5** 2941 (1972)
24. Bekenstein J D *Phys. Rev. D* **5** 1239 (1972)
25. Mayo A E *Phys. Rev. D* **60** 104044 (1999)
26. Wiseman A G *Phys. Rev. D* **61** 084014 (2000)
27. Burko L M *Class. Quantum Grav.* **17** 227 (2000)
28. Pfenning M J, Poisson E *Phys. Rev. D* **65** 084001 (2002)
29. Gal'tsov D V *J. Phys. A: Math. Gen.* **15** 3737 (1982)
30. Leaute, Linet B *J. Phys. A: Math. Gen.* **15** 1821 (1982)
31. Quinn T C *Phys. Rev. D* **62** 064029 (2000)
32. Parker L *Phys. Rev. D* **22** 1922 (1980)
33. Parker L *Phys. Rev. D* **24** 535 (1981)
34. Linet B *Class. Quantum Grav.* **17** 4661 (2000)
35. Linet B *Phys. Rev. D* **61** 107502 (2000)
36. Linet B *Class. Quantum Grav.* **16** 2947 (1999)
37. Linet B *Gen. Relativ. Grav.* **31** 1609 (1999)
38. Bekenstein J D, Mayo A E *Phys. Rev. D* **61** 024022 (2000)
39. Hod S *Phys. Rev. D* **61** 024023 (2000)
40. Shimomura T, Mukohyama S *Phys. Rev. D* **61** 064020 (2000)
41. Zaslavskii O *Gen. Relativ. Grav.* **24** 973 (1992)
42. Гальцов Д В *Частицы и поля в окрестности черных дыр* (М.: Изд-во МГУ, 1986)
43. Hawking S W, Hartle J B *Commun. Math. Phys.* **27** 283 (1972)
44. Mino Y, Sasaki M, Tanaka T *Phys. Rev. D* **55** 3457 (1997)
45. Ori A *Phys. Rev. D* **55** 3444 (1997)
46. Barack L, Ori A *Phys. Rev. D* **61** 061502 (2000)
47. Barack L *Phys. Rev. D* **62** 084027 (2000)
48. Barack L, Burko L M *Phys. Rev. D* **62** 084040 (2000)
49. Burko L M, Liu Y T, Soen Y *Phys. Rev. D* **63** 024015 (2001)
50. Lousto C O *Phys. Rev. Lett.* **84** 5251 (2000)
51. Burko L M *Phys. Rev. Lett.* **84** 4529 (2000)
52. Vilenkin A, Shellard E P S *Cosmic Strings and Other Topological Defects* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1994)
53. Vilenkin A *Phys. Rep.* **121** 263 (1985)
54. Hindmarsh M B, Kibble T W B *Rep. Prog. Phys.* **58** 477 (1995)
55. Соколов А А, Старобинский А А *ДАН СССР* **234** 1043 (1977)
56. Gott J R (III) *Astrophys. J.* **288** 422 (1985)
57. Hiscock W A *Phys. Rev. D* **31** 3288 (1985)
58. Barriola M, Vilenkin A *Phys. Rev. Lett.* **63** 341 (1989)
59. Linet B *Phys. Rev. D* **33** 1833 (1986)
60. Linet B *Ann. Inst. Henri Poincaré Sect. A* **45** 249 (1986)
61. Smith A G, in *The Formation and Evolution of Cosmic Strings* (Eds G W Gibbons, S W Hawking, T Vachaspati) (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990) p. 262
62. Dowker J S *Phys. Rev. D* **18** 1856 (1978)
63. Khusnutdinov N R *Class. Quantum Grav.* **11** 1807 (1994)
64. Хуснутдинов Н Р *ТМФ* **103** 339 (1995)
65. Khusnutdinov N R, in *Quantum Field Theory under the Influence of External Conditions* (Teubner-Texte zur Physik, Bd. 30, Ed. M Bordag) (Stuttgart: B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1996) p. 97
66. Linet B *Class. Quantum Grav.* **7** L75 (1990)
67. Vilenkin A *Phys. Rev. Lett.* **72** 3137 (1994)

