

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Космологические браны и макроскопические дополнительные измерения

А.О. Барвинский

Предлагается краткий обзор теории дополнительных измерений в физической картине мира, в которой наблюдаемая четырехмерная Вселенная является временеподобной поверхностью — браной, погруженной в пространство-время большей размерности. Как предполагается, эта картина имеет серьезные перспективы для решения фундаментальных проблем иерархии физических взаимодействий и космологической постоянной. Обсуждается механизм локализации безмассовых гравитонов на бране, который объясняет возникновение на ней в низкоэнергетическом пределе эффективной четырехмерной эйнштейновской теории гравитации. Показывается, что этот механизм является следствием хорошо известного из теории струн принципа AdS/CFT-соответствия. Рассматриваются сценарии космологической эволюции, включающие инфляцию, индуцированные локальными и нелокальными структурами эффективного гравитационного действия на бране, а также эффекты, позволяющие изучать дополнительные измерения методами нарождающейся гравитационно-волновой астрономии. Обзор завершается обсуждением нового механизма решения проблем космологической постоянной и космологического ускорения, основанного на переменной локальной и нелокальной гравитационной "константе", возникающей в инфракрасных модификациях эйнштейновской теории, которые включают модели индуцированной на бране гравитации и модели массивных гравитонов.

PACS numbers: 04.50.+h, 11.25.-w, 98.80.Cq

Содержание

1. Введение (569).
2. Картина Калуцы – Клейна и локализация материи (571).
3. ADD-модель: масштаб (и число) дополнительных измерений (573).
4. Модель Рандалл – Сундрума (574).
 - 4.1. Проблема иерархии на бране.
 - 4.2. Локализация гравитона на бране.
 - 4.3. Роль радиона.
 - 4.4. Принцип AdS/CFT-соответствия и локализация гравитона.
5. Двубранная модель Рандалл – Сундрума (581).
 - 5.1. Эффективное действие двубранной модели.
 - 5.2. Локальная и нелокальная фазы модели.
 - 5.3. Сценарий расходящихся бран и инфляция на бране.
 - 5.4. Гравитационно-волновые осцилляции и массивные гравитоны.
 - 5.5. Эффект гравитационного эха.
6. Проблема космологической постоянной и бранная космология (591).
 - 6.1. Новый механизм малой космологической постоянной.
 - 6.2. Бранная космология модели Рандалл – Сундрума.
 - 6.3. Модель индуцированной на бране гравитации и космологическое ускорение.

А.О. Барвинский. Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН,
119991 Москва, Ленинский просп. 53, Российская Федерация
Тел. (095) 132-60-49. Факс (095) 135-85-33
E-mail: barvin@td.lpi.ru

Статья поступила 15 февраля 2005 г.,
после доработки 29 апреля 2005 г.

7. Инфракрасные модификации эйнштейновской теории (594).

- 7.1. Модель Паули – Фирца и проблема Ван Дама – Вельтмана – Захарова.
 - 7.2. Модель Двали – Габададзе – Поррати и проблема сильной связи.
8. Заключение: проблемы и перспективы (599).

Список литературы (600).

1. Введение

Современная квантовая теория микромира и теория макромира — космология — характеризуются тем, что две эти области физики начинают в настоящее время перекрываться как на фундаментальном теоретическом уровне, так и на уровне экспериментальных наблюдений. По-видимому, наиболее ярким проявлением этого является теория космологической инфляции, которая, с одной стороны, разрешает известные проблемы стандартного космологического сценария Большого взрыва, а с другой — объясняет детали образования крупномасштабной структуры пространства-времени, со все более высокой точностью наблюдавшиеся в последнее десятилетие в спутниковых, астрономических и аэростатных экспериментах. При этом фундаментальным образом используется квантовая теория космологических возмущений, которая предсказывает формирование низкочастотной части спектра микроволнового космического фона или реликтового излучения.

Однако теория космологических возмущений является полуфеноменологической теорией, поскольку она

базируется на квантовой теории физических полей в искривленном пространстве-времени (затрагивая фактически ее низшее с точки зрения квантования — древесное — приближение) и не объясняет происхождения инфляционной стадии космологического расширения. Механизмы такого расширения в рамках теории инфляции также остаются в существенной степени классическими либо построенными в рамках полуфеноменологических квантовых моделей. Попытки включения современной космологии в фундаментальную физическую теорию высоких энергий приводят к идеи многомерного пространства-времени, чему и посвящается данный обзор.

Идея многомерного пространства-времени не нова. Впервые она появилась в работе Г. Нордстрома 1914 г. [1], предвосхитившей создание общей теории относительности в форме скалярной теории гравитации как составной части максвелловской электродинамики в пятимерном пространстве-времени. Эта идея получила развитие в трудах Т. Калуцы и О. Клейна [2], заложивших основы одноименного подхода Калуцы–Клейна, который много позднее (в восемидесятых годах) интенсивно применялся для анализа многомерных супергравитационных теорий и их феноменологии. Важным элементом этого подхода явилось качественное объяснение того факта, что дополнительные измерения, при условии их компактификации на некотором масштабе, являются наблюдаемыми в области малых энергий, лежащих ниже этого масштаба.

По-настоящему необходимой концепция многомерности фундаментального пространства-времени стала только в рамках теории суперструн, которая, как широко признано в настоящее время, является наиболее перспективной теорией высоких энергий, объединяющей квантовую гравитацию и теорию калибровочных полей. Причина этого заключается в том, что теория суперструн и ее низкоэнергетические проявления могут быть непротиворечивым образом сформулированы только в выделенных размерностях фундаментального пространства-времени $D = 10$ или $D = 11$, в то время как другие размерности просто запрещены. При этом, как и в подходе Калуцы–Клейна, четырехмерность наблюдаемого мира достигается путем компактификации дополнительных измерений в энергетическом масштабе, недостижимом в рамках субпланковской физики.

Другой мотивацией к введению дополнительных измерений является проблема иерархии в физике высоких энергий и космологии. Эта проблема состоит в наличии огромной энергетической пустыни между масштабом электрослабого взаимодействия порядка 1 ТэВ и планковским масштабом квантовой гравитации 10^{19} ГэВ. В космологическом контексте проблема иерархии приобретает наиболее острый характер, поскольку она отражает колоссальный разрыв (в 120 порядков величины) между квантово-гравитационным планковским масштабом и масштабом величины наблюдаемой космологической постоянной.

Чтобы пояснить сказанное, отметим, что Вселенная характеризуется рядом фундаментальных космологических параметров, к которым принадлежат средняя плотность материи ρ , анизотропия микроволнового фона $\Delta T/T$ и космологический параметр плотности Ω , измеряемый в единицах критической плотности расширяю-

щейся Вселенной:

$$\rho \simeq 10^{-29} \text{ г см}^{-3}, \quad (1.1)$$

$$\frac{\Delta T}{T} \simeq 10^{-5}, \quad (1.2)$$

$$\frac{\rho}{\rho_{\text{crit}}} \equiv \Omega \simeq 1. \quad (1.3)$$

Критическая плотность выражается в терминах постоянной Хаббла H — логарифмической производной космологического масштабного фактора $a(t)$ относительно собственного времени t сопутствующего наблюдателя:

$$\rho_{\text{crit}} = \frac{3M_P^2 H^2}{8\pi}, \quad H = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (1.4)$$

где $M_P^2 = 1/G$ — квадрат планковской массы, обратный к значению гравитационной постоянной.

Важнейшим недавним открытием, основанным на комбинации разнородных экспериментов по наблюдению сверхновых, космической микроволновой анизотропии и по микролинзированию, явилось обнаружение современного космологического ускорения [3–5], соответствующего примерно 70%-ному содержанию в полной плотности вещества во Вселенной специальной компоненты (с уравнением состояния, близким к $p = -\rho$) — темной энергии, интерпретируемой как эффективная космологическая постоянная Λ :

$$\rho = \rho_m + \rho_\Lambda, \quad (1.5)$$

$$\Omega_\Lambda \simeq 0.73. \quad (1.6)$$

Космологическая постоянная оказывается неизменно меньше возможных значений вакуумной энергии для известных моделей фундаментальной квантовой теории, простирающихся от электрослабого взаимодействия до квантовой гравитации и теории струн. Плотность энергии вакуума определяется энергетическим масштабом соответствующей модели и равна по порядку величины $\rho_{EW} \sim 1 \text{ ТэВ}^4$ для электрослабой теории и $\rho_P \sim M_P^4$ для квантовой гравитации с планковской массой $M_P \sim 10^{19} \text{ ГэВ}$. Поэтому вакуумная энергия современного космологического расширения отстает от предсказаний этих моделей на 56 и 120 порядков соответственно:

$$\frac{\rho_\Lambda}{\rho_{EW}} \sim 10^{-56}, \quad \frac{\rho_\Lambda}{\rho_P} \sim 10^{-120}. \quad (1.7)$$

Парадоксальность ситуации с этим значением космологической постоянной (если, конечно, наблюдаемая темная энергия имеет правильную интерпретацию фундаментальной константы или вакуумной энергии) состоит в том, что, несмотря на свою малость, она, тем не менее, отлична от нуля.

Открытие космологического ускорения коренным образом меняет статус проблемы космологической постоянной. Если раньше все усилия в фундаментальной физике были направлены на построение модели с нулевой вакуумной энергией, то теперь правильная модель должна объяснять отличное от нуля значение, с одной стороны, несопоставимо малое по сравнению с вакуумными энергиями электрослабого взаимодействия, Великого объединения и планковской гравитации, а с другой — фактически доминирующее в полной плотности

вещества во Вселенной. Все это означает небывалое ранее переплетение проблем фундаментальной микрофизики, феноменологии и космологии. Интересно то, что концепция дополнительных измерений в свете этой проблематики становится очень плодотворной и также претерпевает кардинальное изменение, становясь отличной от старого подхода Калуцы – Клейна [6].

Основное отличие заключается в том, что, несмотря на четырехмерную природу непосредственно наблюдаемого физического мира, дополнительные измерения пространства-времени могут быть макроскопическими и даже некомпактными. При этом четырехмерность нашего мира достигается посредством локализации материи в многомерном пространстве-времени (в его объеме) на его четырехмерных подмногообразиях, называемых *бранами*¹. Возникающая при этом специфика взаимодействия позволяет проводить описание такой фундаментально многомерной модели в эффективно четырехмерных терминах.

Динамика геометрии бран и локализованной на них материи представляет собой космологию бран, приходящую на смену обычной космологии четырехмерного мира. Оказывается, что в рамках такой концепции дополнительные измерения открывают новые перспективы решения проблемы иерархии — изменить границы энергетической "пустыни" между электрослабым взаимодействием и планковской гравитационной физикой, установить более глубокую связь с теорией струн в лице так называемого принципа AdS/CFT-соответствия, построить новые механизмы инфляции в ранней Вселенной и, наконец, предложить модели решения проблемы космологической постоянной, включающей как иерархию, так и космологическое ускорение.

Данный обзор посвящен краткому обсуждению этого нового направления в физике высоких (и, как мы увидим в дальнейшем, ультранизких) энергий и в космологии. Мы начнем с сопоставления картины Калуцы – Клейна и идеи локализации материи, в частности гравитонов, на четырехмерных подмногообразиях пространства-времени. Затем мы остановимся на оценках размера и числа дополнительных измерений, совместных с современными экспериментами и следующих из простейшей многомерной ADD-модели, и продемонстрируем механизмы изменения фундаментальных констант теории в рамках бранной концепции.

Далее рассматривается механизм локализации гравитонов на бране в модели Рандалл – Сундрума, показывающий совместность наблюдаемого четырехмерного пространства-времени с наличием некомпактных дополнительных измерений. Как оказывается, этот механизм является следствием принципа AdS/CFT-соответствия в теории струн, заключающегося в дуальности (эквивалентности) теории супергравитации, сформулированной на фоне многомерного пространства анти-де Ситтера, и конформной теории поля в лице суперсимметричной модели Янга – Миллса, живущей на границе этого пространства.

После обсуждения природы такого соответствия мы остановимся на построении бранного эффективного действия в двубранной модели Рандалл – Сундрума,

нелокальная природа которого отражает AdS/CFT-принцип, и продемонстрируем механизм инфляции на бране, генерируемой отталкивающимися бранами и ассоциируемой с фазовым переходом между ультралокальной и существенно нелокальной фазами теории. В качестве приложений теории мы рассмотрим потенциально наблюдаемые эффекты гравитационно-волновых осцилляций и гравитационного эха, пригодных к изучению дополнительных измерений методами гравитационно-волновой астрономии. Обзор завершается кратким рассмотрением бранных космологических моделей с переменной локальной гравитационной "константой" и нелокальных модификаций эйнштейновской теории, которые могут служить в качестве нового механизма решения проблемы космологической постоянной. В качестве возможного источника таких модификаций рассматриваются модель Двали – Габададзе – Поррати и другие теории индуцированной на бране гравитации.

2. Картина Калуцы – Клейна и локализация материи

Чтобы проиллюстрировать различие картины Калуцы – Клейна (КК) и концепции локализации материи на бране, рассмотрим пятимерное пространство-время цилиндрического вида с компактифицированной на окружность длины $2\pi L$ пятой координатой y (рис. 1). Полный набор координат, покрывающий пространство, обозначим как

$$X^A = (x^\mu, y), \quad A = 0, 1, 2, 3, 5, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad (2.1)$$

$$-\infty < x < \infty, \quad 0 < y < 2\pi L.$$

Координаты x^μ образуют плоское четырехмерное пространство-время с лоренцевой метрикой $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Полная метрика имеет вид

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2. \quad (2.2)$$

Безмассовое скалярное поле в таком пространстве удовлетворяет уравнению с пятимерным даламберти-

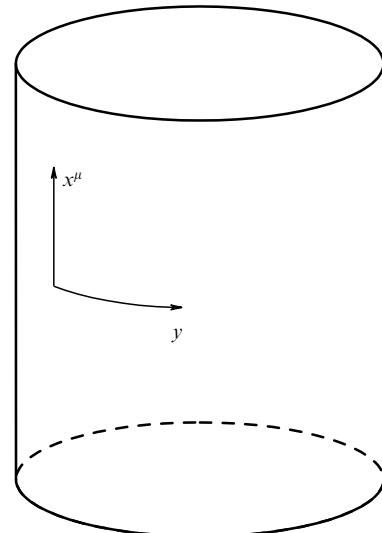


Рис. 1. Пятимерное пространство-время цилиндрического типа в картине Калуцы – Клейна с компактифицированной на окружность пятой координатой y .

¹ В дальнейшем многомерную часть пространства-времени мы будем называть "объемом". Эквивалентом этого термина в международной англоязычной литературе является слово "bulk".

ном $\square_5 = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + \partial_y^2$:

$$\square_5 \phi(x, y) = 0. \quad (2.3)$$

Будучи разложено по периодическим на окружности дискретным гармоникам Фурье и по континууму плоских волн в x -пространстве:

$$\phi_p(x, y) = \exp\left(ip_\mu x^\mu + \frac{iny}{L}\right), \quad n = 0, \pm 1, \dots, \quad (2.4)$$

оно приводит в каждой n -й гармонике к массивному уравнению дисперсии для четырехмерного импульса p^μ :

$$p^2 + m_n^2 = 0, \quad p^2 \equiv p_\mu p^\mu, \quad (2.5)$$

$$m_n^2 = \frac{n^2}{L^2}. \quad (2.6)$$

Таким образом, безмассовое с пятимерной точки зрения поле представляет собой башню четырехмерных массивных КК-мод с $|n| \geq 1$, надстроенную над нулевой безмассовой модой $n = 0$ и имеющую дискретный спектр масс (2.6), определяемый масштабом компактификации дополнительного измерения L .

Очевидно, что в масштабе энергий $E < 1/L$ даже первый массивный уровень КК-спектра не может быть возбужден и соответствующее компактное измерение ненаблюдаемо. Поэтому дополнительные измерения достаточно малого размера являются невидимыми для наблюдателя, ограниченного сверху по шкале энергий. Поскольку в первых многомерных супергравитационных теориях масштаб компактификации предполагался планковским ($L \sim 1/M_P \sim 10^{-33}$ см), прямое наблюдение дополнительных измерений было возможным только при планковском масштабе энергии ($M_P \sim \sim 10^{19}$ ГэВ), что автоматически обеспечивало эффективную четырехмерность субпланковской физики. Более того, поскольку на современных ускорителях, достигших отметки 100 ГэВ, до сих пор не обнаружено ни одного массивного КК-партнера обычных частиц стандартной модели, размер дополнительного измерения должен удовлетворять ограничению $L^{-1} > 100$ ГэВ, или (в обычных единицах длины) быть меньше, чем 10^{-17} см.

Казалось бы, такой результат закрывает всякую возможность многомерного пространства-времени с макроскопическими дополнительными измерениями. Однако, помимо стандартной картины Калуцы–Клейна, существует кардинально другая концепция многомерия, основанная на локализации материи на четырехмерных подмногообразиях — бранах, погруженных в многомерный объем. Главное отличие этой концепции от подхода Калуцы–Клейна состоит в предположении, что в отличие от поля гравитации, которое свободно живет и распространяется в многомерном объеме, обычные поля материи локализованы на бранах и на фундаментальном уровне являются четырехмерными, а не многомерными объектами. Тогда возможно выполнение условий, при которых многомерное гравитационное поле также локализуется на бране и в низкоэнергетической области становится эффективно четырехмерным, несмотря на макроскопическую или даже бесконечную протяженность дополнительных измерений. Как побочный эффект этой конструкции ньютоновская гравитационная постоянная G_4 (или планковский масштаб

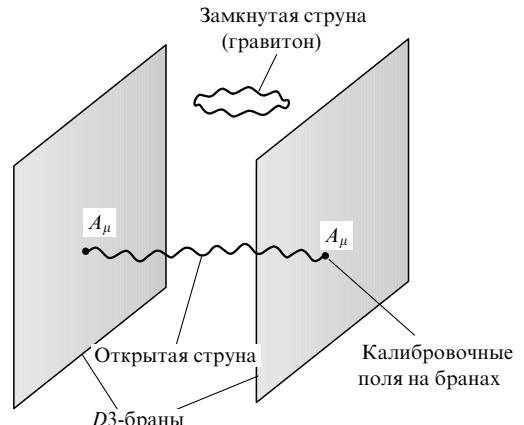


Рис. 2. Картина компактификации многомерного пространства-времени, альтернативная схеме Калуцы–Клейна. Калибровочные поля материи, ассоциируемые с концами *открытых* струн, являются фундаментально четырехмерными объектами, локализованными на $D3$ -бранных (непертурбативных связанных состояниях струн), и не имеют КК-партнеров. Гравитон как низкоэнергетическое приближение *замкнутой* струны может распространяться в многомерном объеме.

квантовой гравитации $M_P^2 = G_4^{-1}$) перестает быть фундаментальной величиной и начинает определяться комбинацией фундаментальной D -мерной гравитационной постоянной G_D и масштабом дополнительного измерения L (который, как мы увидим в дальнейшем, может стремиться к бесконечности).

Мотивацией к такой схеме локализации материи и гравитации на бране являются, с одной стороны, довольно давние работы, в которых она была предложена для фермионной материи на фоне кинка — решения нелинейного уравнения для самодействующего скалярного поля, описывающего доменную стенку [7, 8]. С другой стороны, эта картина следует из низкоэнергетической теории суперструн, в которой браны возникают как связанные состояния (Dp -бранны) открытых струн. Они представляют собой $(p+1)$ -мерные времениподобные поверхности, на которых локализованы концы открытых струн. Поскольку концы открытых струн несут на себе калибровочные поля, последние на фундаментальном уровне являются $(p+1)$ -мерными объектами, живущими на бранах (рис. 2). Это объясняет тот факт, почему калибровочные поля не живут в объеме и не имеют КК-партнеров.

Напротив, замкнутые струны, которые, как известно, описывают поле спина 2, могут свободно распространяться в объеме, а следовательно, разрешают свободное распространение 10-мерных гравитонов². Это объясняет неравноправную роль гравитации и полей материи в новой картине дополнительных измерений. В этой картине только четырехмерный безмассовый гравитон имеет башню массивных КК-партнеров. Однако они остаются невидимыми в низкоэнергетических экспериментах не благодаря малому масштабу компактификации L , а благодаря тому, что локализации на бране

² В низкоэнергетической теории суперструн существуют также скалярное поле дилатона и поля форм, живущие в 10-мерном пространстве, но в предлагаемой упрощенной схеме изложения связи между физикой дополнительных измерений и феноменологией струнных D -бранных мы их не будем учитывать.

подвергается только безмассовая нулевая мода, а волновые пакеты массивных КК-партнеров, наоборот, выталкиваются в объем за пределы браны и тем самым слабо взаимодействуют с четырехмерной материей. Таким образом, масштаб компактификации и энергетический масштаб, ниже которого теория является эффективно четырехмерной, могут быть сделаны независимыми.

Как оказывается, свойства локализации гравитона — это проявление так называемого принципа AdS/CFT-соответствия в полевой теории суперструн типа IIB и существенно основаны на наличии кривизны многомерного объема (его AdS-характере). Однако прежде чем рассмотреть модель Рандалл–Сундрума, являющуюся носителем этих свойств, остановимся на более простом варианте — ADD-модели [9] с плоским фоновым пространством, которая позволяет сформулировать простые экспериментальные ограничения на параметры дополнительных измерений и предлагает пути решения проблемы иерархии как в секторе полей материи, так и в гравитационном секторе.

3. ADD-модель: масштаб (и число) дополнительных измерений

В модели Аркани-Хамеда–Димопулоса–Двали (ADD) [9] четырехмерная гравитационная постоянная

$$G_4 = \frac{1}{M_P^2} \quad (3.1)$$

не является фундаментальной. Наоборот, фундаментальным является D -мерное гравитационное действие

$$S = \frac{1}{16\pi G_D} \int d^D X G^{1/2} R(G_{AB}), \quad D = 4 + N, \quad (3.2)$$

с D -мерной гравитационной постоянной, выражющейся через фундаментальный энергетический масштаб теории M , существенно отличный от планковского масштаба M_P :

$$G_D = \frac{1}{M^{D-2}}. \quad (3.3)$$

Предполагается, что D -мерное гравитационное поле взаимодействует с четырехмерной материей, локализованной на бране коразмерности $N = D - 4$, при этом характерный размер дополнительных измерений конечен и равен L .