68. de Laix A A, Trodden M, Vachaspati T *Phys. Rev. D* **57** 7186 (1998)
69. Ellis J et al. *Phys. Rev. D* **59** 103503 (1999)
70. Izawa K-I, Kawasaki M, Yanagida T *Prog. Theor. Phys.* **101** 1129 (1999)
71. Sakai N, Yokoyama J *Phys. Lett. B* **456** 113 (1999)
72. Kawasaki M et al. *Phys. Rev. D* **62** 123507 (2000)
73. Kawasaki M, Yamaguchi M *Phys. Rev. D* **65** 103518 (2002)
74. Anderson J L *Principles of Relativity Physics* (New York: Academic Press, 1967)
75. Gal'tsov D V *Fortschr. Phys.* **38** 945 (1990)
76. Gal'tsov D V, Letelier P S *Phys. Rev. D* **47** 4273 (1993)
77. Tod K P *Class. Quantum Grav.* **11** 1331 (1994)
78. Moraes F *Braz. J. Phys.* **30** 304 (2000)
79. De Lorenci V A, Moreira E S (Jr) *Phys. Rev. D* **65** 107503 (2002)
80. Boisseau B, Charmousis C, Linet B *Class. Quantum Grav.* **13** 1797 (1996)
81. Bezerra de Mello E R, Bezerra V B, Grats Yu V *Class. Quantum Grav.* **15** 1915 (1998)
82. Bezerra de Mello E R, Bezerra V B, Grats Yu V *Mod. Phys. Lett. A* **13** 1427 (1998)
83. Грац Ю В, Россихин А А *ТМФ* **123** 150 (2000)
84. Grats Yu V, Garcia A *Class. Quantum Grav.* **13** 189 (1996)
85. Гальцов Д В, Грац Ю В, Лаврентьев А Б *ЯФ* **58** 570 (1995)
86. Galtsov D V, Grats Y V, Letelier P S *Ann. Phys. (New York)* **224** 90 (1993)
87. Гальцов Д В, Грац Ю В, Лаврентьев А Б *Письма в ЖЭТФ* **59** 359 (1994)
88. Staruszkiewicz A *Acta Phys. Pol.* **24** 734 (1963)
89. Letelier P S *Class. Quantum Grav.* **4** L75 (1987)
90. Deser S, Jackiw R, t'Hooft G *Ann. Phys. (New York)* **152** 220 (1984)
91. Bezerra de Mello E R et al. *Phys. Rev. D* **51** 7140 (1995)
92. Khusnutdinov N R, Bezerra V B *Phys. Rev. D* **64** 083506 (2001)
93. Brandenberger R H, Davis A-C, Matheson A M *Nucl. Phys. B* **307** 909 (1988)
94. Brandenberger R H, Davis A-C, Matheson A M *Phys. Lett. B* **218** 304 (1989)
95. Alford M G, Wilczek F *Phys. Rev. Lett.* **62** 1071 (1989)
96. Alford M G, March-Russell J, Wilczek F *Nucl. Phys. B* **328** 140 (1989)
97. Perkins W B et al. *Nucl. Phys. B* **353** 237 (1991)
98. Perkins W B, Davis A-C *Nucl. Phys. B* **349** 207 (1991)
99. Fewster C J, Kay B S *Nucl. Phys. B* **399** 89 (1993)
100. Bezerra de Mello E R, Furtado C *Phys. Rev. D* **56** 1345 (1997)
101. Bondi H, Pirani F A E, Robinson I *Proc. R. Soc. London Ser. A* **251** 519 (1959)
102. Хуснутдинов Н Р *Изв. вузов. Физика* (10) 111 (1990)
103. Everett A E *Phys. Rev. D* **24** 858 (1981)
104. de Sousa Gerbert, Jackiw R *Commun. Math. Phys.* **124** 229 (1988)
105. Aharonov Y, Bohm D *Phys. Rev.* **115** 485 (1959)
106. Aliev A N, Gal'tsov D V *Ann. Phys. (New York)* **193** 142 (1989)
107. Серебряный Е М, Скаржинский В Д, Фролов В П *Труды ФИАН* **197** 166 (1989)
108. Audretsch J, Economou A *Phys. Rev. D* **44** 980 (1991)
109. Audretsch J, Economou A *Phys. Rev. D* **44** 3774 (1991)
110. Audretsch J, Economou A, Tsoubelis D *Phys. Rev. D* **45** 1103 (1992)
111. Skarzhinsky V D, Harari D D, Jasper U *Phys. Rev. D* **49** 755 (1994)
112. Audretsch J, Jasper U, Skarzhinsky V D *Phys. Rev. D* **49** 6576 (1994)
113. Bezerra V B, Khusnutdinov N R *Class. Quantum Grav.* **19** 3127 (2002)
114. Маршаков А В *УФН* **172** 977 (2002)
115. Гриб А А, Мамаев С Г, Мостепаненко В М *Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях* (М.: Атомиздат, 1980)
116. Биррел Н, Дэвис П *Квантованные поля в искривленном пространстве-времени* (М.: Мир, 1984)
117. Fulling S A *Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-Time* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989)
118. Гинзбург В Л, Киржниц Д А, Любушин А А *ЖЭТФ* **60** 451 (1971)
119. Chernikov N A, Tagirov E A *Ann. Inst. Henri Poincaré Sect. A* **94** 109 (1968)
120. Hawking S W *Commun. Math. Phys.* **43** 199 (1975)
121. Gibbons G W, Ruiz F R, Vachaspati T *Commun. Math. Phys.* **127** 295 (1990)
122. Bordag M, Khusnutdinov N *Class. Quantum Grav.* **13** L41 (1996)
123. Soff G et al. *Z. Naturforsch. A* **28** 1389 (1973)
124. Greiner W, Müller B, Rafelski J *Quantum Electrodynamics of Strong Fields* (Berlin: Springer-Verlag, 1985)
125. Wald R M *General Relativity* (Chicago: Univ. of Chicago Press, 1984)
126. Гинзбург В Л *ДАН СССР* **156** 43 (1964)
127. Гинзбург В Л, Озерной Л М *ЖЭТФ* **47** 1030 (1964)
128. Дорошкевич А Г, Зельдович Я Б, Новиков И Д *ЖЭТФ* **49** 170 (1965)
129. Новиков И Д *ЖЭТФ* **57** 949 (1969)
130. Volkov M S, Gal'tsov D V *Phys. Rep.* **319** 1 (1999)

Particle self-interaction effects in a gravitational field

N.R. Khusnutdinov

*Physics Department, Kazan State Pedagogical University,
ul. Mezhlauk 1, 420021 Kazan, Russian Federation
Tel. (7-8432) 92-53 73. Fax (7-8432) 92-42 69
E-mail: nail@theory.kazan-spu.ru*

The self-interaction energy and force of particles in a gravitational field are discussed specifically for black holes, infinitely thin and finite-thickness cosmic strings, and a point global monopole. Some self-interaction effects are considered.

PACS numbers: **04.62.+v**, **04.70.-s**, **11.27.+d**

Bibliography — 130 references

Received 15 December 2004, revised 8 February 2005

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **175** (6) 603–620 (2005)

Physics–Uspekhi **48** (6) (2005)