Если качественно ограничиться низкоэнергетическим приближением, основной вклад в который происходит от нулевых мод гравитационного поля, не зависящих от дополнительных координат y , то в многомерном интегrale (3.2) интеграл по y факторизуется в виде объема внутреннего пространства:

$$\int d^D X \equiv \int d^N y \int d^4 x = L^N \int d^4 x. \quad (3.4)$$

При этом эффективное действие для нулевой моды гравитационного поля, которой является четырехмерная метрика $g_{\mu\nu}(x)$, принимает вид эйнштейновского действия:

$$S_{\text{eff}}[g_{\mu\nu}] = \frac{L^N M^{N+2}}{16\pi} \int d^4 x g^{1/2} R(g), \quad (3.5)$$

с гравитационной постоянной G_4 и соответствующей планковской массой:

$$G_4 = \frac{G_D}{L^N}, \quad M_P = M(ML)^{N/2}. \quad (3.6)$$

Таким образом, наблюдаемый планковский масштаб теории гравитации является производным от фундаментального ($D = 4 + N$)-мерного масштаба и размера дополнительных измерений. Это свойство позволяет кардинально изменить подход к проблеме иерархии и перенести, скажем, фундаментальный гравитационный масштаб из планковской области в область гораздо более низких энергий. Например, масштаб многомерной гравитации может быть выбран в области электротягового взаимодействия или немного выше его: $M \sim 1$ ТэВ. Заметим, что согласно формуле (3.6) это потребует достаточно большого размера внутреннего пространства, что было бы невозможно в рамках стандартной схемы Калуцы–Клейна, поскольку потребовало бы введения достаточно легких КК-партнеров частиц материи, запрещенных современными коллайдерами экспериментами. Однако в рамках идеи о локализации материи на бране КК-партнеры материи не существуют вообще, и такое экспериментальное ограничение отсутствует.

Возможные ограничения на размер дополнительных измерений следуют теперь из гравитационного сектора (поскольку только гравитонам позволено распространяться в многомерном объеме). Эти ограничения следуют главным образом из экспериментов типа Кавендиша по проверке ньютонаовского закона притяжения пробных масс. Этот закон хорошо проверен в масштабах небесной механики, однако имеет вполне определенную границу снизу в миллиметровом диапазоне. Как следует из высокопрецизионных настольных опытов [10], закон притяжения хорошо проверен до расстояний 0,2 мм, однако на меньших расстояниях отклонения от него в настоящее время экспериментально не исключены. Следовательно, в отличие от коллайдерных ограничений в рамках КК-подхода $L < 10^{-17}$ см мы имеем гораздо более умеренную оценку:

$$L < 0,2 \text{ мм}. \quad (3.7)$$

Оценку (3.7) можно применить для установления ограничения на число дополнительных измерений. Из (3.6) следует, что масштаб компактификации L выражается через фундаментальный масштаб M и коразмерность браны N согласно

$$L = M^{-1} \left(\frac{M_P}{M} \right)^{2/N} \simeq 10^{32/N-17} \text{ см}, \quad (3.8)$$

где принято значение $M \sim 1$ ТэВ. Поэтому для трех низших коразмерностей браны справедливы следующие оценки на L :

$$\begin{aligned} N = 1, \quad L &\sim 10^{15} \text{ см}, \\ N = 2, \quad L &\sim 10^{-1} \text{ см}, \\ N = 3, \quad L &\sim 10^{-6} \text{ см}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Первый случай, как видно, полностью исключен данными по небесной и планетарной механике, второй случай лежит как раз в миллиметровом диапазоне современных прецизионных экспериментов [10]. Послед-

ний случай, по-видимому, в ближайшее время недостижим, несмотря на быстрый прогресс в повышении точности настольных проверок ньютонаовского закона тяготения. Таким образом, одно дополнительное измерение в ADD-модели уже исключено, а наиболее вероятной в ближайшее время кажется проверка этой модели с двумерным внутренним пространством.

4. Модель Рандалл–Сундрума

В предыдущем разделе мы ослабили ограничение на размер дополнительных измерений, перенеся его в миллиметровый диапазон. Здесь же мы покажем, что он может фактически быть бесконечным в присутствии ненулевой кривизны в объеме. Для этого рассмотрим модель Рандалл–Сундрума [11, 12], которая описывает пятимерное гравитационное поле с космологическим членом Λ_5 , взаимодействующее с четырехмерной браной:

$$\begin{aligned} S[G_{AB}(X), \psi(x)] = & \\ = & \frac{1}{16\pi G_5} \int d^5 X G^{1/2} [{}^5R(G_{AB}) - 2\Lambda_5] + \\ + & \int d^4 x g^{1/2} \left(\frac{1}{8\pi G_5} [K] - \sigma + L_m(g_{\alpha\beta}, \psi, \partial\psi) \right). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Брана обладает натяжением σ и населена четырехмерным материальным полем ψ с лагранжианом $L_m(g_{\alpha\beta}, \psi, \partial\psi)$ и индуцированной метрикой $g_{\mu\nu}(x)$.

С точки зрения четырехмерного наблюдателя натяжение браны можно рассматривать как четырехмерный космологический член. Будем считать, что в координатной системе $X^A = (x^\mu, y)$ брана является времениподобной плоскостью: $X^5 \equiv y = 0$ (что является координатной калибровкой, поскольку преобразованием координат она всегда может быть помещена в эту точку пятой координаты). Тогда индуцированная метрика $g_{\mu\nu}(x) = G_{\mu\nu}(x, 0)$. Более того, предположим, что полное пятимерное пространство обладает Z_2 -симметрией относительно плоскости браны, т.е. пространство-время справа от браны (при $y > 0$) может быть получено зеркальным отражением его полупространства при $y < 0$. Это свойство можно сформулировать в нормальной гауссовой системе координат ($G_{5\mu}(X) = 0$) как четность функций остальных ненулевых метрических коэффициентов:

$$G_{\mu\nu}(x, y) = G_{\mu\nu}(x, -y), \quad G_{55}(x, y) = G_{55}(x, -y) = 1.$$

Поскольку с точки зрения пятимерного пространства брана представляет собой дельтаобразное распределение материи и натяжения, решение соответствующих многомерных уравнений Эйнштейна не является гладким: нормальные к бране производные метрических коэффициентов терпят на бране скачок. В частности, скачок следа внешней кривизны браны при подходе к ней справа и слева: $[K] = K(y=0^+) - K(y=0^-)$, отличен от нуля и порождает дополнительный поверхностный член в действии, который носит имя действия Гиббонса–Хокинга [13]. Его введение необходимо для корректности вариационной процедуры для полного пятимерного действия.

Вариационная процедура приводит к уравнениям Эйнштейна в пятимерном объеме и условиям сшивания

Израэля на бране [14], которые выражают скачок внешней кривизны браны $K_{\mu\nu}$:

$$[K^{\mu\nu} - g^{\mu\nu} K] = 8\pi G_5 S^{\mu\nu}, \quad (4.2)$$

через полный метрический тензор энергии-импульса четырехмерного бранного действия в (4.1), $S^{\mu\nu}$, включающий как вклад материи $T^{\mu\nu}$, так и натяжения,

$$\frac{1}{2} g^{1/2} S^{\mu\nu} = \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}} \int d^4 x g^{1/2} (-\sigma + L_m(g_{\alpha\beta}, \psi, \partial\psi)), \quad (4.3)$$

$$S^{\mu\nu} = -\sigma g^{\mu\nu} + T^{\mu\nu}. \quad (4.4)$$

Вследствие Z_2 -симметрии внешние кривизны справа и слева от браны просто различаются знаком и в нормальной гауссовой системе координат равны

$$K_{\mu\nu} \Big|_{y=\pm 0} = -\frac{1}{2} \frac{dg_{\mu\nu}}{dy} \Big|_{y=\pm 0} \quad (4.5)$$

(данная знаковая конвенция соответствует определению внешней кривизны как производной 4-метрики вдоль нормали к бране, направленной наружу из полупространства $y > 0$ и внутрь из полупространства $y < 0$).

Оказывается, что в отсутствие материи на бране существует простое решение полной системы уравнений Эйнштейна и краевых условий сшивания в виде кусочно-гладкой метрики:

$$ds^2 = dy^2 + \exp\left(-\frac{2|y|}{l}\right) \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (4.6)$$

(где $\eta_{\mu\nu}$ есть плоская метрика Минковского) при условии тонкого согласования между *отрицательной* пятимерной космологической постоянной и положительным натяжением на бране:

$$\Lambda_5 = -\frac{6}{l^2}, \quad \sigma = \frac{3}{4\pi G_5 l}. \quad (4.7)$$

Локально решение (4.6) представляет собой геометрию пространства анти-де Ситтера (AdS) — однородного пространства постоянной отрицательной кривизны. Глобально оно является сшивкой двух Z_2 -симметричных областей AdS-пространства, простирающихся в координатах Пуанкаре (x^μ, y) между браной $y = 0$ и их соответствующими горизонтами $y = \pm\infty$.

Априори такая конструкция выглядит надуманной, однако для нее существует достаточно сильная мотивация из теории струн в лице так называемой модели Хоравы–Виттена [16], предлагающей решение проблемы киральных фермионов в полевом приближении теории струн путем компактификации многомерного пространства на орбифолде. В упрощенном пятимерном аналоге этой модели пятая координата y компактифицируется на окружность конечной длины $2d$ и пробегает значения $-d \leq y \leq d$. Точки d и $-d$ отождествляются, так что точки $y = 0$ и $|y| = d$ параметризуют диаметрально противоположные точки на такой окружности. Далее осуществляется дополнительное отождествление пар точек y и $-y$ (и соответствующих полей в объеме) на двух полуокружностях, в результате чего получается орбифолд — многообразие, не обладающее гладкостью в двух фиксированных точках $y = 0$ и $|y| = d$. В этих точках помещаются две браны, которые можно

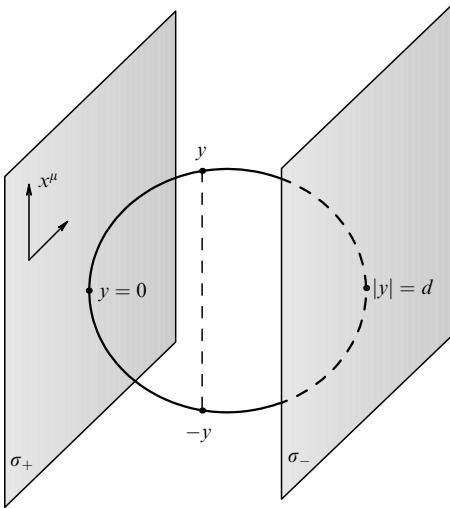


Рис. 3. Качественная картина компактификации пятого измерения на орбифолде модели Хоравы–Виттена, лежащая в основе модели Рандалл–Сундрума с двумя бранами, несущими натяжения противоположного знака σ_{\pm} . Z_2 -отождествление точек y и $-y$ показано штриховой линией.

населить киральной фермионной материей, индуцированной из многомерного объема (рис. 3).

Оказывается, что метрика (4.6) является самосогласованным решением пятимерных уравнений Эйнштейна и условий сшивания Израэля на орбифолде с двумя бранами при условии того, что их натяжения σ_{\pm} совпадают с точностью до знака и опять согласованы с отрицательной космологической постоянной в объеме:

$$\sigma_+ = -\sigma_- = \frac{3}{4\pi G_5 l}. \quad (4.8)$$

Конечно же, гравитационное действие такой системы дается выражением (4.1), в котором присутствуют два бранных поверхностных интеграла с соответствующими натяжениями σ_{\pm} и скачками внешней кривизны. Частный случай однобранной модели Рандалл–Сундрума получается формальным пределом $d \rightarrow \infty$.

4.1. Проблема иерархии на бране

Итак, введение кусочно-гладкого AdS-пространства мотивировано феноменологией модели Хоравы–Виттена. Более того, искривленный характер многомерного объема в этой модели открывает новые перспективы для решения проблемы иерархии в феноменологии частиц. В частности, он позволяет сделать наблюдаемый масштаб электрослабого и других калибровочных взаимодействий (аналогично гравитационному) производным от свойств дополнительного измерения. Чтобы показать это, представим, что брана с отрицательным натяжением населена хиггсовским полем $H(x)$ с действием

$$S_{brane} = \int d^4x g^{1/2} (g^{\mu\nu} \partial_\mu H \partial_\nu H - \lambda(H^2 - v^2)^2), \quad (4.9)$$

в котором параметр v задает фундаментальный масштаб спонтанного нарушения симметрии. Это поле минимальным образом взаимодействует с индуцированной метрикой:

$$g_{\mu\nu} = \exp\left(-\frac{2|y|}{l}\right) \eta_{\mu\nu},$$

зависящей от точки пятой координаты, в которой брана локализована. Благодаря масштабному фактору

$$a(y) = \exp\left(-\frac{2|y|}{l}\right), \quad (4.10)$$

отличающему эту метрику в пятимерном объеме от плоской, исходное поле H не обладает канонической нормировкой: коэффициент его кинетического члена в действии отличен от единичного.

Канонической нормировкой обладает поле

$$\bar{H} = \exp\left(-\frac{|y|}{l}\right) H, \quad (4.11)$$

в терминах которого действие (4.9) принимает вид хиггсовского действия:

$$S_{brane} = \int d^4x (-\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \bar{H} \partial_\nu \bar{H} - \lambda(\bar{H}^2 - \bar{v}^2)^2), \quad (4.12)$$

с другим эффективным масштабом нарушения симметрии:

$$\bar{v} = \exp\left(-\frac{|y|}{l}\right) v. \quad (4.13)$$

Этот масштаб экспоненциально мал в единицах длины дополнительного измерения, поэтому малое изменение положения пробной браны в объеме вызывает экспоненциально сильное изменение энергетического масштаба теории с точки зрения четырехмерного наблюдателя, живущего на этой бране. Это ключ к возможному решению проблемы иерархии в феноменологии частиц [11], который дополнительно подтверждает важность модели Рандалл–Сундрума³.

Возникает, однако, важный вопрос о том, как обстоит дело с гравитационным взаимодействием: будет ли эффективная теория четырехмерной также и в гравитационном секторе, и если да, то в каком масштабе расстояний? Как мы сейчас увидим, этот масштаб определяется не размером дополнительного измерения d , а радиусом кривизны AdS-пространства l , при этом четырехмерная гравитация остается справедливой для расстояний, превосходящих l . Это свойство основано на феномене локализации нулевой моды гравитационного поля, к рассмотрению которого мы и переходим.

4.2. Локализация гравитона на бране

Простейшим тестом четырехмерности теории в гравитационном секторе является проверка ньютоновского закона тяготения между двумя массивными источниками

³ Отметим, что этот вывод является упрощенной иллюстрацией механизма экспоненциальной иерархии между планковским и электрослабым масштабами, поскольку только их отношение в эффективной теории на бране определяется ее положением в многомерном объеме. Полный вывод должен включать анализ кинетического члена гравитона при условии единичной нормировки для его взаимодействия с материей (см. подробное изложение в [11, 6]). Вне рамок такого вывода метрика на однородной бране всегда может быть локально приведена к единичному виду масштабным преобразованием координат. Фактический нелокальный характер этого механизма демонстрируется в разделе 5.1, где отмечается, что низкоэнергетические моды на бране с положительным натяжением смещаются в ультрафиолет на другой бране.

ками, локализованными на бране. Для его проверки рассмотрим экстремальную ситуацию некомпактного дополнительного измерения ($0 \leq |y| < \infty$) и построим линеаризованную теорию гравитации на фоне решения Рандалл–Сундрума:

$$g_{\mu\nu} = \exp\left(-\frac{2|y|}{l}\right)\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x, y), \quad (4.14)$$

где $h_{\mu\nu}(x, y)$ представляют собой ненулевые компоненты возмущений метрики в так называемой калибровке Рандалл–Сундрума⁴ [12, 17, 19, 20]:

$$h_{55} = h_{5\mu} = 0, \quad \partial^\mu h_{\mu\nu} = h_\mu^\mu = 0. \quad (4.15)$$

Рассмотрим для начала вакуумные (в отсутствие материи на бране) линеаризованные уравнения Эйнштейна и условия сшивания Израэля. В этой калибровке они принимают вид

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} - \frac{4}{l^2} + \frac{\square}{a^2(y)}\right)h_{\mu\nu}(x, y) = 0, \quad (4.16)$$

$$\left.\left(\frac{d}{dy} + \frac{2}{l}\right)h_{\mu\nu}(x, y)\right|_{y=0} = 0, \quad (4.17)$$

где $\square = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$ есть четырехмерный даламбертиан.

Разделим переменные в уравнениях (4.16), (4.17) путем разложения метрических возмущений по плоским четырехмерным волнам:

$$h(x, y) = \frac{1}{\sqrt{z}}\varphi_m(z)\exp(ipx), \quad p^2 = -m^2. \quad (4.18)$$

Здесь коэффициентная функция пятой координаты $\varphi_m(z)$ записана в терминах новой переменной

$$z = (\text{sign } y)l \exp\frac{|y|}{l}, \quad |z| \geq l, \quad (4.19)$$

а параметр разделения переменных m играет роль массы КК-мод гравитационного поля. В силу линеаризованных уравнений Эйнштейна для возмущений (4.18)

$$\frac{z^{3/2}}{l^2}\left(\frac{d^2}{dz^2} + \square - \frac{15}{4z^2}\right)\varphi_m(z)\exp(ipx) = 0 \quad (4.20)$$

квадрат этой массы является собственным значением стационарного уравнения Шрёдингера

$$\left(-\frac{d^2}{dz^2} + \frac{15}{4z^2}\right)\varphi_m(z) = m^2\varphi_m(z) \quad (4.21)$$

на полуправой $z \geq l$ с потенциалом

$$V(z) = \frac{15}{4z^2}, \quad (4.22)$$

качественно показанным на рис. 4.

В силу Z_2 -симметрии задачи собственные функции продолжаются на полуправую $z \leq -l$ четным образом:

⁴ Фактически эта калибровка является комбинацией калибровки нормальной гауссовой системы координат и следствий части линеаризованных уравнений Эйнштейна (связей), позволяющих выбрать возмущения метрики поперечно-бесследовыми [20].

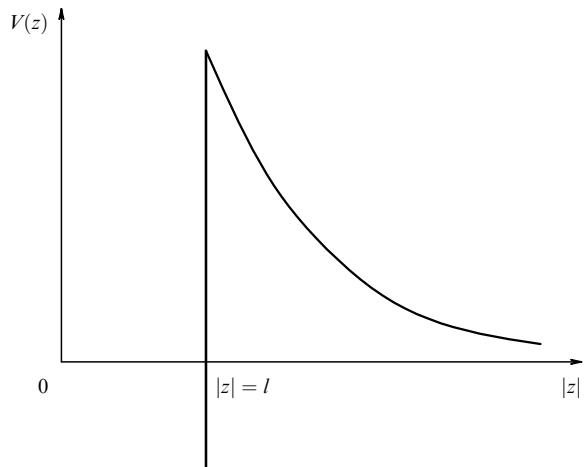


Рис. 4. Потенциал стационарного уравнения Шрёдингера для калуца–克莱новских мод пятимерного гравитона как функция модуля пятой координаты (4.19). Брана локализована при $|z| = l$, и вертикальная линия изображает отрицательный дельтаобразный вклад в потенциал, который вмещает локализованную на бране и нормируемую нулевую моду безмассового гравитона.

$\varphi_m(-z) = \varphi_m(z)$, что позволяет рассматривать задачу только при $z \geq l$. Краевое условие для этой задачи Штурма–Лиувилля при $z = l$ следует из линеаризованного условия сшивки Израэля и имеет вид обобщенного условия Неймана:

$$\left(\frac{d}{dz} + \frac{3}{2l}\right)\varphi_m(z) \Big|_{z=0} = 0. \quad (4.23)$$

Замечательным свойством такой краевой задачи является то, что ее спектр содержит дискретный связанный уровень — нулевую моду с $m = 0$ и непрерывный спектр положительных масс, также начинающийся с нуля ($m > 0$).

Легко проверить, что нулевая мода

$$\varphi_0(z) = \left(\frac{l}{z}\right)^{1/2} \left(\frac{l}{z}\right)^{3/2} \quad (4.24)$$

удовлетворяет уравнениям (4.21) и (4.23) и является нормируемой:

$$2 \int_l^\infty dz \varphi_0^2(z) = 1, \quad (4.25)$$

а массивные КК-моды выражаются через линейные комбинации функций Бесселя и Неймана второго порядка

$$\varphi_m(z) = \left(\frac{mz}{2}\right)^{1/2} \frac{Y_1(ml)J_2(mz) - J_1(ml)Y_2(mz)}{(J_1^2(ml) + Y_1^2(ml))^{1/2}}, \quad (4.26)$$

и нормируются на дельта-функцию в непрерывном спектре⁵:

$$2 \int_l^\infty dz \varphi_m(z) \varphi_{m'}(z) = \delta(m - m'). \quad (4.27)$$

Возникновение связанного состояния в положительном потенциале (4.22) кажется противоестественным,

⁵ Коэффициент 2 в (4.27) эффективно учитывает вклад интегрирования по $z \leq -l$ и Z_2 -симметрию мод.

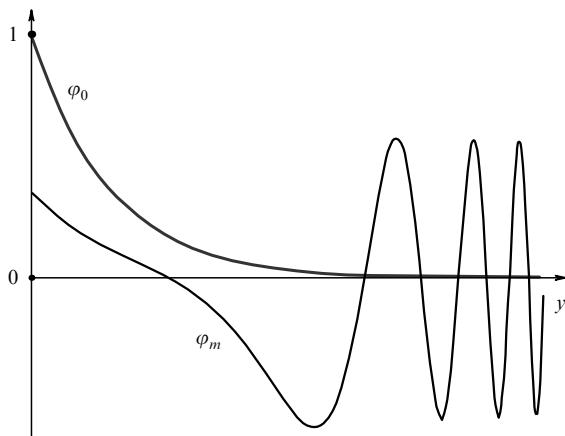


Рис. 5. Поведение нулевой безмассовой моды гравитона φ_0 и его массивных калуца-клейновских партнёров φ_m ($m > 0$) как функций пятой координаты y в окрестности браны, локализованной при $y = 0$. Графики построены для значений $m = 0,3$ и $l = 1$. Для малых масс КК-партнёры гравитона выталкиваются в объём за пределы браны.

однако ему можно дать качественное объяснение. Дело в том, что краевое условие (4.23) можно смоделировать в виде отрицательного дельтаобразного вклада в этот потенциал в точке локализации браны $|z| = l$, в результате чего он принимает форму "вулкана" (см. рис. 4). Его дельтаобразный кратер и становится вместилищем для связанного нулевого уровня энергии.

Качественное поведение нулевой моды и массивных КК-мод очень разное. Нулевая мода сконцентрирована в окрестности $z \sim l$ около браны, а массивные моды уходят в виде осциллирующих стоячих волн на бесконечность по пятой координате⁶. Более того, как следует из асимптотики цилиндрических функций малого аргумента, в области малых масс моды (4.27) на бране ведут себя как

$$\varphi_m(l) \sim \left(\frac{ml}{2}\right)^{1/2}, \quad m \rightarrow 0, \quad (4.28)$$

т.е. в отличие от нулевой моды инфракрасные моды непрерывного калуца-клейновского спектра "выталкиваются" за пределы браны (рис. 5). Это явление и называется локализацией безмассовых гравитонов, оно отвечает за восстановление эффективной четырехмерной теории гравитации. Переносчиком четырехмерного взаимодействия на бране является локализованный на ней безмассовый гравитон, а башня его массивных КК-партнеров слабо взаимодействует с материей на бране и поэтому приводит в низкоэнергетической области лишь к слабым поправкам, обусловленным дополнительными измерениями [12, 15].

Чтобы увидеть это, рассмотрим нерелятивистский закон притяжения двух частиц, локализованных на бране. Он определяется функцией Грина четырехмерного лапласиана — пространственной части оператора волнового уравнения пятимерных гравитонов (4.20)

$${}^4\Delta = \frac{z^{3/2}}{l^2} \left(\frac{d^2}{dz^2} + {}^3\Delta - \frac{15}{4z^2} \right) z^{1/2}, \quad (4.29)$$

⁶ Требование несингулярности $\varphi_m(z)$ на бесконечности исключает мнимые значения массы и, следовательно, запрещает тахионные моды в КК-спектре с $m^2 < 0$.

действующего в пространственных координатах объема $\mathbf{X} = (\mathbf{x}, y)$. (В свою очередь $\mathbf{x} = x^m$ ($m = 1, 2, 3$) означает набор пространственных координат на бране, а ${}^3\Delta = \delta^{mm} \partial_m \partial_n$ есть трехмерный "плоский" лапласиан в этих координатах.) Искомый потенциал притяжения пропорционален внутрибранной (от браны к бране) функции Грина такого эллиптического оператора, когда обе ее точки лежат на бране:

$$G_5 D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = G_5 \frac{1}{4\Delta} \delta(\mathbf{X}, \mathbf{X}') \Big|_{y=y'=0}, \quad (4.30)$$

и пятимерной константе взаимодействия.

Четырехмерную дельта-функцию в (4.30)

$$\delta(\mathbf{X}, \mathbf{X}') \equiv {}^3\delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \delta(y - y') = {}^3\delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \delta(z - z') \frac{z}{l} \quad (4.31)$$

можно разложить по полному набору плоских волн в \mathbf{x} -пространстве и полному набору z -гармоник, включающих дискретную нулевую моду и непрерывный спектр массивных мод:

$$\begin{aligned} \delta(z - z') &= \sum_m \varphi_m(z) \varphi_m(z') \equiv \\ &\equiv \varphi_0(z) \varphi_0(z') + \int_0^\infty dm \varphi_m(z) \varphi_m(z'). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Подставляя это разложение в (4.30) и учитывая, что $\varphi_m(z)$ являются собственными функциями задачи (4.21), имеем

$$\begin{aligned} G_5 D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= \\ &= \frac{G_5 l}{(2\pi)^3} \int d^3 p \sum_m \frac{\exp(i\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'))}{\mathbf{p}^2 + m^2} \frac{\varphi_m(z) \varphi_m(z')}{\sqrt{zz'}} \Big|_{z=z'=l} = \\ &= -\frac{G_5}{4\pi r} \varphi_0^2(l) - \frac{G_5}{4\pi r} \int_0^\infty dm \varphi_m^2(l) \exp(-mr), \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|.$$

Далее, учитывая (4.24) и (4.28) и вычисляя интеграл по массам в асимптотике больших расстояний, окончательно получаем

$$G_5 D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{G_4}{4\pi r} \left(1 + \frac{l^2}{2r^2} + \dots \right), \quad r \gg l, \quad (4.34)$$

где G_4 играет роль эффективной четырехмерной гравитационной постоянной:

$$G_4 = \frac{G_5}{l}. \quad (4.35)$$

Итак, с точностью до малых поправок, обусловленных вкладом массивных КК-мод, притяжение тел на бране в области больших расстояний ($r \gg l$) определяется четырехмерным ньютоновским законом. При этом, как и в ADD-модели (3.6), эффективная гравитационная постоянная задается комбинацией фундаментальной пятимерной константы и масштаба дополнительного измерения. Роль последнего, как уже отмечалось, играет космологический радиус пятимерной AdS-геометрии. Эти свойства гарантируются двумя важными аспектами AdS-объема в модели Рандалл–Сундрума: локализацией на бране нулевой моды гравитона и выталкиванием за пределы браны его легких КК-партнеров. Нулевая мода воспроизводит четырехмерный закон, а малость амплитуд легких массивных мод (4.28) обес-

печивает малость их вклада, даже несмотря на непрерывность их спектра и отсутствие щели, отделяющей их от дискретного безмассового состояния $m = 0$ [12, 15].

4.3. Роль радиона

Аналогичная ситуация реализуется также и с релятивистским законом взаимодействия. Как и в предыдущих формулах, запаздывающий пятимерный пропагатор задачи (4.16), (4.17) от браны к бране сводится в основном к четырехмерному пропагатору с малыми поправками

$$D^{\text{ret}}(X, X') \Big|_{y=y'=0} = \frac{1}{l} \frac{1}{\square_4} \delta(x, x') \Big|^{\text{ret}}, \quad (x - x')^2 \gg l^2. \quad (4.36)$$

В релятивистской области, однако, становится важной тензорная структура гравитационных потенциалов, которые уже не исчерпываются его ньютоновской 00-компонентой.

Запаздывающий потенциал, порождаемый распределением материи $T_{\mu\nu}$ на бране, получается действием четырехмерного пропагатора на правую часть условий сшивания Израэля в присутствии материи

$$\left(\frac{d}{dy} + \frac{2}{l} \right) h_{\mu\nu}(x, y) \Big|_{y=0} = -8\pi G_5 \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \eta_{\mu\nu} T \right) \quad (4.37)$$

(как решение волновой задачи с краевым условием Неймана на времениподобной границе пятимерного пространства). С учетом (4.36) в длинноволновом приближении это означает, что

$$h_{\mu\nu}(x) \simeq -16\pi G_4 \frac{1}{\square} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \eta_{\mu\nu} T \right)(x), \quad (4.38)$$

что не может быть правильным общерелятивистским законом излучения гравитационной волны из-за неверного коэффициента $1/3$ в правой части уравнения. В четырехмерной эйнштейновской гравитации этот коэффициент равен $1/2$.

Как отмечалось в [17, 18], такое противоречие исчезает, если учесть, что данная метрика не является индуцированной на бране, а в левой части краевого условия (4.37) должна стоять метрика в *нормальной гауссовой системе координат* $h_{\mu\nu}^{\text{NG}}(x, y)$ вместо метрики $h_{\mu\nu}(x, y)$ в калибровке Рандалл–Сундрума (4.15). В этой калибровке брана не является плоскостью $y = 0$, а ее погружение в пространство (x^μ, y) задается набором скалярного поля (радиона) $\Pi(x)$:

$$y = \Pi(x), \quad (4.39)$$

и векторного поля $\xi^\mu(x)$ (отличающего четырехмерную координатную сетку на бране от координат в объеме). Поэтому [17]

$$h_{\mu\nu}^{\text{NG}}(x, y) = h_{\mu\nu}(x, y) + \frac{2}{l} \eta_{\mu\nu} a^2(y) \Pi(x) + l \partial_\mu \partial_\nu \Pi(x) + a^2(y) (\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu)(x). \quad (4.40)$$

Подставляя вместо $h_{\mu\nu}(x, y)$ выражение (4.40) в левую часть (4.37) и вычисляя след, получаем в силу бесследовости $h_{\mu\nu}$ уравнение на $\Pi(x)$:

$$\square \Pi(x) = \frac{8\pi G_5}{6} T(x). \quad (4.41)$$

Это уравнение гласит, что поле радиона, отвечающее за погружение браны в объем, динамически определяется следом тензора натяжений материи, которая "прогибает" брану.

В силу (4.40) индуцированная метрика на бране отличается от (4.38) конформным членом

$$\frac{2}{l} \eta_{\mu\nu} a^2(y) \Pi(x)$$

и набором чисто калибровочных слагаемых вида $\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu$. Последние могут быть убраны подбором четырехмерной системы координат, в то время как за счет конформного члена с полем радиона (4.41) правая часть уравнения для $h_{\mu\nu}^{\text{NG}}(x, y)$ модифицируется дополнительным слагаемым:

$$h_{\mu\nu}^{\text{NG}}(x, y) = h_{\mu\nu}(x, y) + \frac{8\pi G_5}{3l} a^2(y) \eta_{\mu\nu} \frac{1}{\square} T(x). \quad (4.42)$$

Поэтому в правой части уравнения для индуцированной метрики $h_{\mu\nu}^{\text{ind}}(x) = h_{\mu\nu}^{\text{NG}}(x, 0)$ возникает общерелятивистская комбинация тензора энергии-импульса и его следа с коэффициентом $1/2$:

$$h_{\mu\nu}^{\text{ind}}(x) \simeq -16\pi G_4 \frac{1}{\square} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} T \right)(x). \quad (4.43)$$

Легко проверить, что вследствие закона сохранения для тензора натяжений материи (который справедлив в приближении нулевой моды, поскольку утечка материи в объем осуществляется массивными КК-модами) калибровка метрики в этом уравнении является гармонической:

$$\partial^\nu h_{\mu\nu}^{\text{ind}} - \frac{1}{2} \partial_\mu h^{\text{ind}} = 0.$$

Таким образом, благодаря вкладу радиона восстанавливается правильный четырехмерный закон распространения длинноволновых гравитационных волн, излучаемых материи на бране. Очевидно, что аналогично ньютоновскому закону он справедлив для длин волн, превосходящих масштаб AdS-фона l .

4.4. Принцип AdS/CFT-соответствия и локализация гравитона

Локализация гравитонов в модели Рандалл–Сундрума представляет собой проявление так называемого принципа AdS/CFT-соответствия в теории струн [22–24]. Этот принцип устанавливает соотношение дуальности (эквивалентности) между теориями, сформулированными соответственно в объеме и на его границе и в противоположных режимах связи — слабой и сильной [21]. В частности, замечательным свойством такой дуальности является то, что квазиклассическая слабовзаимодействующая теория в многомерном объеме порождает на его границе квантовую теорию в режиме сильной связи.

AdS/CFT-соответствие было выдвинуто в качестве гипотезы для теории ПВ супергравитации на десятимерном пространстве, представляющем собой прямое произведение пятимерного пространства анти-де Ситтера и пятимерной сферы $\text{AdS}_5 \times S^5$, и для четырехмерной конформно-инвариантной $U(N)$ -теории Янга–Миллса с расширенной $\mathcal{N} = 4$ суперсимметрией, определенной на четырехмерной границе AdS_5 . Параметры этих двух

теорий, включающие пятимерную гравитационную G_5 и космологическую $\Lambda_5 = -6/l^2$ постоянные на стороне супергравитации и постоянную 'т Хофта $\lambda \equiv g_{\text{YM}}^2 N$ на стороне теории Янга–Миллса (с константой взаимодействия g_{YM}), в пределе больших λ и N связаны соотношениями вида

$$\frac{l^3}{G_5} = \frac{2N^2}{\pi}, \quad \lambda \equiv g_{\text{YM}}^2 N = \left(\frac{l}{l_s}\right)^4, \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad N \rightarrow \infty \quad (4.44)$$

(l_s — струнная длина в теории ПВ суперструны, генерирующей в полевом пределе десятимерную супергравитацию).

Видно, что низкоэнергетическому режиму малой кривизны в теории супергравитации $\Lambda_5 = -6/l^2 \rightarrow 0$ предел (4.44) ставит в соответствие непертурбативный режим сильной связи в конформной теории поля $\lambda \rightarrow \infty$. Количественная проверка этого соответствия очень затруднена в силу непертурбативности, и она сначала проводилась по теории возмущений только для выделенного класса корреляторов, защищенных суперсимметрией. Поэтому мы ограничимся демонстрацией того, как древесное приближение для многомерной теории в объеме может порождать существенно квантовые вклады дуальной теории, сформулированной на границе, в частности содержать в себе явление локализации гравитонов на бране (трактуемой как граница AdS-объема).

Для достижения этой цели AdS/CFT-соответствие лучше всего сформулировать в терминах эффективного действия, индуцированного на бране (границе многомерного пространства) и получаемого интегрированием по полям в объеме. Для простоты изложения мы будем работать в евклидовом варианте теории, связанном стандартным виковским поворотом с теорией в лоренцевом пространстве-времени⁷, при котором лоренцево и евклидово действия связаны преобразованием $iS^L = -S^E$.

Эффективное действие как функционал четырехмерной метрики $g_{\mu\nu}(x)$ получается из пятимерной теории с действием $S_5[G_{AB}(X)]$ в результате функционального интегрирования по классу пятимерных метрик $G_{AB}(X)$, которые индуцируют на границе пятимерного многообразия ∂M_5 четырехмерную метрику:

$$\begin{aligned} \exp(-S_{\text{eff}}[g_{\mu\nu}(x)]) &= \\ &= \int D G_{AB}(X) \exp(-S_5[G_{AB}(X)]) \Big|_{G_{\mu\nu}(\partial M_5) = g_{\mu\nu}(x)}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

В древесном приближении это действие сводится к пятимерному действию

$$S_{\text{eff}}[g_{\mu\nu}] = S_5[G_{AB}[g_{\mu\nu}]] + O\left(\frac{1}{N^2}\right), \quad (4.46)$$

вычисляемому на решении $G_{AB}[g_{\mu\nu}]$ классических гравитационных уравнений движения в объеме с краевыми

⁷ Рассмотрение AdS/CFT-соответствия в евклидовом пространстве обусловлено тем, что лежащая в его основе математическая конструкция Грехэма–Феффермана по восстановлению решения уравнений Эйнштейна в объеме из асимптотики метрики в окрестности его границы (удаляемой на конформную бесконечность) также оригинально сформулирована и строго доказана в евклидовой сигнатуре [25].

условиями на границе в виде фиксированной индуцированной метрики

$$\frac{\delta S_5[G_{AB}]}{\delta G_{AB}(X)} = 0, \quad (4.47)$$

$$G_{\mu\nu}(\partial M_5) = g_{\mu\nu}(x). \quad (4.48)$$

Согласно (4.44) $1/N^2 \sim G_5/l^3 \rightarrow 0$ играет роль постоянной Планка квазиклассического разложения.

В соответствии с AdS/CFT-гипотезой результатом вычисления является функционал

$$S_5[G_{AB}[g_{\mu\nu}]] = \Gamma_4[g_{\mu\nu}]. \quad (4.49)$$

Этот функционал оказывается квантовым эффективным действием четырехмерной теории, качественная структура которого начинается с эйнштейновского члена, включающего эффективную гравитационную постоянную G_4 и типичный петлевой логарифмический вклад, квадратичный по кривизне:

$$\Gamma_4[g_{\mu\nu}] \sim \int d^4x g^{1/2} \left(-\frac{1}{16\pi G_4} R + \beta R_{\mu\nu} \ln \frac{\Box}{\mu^2} R^{\mu\nu} + \dots \right), \quad (4.50)$$

с некоторым конкретным значением ультрафиолетового обрезания μ^2 и бета-функцией β , связанной с конформной аномалией теории.

Существенным элементом соответствия (4.49) является то, что ультрафиолетово-конечный древесный функционал оказывается равным квантовому эффективному действию локальной теории, требующему перенормировки и явно зависящему от обрезания. Как оказывается, регулятором ультрафиолетовых расходимостей последнего в левой части соотношения (4.49) служит положение четырехмерной границы, устремляемой на бесконечность пятимерного AdS-пространства, т.е. инфракрасное обрезание в древесной супергравитации обеспечивает ультрафиолетовую перенормировку квантовой конформной теории на границе. Такая дуальность ультрафиолетово-инфракрасных перенормировок достигается путем введения ряда гравитационных контрчленов, которые и лежат в основе локализации гравитонов в модели Рандалл–Сундрума. Схематически, в бозонном секторе теории, это происходит следующим образом.

На языке эффективного действия AdS/CFT-соответствие можно сформулировать как равенство

$$\exp(-W_{\text{SUGRA}}[g_{\mu\nu}]) = \exp(-W_{\text{CFT}}[g_{\mu\nu}]) \quad (4.51)$$

двух разных производящих функционалов [22, 23]:

$$\exp(-W_{\text{SUGRA}}[g_{\mu\nu}]) \equiv$$

$$\equiv \int D G_{AB} \exp(-S_{\text{grav}}[G_{AB}]) \Big|_{G_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}, y \rightarrow -\infty}, \quad (4.52)$$

$$\exp(-W_{\text{CFT}}[g_{\mu\nu}]) \equiv \int D\phi \exp(-S_{\text{CFT}}[\phi, g_{\mu\nu}]). \quad (4.53)$$

Функционалы (4.52), (4.53) определены соответственно для теории гравитации в асимптотически деситтеровском объеме M_5 (параметризируемом координатами Пуанкаре $X^A = (x^{\mu}, y)$) и для конформной теории поля

на его границе

$$\partial M_5: y = \text{const} \rightarrow -\infty, \quad (4.54)$$

параметризумой координатами x^μ . Четырехмерное конформное поле (Янга–Миллса), которое мы обозначим символически буквой ϕ , "живет" во внешней метрике $g_{\mu\nu}(x)$ на границе (4.54), и эта же метрика служит краевым условием для класса пятимерных метрик, по которым идет интегрирование в (4.52).

Действие для поля $\phi = A_\mu$ на границе (бозонная часть суперсимметричной модели) строится по обычным правилам общековариантного минимального взаимодействия с метрикой

$$S_{\text{CFT}}[\phi, g_{\mu\nu}] = \frac{1}{4g_{\text{YM}}^2} \int_{\partial M_5} d^4x g^{1/2} \text{Tr } F_{\mu\nu}^2, \quad (4.55)$$

в то время как гравитационное действие в объеме требует более изощренной процедуры, обусловленной инфракрасными свойствами AdS-пространства. Дело в том, что уже на древесном уровне решение уравнений Эйнштейна с заданной индуцированной метрикой на границе, будучи подставленным согласно (4.46) в действие Эйнштейна–Гильберта (с поверхностным членом Гиббонса–Хокинга):

$$S_5[G_{AB}] = -\frac{1}{16\pi G_5} \int_{M_5} d^5X G^{1/2} \left({}^5R(G_{AB}) + \frac{12}{l^2} \right) - \frac{1}{8\pi G_5} \int_{\partial M_5} d^4x g^{1/2} K, \quad (4.56)$$

породит бесконечности при удалении границы на асимптотику AdS-объема.

Для устранения бесконечностей полное гравитационное действие в (4.52)

$$S_{\text{grav}}[G_{AB}] = S_5[G_{AB}] + S_1[g_{\mu\nu}] + S_2[g_{\mu\nu}] + S_3^\epsilon[g_{\mu\nu}] \quad (4.57)$$

наряду с (4.56) должно содержать также набор трех контручленов — функций индуцированной метрики на границе нулевого, первого и второго порядка по кривизне [25–27]:

$$S_1[g_{\mu\nu}] = \frac{3}{8\pi G_5 l} \int_{\partial M_5} d^4x g^{1/2}, \quad (4.58)$$

$$S_2[g_{\mu\nu}] = \frac{l}{32\pi G_5} \int_{\partial M_5} d^4x g^{1/2} R, \quad (4.59)$$

$$S_3^\epsilon[g_{\mu\nu}] = -\ln \epsilon \frac{l^3}{64\pi G_5} \int_{\partial M_5} d^4x g^{1/2} \left(R_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{3} R^2 \right). \quad (4.60)$$

При этом контручлен (4.60) явно содержит логарифмически расходящийся фактор $\ln \epsilon \rightarrow -\infty$, соответствующий удалению границы на бесконечность:

$$\epsilon \rightarrow 0 \leftrightarrow y \rightarrow -\infty, \quad (4.61)$$

а коэффициент при нем совпадает в силу соотношений (4.44) с бета-функцией в модели $N = 4$ SU(N) суперконформной теории поля Янга–Миллса (определенной также конформной аномалией модели) [28]:

$$\frac{l^3}{64\pi G_5} = \frac{N^2}{32\pi^2} = \beta_{\text{CFT}}. \quad (4.62)$$

Важным наблюдением является то, что коэффициент в космологическом члене (4.58) совпадает с одной второй

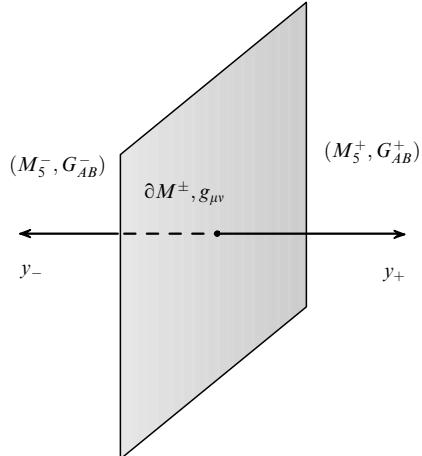


Рис. 6. Картина пятимерного пространства-времени в квантовом варианте модели Рандалл–Сундрума. Пятимерный объем $M_5 = M_5^+ \cup M_5^-$ разделен браной $\Sigma = \partial M_5^\pm$ на два полупространства с независимыми пятимерными метриками G_{AB}^\pm , которые индуцируют на бране одну и ту же четырехмерную метрику $G_{\mu\nu}^\pm(\partial M_5^\pm) = g_{\mu\nu}(x)$ — аргумент бранного эффективного действия.

натяжения браны в модели Рандалл–Сундрума (4.7): $\sigma/2$, а коэффициент в эйнштейновском члене (4.59) определяется эффективной четырехмерной гравитационной постоянной (4.35): $1/(32\pi G_4)$.

Применим теперь соотношение AdS/CFT-дuality (4.51) к квантовой модели Рандалл–Сундрума. В квантовом варианте этой модели полный пятимерный объем разделен браной на два полупространства: $M_5 = M_5^+ \cup M_5^-$, с пятимерными метриками G_{AB}^\pm , которые индуцируют на бране $\Sigma = \partial M_5^\pm$ (границе между ними) одну и ту же четырехмерную метрику $G_{\mu\nu}^\pm(\partial M_5^\pm) = g_{\mu\nu}(x)$ (рис. 6). Заметим, что квантовые метрики G_{AB}^\pm , по которым ведется интегрирование как по независимым полям, не удовлетворяют, в отличие от фонового рандалл–сундрумовского решения, условию Z_2 -симметрии.

Полное гравитационное действие в модели Рандалл–Сундрума (4.1) представляет собой сумму пятимерных действий (4.56) Гильберта–Эйнштейна на этих полупространствах $S_5[G_{AB}^\pm]$ плюс четырехмерное действие браны, состоящее из члена с натяжением, записываемого как удвоенное значение контручлена $2S_1[g_{\mu\nu}]$ из (4.58):

$$S_{\text{RS}}[G_{AB}] = S_5[G_{AB}^+] + S_5[G_{AB}^-] + 2S_1[g_{\mu\nu}]. \quad (4.63)$$

(Мы не включаем действие бранной материи, которое всюду в дальнейшем входит в полное эффективное действие аддитивным образом и не участвует в интегрировании по пятимерной метрике.)

Таким образом, эффективное бранное действие в модели Рандалл–Сундрума определяется функциональным интегралом

$$\begin{aligned} & \exp(-S_{\text{eff}}[g_{\mu\nu}(x)]) = \\ & = \int D G_{AB}^+ D G_{AB}^- \exp(-S_{\text{RS}}[G_{AB}(X)]) \Big|_{G_{\mu\nu}^\pm(\Sigma) = g_{\mu\nu}(x)}. \end{aligned} \quad (4.64)$$

В силу аддитивности действия (4.63) по вкладам двух полупространств полный метрический интеграл факторизуется на произведение двух идентичных интегралов по метрикам G_{AB}^\pm , которые приводят к эффективной

Z_2 -симметрии:

$$\begin{aligned} \int DG_{AB}^+ DG_{AB}^- \exp(-S_5[G_{AB}^+] - S_5[G_{AB}^-]) = \\ = \left(\int DG_{AB} \exp(-S_5[G_{AB}]) \right)^2. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Квадрируемый интеграл в (4.65) подразумевается по классу пятимерных метрик с фиксированной индуцированной метрикой на границе асимптотически AdS-пространства, что в точности соответствует постановке задачи в формулировке AdS/CFT-соответствия. Следовательно, в силу (4.51)–(4.53) интеграл (4.65) выражается в терминах эффективного действия конформной теории поля:

$$\begin{aligned} \int DG_{AB} \exp(-S_5[G_{AB}]) = \\ = \exp(S_1 + S_2 + S_3) \int DG_{AB} \exp(-S_{\text{grav}}[G_{AB}]) = \\ = \exp(S_1 + S_2 + S_3 - W_{\text{CFT}}^\epsilon). \end{aligned} \quad (4.66)$$

Квадрируя это выражение в (4.65) и подставляя результат в (4.64), мы видим, что вклады четырехмерного космологического члена $2S_1$ взаимно уничтожаются и эффективное бранное действие принимает вид

$$S_{\text{eff}} = -2S_2 + 2W_{\text{CFT}}^\epsilon - 2S_3. \quad (4.67)$$

В силу (4.59) вклад контрчлена $-2S_2$ в (4.67) порождает в точности эйнштейновский член с эффективной гравитационной постоянной (4.35). Что касается эффективного действия суперконформного поля Янга–Миллса, то из-за суперсимметрии оно не содержит ни космологического, ни эйнштейновского членов и в низкоэнергетической области малых кривизн начинается с квадратичного по тензору Риччи логарифмически расходящегося члена ($\epsilon \rightarrow 0$)

$$\begin{aligned} 2W_{\text{CFT}}^\epsilon[g_{\mu\nu}(x)] = \\ = \int d^4x g^{1/2} [2\beta_{\text{CFT}} R_{\mu\nu}(-\ln \epsilon + \ln(l^2 \square)) R^{\mu\nu} + \dots], \end{aligned} \quad (4.68)$$

сопровождаемого логарифмическим нелокальным формфактором. Коэффициент при этом члене определяется бета-функцией или конформной аномалией теории (4.62) и совпадает с коэффициентом в контрчлене (4.60).

Следовательно, если отождествить параметр ϵ ультрафиолетовой регуляризации в (4.68) с параметром инфракрасной регуляризации в (4.60), то разность $2W_{\text{CFT}}^\epsilon - 2S_3$, фигурирующая в (4.67), будет конечна. При этом эффективное бранное действие модели Рандалл–Сундрума в низкоэнергетической области примет окончательный вид⁸:

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}}[g_{\mu\nu}(x)] = \\ = \int d^4x g^{1/2} \left(-\frac{1}{16\pi G_4} R + \frac{l^2}{32\pi G_4} R_{\mu\nu} \ln(l^2 \square) R^{\mu\nu} + \dots \right). \end{aligned} \quad (4.69)$$

Таким образом, модель Рандалл–Сундрума, характеризуемая постоянными (G_5, l) , дуальна четырехмерной эйнштейновской гравитации с ньютоновской константой $G_4 = G_5/l$, взаимодействующей с регуляризованной суперконформной теорией поля. Этот результат подтверждает факт локализации безмассового гравитона в пятимерной модели Рандалл–Сундрума: ее эффективное действие на бране в длинноволновой области (или области малых кривизн) воспроизводит четырехмерную теорию Эйнштейна с эффективной гравитационной постоянной (4.35) без космологического члена и с короткодействующими поправками, заметными в области масштабов $1/\sqrt{\square} \ll l$. Можно показать, что нелокальные логарифмические поправки в (4.69) порождают поправки к закону Ньютона, полученные в (4.34) путем учета КК-мод пятимерной модели [18].

5. Двубранная модель Рандалл–Сундрума

Принцип AdS/CFT-соответствия в настоящее время существует в форме гипотезы, проверка которой чрезвычайно трудна в силу непертурбативного характера задачи в области сильной связи. Как уже отмечалось, сначала AdS/CFT-принцип был выдвинут на основе чисто алгебраических симметрийных соображений [21], проверялся в рамках теории возмущений для низших корреляционных функций, защищенных от радиационных поправок за счет суперсимметрии [29]. В последние годы он получил подтверждение на примерах точно решаемых струнных моделей в плосковолновой метрике [30] и специального класса составных операторов, формирующих интегрируемую систему [31].

В любом случае статус AdS/CFT-принципа и пределы его применимости остаются в настоящее время не до конца проясненными, а поэтому в этом разделе мы не будем к нему прибегать и воспроизведем результаты предыдущего раздела путем прямых вычислений в рамках теории возмущений по кривизне пространства–времени. А именно, мы рассмотрим бранное эффективное действие в двубранной модели Рандалл–Сундрума, вычислим его в виде ковариантного разложения по кривизне и покажем, что при конечном межбранном расстоянии данная модель генерирует в низкоэнергетическом пределе гравитационную теорию типа Бранса–Дике, которая предлагает механизм инфляции с неминимально–взаимодействующим инфлатоном — полем радиона, описывающим динамику межбранного расстояния. Как мы увидим, эта модель богата фазовыми переходами в процессе раздвижения бран, который может быть ассоциирован с эволюцией ранней и современной Вселенной, если встать на точку зрения бранной парадигмы в космологии.

Напомним, что согласно этой парадигме наш наблюдаемый низкоэнергетический мир представляет собой четырехмерную брану, погруженную в многомерный объем с макроскопическими дополнительными измерениями. Детали этого погружения и взаимодействия браны с возможными другими бранными мирами определяют эволюцию нашей Вселенной. При этом факт локализации безмассового гравитона на бране и восстановления четырехмерной эйнштейновской теории снимают главное противоречие, существовавшее в рамках старой картины Калуцы–Клейна: ненаблюдаемость больших дополнительных измерений.

⁸ Напомним, что в этом разделе мы работаем в евклидовой сигнатуре, что объясняет отрицательный коэффициент скаляра кривизны в евклидовом действии.

5.1. Эффективное действие двубранной модели

Итак, рассмотрим двубранную модель Рандалл–Сундрума, кратко описанную в разделе 4. Действие этой модели имеет вид

$$\begin{aligned} S[G_{AB}(X)] &= \\ &= \frac{1}{16\pi G_5} \int d^5 X G^{1/2} ({}^5 R(G) - 2\Lambda_5) + \\ &+ \sum_I \int_{\Sigma_I} d^4 x g^{1/2} \left(\frac{1}{8\pi G_5} [K] - \sigma_I \right). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Здесь индекс $I = \pm$ нумерует две браны с натяжениями σ_{\pm} , а $[K]$ представляет собой скачок следа внешней кривизны в поверхностном члене Гиббона–Хокинга, ассоциируемом с обеими сторонами каждой браны.

Напомним, что браны локализованы в антиподальных точках окружности пятого измерения, параметризованных пятой координатой:

$$y = y_{\pm}, \quad y_+ = 0, \quad |y_-| = d.$$

Z_2 -симметрия отождествляет точки y и $-y$ на окружности и оставляет фиксированными точки y_{\pm} . Когда натяжения бран подобраны в соответствии с отрицательной космологической ($\Lambda_5 = -6/l^2$) и пятимерной гравитационной (G_5) постоянными согласно (4.7), (4.8), эта модель в отсутствие материи на бранах и в объеме допускает решение с AdS-метрикой (4.6) в объеме и конформно-плоской метрикой $a^2(y_{\pm})\eta_{\mu\nu}$ на обеих бранах.

Метрика на бране с отрицательным натяжением содержит масштабный фактор $a^2(d) = \exp(-2d/l)$, обеспечивающий, как отмечалось ранее, возможность решения проблемы иерархии [11]. С тонким подбором брановых натяжений (4.7), (4.8) это решение существует для произвольного расстояния между бранами d : две конформно-плоские браны остаются в равновесии.

Рассмотрим теперь случай, когда индуцированные метрики на бранах отличаются от фоновых величин малыми возмущениями:

$$g_{\mu\nu}^{\pm}(x) = a_{\pm}^2 \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}^{\pm}(x), \quad (5.2)$$

$$a_+ = 1, \quad a_- = \exp\left(-\frac{2d}{l}\right) \equiv a, \quad (5.3)$$

которые индуцируют возмущенное решение эйнштейновских уравнений в объеме:

$$ds^2 = dy^2 + \exp\left(-\frac{2|y|}{l}\right) \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} + h_{AB}(x, y) dx^A dx^B, \quad (5.4)$$

и вычислим древесное эффективное действие на бранах в квадратичном по $h_{\mu\nu}^{\pm}(x)$ приближении. Это достигается путем решения линеаризованного варианта краевой задачи (4.47), (4.48), обобщенного на случай двух границ с метриками (5.2), и подстановки этого решения в пятимерное действие (5.1) в вышеуказанном приближении.

Результирующее действие инвариантно относительно двух четырехмерных диффеоморфизмов на бранах, которые в линеаризованном приближении сводятся к преобразованиям метрических возмущений

$$h_{\mu\nu}^{\pm} \rightarrow h_{\mu\nu}^{\pm} + \partial_{\mu} \xi_{\nu}^{\pm} + \partial_{\nu} \xi_{\mu}^{\pm} \quad (5.5)$$

с двумя независимыми векторными полями $\xi_{\mu}^{\pm} = \xi_{\mu}^{\pm}(x)$. Следовательно, его можно выразить в терминах тензорных инвариантов преобразований — линеаризованных тензоров Риччи для $h_{\mu\nu}^{\pm}(x)$:

$$R_{\mu\nu}^{\pm} = \frac{1}{2} (-\square h_{\mu\nu} + \partial_{\lambda} \partial_{\mu} h_{\nu}^{\lambda} + \partial_{\lambda} \partial_{\nu} h_{\mu}^{\lambda} - \partial_{\mu} \partial_{\nu} h)^{\pm}, \quad (5.6)$$

на плоском четырехмерном фоне обеих бран. Результат, полученный такой процедурой в [32] или путем функционального интегрирования эффективных четырехмерных уравнений движения для метрических возмущений на бранах [20], дается пространственно-временным интегралом от нелокальной 2×2 квадратичной формы:

$$S_{\text{eff}}[g_{\mu\nu}^{\pm}] = \frac{1}{16\pi G_4} \int d^4 x \left[\mathbf{R}_{\mu\nu}^T \frac{2\mathbf{F}(\square)}{l^2 \square^2} \mathbf{R}^{\mu\nu} - \frac{1}{6} \mathbf{R}^T \frac{2\mathbf{F}_1(\square)}{l^2 \square^2} \mathbf{R} \right]. \quad (5.7)$$

Здесь G_4 есть эффективная четырехмерная гравитационная постоянная ($G_4 = G_5/l$), $\mathbf{R}^{\mu\nu}$ и $\mathbf{R}_{\mu\nu}^T$ представляют собой двумерные столбцы

$$\mathbf{R}_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} R_{\mu\nu}^+(x) \\ R_{\mu\nu}^-(x) \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

и строки

$$\mathbf{R}_{\mu\nu}^T = [R_{\mu\nu}^+(x) \ R_{\mu\nu}^-(x)] \quad (5.9)$$

кривизн Риччи, ассоциируемых с двумя бранами.

Нелокальные формфакторы в (5.7) представляют собой 2×2 матричнозначные функции действующего на кривизны даламбертиана $\square = \eta^{\mu\nu} \partial_{\mu} \partial_{\nu}$, выражющиеся через фундаментальный оператор

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\square) &= -\frac{1}{J_2^+ Y_2^- - J_2^- Y_2^+} \times \\ &\times \begin{bmatrix} \sqrt{\square} z_+ u_+(z_-) & -\frac{2}{\pi} \\ -\frac{2}{\pi} & \sqrt{\square} z_- u_-(z_+) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

который строится в терминах базисных функций от переменной $z > 0$ (заменяющей пятую координату y согласно (4.19))

$$u_{\pm}(z) = Y_1^{\pm} J_2(z\sqrt{\square}) - J_1^{\pm} Y_2(z\sqrt{\square}), \quad (5.11)$$

$$J_v^{\pm} \equiv J_v(z_{\pm}\sqrt{\square}), \quad Y_v^{\pm} \equiv Y_v(z_{\pm}\sqrt{\square}). \quad (5.12)$$

Эти функции в свою очередь состоят из цилиндрических функций Бесселя J_v и Неймана Y_v , $v = 1, 2$, аргумента $z\sqrt{\square}$. Второй формфактор

$$\mathbf{F}_1(\square) = 2\mathbf{F}(\square) - l^2 \square \operatorname{diag} \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2a^2} \right]. \quad (5.13)$$

⁹ Заметим, что функции (5.11) представляют собой базисные функции оператора гравитационных возмущений (4.20), удовлетворяющие линеаризованным условиям сшивки Израэля на соответствующих бранах. С точностью до нормировки функция $u_+(z)$ совпадает с собственной функцией (4.26) при отождествлении $\sqrt{\square}$ с его значением на массовой оболочке — массой КК-моды m .

Нулевые моды (базисные функции) нелокальных операторов соответствуют распространяющимся модам теории. В поперечно-бесследовом (гравитонном) секторе, например, моды $\mathbf{v}_n(x) = \mathbf{v}_{n\mu\nu}(x)$ определяются свойствами оператора $\mathbf{F}(\square)$. Они представимы в виде двумерных столбцов, размерность которых соответствует числу бран:

$$\mathbf{v}_n(x) = \begin{bmatrix} v_n^+(x) \\ v_n^-(x) \end{bmatrix}, \quad (5.14)$$

и удовлетворяют уравнению

$$\mathbf{F}(\square) \mathbf{v}_n = 0. \quad (5.15)$$

Условие существования нуль-векторов матрично-значного оператора

$$\det \mathbf{F}(\square) = 0 \quad (5.16)$$

служит для определения масс распространяющихся мод m_n :

$$(\square - m_n^2) \mathbf{v}_n(x) = 0, \quad (5.17)$$

которые, таким образом, являются корнями $\square = m_n^2$ характеристического уравнения (5.16). Для оператора (5.10) это уравнение сводится к

$$\det \mathbf{F}(\square) \sim \square (Y_1^- J_1^+ - Y_1^+ J_1^-) = 0 \quad (5.18)$$

и дает дискретный спектр КК-мод в теории¹⁰, начинающийся с безмассовой моды с $\square = m_0^2 \equiv 0$. Дискретность спектра КК-масс в данном случае следует из компактности пятого измерения.

Уравнение (5.18) гарантирует существование безмассового гравитона в спектре теории, и его локализация на бране с положительным натяжением будет означать восстановление в низкоэнергетической области четырехмерной эйнштейновской гравитации. Чтобы показать это, надо рассмотреть длинноволновой предел для нелокальных формфакторов в эффективном действии (5.7), удовлетворяющий ограничениям

$$l\sqrt{\square} \ll 1, \quad \frac{l\sqrt{\square}}{a} \ll 1. \quad (5.19)$$

Первое из них означает область малых энергий на бране с положительным натяжением (так называемой планковской бране), а второе — аналогичную область на другой бране. (Следует помнить, что энергия физических мод на бранах определяется с учетом их четырехмерной метрики: $\sqrt{g_{\pm}^{\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu}} = \sqrt{\square}/a_{\pm}$.)

Проведенный в [20] анализ показывает, что описание низкоэнергетической теории в терминах двух полей затруднительно, потому что низкоэнергетическая об-

ласть на планковской бране Σ_+ соответствует высоким энергиям на Σ_- , в особенности в пределе бесконечного межбранных расстояния $a = \exp(-d/l) \rightarrow 0$. Поэтому мы отложим рассмотрение двухполевого эффективного действия до раздела 5.4, где представлены гравитационно-волновые эффекты от материальных источников на обеих бранах, а сейчас перейдем к редуцированному эффективному действию в терминах одного метрического поля планковской браны. Это позволит в явном виде продемонстрировать восстановление на бране четырехмерной теории Бранса–Дике (эйнштейновской теории, неминимально взаимодействующей с дополнительным скалярным полем), беспрепятственно проанализировать предел $a \rightarrow 0$ и показать реализацию AdS/CFT-соответствия в этом пределе.

5.2. Локальная и нелокальная фазы модели

Итак, рассмотрим редукцию бранного эффективного действия, получаемую усреднением по степеням свободы на бране отрицательного натяжения (или функциональным интегрированием по ее четырехмерной метрике). Эта процедура оправдана благодаря тому простому факту, что брана невидима с точки зрения наблюдателя, сидящего на планковской бране.

В древесном приближении редукция $S_{\text{eff}}[g_{\mu\nu}^{\pm}] \rightarrow S_{\text{red}}[g_{\mu\nu}^{\pm}]$ эквивалентна исключению полей на отрицательной бране в терминах полей на бране с положительным натяжением:

$$S_{\text{red}}[g_{\mu\nu}^{\pm}] = S_{\text{eff}}[g_{\mu\nu}^{\pm}, g_{\mu\nu}^{-}[g_{\mu\nu}^{\pm}]], \quad g_{\mu\nu}^{-} = g_{\mu\nu}^{-}[g_{\mu\nu}^{\pm}], \quad (5.20)$$

как решений их соответствующих уравнений движения

$$\frac{\delta S_{\text{eff}}[g_{\mu\nu}^{\pm}]}{\delta g_{\mu\nu}^{-}(x)} = 0. \quad (5.21)$$

Ниже мы приведем результат такой редукции в двух энергетических областях: одна из них соответствует (5.19), а другая — случаю большого расстояния между бранами, когда второе из неравенств (5.19) нарушено.

Для малого или конечного межбранных расстояния в энергетической области (5.19) редуцированное действие имеет вид

$$S_{\text{red}}[g_{\mu\nu}, \varphi] = \int d^4x g^{1/2} \left[\left(\frac{1}{16\pi G_4} - \frac{1}{12} \varphi^2 \right) R + \frac{1}{2} \varphi \square \varphi + \frac{l^2 \chi(\varphi)}{32\pi G_4} C_{\mu\nu\alpha\beta}^2 \right] \quad (5.22)$$

в терминах индуцированной метрики $g_{\mu\nu}^+ \equiv g_{\mu\nu}$, дополнительного скалярного поля $\varphi(x)$ и локальной коэффициентной функции от этого поля при квадрате тензора Вейля

$$\chi(\varphi) = \frac{1}{4} \left[\ln \frac{1}{a^2} - (1 - a^2) - \frac{1}{2} (1 - a^2)^2 \right]_{a^2=4\pi G_4 \varphi^2/3}. \quad (5.23)$$

Скалярное поле $\varphi(x)$ возникает из (5.7) в результате поднятия модулярной переменной в модели — параметра межбранных расстояния d (или $a = \exp(-d/l)$) до уровня динамического поля согласно соотношению

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{3}{4\pi G_4}} \exp \left(-\frac{d}{l} + \frac{\Pi(x)}{l} \right). \quad (5.24)$$

¹⁰ Заметим, что левая часть уравнения (5.18) представляет собой вронскиан гармоник $u_{\pm}(z)$ в (5.11). Равенство его нулю означает линейную зависимость этих двух функций, или существование гармоники в пространстве пятой координаты, которая одновременно удовлетворяет однородным краевым условиям на обеих бранах и является физической модой в двубранной модели Рандалл–Сундрума.

Здесь $\Pi(x)$ есть локальное четырехмерное поле радиона, описывающее отклонение погружения браны в координатной системе Рандалл–Сундрума от $y = y_+$ к $y = y_+ - \Pi(x)$ (см. обсуждение в разделе 4.3 и [33, 20])¹¹. Как видно, действие (5.22) представляет эйнштейновскую теорию гравитации, неминимально взаимодействующую со скаляром типа Бранса–Дике φ , который описывает локальное, зависящее от x , межбранное расстояние и короткодействующие поправки в терминах квадрата тензора Вейля $C_{\mu\nu\alpha\beta}^2$ с локальным (но зависящим от φ) коэффициентом (5.23).

Для большого межбранного расстояния, соответствующего высокоэнергетической области на невидимой бране:

$$l\sqrt{\square} \ll 1, \quad \frac{l\sqrt{\square}}{a} \gg 1, \quad (5.25)$$

редуцированное действие (5.20) имеет другой вид [20]:

$$S_{\text{red}}[g_{\mu\nu}] = \frac{1}{16\pi G_4} \int d^4x g^{1/2} \left[R + \frac{l^2}{2} C_{\mu\nu\alpha\beta} k(\square) C^{\mu\nu\alpha\beta} \right], \quad (5.26)$$

$$k(\square) = \frac{1}{4} \left(\ln \frac{4}{l^2(-\square)} - \mathbf{C} \right), \quad (5.27)$$

где \mathbf{C} — постоянная Эйлера. Радион отщепляется от гравитации, и квадратичный вейлевский член становится нелокальным с логарифмическим формфактором, характерным для явления AdS/CFT-соответствия — имитации квантовых логарифмов конформной теории поля на бране древесным (супер)гравитационным действием, вычисляемым в объеме.

Переход от локальной фазы (5.22) к нелокальной фазе (5.26) представляет ренормгрупповой поток (AdS-поток), интерполирующий между пределами малого и большого межбранных расстояний. Скалярное поле φ , стартующее от значения

$$\varphi = \left(\frac{3}{4\pi G_4} \right)^{1/2}, \quad (5.28)$$

т.е. от точки совпадающих бран $a = 1$, в которой эффективная планковская масса (общий коэффициент при скаляре кривизны в (5.22)) обращается в нуль, стремится при раздвижении бран к нулю, так как $a \rightarrow 0$ при $d \rightarrow \infty$.

Конденсат поля φ в форме коэффициентной функции $\chi(\varphi)$, имеющей вид эффективного потенциала типа Коулмена–Вайнберга, логарифмического по $G_4\varphi^2 = \varphi^2/M_P^2$, (5.23), далее делокализуется в логарифмический формфактор $k(\square)$ квадратичного вейлевского члена. Ведущий логарифмический член в коэффициентной функции

$$\chi(\varphi) \sim \frac{1}{4} \ln \frac{M_P^2}{\varphi^2}, \quad \varphi \rightarrow 0, \quad (5.29)$$

вместо бесконечного роста насыщается логарифмом масштаба гравитационной радиации, характеризуемого пространственно-временной неоднородностью вейлевского тензора — логарифмической нелокальностью формфактора

$$k(\square) \sim \frac{1}{4} \ln \frac{4}{l^2 \square}. \quad (5.30)$$

Физика этого перехода очевидна: башня массивных КК-мод, являющихся бесконечно тяжелыми в начальной точке совпадающих бран, при $a \rightarrow 0$ становится очень легкой. Ее спектр становится практически непрерывным и его кумулятивный эффект выражается в виде логарифмической нелокальности, характерной для AdS/CFT-соответствия.

5.3. Сценарий расходящихся бран и инфляция на бране

Интересно проследить, может ли данный AdS-поток реализоваться на динамическом уровне как физический процесс раздвижения (или сближения) бран и иметь интересные космологические приложения. Один из динамических механизмов был предложен в [33] путем введения слабого рассогласования между значениями натяжений бран (4.7), (4.8), который приводит к возникновению в эффективном действии (5.22) малого положительного космологического члена [34], способного генерировать инфляцию на бране [35–37, 23, 24].

Если обозначить избыточную часть натяжения планковской браны через σ_e :

$$\sigma = \frac{3}{4\pi G_5 l} + \sigma_e, \quad (5.31)$$

то метрически-радионная часть действия (5.22) принимает вид

$$S_{\text{eff}}[g_{\mu\nu}, \varphi] =$$

$$= \int d^4x g^{1/2} \left\{ \left(\frac{1}{16\pi G_4} - \frac{1}{12} \varphi^2 \right) R + \frac{1}{2} \varphi \square \varphi - \sigma_e \right\} \quad (5.32)$$

(мы опускаем здесь вклад вейлевских поправок). В таком виде модель не содержит хорошего скалярного потенциала, который мог бы напрямую генерировать эволюцию радиона путем скатывания последнего с потенциальной стенки, в частности породить инфляцию. Однако поле φ неминимально взаимодействует с кривизной, что делает возможными инфляционные приложения этой модели.

Чтобы проанализировать инфляционные приложения, перейдем к эйнштейновской параметризации действия в терминах новой конформно-эквивалентной метрики и нового скалярного поля $(\bar{g}_{\mu\nu}, \varphi)$ [38]:

$$g_{\mu\nu} = \cosh^2 \left[\left(\frac{4\pi G_4}{3} \right)^{1/2} \varphi \right] \bar{g}_{\mu\nu}, \quad (5.33)$$

$$\varphi = \left(\frac{3}{4\pi G_4} \right)^{1/2} \tanh \left[\left(\frac{4\pi G_4}{3} \right)^{1/2} \phi \right]. \quad (5.34)$$

В этой параметризации бесконечная область изменения нового скалярного поля $|\varphi| < \infty$ покрывает область изменения поля радиона φ : $|\varphi| \leq (3/4\pi G_4)^{1/2}$, или $a \leq 1$, в котором эффективная φ -зависящая гравитационная

¹¹ Поле радиона $\Pi(x)$ в исходном двубранном действии (5.7) отсутствует лишь потому, что оно было там посажено на его массовую оболочку $\square\Pi + lR/6 = 0$. Выражение для эффективного действия вне массовой оболочки радиона, приведенное в [20], содержит его кинетический член, который в терминах поля $\varphi(x)$ приводит к (5.22).

константа в действии (5.32) положительна¹²:

$$\frac{1}{16\pi G_4(\phi)} = \frac{1}{16\pi G_4} - \frac{1}{12}\varphi^2. \quad (5.35)$$

Это гарантирует стабильность теории в новых переменных.

В эйнштейновской параметризации действие описывает теорию с минимально взаимодействующим полем ϕ , которое в отличие от исходной параметризации имеет монотонно-растущий потенциал (за счет конформного фактора, связывающего две метрики в (5.33)):

$$\bar{S}_{\text{eff}}[\bar{g}_{\mu\nu}, \phi] = \int d^4x \bar{g}^{1/2} \left\{ \frac{1}{16\pi G_4} \bar{R} + \frac{1}{2} \phi \bar{\square} \phi - V(\phi) \right\}, \quad (5.36)$$

$$V(\phi) = \sigma_e \cosh^4 \left[\left(\frac{4\pi G_4}{3} \right)^{1/2} \phi \right]. \quad (5.37)$$

Положительный минимум потенциала $V(\phi)$ при $\phi = 0$ соответствует бесконечному межбранному расстоянию, в то время как бесконечное значение $V(\phi)$ описывает предел совпадающих бран с (5.28). Это означает, что браны отталкиваются: скатывание поля радиона с потенциального барьера ведет к их разбеганию. Видимая брана с избыточным положительным натяжением искривлена и в режиме медленного скатывания имеет квазидеситтеровскую геометрию, погруженную в пятимерный AdS-объем. Для больших начальных значений ϕ (малое межбранное расстояние) этот потенциал может быть чересчур крутым для режима медленного скатывания, но он может поддерживать степенную инфляцию, в то время как для малых ϕ ($\phi \ll \sqrt{3/4\pi G_4}$, большое расстояние) условия медленного скатывания хорошо выполнены.

Таким образом, радионная мода в такой двубранной модели может служить кандидатом на роль инфлатона, генерирующего инфляцию. Более того, на поздней стадии ($V(0) = \sigma_e$) остаточную космологическую постоянную можно интерпретировать как темную энергию, отвечающую за современное космологическое ускорение.

К сожалению, такая модель имеет ряд недостатков. К ним следует отнести неблагоприятные условия для разогрева Вселенной при выходе из инфляционной стадии, обусловленные тем, что стадии инфляции и космологического ускорения перекрываются и не оставляют места для осцилляционной стадии эволюции инфлатона [39]. Другая проблема связана с тем, что фазу локального эффективного действия (5.22) нельзя экстраполировать на большие межбранные расстояния, где вступает в силу принцип AdS/CFT-соответствия и действие становится чисто эйнштейновским с малыми нелокальными поправками (5.26). Возможно, что фазовый переход может разрешить проблему выхода из инфляции и проблему разогрева, но это требует более детального исследования.

Следует также иметь в виду, что введение дополнительного сверхмалого натяжения σ_e в (5.31), совместного

с масштабом современной темной энергии, порождает проблему сверхтонкой подстройки, что заставляет рассматривать другие механизмы взаимной динамики бран. Интересно, что такой механизм отталкивания бран может быть также основан на присутствии вейлевского члена в ультралокальной и нелокальной фазах теории (5.22) и (5.26). Когда бранная Вселенная заполнена гравитационным излучением, этот член может быть положительным и для малых расстояний может порождать межбранный потенциал

$$-\frac{l^2}{32\pi G_4} \chi(\phi) C_{\mu\nu\alpha\beta}^2. \quad (5.38)$$

Он имеет максимум при совпадающих бранах ($a = 1$), поскольку коэффициент $\chi(\phi)$, задаваемый уравнением (5.23), строго положителен. Сила отталкивания бран, однако, очень мала и обращается в нуль при $a = 1$, потому что поведение $\chi(\phi)$ в точке соприкосновения бран выглядит как¹³

$$\chi(\phi) \sim \frac{(1-a^2)^3}{12}.$$

К сожалению, для $C_{\mu\nu\alpha\beta}^2 > 0$ этот потенциал отрицателен и поэтому не может поддерживать инфляцию, хотя и реализует взаимодействие бран при наличии гравитационной радиации на бране.

5.4. Гравитационно-волновые осцилляции и массивные гравитоны

Рассмотрим эффекты массивных КК-мод гравитации в двубранной модели Рандалл–Сундрума в присутствии материи как на видимой (планковской), так и на "невидимой" бранах модели [40]. Один из таких эффектов, в частности, позволяет видеть вторую брану методами гравитационно-волновой астрономии. Это единственный возможный способ прямого наблюдения многомерного объема в рамках бранной концепции, не допускающей распространение света в дополнительных измерениях. Он основан на эффекте гравитационных осцилляций, аналогичных нейтринным осцилляциям и неизбежных, как и любой другой модели, обладающей квантами разных масс.

Для изучения гравитационного излучения от источников, находящихся на бранах, которое детектируется физическим наблюдателем, живущим, скажем, на планковской бране, мы воспользуемся формализмом двубранного эффективного действия, развитого в разделе 5. Ограничимся поперечно-бесследовыми компонентами гравитационных возмущений $h_{\mu\nu}^\pm(x)$, которые описывают излучение от ковариантно сохраняющихся источников на соответствующих бранах Σ_\pm . Тогда квадратичное по полям действие (5.7) можно переписать в виде 2×2 квадратичной формы:

$$S_{\text{eff}}[h_{\mu\nu}^\pm] = \int d^4x \left(\frac{1}{32\pi G_4} \mathbf{h}^T \frac{\mathbf{F}(\square)}{l^2} \mathbf{h} + \frac{1}{2} \mathbf{h}^T \mathbf{T} \right), \quad (5.39)$$

в терминах двумерных столбцов метрических возмущений и тензоров энергии-импульса $T_{\mu\nu}^\pm(x)$ материальных

¹² Область нестабильности $a > 1$ можно исключить из рассмотрения, поскольку ее граница $a = 1$ соответствует пределу совпадающих бран.

¹³ Интересно, что выражение (5.23) представляет собой логарифмический член $\ln(1/a^2)$ с вычтеными двумя первыми членами ряда Тейлора в точке $a^2 = 1$.

источников на бранах

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} h^+(x) \\ h^-(x) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} T^+(x) \\ T^-(x) \end{bmatrix}. \quad (5.40)$$

Индекс "T" означает их транспонирование в строки, здесь и в дальнейшем мы опускаем тензорные индексы.

Ядро квадратичной формы (5.39) определяется нелокальным оператором (5.10), который только и входит в поперечно-бесследовый сектор модели. (Общая степень даламбертиана \square отличается от (5.10), потому что действие выражено непосредственно в терминах метрических возмущений, а не линеаризованных кривизн Риччи (5.6).)

Линейные уравнения для гравитационных потенциалов $\mathbf{h}(x)$, следующие из этого действия, имеют решение в терминах запаздывающей функции Грина оператора $\mathbf{F}(\square)$:

$$\mathbf{h}(x) = -8\pi G_4 l^2 \mathbf{G}_{\text{ret}}(\square) \mathbf{T}(x), \quad (5.41)$$

$$\mathbf{F}(\square) \mathbf{G}_{\text{ret}}(\square) = \mathbf{I}. \quad (5.42)$$

Здесь функция Грина представлена в матрично-значном операторном виде как функция \square . Для нее можно написать спектральное разложение по стандартным функциям Грина безмассового гравитона и его массивных КК-партнеров, массы которых определяются уравнением (5.16):

$$\mathbf{G}(\square) = \sum_{n=0} \frac{\mathbf{v}_n \mathbf{v}_n^T}{\square - m_n^2}. \quad (5.43)$$

Изотопическая структура вычетов в полюсах $\square = m_n^2$ в (5.43) определяется прямым произведением функций поляризаций базисных функций $\mathbf{v}(x)$ оператора $\mathbf{F}(\square)$, удовлетворяющих уравнению (5.15). В двубранной задаче они представляют собой двумерные столбцы \mathbf{v}_n в выражении для базисной функции в виде

$$\mathbf{v}_n(x) = (2p^0)^{-1/2} \exp(ipx) \mathbf{v}_n, \quad p^2 + m^2 = 0.$$

Эти столбцы являются нуль-векторами матрицы оператора $\mathbf{F}(m_n^2)$:

$$\mathbf{F}(m_n^2) \mathbf{v}_n = 0, \quad (5.44)$$

и удовлетворяют условиям нормировки [40]

$$\mathbf{v}_n^T \frac{d\mathbf{F}(m^2)}{dm^2} \mathbf{v}_n \Big|_{m^2 = m_n^2} = 1. \quad (5.45)$$

Нас интересует гравитационное излучение на большом расстоянии от источников и для малых частот, когда можно использовать низкоэнергетический предел на планковской бране $l\sqrt{\square} \ll 1$, но когда операторный аргумент $l\sqrt{\square}/a$ может принимать любые значения в силу малости параметра $a = \exp(-d/l)$ (большие межбранные расстояния). В этом пределе в силу известных асимптотик малого аргумента для функций Бесселя оператор (5.10) имеет приближенный вид [20]:

$$\mathbf{F}(\square) \approx \frac{l^2 \square}{2} \begin{bmatrix} 1 & J_2^{-1}(l\sqrt{\square}/a) \\ J_2^{-1}(l\sqrt{\square}/a) & -\frac{2}{l\sqrt{\square}a} \frac{J_1(l\sqrt{\square}/a)}{J_2(l\sqrt{\square}/a)} \end{bmatrix}. \quad (5.46)$$

Согласно уравнению (5.16) из (5.46) в вышеуказанном приближении ($a \ll 1$) сразу же следует спектр масс КК-мод, определяемых корнями функции Бесселя первого порядка, и их поляризационные векторы:

$$\mathbf{v}_0 = \frac{\sqrt{2}}{l} \begin{bmatrix} 1 \\ a^2 \end{bmatrix}, \quad m_0 = 0, \quad (5.47)$$

$$\mathbf{v}_n = \frac{\sqrt{2}a}{l} \begin{bmatrix} J_2^{-1}(j_n) \\ -1 \end{bmatrix}, \quad m_n = \frac{a}{l} j_n, \quad J_1(j_n) = 0, \quad n > 0. \quad (5.48)$$

Эти выражения мы используем сейчас для построения функции Грина (5.43) и нахождения гравитационного излучения локальных источников на бранах.

Ограничимся наблюдением гравитационного сигнала от двух распределенных источников T^\pm на "видимой" бране Σ_+ . Для простоты рассмотрения ограничимся частотами ниже массового порога второй массивной моды m_2 . Тогда в спектральном разложении (5.43) вклад в сигнал дадут только два первых члена: с $n = 0$ и $n = 1$. Используя структуру $\mathbf{v}_{0,1}$ из (5.48), находим для этого сигнала следующее выражение:

$$h^+(x) = -16\pi G_4 \frac{1}{\square} \Big|_{\text{ret}} (T^+(x) + a^2 T^-(x)) - 16\pi G_4 \frac{1}{\square - m_1^2} \Big|_{\text{ret}} \left(\frac{a^2}{\mathcal{J}^2} T^+(x) - \frac{a^2}{\mathcal{J}} T^-(x) \right), \quad (5.49)$$

где $\mathcal{J} \equiv J_2(lm_1/a) \simeq 0,403$.

Возьмем теперь локальные астрофизические источники в точке $\mathbf{x} = 0$ на обеих бранах с одинаковой интенсивностью и частотой:

$$T^\pm(t, \mathbf{x}) = \mu \exp(-i\omega t) \delta(\mathbf{x}). \quad (5.50)$$

Если частота источника лежит выше массового порога первой массивной моды ($\omega > m_1$), то обе моды — безмассовая и массивная — оказываются возбужденными и производят дальнодействующие гравитационные волны. На расстоянии r от источника его сигнал на каждой бране состоит из суперпозиции сферических волн безмассовых и массивных квантов. На бране Σ_+ эта суперпозиция задается суммой вкладов от источников на Σ_+ и Σ_- :

$$h^+[T^+] = A \exp(-i\omega t) \times \times \left(\exp(i\omega r) + \frac{a^2}{\mathcal{J}^2} \exp[i(\omega^2 - m_1^2)^{1/2}r] \right), \quad (5.51)$$

$$h^+[T^-] = A a^2 \exp(-i\omega t) \times \times \left(\exp(i\omega r) - \frac{1}{\mathcal{J}} \exp[i(\omega^2 - m_1^2)^{1/2}r] \right), \quad (5.52)$$

где $A = 4G_4\mu/r$ означает амплитуду безмассовой волны от источника (5.50).

Амплитуды, детектируемые гравитационно-волновыми интерферометрами, определяются абсолютными величинами выражений (5.51) и (5.52):

$$|h^+[T^+]| = \mathcal{A}^+ \left[1 - \frac{4a^2 \mathcal{J}^2}{(\mathcal{J}^2 + a^2)^2} \sin^2 \frac{\pi r}{L} \right]^{1/2}, \quad (5.53)$$

$$|h^+[T^-]| = \mathcal{A}^- \left[1 + \frac{4\mathcal{J}}{(\mathcal{J} - 1)^2} \sin^2 \frac{\pi r}{L} \right]^{1/2}. \quad (5.54)$$

Как видно, они промодулированы по радиальной переменной осцилляциями с длиной волны

$$L = 2\pi \left(\omega - \sqrt{\omega^2 - m_1^2} \right)^{-1} \simeq \frac{2\pi}{m_1}, \quad (5.55)$$

где приближенное равенство соответствует $m_1 \ll \omega$.

Коэффициенты амплитуд (5.53) и (5.54) задаются выражениями

$$\mathcal{A}^+ = \left(1 + \frac{a^2}{\mathcal{J}^2} \right)^2 A \approx A, \quad (5.56)$$

$$\mathcal{A}^- = \left(\frac{1}{\mathcal{J}} - 1 \right) a^2 A \approx 2.2a^2 A, \quad (5.57)$$

справедливыми в пределе $a \ll 1$.

Итак, амплитуды волн от обоих источников подвержены осцилляциям, однако в разной степени. Осцилляции являются следствием интерференции волн квантов поля с разными массами, аналогичной нейтринным осцилляциям. Это явление параметрически зависит от расстояния между бранами — радиона, поэтому заслуживает названия радионно-индукционных гравитационных осцилляций (RIGO). Осциллирующая часть амплитуды гравитационной волны от T^+ , (5.53), подавлена в области больших межбранных расстояний малым фактором $a^2 \ll 1$. Наоборот, биение амплитуды сигнала от T^- в (5.54) сравнимо с самим сигналом независимо от расстояния между бранами.

Чтобы сделать оценки осцилляций RIGO, заметим, что их длина в терминах радиуса кривизны l AdS-пространства и масштабного фактора a скрытой браны имеет вид

$$L = \frac{2\pi l}{j_1 a} \approx 1.6 \frac{l}{a}, \quad (5.58)$$

где $j_1 \approx 3.831$ есть первый корень J_1 . Следовательно, длина осцилляций обратно пропорциональна a .

С другой стороны, осцилляции становятся наблюдаемыми, когда их длина соизмерима с длиной плеча гравитационно-волнового детектора. Для базированных на Земле интерферометров типа LIGO такое требование соответствует $L \sim 10^3$ м. Комбинируя это с оценкой максимального радиуса кривизны AdS-пространства l из субмиллиметровых настольных экспериментов кавендишевского типа ($l \leq 10^{-4}$ м) [10], находим верхний предел масштабного фактора скрытой браны $a \leq 10^{-6}$, при котором осцилляции могут быть наблюдаемы. К сожалению, подстановка этого значения в отношение амплитуд (5.56) и (5.57) приводит к оценке

$$\frac{\mathcal{A}^-}{\mathcal{A}^+} \leq 10^{-14}. \quad (5.59)$$

Следовательно, амплитуда волны, происходящей от источника на скрытой бране с достаточно длинными, доступными к детектированию, осцилляциями, сильно подавлена по сравнению с гравитационной волной от аналогичного источника на планковской бране.

Сильно осциллирующая волна должна генерироваться источником, на 14 порядков более сильным, чем слабо осциллирующий сигнал от материи на нашей бране, чтобы быть той же величины, что, по-видимому, делает детектирование RIGO в близком будущем невоз-

2*

можным. Однако в [40] было сделано предположение, что бранные механизмы компактификации в М-теории могут порождать большой конденсат калибровочных суперпартнеров на скрытой бране η [41], который определяет квадрупольный момент космических струн $\mu \sim \eta^2$ [42], что может приводить к генерации сильных гравитационных волн на скрытой бране, легко компенсирующих подавляющий фактор (5.59).

В принципе RIGO-эффект является общей чертой любой многомерной модели, поскольку в ней всегда происходит амплитудная модуляция гравитационных волн, являющихся смесью безмассовых и массивных мод. В традиционных моделях дополнительных измерений масса первой КК-моды настолько велика, что она никогда не будет рождена астрофизическими источниками и не приведет к осцилляциям макроскопического размера.

Наоборот, геометрия искривленных дополнительных измерений допускает КК-моды, которые лежат настолько низко, что могут привести к обнаружимым осцилляциям. Так, гравитационные волны от источников на скрытой бране приводят к сильным осцилляциям в нашем мире. Даже не предполагая наличия особо сильных источников на скрытой бране, разумно предположить существование других механизмов, которые комбинируют требование малых КК-масс и сильной модификации гравитационного сигнала в моделях с дополнительными измерениями. К ним, в частности, принадлежит эффект гравитационного эха, который специфически окрашивает гравитационное излучение от источника на нашей же бране за счет его отражения в объеме [43].

5.5. Эффект гравитационного эха

В этом разделе мы рассмотрим особенности релятивистского распространения сигнала в пространстве-времени с компактной пятой координатой. Эта задача представляет интерес с точки зрения гравитационно-волновой астрономии как средство обнаружения дополнительных измерений. Как мы увидим, компактность дополнительного измерения или наличие другой браны приводит к явлению гравитационного эха [43], которое весьма интересным образом модифицирует запаздывающие потенциалы (квази)точечных источников.

Для простоты рассмотрим плоское пятимерное пространство-время с пятой координатой, лежащей в конечных пределах: $0 < u < L$, которые, как и в модели Рандалл–Сундрума, можно отождествить с двумя бранами. (В остальном эта модель больше похожа на ADD-модель с размером дополнительного измерения L .) На бранах наложим краевые условия Неймана, которые будут моделировать условия сшивания Израэля. Также опустим тензорную и калибровочную структуры гравитационных возмущений, предполагая, что их уравнения движения имеют вид уравнений безмассового скалярного поля. Это упрощение не влияет на интересующие нас свойства распространения релятивистских сигналов в пятимерном пространстве с временнымподобными границами.

Итак, пятимерное поле $\Phi(X)$, взаимодействующее с источником $J(X)$ с пятимерной гравитационной константой, удовлетворяет в пятимерном объеме уравнению

$$\square_5 \Phi(X) = -G_5 J(X) \quad (5.60)$$

и краевым условиям Неймана на бранах

$$\partial_y \Phi(X) \Big|_{y=0} = \partial_y \Phi(X) \Big|_{y=L} = 0. \quad (5.61)$$

Для источника, локализованного на бране: $J(X) = j(x) \delta(y)$, решение задачи на той же бране

$$\Phi(X) \Big|_{y=0} = G_5 \int d^4x' D(x - x') j(x') \quad (5.62)$$

дается внутрибранным пропагатором

$$D(x) = -\frac{1}{\square_5} \delta(X) \Big|_{y=0}, \quad (5.63)$$

который может быть построен из пятимерного пропагатора в бесконечном пространстве без границ:

$$D_5(X) \equiv -\frac{1}{\square_5} \delta(X) = \frac{i}{8\pi^2} \frac{1}{((X)^2)^{3/2}}, \quad (5.64)$$

методом изображений¹⁴.

Как показано в [43], для краевых условий Неймана метод изображений дает ответ в виде суммы вкладов источника и его изображений, локализованных в бесконечной последовательности точек X_n :

$$D(x) = 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_5(X - X_n) \Big|_{X=(x,0)}, \quad (5.65)$$

$$X_n = (0, 2nL), \quad (X - X_n)^2 = x^2 + 4n^2 L^2. \quad (5.66)$$

(Этот ответ в [43] обоснован также с точки зрения КК-представления и импульсного представления.)

В области больших интервалов: $(x - x')^2 \gg L^2$, сумма (5.66) может быть заменена интегралом, вычисление которого дает

$$\begin{aligned} D(x, x') &\simeq \frac{i}{8\pi^2 L} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{1}{((x - x')^2 + y^2)^{3/2}} = \\ &= \frac{i}{4\pi^2 L} \frac{1}{(x - x')^2}, \end{aligned} \quad (5.67)$$

так что восстанавливается четырехмерная функция Грина (см. уравнение (4.36), в котором роль эффективного размера дополнительного измерения играет l). Фактически это является реализацией метода спуска получения функции Грина из функции Грина в пространстве на единицу большей размерности. Этот метод позволяет, в частности, найти ньютоновский потенциал на бране, порождаемый точечным источником в начале пространственных координат, путем интегрирования (5.65) по времени.

Интегрируя (5.65) путем викова поворота к $x^4 = ix^0$, получаем

$$\begin{aligned} V(r) &= G_5 \int_{-\infty}^{\infty} dx^0 D(\mathbf{x}, x^0) = \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{r^2 + 4n^2 L^2}, \quad r^2 = \mathbf{x}^2, \end{aligned} \quad (5.68)$$

¹⁴ Здесь $X^2 = -(x^0)^2 + \mathbf{x}^2 + y^2$ есть лоренцев интервал, и правило обхода сингулярностей при интегрировании ядра функции Грина определяется условиями краевой задачи по физическому времени x^0 (ниже мы сформулируем его для запаздывающей функции Грина).

или

$$V(r) = \frac{G_4}{4\pi r} \left(1 + \frac{2}{\exp(\pi r/L) - 1} \right), \quad (5.69)$$

где G_4 представляет собой четырехмерную гравитационную постоянную (ср. уравнение (4.35)):

$$G_4 = \frac{G_5}{L}. \quad (5.70)$$

При больших расстояниях ($r \gg L$) результат, очевидно, воспроизводит обычный ньютоновский потенциал с поправками типа Юкавы в четырехмерном мире. Для малых расстояний он переходит в пятимерный закон $1/r^2$.

В отличие от ньютоновского потенциала запаздывающий потенциал от источника на бране получается из (5.62) подстановкой запаздывающего пропагатора $D^{\text{ret}}(x - x')$. Это можно сделать почленно в сумме (5.65), используя ядро пятимерной запаздывающей функции Грина (которая может быть получена из мнимой части фейнмановского пропагатора, следующего из (5.64) посредством $i\varepsilon$ -прескрипции $X^2 \rightarrow X^2 + i\varepsilon$ [43]):

$$\begin{aligned} D_5^{\text{ret}}(r, t) &= \frac{1}{4\pi^2} \operatorname{Re} \frac{i}{(r^2 - t^2 + i\varepsilon)^{3/2}} = \\ &= -\frac{1}{4\pi^2 r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\theta(t - r)}{(t^2 - r^2)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (5.71)$$

В результате имеем ответ

$$D^{\text{ret}}(t, \mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\theta(t - (r^2 + 4n^2 L^2)^{1/2})}{(t^2 - r^2 - 4n^2 L^2)^{1/2}}, \quad (5.72)$$

который кардинально отличается от четырехмерного случая в двух моментах. Во-первых, запаздывающая функция Грина (5.71) имеет носитель внутри всего будущего светового конуса точечного источника при $r = 0, t = 0$ (что соответствует отсутствию принципа Гюйгенса в нечетномерном пространстве-времени). В результате в сумму (5.72) вносят вклад все изображения исходного источника, принадлежащие внутренности светового конуса точки наблюдения. Во-вторых, на световом конусе запаздывающая функция имеет корневую сингулярность.

Рассмотрим запаздывающий потенциал от источника на бране

$$J(x, y) = f(t) \delta^{(3)}(\mathbf{x}) \delta(y) \quad (5.73)$$

с произвольной временной зависимостью $f(t)$. С учетом (5.72) имеем

$$\begin{aligned} \Phi(t, r) &= -\frac{G_5}{2\pi^2} \times \\ &\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{r_n} \frac{\partial}{\partial r_n} \int_{-\infty}^{t-r_n} dt' \frac{f(t')}{((t - t')^2 - r_n^2)^{1/2}} \Big|_{r_n = (r^2 + 4n^2 L^2)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (5.74)$$

В частности, для функции $f(t)$ как постоянного по амплитуде импульса конечной длительности T :

$$f(t) = \theta(t) - \theta(t - T), \quad (5.75)$$

после интегрирования по времени выражение (5.74) принимает вид

$$\Phi(t, \mathbf{x}) = \frac{G_5 t}{16\pi^2 L^3} \theta(t - r) I(\alpha, \beta) - (t \rightarrow t - T). \quad (5.76)$$

Функция $I(\alpha, \beta)$ параметров

$$\alpha = \frac{(t^2 - r^2)^{1/2}}{2L}, \quad \beta = \frac{r}{2L} \quad (5.77)$$

задается конечной суммой

$$I(\alpha, \beta) = \sum_{n=-[\alpha]}^{[\alpha]} \frac{1}{(\beta^2 + n^2)(\alpha^2 - n^2)^{1/2}}, \quad m < \alpha. \quad (5.78)$$

Здесь $[\alpha]$ означает целую часть α .

Обсудим сначала вклад переднего фронта импульса — первый член (5.75). Когда t достигает радиуса r , при котором локализован наблюдатель, последний начинает получать сигнал, закодированный в первом члене (5.76). Поскольку этот член содержит целую часть параметра α ($n = [\alpha]$), его вклад является разрывной функцией времени. Каждый раз, когда параметр α становится целым, новая пара членов при $n = \pm[\alpha]$ возникает в сумме (5.78) и ответ меняется скачком. Это соответствует приходу сигналов от новых образов при $y = \pm 2[\alpha]L$.

Более того, непосредственно при $\alpha = [\alpha]$ сигналы сингулярны (вида $(\alpha - [\alpha])^{-1/2}$), что соответствует структуре сингулярности запаздывающей функции Грина в пяти измерениях. Эта сингулярность не очень сильная и может быть сглажена путем усреднения по времени между последовательными сингулярными пиками. С ходом времени все новые и новые сигналы гравитационного эха приходят от новых образов источника, так что сигнал, детектируемый на бране, принимает форму последовательности сингулярных пиков. Очевидно, что наблюдатель с его детектором не в состоянии разрешить отдельные пики, поэтому имеет смысл их усреднить по времени согласно следующей процедуре.

Поскольку четырехмерный сигнал восстанавливается при поздних временах (когда накапливается вклад большого числа образов), сначала найдем асимптотику суммы (5.78) при $\alpha \gg 1$, как сделано в [43], а затем усредним ее по интервалу времени между пиками. В последнем сингулярном ($n = [\alpha]$) и сублидирующем по $\alpha^{-1/2}$ членах асимптотики эта процедура сводится к усреднениям вида

$$\langle (\alpha - [\alpha])^{-1/2} \rangle \equiv \int_{[\alpha]}^{[\alpha]+1} \frac{d\alpha}{(\alpha - [\alpha])^{1/2}} = 2, \quad (5.79)$$

$$\langle (\alpha - [\alpha] + 1)^{1/2} \rangle \equiv \int_{[\alpha]}^{[\alpha]+1} d\alpha (\alpha - [\alpha] + 1)^{1/2} = \frac{2}{3} (2^{3/2} - 1). \quad (5.80)$$

Отсюда

$$\langle I(\alpha, \beta) \rangle = \frac{\pi}{\beta} \frac{\coth(\pi\beta)}{(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}} - \frac{2^{3/2}}{\alpha^{1/2}(\alpha^2 + \beta^2)} \frac{2^{5/2} - 5}{3}, \quad \alpha \gg 1, \quad (5.81)$$

что в силу (5.76) окончательно дает

$$\begin{aligned} \langle \Phi(t, \mathbf{x}) \rangle &= V(r) \theta(t - r) - \frac{G_4}{3\pi^2 t} \left(\frac{L^2}{t^2 - r^2} \right)^{1/4} \times \\ &\times (2^{5/2} - 5) \theta(t - r) - (t \rightarrow t - T), \quad t^2 - r^2 \gg L^2. \end{aligned} \quad (5.82)$$

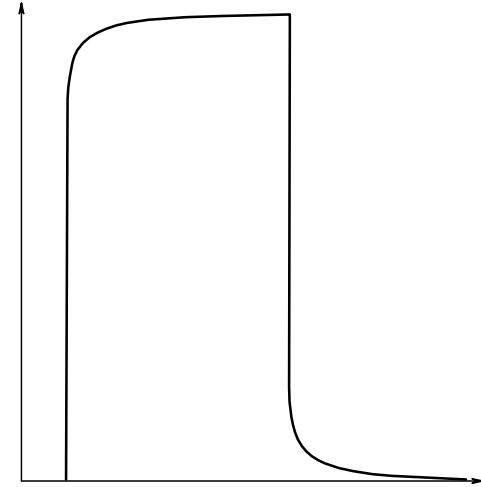


Рис. 7. Типичная форма сигнала — экранировка переднего фронта и хвостовой сигнал, следующий за задним фронтом.

Здесь $V(r)$ есть в точности ньютоновский потенциал (5.69), вычитаемый член при $t - T$ дает вклад заднего фронта импульса (5.68), а второй член представляет собой поправки, обусловленные вкладом сигналов эха от большого числа изображений¹⁵.

При $t > T + r$ сигналы как от переднего, так и от заднего фронтов импульса достигают наблюдателя, в результате чего первый ньютоновский член сокращается. В четырех измерениях это свелось бы к отсутствию сигнала при $t > T + r$ (наблюдатель увидел бы только прохождение конечного пульса длины T с запаздыванием r). В пяти измерениях ситуация интереснее: вся область внутри светового конуса вносит вклад в сигнал, который никогда не обрывается строго до нуля. Даже после того, как потухает горящая свеча, ее затухающий свет продолжает вечно достигать наблюдателя, прибывая от все более и более удаленных изображений источника. "Хвост" сигнала происходит от второго члена в (5.82) и при поздних временах $t \gg r$ и $t \gg T$ принимает следующий затухающий по степенному закону вид:

$$\langle \Phi(t, \mathbf{x}) \rangle_{\text{tail}} = (2^{5/2} - 5) \frac{G_4}{2\pi^2} \frac{L^{1/2} T}{t^{5/2}}. \quad (5.83)$$

Существенно, что при $t \gg r$ хвостовой сигнал не зависит от расстояния до источника.

Другой интересный эффект — деформация переднего фронта сигнала. При $r < t < r + T$, когда задний фронт импульса еще не достиг наблюдателя, второй член в (5.82) в силу своего отрицательного знака приводит к частичному экранированию чисто четырехмерной части сигнала (его результатирующая форма представлена на рис. 7). Поправка к $\Phi_0(t, \mathbf{x}) = G_4/4\pi r$ имеет вид

$$\langle \Phi(t, \mathbf{x}) \rangle \simeq \Phi_0(t, \mathbf{x}) + \Phi_1(t, \mathbf{x}), \quad (5.84)$$

$$\Phi_1(t, \mathbf{x}) = -\frac{2}{3\pi} \frac{2^{5/2} - 5}{\alpha^{1/2}(t)} \Phi_0(t, \mathbf{x}), \quad (5.85)$$

$$r < t < r + T, \quad \alpha(t) \gg 1,$$

¹⁵ Заметим, что этот вклад происходит из сублидирующего по $\alpha^{-1/2}$ члена асимптотики, содержащего усреднение (5.80).

где параметр $\alpha(t) = (t^2 - r^2)^{1/2}/2L$ имеет смысл числа пиков, которые уже прошли через наблюдателя к моменту наблюдения t . (Мы пренебрегаем отличием α от $[\alpha]$ при $\alpha \gg 1$.)

Число $\alpha(t)$ предполагается достаточно большим, чтобы гарантировать формирование четырехмерной части (первый член в (5.82)). Одновременно оно должно быть достаточно малым, чтобы обеспечить соотношение $t \sim r$. В конечном итоге минимальное значение $\alpha(t)$ определяется разрешающей способностью детектора наблюдателя: он может не различить единичный пик, но должен быть в состоянии разрешать интервал времени между приходом переднего фронта и моментом наблюдения t . Аналогичная ситуация существует на заднем фронте: для значения t , близкого к $r + T$, хвостовой сигнал определяется главным образом числом пиков, приходящих сразу по окончании сигнала исходного источника [43].

Аналогичное вычисление запаздывающего потенциала от периодического источника частоты ω :

$$f(t) = \exp(i\omega t), \quad (5.86)$$

намного проще. Вычисление интеграла в уравнении (5.74) с использованием формулы

$$\int_{-\infty}^{t-r} \frac{dt' \exp(i\omega t')}{\sqrt{(t-t')^2 - r^2}} = \frac{-i\pi}{2} \exp(i\omega t) H_0^{(2)}(\omega r) \quad (5.87)$$

дает сумму, которая также может быть сведена к интегралу в пределе $\omega L \ll 1$ [43].

В результате ведущий вклад

$$\Phi(r, t) \simeq \Phi_0(r, t) = \frac{G_4}{8\pi r} \exp(i\omega(t-r)) \quad (5.88)$$

оказывается четырехмерной запаздывающей сферической волной, а поправка к нему в области больших расстояний ($\omega r \gg 1$) имеет вид

$$\Phi_1(r, t) = L \sqrt{\frac{2\omega}{\pi r}} \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) \Phi_0(r, t). \quad (5.89)$$

Обратим внимание на фазовый сдвиг этого выражения относительно четырехмерного сигнала (5.88). Амплитуда (5.89) также теперь зависит от частоты сигнала. Эти два обстоятельства позволяют отличить эффект дополнительного измерения от чисто четырехмерной части сигнала. Таким образом, проявлением пятимерности пространства-времени является зависящее от частоты усиление амплитуды $|\Phi_0(r, t) + \Phi_1(r, t)|$ сигнала от периодического источника.

Итак, существуют по меньшей мере два потенциально наблюдаемых эффекта компактного пятого измерения: остаточное свечение от источника, имеющего конечное время жизни T , и усиление амплитуды сигнала от периодического источника. В четырехмерной теории остаточное свечение отсутствует в принципе, поэтому его наблюдение было бы явным свидетельством в пользу наличия дополнительных измерений. Относительная величина этого эффекта по отношению к амплитуде ньютонаовского потенциала на расстоянии r от источника $\Phi_0(t, r) = G_4/4\pi r$ в момент $t \geq r$ ограничена оценкой

$$\frac{\Phi_{\text{tail}}}{\Phi_0} \sim \frac{L^{1/2} T}{r^{3/2}}. \quad (5.90)$$

Эффект усиления периодического сигнала (5.89) имеет фазовый сдвиг, который также может быть использован в наблюдениях. Согласно (5.89) относительная величина этого эффекта ведет себя как

$$\frac{\Phi_1}{\Phi_0} \sim \frac{L}{\sqrt{\lambda r}}, \quad (5.91)$$

в терминах длины волны сигнала $\lambda = 2\pi/\omega$ (в наших единицах скорость света $c = 1$).

Эффекты остаточного свечения от источника и усиления периодического сигнала означают, что в принципе дополнительные измерения могут наблюдаться методами гравитационно-волновой астрономии, однако они очень слабы. Оценки, сделанные для детекторов LIGO и LISA (на основании данных [44, 45]) показывают следующее. Для космического интерферометра LISA, который будет работать в диапазоне частот 10^{-4} – 1 Гц, источник (скажем, взрыв сверхновой), расположенный на расстоянии 10 Мпс от Земли и порождающий сигнал продолжительностью $T \sim 10^4$ с (связанной с нижней границей частотного диапазона), согласно (5.90) приведет к оценке $\Phi_{\text{tail}}/\Phi_0 \sim 10^{-25}$, если мы примем размер дополнительного измерения в масштабе $L \sim 10^{-1}$ см. Детектор LIGO работает при более высоких частотах (1 – 10^4 Гц) и поэтому более подходит для наблюдения эффекта усиления периодического сигнала. Для частоты излучения $\omega \sim 100$ Гц (скажем, бинарной системы звезд на расстоянии 10 Мпс от нас) из (5.91) находим $\Phi_1/\Phi_0 \sim 10^{-18}$.

Итак, результирующий эффект слишком мал, чтобы быть экспериментально наблюдаемым сейчас или в обозримом будущем. Отметим, однако, что хвост излучения (5.83) при поздних временах не зависит от расстояния до источника. Следовательно, может существовать коллективный эффект от суперпозиции большого числа разных источников. Результирующий сигнал будет пропорциональным числу источников в нашей части Вселенной и может быть выделен согласно характерному закону убывания $t^{-5/2}$.

Существует также другой интервал временных масштабов, который дает большие надежды на детектирование дополнительных измерений. Он соответствует (5.84), (5.85) — области перехода от момента прихода переднего фронта сигнала при $t = r$ к более поздним временам $t > r$. В этом режиме время существенно больше r , чтобы сгенерировать большое число $\alpha(t)$ пиков сигнала. Это число должно быть достаточно большим, чтобы гарантировать формирование четырехмерного сигнала (5.84). (Напомним, что последний полностью восстанавливается при бесконечном t как кумулятивный эффект бесконечного числа образов источника.) Однако число $\alpha(t)$ должно быть не настолько большим, чтобы гравитационная антенна была в состоянии разрешить промежуток $\Delta t = t - r$ от прихода переднего фронта до момента наблюдения.

Поправка к четырехмерной части сигнала (5.85) подавлена фактором $\alpha^{-1/2}(t)$. Из (5.77) следует, что нижняя граница $\alpha(t)$ связана с разрешающей способностью гравитационной антенны по времени $\Delta t = t - r$ как $\alpha_{\min} \sim (\Delta t/L)^{1/2} (r/L)^{1/2}$. Это дает $\alpha_{\min}^{-1/2}(t) \sim 10^{-8}$ (при частоте $\omega \sim \Delta t^{-1} \sim 10^4$ Гц, характерной для детектора LIGO), что улучшает предыдущие оценки и открывает определенные перспективы гравитационно-волновой астрономии дополнительных измерений.

6. Проблема космологической постоянной и бранная космология

В этом разделе мы возвращаемся к проблемам космологической постоянной и космологического ускорения, которые, как отмечалось в разделе 1, послужили, в частности, мощной мотивацией к изучению бранных моделей с дополнительными измерениями. Фактически решение этих проблем охватывает круг возможных механизмов, далеко выходящий за рамки бранной концепции. Поэтому мы ограничимся только одним его типом, который представляет собой набор различных модификаций эйнштейновской теории в глубоко инфракрасной области, характеризуемой масштабом горизонта (обратной величины постоянной Хаббла):

$$\frac{1}{H_0} \sim 10^{28} \text{ см} \sim (10^{-33} \text{ эВ})^{-1}.$$

Опять же, класс инфракрасных модификаций шире возможностей бранной парадигмы, поэтому сначала мы остановимся на этих модификациях в рамках простейших бранных моделей, а затем кратко рассмотрим общий нелокальный механизм *нового* решения проблемы космологической постоянной, основанный на частичном нарушении локализации гравитона на бране. При этом низкоэнергетический гравитон оказывается метастабильным, что приводит к модификации теории не только в области малых расстояний, но и в области ультрабольших масштабов, сравнимых с космологическим горизонтом.

6.1. Новый механизм

малой космологической постоянной

В чем заключается *новое* решение проблемы космологической постоянной? Напомним, что суть проблемы заключается в огромном разрыве между чрезвычайно низкой средней плотностью энергии во Вселенной: $\mathcal{E} \sim 10^{-29} \text{ г см}^{-3} \sim (10^{-5} \text{ эВ})^4$, генерирующей согласно уравнениям Эйнштейна современное космологическое ускорение с постоянной Хаббла H_0 :

$$H_0^2 \sim G\mathcal{E}, \quad (6.1)$$

и масштабом вакуумных энергий всех фундаментальных моделей теории поля — от электрослабой теории, $\mathcal{E} \sim (1 \text{ ТэВ})^4$, до квантовой гравитации, $\mathcal{E} \sim (10^{19} \text{ ГэВ})^4$.

Попытки старого решения проблемы заключались в построении моделей с нулевой энергией вакуума, основанных главным образом на суперсимметрии, запрещающей перенормировку космологической постоянной. Механизм таких моделей, основанный на взаимоничтожении вкладов частиц и их суперпартнеров, перестает работать в фазе со спонтанным нарушением суперсимметрии [46] и теряет смысл в рамках явления космологического ускорения, в котором эффективное значение космологической постоянной все равно отлично от нуля, хотя и очень мало.

Альтернативное решение проблемы может лежать не в секторе космологического члена действия Гильберта — Эйнштейна, а в его секторе скалярной кривизны. Малость H_0^2 в (6.1) может следовать не из малого значения \mathcal{E} , а из малости коэффициента пропорциональности — гравитационной постоянной G . Иными словами, малое значение постоянной Хаббла в космологическом ускоре-

нии может объясняться не тем, что вакуумная энергия мала, а тем, что она слабо гравитирует. Что отличает вакуумную энергию от других локальных источников гравитационного поля в масштабах расстояний много меньше космологических, так это степень пространственно-временной однородности \mathcal{E} . Предполагается, что вакуумная энергия не скучивается, практически однородна в масштабе горизонта:

$$\frac{\nabla\mathcal{E}}{\mathcal{E}} \sim H_0, \quad (6.2)$$

и гравитирует со своей длиннодействующей гравитационной постоянной $G_{LD} \ll G_P$, которая много меньше планковской константы, определяющей "повседневную" гравитационную физику в масштабе галактик, планетарных систем, субмиллиметровых экспериментов типа Кавендиша и т.д.:

$$H_0^2 \sim G_{LD}\mathcal{E} \ll G_P\mathcal{E}.$$

Эта идея, по-видимому, впервые сформулированная явно в [47], представляет собой замену в уравнениях Эйнштейна фундаментальной константы на нелокальный оператор, который из соображений ковариантности можно считать функцией даламбертиана и который интерполирует между планковским значением гравитационной постоянной и ее дальнодействующим значением¹⁶:

$$G \rightarrow G(\square), \quad G_P > G(\square) > G_{LD}. \quad (6.3)$$

Заметим, что механизм зависящий от масштаба гравитационной постоянной в виде нелокальности не является единственным. Понятие масштаба включает не только степень пространственно-временной неоднородности, но и амплитуду поля, поэтому инфракрасная модификация теории может быть основана также на гравитационной "постоянной", аналогично (5.35) локально зависящей от выделенных физических полей — разновидности так называемой квинтэссенции [46, 49].

Такой механизм реализуется, в частности, в бранных космологических моделях типа Рандалл–Сундрума. Однако он является менее универсальным, поскольку привязан к поведению конкретного поля квинтэссенции, в то время как механизм нелокальной замены (6.3) приводит к модифицированным уравнениям Эйнштейна

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G(\square) T_{\mu\nu}, \quad (6.4)$$

в которых независимо от полевого содержания материального источника $T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}(x)$ его гравитационная сила определяется характером неоднородной зависимости от x . Ввиду этого, прежде чем перейти к нелокальным модификациям типа (6.3), (6.4), мы рассмотрим космологическое приложение модели Рандалл–Сундрума с переменной локальной гравитационной постоянной, а затем остановимся на модели Двали–Габададзе–Поррати [50], которая предлагает как механизм космологического ускорения, так и нелокальный механизм вышеуказанного типа.

¹⁶ Идея зависящей от масштаба гравитационной постоянной высказывалась также в [48], хотя и не была сформулирована в терминах нелокального оператора.

6.2. Бранная космология модели Рандалл–Сундрума

Для описания бранных космологических моделей существует изящный формализм эффективных четырехмерных уравнений движения, который очень четко изолирует часть динамических величин, сформулированных в терминах локальных полей на бране, от объектов, нелокально зависящих от полей в многомерном объеме [51]. Мы ограничимся случаем вакуумного объема, населенного только вкладом космологической постоянной.

Напомним, что для пятимерной бранной системы (4.1) четырехмерный лагранжиан материи и метрики на бране генерирует в пятимерных уравнениях Эйнштейна в качестве источника полный поверхностный тензор натяжений, включающий как само натяжение браны, так и вклад материи и возможных инвариантов внутренней кривизны, (4.3). Эти уравнения образуют краевую задачу

$$R_{AB} - \frac{1}{2} g_{AB} R^{(5)} = -\Lambda_5 G_{AB}, \quad (6.5)$$

$$K_{\mu\nu} - K g_{\mu\nu} = 4\pi G_5 S_{\mu\nu}, \quad (6.6)$$

где в условиях сшивания Израэля (4.2) уже учтена Z_2 -симметрия пятимерной метрики.

Если ограничить пятимерное уравнение Эйнштейна (6.5) на брану, то его компоненты будут содержать касательные и нормальные к бранной поверхности производные метрики до второго порядка включительно. В силу уравнений сшивки Израэля (6.6) нормальная производная первого порядка выражается через бранный же объект — тензор натяжений браны. Только нормальная производная второго порядка остается неопределенной и требует решения уравнений в объеме.

Оказывается, что этот вклад можно в явном виде выделить и изолировать от остальной части, которая будет сформулирована в замкнутых четырехмерных терминах. Это достигается путем проецирования уравнений (6.5) на поверхность браны и использования уравнений Гаусса–Кодazzi. Последние позволяют разложить проекции пятимерного тензора кривизны на сумму четырехмерного тензора кривизны и квадратичную комбинацию внешней кривизны $K_{\mu\nu}$ (и ковариантные производные $K_{\mu\nu}$).

Подстановка внешней кривизны в терминах тензора натяжений браны приводит в результате к уравнению

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \Lambda_5 + (8\pi G_5)^2 \Pi_{\mu\nu} - \mathcal{E}_{\mu\nu}, \quad (6.7)$$

в котором все кривизны Риччи построены по бранной метрике. Оно имеет вид обычного четырехмерного уравнения Эйнштейна с нетривиальным источником в правой части, содержащим космологический член, а также квадратичную комбинацию тензора натяжений $\Pi_{\mu\nu}$ и смешанную проекцию пятимерного тензора Вейля ${}^5C_{ACBD}$ (на брану и ее нормаль n^A):

$$\Pi_{\mu\nu} = -\frac{1}{4} S_{\mu\alpha} S_{\nu}^{\alpha} + \frac{1}{12} S S_{\mu\nu} + \frac{1}{8} \left(S_{z\beta}^2 - \frac{1}{3} S^2 \right) g_{\mu\nu}, \quad (6.8)$$

$$\mathcal{E}_{\mu\nu} = {}^5C_{A\mu B\nu} n^A n^B. \quad (6.9)$$

Именно вейлевский член и содержит нелокальную информацию об объеме, которую можно исчерпывающе найти только путем решения пятимерных уравне-

ний. Однако, как мы увидим, соображения симметрии могут существенно упростить его структуру и установить асимптотические режимы, в которых его вклад несуществен. К общим его свойствам следует отнести бесследовость, а также закон изменения

$$\mathcal{E}_{\mu}^{\mu} = 0, \quad (6.10)$$

$$\nabla^{\mu} \mathcal{E}_{\mu\nu} = (8\pi G_5)^2 \nabla^{\mu} \Pi_{\mu\nu}, \quad (6.11)$$

обусловленный поперечностью тензора Эйнштейна в (6.7). Поэтому, если правая часть (6.11) исчезает, бесследовый симметричный тензор $\mathcal{E}_{\mu\nu}$ играет роль сохраняющегося тензора энергии-импульса радиации. По этой причине его принято называть вкладом *темной* радиации.

Следствием уравнения Кодazzi $\nabla^{\nu} K_{\nu\mu} - \nabla_{\mu} K = {}^5R_{5\mu}$ при отсутствии потока энергии из браны в объем ($T_{5\mu} = 0$) в силу (6.6) выполняется также закон сохранения для полного тензора натяжений (4.3):

$$\nabla^{\mu} S_{\mu\nu} = 0, \quad (6.12)$$

что существенно связывает уравнения динамики бранной материи и динамики темной радиации.

Неприводимый (бесследовый) характер тензора темной радиации позволяет считать, что он не вносит вклада в космологический член эффективных уравнений (6.7). Заметим, что в него вносит вклад только половина пятимерной космологической постоянной, однако в модели с бранным натяжением (4.4) в правой части (6.7) он дополняется за счет σ до

$$-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \Lambda_5 + (8\pi G_5)^2 \Pi_{\mu\nu} = -\Lambda_4^{\text{eff}} g_{\mu\nu} + \dots, \quad (6.13)$$

$$\Lambda_4^{\text{eff}} = \frac{1}{2} \Lambda_5 + \frac{(8\pi G_5 \sigma)^2}{12}. \quad (6.14)$$

В частности, для натяжения $\sigma = 3/(4\pi G_5 l)$ в модели Рандалл–Сундрума с отрицательной космологической постоянной ($\Lambda_5 = -6/l^2$) ее эффективная четырехмерная космологическая постоянная равна нулю: $\Lambda_4^{\text{eff}} = 0$, что в отсутствие темной радиации гарантирует существование плоской браны в кусочно-гладком AdS-объеме.

Вклад вейлевского члена можно проанализировать в космологической задаче путем явного решения пятимерных уравнений Эйнштейна и условий сшивания Израэля. Для этого метрику в объеме возьмем в виде, отражающем однородность задачи по пространственным координатам браны и других времениподобных сечений $y = \text{const}$:

$$ds^2 = -N^2(t, y) dt^2 + a^2(t, y) \gamma_{ij} dx^i dx^j + b^2(t, y) dy^2. \quad (6.15)$$

Здесь $a(t, y)$ — масштабный фактор этих сечений с пространственной метрикой γ_{ij} постоянной положительной, отрицательной или нулевой кривизны ($k = \pm 1, 0$), $N(t, y)$ — функция хода, $b(t, y)$ — функция "хода" по пятой координате.

Будем считать, что брана расположена при $y = 0$ и описывает для этих значений параметра k соответственно пространственно замкнутую, открытую и плоскую фридмановскую Вселенную. Предполагая наличие материи на бране с тензором натяжений пространствен-

но-однородной идеальной жидкости:

$$T_v^\mu = \text{diag}(-\rho, p, p, p), \quad (6.16)$$

можно показать, что уравнения Эйнштейна в объеме имеют интеграл движения [52]

$$\frac{(a')^2}{a^2 b^2} - \frac{(\dot{a})^2}{a^2 N^2} - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda_5}{6} + \frac{C}{a^4} = 0, \quad (6.17)$$

где штрих означает дифференцирование по пятой координате ($a' \equiv \partial_y a$), а C — константа интегрирования. Существование интеграла (6.17) обусловлено отсутствием потока материи с браны в объем ($T_{S\mu} = 0$).

Одно из условий сшивания (6.6):

$$\left. \frac{a'}{ab} \right|_{y=0} = -\frac{4\pi G_5}{3} \rho, \quad (6.18)$$

позволяет найти a' на бране. Подстановка этого выражения в (6.17) приводит к уравнению на масштабный фактор космологической браны, содержащему только бранные величины. Оно имеет вид обобщенного уравнения Фридмана для постоянной Хаббла H бранной метрики:

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{\Lambda_4^{\text{eff}}}{3} + \frac{8\pi G_4^{\text{eff}}(\rho)}{3} \rho + \frac{C}{a^4}, \quad (6.19)$$

$$H \equiv \left. \frac{\dot{a}}{Na} \right|_{y=0}, \quad (6.20)$$

с эффективной космологической постоянной (6.14), локально зависящей от плотности гравитационной постоянной:

$$G_4^{\text{eff}}(\rho) = \frac{4\pi G_5^2 \sigma}{3} \left(1 + \frac{\rho}{2\sigma} \right), \quad (6.21)$$

и вкладом темной радиации. Плотность последней убывает обратно пропорционально четвертой степени масштабного фактора и, следовательно, не существенна на поздних стадиях расширения.

Сравнение с 00-компонентой уравнения (6.7) показывает, что темная радиация соответствует вейлевскому вкладу $\mathcal{E}_{00} = -3C/a^4$, в то время как величина $\Pi_{00} = (\rho + \sigma)^2/12$ вносит вклад в космологический член (6.19) и порождает материальный источник с переменной гравитационной постоянной. Можно показать, что темная радиация определяет отклонение геометрии в объеме от чисто (анти)деситтеровской. Фактически константа C играет роль шварцшильдовской массы в пятимерном статическом решении Шварцшильда-(анти)деситтера с движущейся сферической браной [53].

Таким образом, бранная космология с ненулевым натяжением браны реализует идею зависящей от масштаба гравитационной постоянной, которая при больших положительных плотностях материи может быть очень велика и убывает в процессе расширения. Действительно, в силу закона сохранения для тензора натяжений материи (6.16) — следствия (6.12):

$$\dot{\rho} + 3(\rho + p) \frac{\dot{a}}{a} = 0, \quad (6.22)$$

для широкого класса уравнений состояния плотность ρ убывает при космологическом расширении (например,

$\rho \sim 1/a^{3(1+w)}$ для $p = w\rho$, $w \geq -1$). Обобщенное уравнение Фридмана на поздних этапах переходит в уравнение стандартной модели с асимптотическим значением гравитационной константы: $G_4^{\text{eff}}(\rho) \rightarrow G_4^{\text{eff}}(0)$, и эффективной космологической постоянной.

Феноменология вышеуказанной модели и ее обобщения, включающие эффекты излучения браны в объем гравитонов, изучалась в ряде работ [54, 55] и представляют большой интерес. Однако с точки зрения проблемы космологической постоянной такая модель принадлежит скорее старому подходу к проблеме, поскольку фактически основана на тонкой подгонке пятимерной вакуумной энергии Λ_5 . Космологическое ускорение в этой модели основано на механизме, который со всеми его недостатками обсуждается в разделе 7. Данную модель следует трактовать как высокоэнергетическую модификацию эйнштейновской теории, по-видимому, неадекватную для описания современной ускоряющейся Вселенной. Поэтому мы рассмотрим другую модель, которая имеет больше шансов претендовать на роль инфракрасной модификации теории Эйнштейна — модель Двали – Габададзе – Поррати (DGP) [50].

6.3. Модель индуцированной на бране гравитации и космологическое ускорение

Действие DGP-модели не предполагает космологического члена ни в объеме, ни на бране, а вместо натяжения брана содержит четырехмерный эйнштейновский член с гравитационной постоянной G_4 , существенно отличной от пятимерной постоянной G_5 :

$$S_{\text{DGP}}[G_{AB}(X), \psi(x)] = \frac{1}{16\pi G_5} \int d^5 X G^{1/2} R^5(G_{AB}) + \\ + \int d^4 x g^{1/2} \left(\frac{[K]}{8\pi G_5} + \frac{R(g_{\mu\nu})}{16\pi G_4} + L_m(g_{\alpha\beta}, \psi, \partial\psi) \right). \quad (6.23)$$

Такой член может быть индуцирован на фундаментальном уровне квантовыми эффектами в объеме, поэтому DGP-модель и ее модификации также принято называть моделями индуцированной на бране гравитации.

Данная модель интересна тем, что предлагает простой механизм космологического ускорения. Качественно он выглядит следующим образом. Натяжение DGP-браны содержит тензор Эйнштейна:

$$S_{\mu\nu} = -\frac{1}{8\pi G_4} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) + T_{\mu\nu}. \quad (6.24)$$

Поэтому в отсутствие материи на бране ($T_{\mu\nu} = 0$) эффективное уравнение динамики (6.7) становится квадратичным по тензору Эйнштейна и, в предположении малости вейлевского вклада, допускает "самоускоряющееся" решение.

Действительно, используя деситтеровский анзац для метрики с эффективной постоянной Хаббла H :

$$R_{\mu\nu} = 3H^2 g_{\mu\nu},$$

имеем

$$\Pi_{\mu\nu} = -3 \left(\frac{H^2}{16\pi G_4} \right)^2 g_{\mu\nu}.$$

Для $\mathcal{E}_{\mu\nu} \ll (G_5/G_4)^2 H^4 g_{\mu\nu}$ уравнение принимает вид

$$H^2 - L^2 H^4 = 0,$$

т.е. порождает деситтеровскую стадию с постоянной Хаббла в масштабе DGP-модели $H = L^{-1}$:

$$L = \frac{G_5}{2G_4} = \frac{M_P^2}{2M_5^3} \equiv \frac{1}{m}. \quad (6.25)$$

Отождествление DGP-масштаба с современным размечом горизонта Вселенной $L \sim 10^{28}$ см позволяет интерпретировать эту фазу эволюции как космологическое ускорение.

Такой вывод можно обосновать, снова используя космологический анзац для метрики (6.15) и интеграл движения (6.17). В присутствии индуцированного эйнштейновского члена условие сшивания на бране модифицируется четырехмерной кривизной:

$$\left. \frac{a'}{ab} \right|_{y=0} = -\frac{8\pi G_5}{3} \rho + 2L \left(H^2 + \frac{k}{a^2} \right). \quad (6.26)$$

Его подстановка в (6.17) приводит к новому обобщенному уравнению Фридмана [56]:

$$\epsilon m \sqrt{H^2 + \frac{k}{a^2} - \frac{C}{a^4}} = H^2 + \frac{k}{a^2} - \frac{8\pi G_4}{3} \rho, \quad (6.27)$$

где $\epsilon = \pm 1$ есть знаковый фактор: $\epsilon = \text{sign } a'$.

Для поздних этапов космологического расширения ($a \rightarrow \infty$) вклад темной радиации стремится к нулю: $C/a^4 \rightarrow 0$, поэтому уравнение существенно упрощается:

$$\sqrt{H^2 + \frac{k}{a^2}} = \frac{\epsilon m}{2} + \sqrt{\frac{8\pi G_4}{3} \rho + \frac{m^2}{4}}. \quad (6.28)$$

Оно показывает, что эволюция в DGP-модели начинается при больших плотностях материи ($\rho \gg m^2/G_4 = (M_P m)^2$) с фазы стандартной четырехмерной фридмановской модели:

$$H^2 + \frac{k}{a^2} \simeq \frac{8\pi G_4}{3} \rho. \quad (6.29)$$

Если плотность материи падает много ниже DGP-масштаба:

$$\rho \sim (M_P m)^2, \quad (6.30)$$

эволюция критически зависит от начальных условий — знака нормальной производной масштабного фактора

$$\epsilon = \text{sign} \left(H^2 + \frac{k}{a^2} - \frac{8\pi G_4 \rho}{3} \right)$$

(см. условие сшивания (6.26)). Для отрицательного знака бранная Вселенная вступает в так называемую *пятимерную* фазу динамики с постоянной Хаббла, стремящейся к нулю по закону

$$\begin{aligned} H^2 + \frac{k}{a^2} &\simeq \left(\frac{4\pi G_5}{3} \rho \right)^2 \rightarrow 0, \\ H^2 + \frac{k}{a^2} &< \frac{8\pi G_4}{3} \rho. \end{aligned} \quad (6.31)$$

И наконец, для положительного знака Вселенная вступает на поздних временах в стадию космологического ускорения с асимптотическим значением постоянной

Хаббла в DGP-масштабе [56, 57]:

$$H^2 + \frac{k}{a^2} \simeq m^2 + \frac{16\pi G_4}{3} \rho \rightarrow m^2. \quad (6.32)$$

На фоне этого ускорения разреженная материя гравитирует с ньютоновской постоянной, вдвое большей фундаментальной константы G_4 .

7. Инфракрасные модификации эйнштейновской теории

DGP-модель представляет собой инфракрасную модификацию теории Эйнштейна, характеризуемую двумя энергетическими масштабами — планковским $M_P \sim \sim 10^{19}$ ГэВ и космологическим $m \sim 10^{-33}$ эВ. Переход между ними в космологической эволюции осуществляется в промежуточной субмиллиметровой области (6.30):

$$(m M_P)^{1/2} \sim 10^{-3} \text{ эВ} \sim (10^{-2} \text{ см})^{-1}.$$

Поэтому, казалось бы, DGP-модель не противоречит современным настольным экспериментам кавендишевского типа. К сожалению, для данной модели ситуация оказывается более сложной и менее благоприятной, поскольку в ней присутствует достаточно низкий масштаб сильной связи, при котором нелинейные поправки к эйнштейновской теории могут противоречить гравитационному эксперименту на гораздо больших расстояниях [58, 59]. По-видимому, проблема сильной связи не проявляет себя в космологическом контексте в силу локальности соответствующих нелинейных уравнений, однако для пространственно-неоднородных процессов она возникает в полном объеме.

Для анализа проблемы нужно выйти за рамки космологического анзаца для метрики и материи и перейти к рассмотрению полей общего вида. В силу нелинейности это, естественно, невозможно в рамках точной теории, однако может быть проделано в рамках теории возмущений на плоском фоне: в отличие от модели Рандалл–Сундума плоское фоновое решение в DGP-модели вполне допустимо. Как оказывается, в таком подходе DGP-модель демонстрирует механизм нелокальной гравитационной "постоянной" типа (6.3), (6.4). Итак, сначала мы остановимся на реализации этого механизма в общем виде, а затем продемонстрируем его на примере DGP-модели.

Идея замены гравитационной постоянной на нелокальный оператор $G_P \rightarrow G(\square)$ — функцию ковариантного даламбертиана $\square = g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta$ состоит, согласно [47], в модификации левой части уравнений Эйнштейна:

$$\frac{M^2(\square)}{16\pi} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) = \frac{1}{2} T_{\mu\nu}, \quad (7.1)$$

где нелокальная планковская масса является функцией безразмерной комбинации даламбертиана \square и дополнительного масштаба длины L , интерполирующей между планковской постоянной для материальных источников малого размера (значительно меньших L) и дальнодействующей постоянной $G_{LD} = G(0)$:

$$\frac{1}{G(\square)} \equiv M^2(\square) = M_P^2 (1 + \mathcal{F}(L^2 \square)). \quad (7.2)$$

Если функция аргумента $z = L^2 \square$ удовлетворяет условиям $\mathcal{F}(z) \rightarrow 0$ при $z \gg 1$ и $\mathcal{F}(z) \rightarrow \mathcal{F}(0) \gg 1$ при $z \rightarrow 0$, то инфракрасные модификации являются несущественными для процессов, изменяющихся в пространстве-времени быстрее, чем $1/L$, и, наоборот, большими для более медленных явлений с длинами волн порядка L и выше.

Очевидная проблема с конструкцией такого типа состоит в том, что для любого нетривиального оператора $\mathcal{F}(L^2 \square)$ левая часть (7.1) не удовлетворяет тождествам Бианки и не может быть получена варьированием ковариантного действия. В частности, наивная попытка модифицировать гравитационное действие согласно

$$M_P^2 \int dx g^{1/2} R \rightarrow \int dx g^{1/2} M^2(\square) R = M^2(0) \int dx g^{1/2} R \quad (7.3)$$

бессмысленна, поскольку в результате интегрирования по частям действие ковариантного далаamberтиана (налево) выбирает его нулевую моду и нелокальный оператор во всех режимах сводится к его инфракрасному значению $M_P^2(0)$.

Проблему нековариантности можно преодолеть, используя приближения слабого поля, подразумевающего, что уравнение (7.1) представляет собой только первый линейный член теории возмущений по кривизне. Его левая часть должна включать высшие порядки по кривизнам, а нелокальное гравитационное действие $S_{NL}[g_{\mu\nu}]$ должно генерировать модифицированные уравнения согласно

$$\frac{\delta S_{NL}[g]}{\delta g_{\mu\nu}(x)} = \frac{M^2(\square)}{16\pi} g^{1/2} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) + O[R_{\mu\nu}^2]. \quad (7.4)$$

Чтобы получить ведущий член $S_{NL}[g_{\mu\nu}]$, уравнение (7.4) можно функционально проинтегрировать в явном виде [60], используя ковариантную технику разложения по кривизне [61]. Суть этой техники заключается в возможности конвертировать нековариантное разложение по степеням гравитационных возмущений $h_{\mu\nu}$ в ряд по пространственно-временной кривизне и ее производным с ковариантными нелокальными коэффициентами.

Отправной точкой является разложение тензора Риччи

$$R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \square h_{\mu\nu} + \frac{1}{2} (\nabla_\mu F_\nu + \nabla_\nu F_\mu) + O[h_{\mu\nu}^2], \quad (7.5)$$

где

$$F_\mu \equiv \nabla^\lambda h_{\mu\lambda} - \frac{1}{2} \nabla_\mu h$$

представляет собой линеаризованную калибровку де Дондера–Фока. Разложение (7.5) можно итерациями решить относительно $h_{\mu\nu}$ в виде нелокального разложения по кривизне, начинающегося с

$$h_{\mu\nu} = -\frac{2}{\square} R_{\mu\nu} + \nabla_\mu f_\nu + \nabla_\nu f_\mu + O[R_{\mu\nu}^2]. \quad (7.6)$$

Здесь $\nabla_\mu f_\nu + \nabla_\nu f_\mu$ отражает калибровочный произвол в решении, происходящий из членов с гармонической калибровкой в (7.5).

Результатом функционального интегрирования уравнения (7.4) является нелокальное действие [60], начинаю-

щееся с квадрата по кривизне:

$$S_{NL}[g_{\mu\nu}] = -\frac{1}{16\pi} \int dx g^{1/2} \left\{ \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) \frac{M^2(\square)}{\square} R_{\mu\nu} + O[R_{\mu\nu}^3] \right\}. \quad (7.7)$$

Интересно, что в простейшем случае $M^2(\square) = M_P^2 = \text{const}$ действие (7.7) должно воспроизводить действие Эйнштейна–Гильберта, что выглядит с первого взгляда противоречивым, поскольку оно вообще не содержит линейного по кривизне члена.

Объяснение кажущегося парадокса заключается в том, что эйнштейновское действие в асимптотически плоском пространстве с асимптотикой метрики

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad h_{\mu\nu} = O\left(\frac{1}{|x|^2}\right), \quad |x| \rightarrow \infty,$$

включает поверхностный интеграл Гиббонса–Хокинга по пространственно-временной бесконечности:

$$S_E[g_{\mu\nu}] = -\frac{M_P^2}{16\pi} \int dx g^{1/2} R(g) + \frac{M_P^2}{16\pi} \int_{|x| \rightarrow \infty} d\sigma^\mu (\partial^\nu h_{\mu\nu} - \partial_\mu h). \quad (7.8)$$

Поверхностный интеграл можно преобразовать к виду объемного интеграла от линейной по $h_{\mu\nu}$ части скалярной кривизны $\partial^\mu (\partial^\nu h_{\mu\nu} - \partial_\mu h)$ и с использованием (7.6) ковариантно разложить по степеням кривизны. С точностью до квадратичных членов такое разложение имеет вид [60]

$$\begin{aligned} & \int_{|x| \rightarrow \infty} d\sigma^\mu (\partial^\nu h_{\mu\nu} - \partial_\mu h) = \\ & = \int dx g^{1/2} \left\{ R - \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) \frac{1}{\square} R_{\mu\nu} + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (7.9)$$

При подстановке в (7.8) линейные по скаляру Риччи члены сокращаются, а квадратичные члены воспроизводят выражение (7.7) с численным коэффициентом $M^2(\square) = M_P^2$, который может быть вынесен за знак интеграла. Результатом является *нелокальная форма локального* эйнштейновского действия [33, 20, 60]. То, что его разложение начинается с квадрата по кривизне, соответствует теории безмассового поля спина 2. Менее тривиальна нелокальность выражения (7.7), которая является платой за явную ковариантность этого разложения в отличие от локального по $h_{\mu\nu}$, но явно нековариантного действия для симметричного тензорного поля спина 2.

Возникает вопрос: насколько общей является инфракрасная модификация (7.7)? Очевидно, что в общем случае операторные коэффициенты при квадратах тензора и скаляра Риччи могут быть разными, так что искомое обобщение принимает вид

$$S_{NL}[g_{\mu\nu}] = -\frac{1}{16\pi} \int dx g^{1/2} \times \\ \times \left\{ R^{\mu\nu} \frac{M_1^2(\square)}{\square} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R \frac{M_2^2(\square)}{\square} R + O[R_{\mu\nu}^3] \right\}, \quad (7.10)$$

где две нелокальные планковские "массы" стремятся к единому пределу M_P только в области больших энергий ($\square \gg 1/L$). Но это еще не все: в инфракрасном пределе теории, помимо поляризаций поля спина 2, могут существовать дополнительные степени свободы, которые не учтены в этом выражении. Однако при естественном предположении, что дополнительные степени свободы не взаимодействуют напрямую с полями материи, по ним можно проинтегрировать. Результат сводится просто к дополнительным вкладам в $M_1^2(\square)$ и $M_2^2(\square)$ (как это происходит с полем радиона в разделе 5.2; см. сноска после уравнения (5.24)). Редукция возможна практически всегда, за исключением случая, когда из уравнений движения для дополнительных полей последние нельзя выразить в терминах метрики, т.е. когда дополнительные поля входят в действие линейно и играют роль лагранжевых множителей при некоторых комбинациях метрических степеней свободы. Как мы сейчас увидим, это происходит в такой инфракрасной модификации теории Эйнштейна, как теория Паули–Фирца, и в бранной DGP-модели.

7.1. Модель Паули–Фирца и проблема Ван Дама–Вельтмана–Захарова

Простейшей инфракрасной модификацией эйнштейновской теории является модель Паули–Фирца свободного массивного тензорного поля. Она описывается квадратичной частью действия Эйнштейна (7.8), модифицированного нековариантным массовым членом на фоне плоского пространства:

$$S_{\text{mass}}[g_{\mu\nu}] = -\frac{M_P^2}{16\pi} \int d^4x \left(\frac{m^2}{4} h_{\mu\nu}^2 - \frac{m^2}{4} h^2 \right), \quad (7.11)$$

$$h_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}, \quad h \equiv \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}. \quad (7.12)$$

Это единственная комбинация массовых членов, которая гарантирует отсутствие духов в теории.

В присутствии сохраняющихся материальных источников линейные уравнения движения модели Паули–Фирца имеют вид

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} R + \frac{m^2}{2} (h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} h) = 8\pi G_4 T_{\mu\nu}, \quad (7.13)$$

где под $R_{\mu\nu}$ мы понимаем линейную по полю гравитона часть тензора Риччи. Дифференцируя это уравнение и учитывая линеаризованное тождество Бианки и консервативность $T_{\mu\nu}$, получаем "калибровку" для $h_{\mu\nu}$:

$$\partial^\mu (h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} h) = 0, \quad (7.14)$$

следствием которой является исчезновение линеаризованного скаляра Риччи:

$$R = \partial^\mu \partial^\nu h_{\mu\nu} - \square h = 0. \quad (7.15)$$

(Заметим, что уравнение (7.15) выполняется даже при неисчезающем следе тензора натяжений материи.)

В результате гравитационное поле, порождаемое материальным источником, принимает вид

$$h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G_4}{\square - m^2} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \eta_{\mu\nu} T \right) + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu \quad (7.16)$$

с точностью до продольных членов, не вносящих вклад во взаимодействие с сохраняющимися источниками¹⁷.

Существенно то, что тензорная природа пропагатора массивного гравитона в (7.16) отличается от случая общей теории относительности Эйнштейна: след $T_{\mu\nu}$ в общей теории относительности входит с коэффициентом $1/2$ в отличие от $1/3$ в модели Паули–Фирца. Это расхождение остается также в пределе исчезающей массы и составляет природу так называемой проблемы Ван Дама–Вельтмана–Захарова [62]: безмассовый предел модели Паули–Фирца не соответствует эйнштейновской теории безмассового гравитона. Такая ситуация является феноменологически неприемлемой, потому что при сколь угодно малой массе гравитона она приводит к неправильному искривлению лучей света в поле Солнца и неправильному смещению перигелия Меркурия.

Причина проблемы кроется в дополнительной продольной степени свободы, которая отсутствует в теории Эйнштейна и, наоборот, присутствует в модели Паули–Фирца при любых значениях массы гравитона. С точки зрения общей схемы инфракрасных модификаций теории гравитации эта степень свободы должна входить в (7.10) в виде лагранжева множителя, который отвечает за дополнительное уравнение (7.15). Без ее учета эффективные уравнения, следующие из действия (7.10), не воспроизведут тензорную структуру (7.16) ни при каком выборе операторов $M_1^2(\square)$ и $M_2^2(\square)$.

Действительно, легко видеть, что действие (7.10) приводит к линейному гравитационному потенциалу вида

$$h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi}{M_1^2(\square)\square} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \alpha(\square) \eta_{\mu\nu} T \right) + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu, \quad (7.17)$$

где операторный коэффициент

$$\alpha(\square) = \frac{2M_2^2(\square) - M_1^2(\square)}{3M_2^2(\square) - 2M_1^2(\square)} \quad (7.18)$$

принимает численное значение Паули–Фирца $\alpha_{\text{PF}} = 2/3$ только в сингулярном пределе $M_1^2(\square) \rightarrow 0$. Включение же в (7.10) связи (7.15) с лагранжевым множителем, как нетрудно проверить, исправляет положение и приводит к правильному запаздывающему потенциалу (7.16) для выбора нелокальных операторов

$$M_1^2(\square) = M_1^2(\square) = \frac{1}{G_4} \frac{\square - m^2}{\square}. \quad (7.19)$$

7.2. Модель Двали–Габададзе–Поррати и проблема сильной связи

В DGP-модели ситуация аналогична модели Паули–Фирца с более инфракрасно-мягким массовым членом ($m^2 \rightarrow m\sqrt{-\square}$), в котором роль m играет масштаб (6.25). Чтобы это показать, построим эффективное бранное

¹⁷ Поскольку теория Паули–Фирца не является калибровочно-инвариантной, продольная часть фиксирована и определяется вектором

$$\xi_\mu = -\frac{8\pi G_4}{3m^2} \frac{1}{\square - m^2} \partial_\mu T.$$

действие, которое получается из (6.23) интегрированием по полям в объеме. Для этого, так же как это делалось в разделе 5, разложим исходное действие по гравитационным возмущениям:

$$G_{AB}(X) = \eta_{AB} + H_{AB}(X), \quad (7.20)$$

решим линейные уравнения для $H_{AB}(X)$ в объеме с фиксированными краевыми условиями на бране и подставим результат в квадратичное по полям действие. При этом будем использовать координатную систему, в которой положение браны фиксировано постоянным значением пятой координаты $X^5 \equiv y = 0$.

Для фиксации координатной калибровки в объеме к действию (6.23) добавим нарушающий калибровочную инвариантность член, квадратичный по линеаризованным калибровочным условиям Де Дондера–Фока:

$$S_{\text{gauge}}[H_{AB}] = -\frac{M_5^3}{16\pi} \frac{1}{2} \int d^5 X \eta^{AB} F_A F_B, \quad (7.21)$$

$$F_A = \partial^B H_{AB} - \frac{1}{2} \partial_A H. \quad (7.22)$$

В этой калибровке уравнения движения в объеме приобретают наиболее простой вид и образуют краевую задачу

$$\square_5 H_{AB}(X) = 0, \quad (7.23)$$

$$H_{AB}(x, y) \Big|_{y=0} = h_{AB}(x), \quad (7.24)$$

$$h_{AB}(x) \equiv (h_{\mu\nu}(x), N_\mu(x), h_{55}(x)).$$

В отличие от модели Рандалл–Сундрума с искривленным фоном решение задачи (7.23), (7.24) проще, поскольку на плоском фоне $\square_5 = \square + \partial_y^2$. Это решение, несингулярное на бесконечности пятимерного объема, можно записать в элегантном простом виде:

$$H_{AB}(x, y) = \exp(-y\Delta) h_{AB}(x), \quad (7.25)$$

в терминах вспомогательного оператора

$$\Delta = \sqrt{-\square}. \quad (7.26)$$

(Случай лоренцева пространства-времени мы трактуем как аналитическое продолжение из евклидовой теории поля, в которой оператор \square отрицательно определен, так что $H_{AB}(x, y)$ исчезает при $y \rightarrow \infty$.)

Подставляя полученное решение в пятимерную часть DGP-действия в (6.23) (с пятимерной кривизной и поверхностным интегралом Гиббона–Хокинга) и учитывая калибровочный член (7.21), получаем [58]

$$S_5[G_{AB}] + S_{\text{gauge}}[H_{AB}] = \frac{M_4^2}{16\pi} \frac{m}{4} \int d^4 x \times$$

$$\times \left(-\tilde{h}^{\mu\nu} \Delta \tilde{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \tilde{h} \Delta \tilde{h} + \tilde{h} \Delta h_{55} - \frac{1}{2} h_{55} \Delta h_{55} \right), \quad (7.27)$$

где $m = 2M_5^3/M_4^2$ представляет собой DGP-масштаб (6.25), а $\tilde{h}_{\mu\nu}$ — комбинация возмущения метрики, индуцированной на бране, и функций сдвига в пятом измерении $G_{5\mu} = N_\mu$:

$$\tilde{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \frac{1}{\Delta} (\partial_\mu N_\nu + \partial_\nu N_\mu). \quad (7.28)$$

Заметим, что комбинация (7.28) является калибровочным инвариантом относительно четырехмерных преобразований

$$\delta_\xi h_{\mu\nu} = \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu, \quad \delta_\xi N_\mu = -\Delta \xi_\mu, \quad \delta_\xi h_{55} = 0, \quad (7.29)$$

которые в свою очередь являются ограничением на брану остаточных калибровочных преобразований

$$\delta_\Xi H_{AB} = \partial_A \Xi_B + \partial_B \Xi_A$$

с векторным полем

$$\Xi^\mu(x, y) = \exp(-y\Delta) \xi^\mu(x), \quad \Xi^5(x, y) = 0, \quad (7.30)$$

оставляющих инвариантной калибровку Де Дондера (7.22) и не сдвигающих брану с $y = 0$.

Таким образом, как и следовало ожидать, эффективное действие (7.27), индуцируемое из объема, оказывается инвариантом четырехмерных преобразований, однако эта инвариантность фактически реализована с использованием штюкельберговских полей N_μ , обычно вводимых руками для ковариантизации калибровочно-неинвариантного действия. Как показано выше, варьируя (7.27) по N_μ , эти поля можно исключить в терминах метрических переменных и подставить в действие.

В результате мы придем к

$$N_\mu = \frac{1}{\Delta} \left(\partial^y h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_\mu h - \frac{1}{2} \partial_\mu h_{55} \right) \quad (7.31)$$

и явно инвариантному выражению для $\tilde{h}_{\mu\nu}$ в терминах линеаризованного тензора Риччи:

$$\tilde{h}_{\mu\nu} = -2 \frac{1}{\square} R_{\mu\nu} + \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square} h_{55}. \quad (7.32)$$

Их подстановка приводит к

$$S_5 + S_{\text{gauge}} = \frac{M_4^2}{16\pi} m \int d^4 x \times$$

$$\times \left(-R^{\mu\nu} \frac{\Delta}{\square^2} R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} R \frac{\Delta}{\square^2} R - R \frac{\Delta}{\square} h_{55} \right), \quad (7.33)$$

где переменную h_{55} уже нельзя исключить в терминах метрики (ситуация обсуждалась выше).

Складывая (7.33) с четырехмерной частью DGP-действия, переписанного в нелокальном виде (7.7), окончательно получаем квадратичную часть эффективного действия на бране:

$$S_{\text{DGP}}^{\text{eff}}[g_{\mu\nu}] = -\frac{M_4^2}{16\pi} \int dx g^{1/2} \times$$

$$\times \left\{ \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) \frac{\square - m\Delta}{\square^2} R_{\mu\nu} + m\pi R \right\}, \quad (7.34)$$

где лагранжиев множитель к скалярной кривизне Π связан с h_{55} компонентой пятимерной метрики согласно

$$h_{55} = -2\Delta\Pi. \quad (7.35)$$

Переменная Π была введена в [58] как продольная часть функции пятимерного сдвига: $N_\mu = \partial_\mu \Pi + N'_\mu$. Она

параметризует изгиб браны как пятимерный диффеоморфизм с векторным полем

$$\Xi^A(x, y) = \delta_5^A \exp(-y\Delta) \Pi(x), \quad \delta_\Xi H_{55} = 2 \partial_y \Xi_5,$$

который не нарушает калибровки Де Дондера в объеме, но сдвигает брану на $\Xi(x, 0) = \Pi(x)$ и поэтому не является симметрией действия. Локально в объеме диффеоморфизм не оказывается, и весь его эффект сводится к вкладу на бране, который в теории возмущений начинается с локального члена mPR .

Итак, DGP-модель на бране эффективно описывается в линейном приближении моделью Паули–Фирца с нелокальным массовым членом (7.33), генерируемым из объема. Фактически выражение (7.33) является ковариантным пополнением паули–Фирцевского массового члена (7.11) с нелокальной массой¹⁸ $\sqrt{m\Delta}$. Гравитационный потенциал от материального источника в этой модели имеет вид, аналогичный (7.17):

$$h_{\mu\nu} = -16\pi G_4 \frac{1}{\square - m\Delta} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \eta_{\mu\nu} T \right) + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu. \quad (7.36)$$

Дальнодействие материи на бране в (7.36) определяется пропагатором, который в области малых интервалов ($|x| \ll L = 1/m$, $|\square| \gg m^2$) совпадает с четырехмерным. Наоборот, в области ультрабольших расстояний дальнодействие становится пятимерным:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\square - m\Delta} \delta(x) &\simeq \\ &\simeq -\frac{1}{(2\pi)^4 m} \int d^4 p \frac{\exp(ipx)}{\sqrt{p^2}} = -\frac{2}{m} \frac{1}{(2\pi)^5} \int d^5 p \frac{\exp(ipx)}{p^2 + p_5^2} = \\ &= \frac{2}{m} \frac{1}{\square_5} \delta^{(5)}(X) \Big|_{y=0}, \quad |x| \gg \frac{1}{m}. \end{aligned} \quad (7.37)$$

Это явление принято интерпретировать как гравитационная утечка в объем: четырехмерный гравитон является метастабильным и распадается с периодом полураспада порядка $L = 1/m$.

В отличие от модели Рандалл–Сундрума локализация четырехмерного гравитона на бране не является абсолютной, как и в первой бранной модели Грегори–Рубакова–Сибирякова (GRS) [65], в которой закон тяготения и распространения гравитационных волн на бране является четырехмерным общерелятивистским только на промежуточных расстояниях, а на ультрабольших расстояниях сменяется пятимерным законом. Однако GRS-модель страдает от духовых состояний с отрицательной энергией [66–68], в то время как DGP-модель от духов свободна (аналогично теории Паули–Фирца). Другое свойство гравитационного потенциала (7.36) — его тензорная зависимость от $T_{\mu\nu}$: она не совпадает с общерелятивистской и соответствует теории Паули–Фирца во всех масштабах расстояний. Заметим, что кинематически переменная погружения браны в объем Π здесь аналогична моде радиона, обсуждав-

шейся в разделе 4 в контексте модели Рандалл–Сундрума и обеспечивавшей там восстановление правильного тензорного закона (4.42), (4.43). Однако в DGP-модели мода радиона с такой задачей не справляется, и теория страдает от проблемы Ван Дама–Вельтмана–Захарова [62].

Как оказывается, проблема Ван Дама–Вельтмана–Захарова напрямую связана с другой трудностью DGP-модели — с наличием в ней достаточно низкого энергетического масштаба сильной связи. Как мы видели, с точки зрения космологической эволюции переход между эйнштейновской фазой гравитации и ее инфракрасным режимом в DGP-модели происходит в субмиллиметровой области (6.30):

$$\Lambda_{\text{cross}} = \sqrt{mM_P}, \quad (7.38)$$

или на масштабе длин $\Lambda_{\text{cross}}^{-1} \sim 10^{-2}$ см.

Однако в теории возмущений, которую мы вынуждены использовать для описания нелокальных процессов, становится важным анализ величин высших порядков и их вклада в квантовые эффекты. Мода бранных вибраций Π порождает в этих порядках составные операторы, построенные из степеней Π , N_μ , $h_{\mu\nu}$ и их производных, подавленных обратными степенями M_P и m [69]. Их вклад становится большим при масштабе сильной связи [58]

$$\Lambda_{\text{strong}} = (m^2 M_P)^{1/3} \sim (10^3 \text{ км})^{-1}, \quad (7.39)$$

который много ниже субмиллиметрового масштаба: $\Lambda_{\text{strong}} \ll \Lambda_{\text{cross}}$. Причиной этого является то, что кинетический член вибрационной моды Π в (7.34) вида $M_P^2 m (\Pi R) \sim M_P^2 m (\partial\Pi \partial h)$, происходит исключительно из ее смешивания с метрическим полем и является малым в силу малости m .

В результате при диагонализации полного кинетического члена, Π -мода зарабатывает кинетический член вида $M_P^2 m^2 (\partial\Pi)^2$, и переход к канонически нормированной переменной $\hat{\Pi}$: $\Pi = \hat{\Pi}/(mM_P)$, порождает при разложении по степеням Π отрицательные степени малой величины m все более и более высокого порядка. Следовательно, составные операторы высоких размерностей оказываются подавленными факторами вида $1/M_P^p m^q$, т.е. становятся существенными при энергетическом масштабе $\Lambda_{p,q} = (M_P^p m^q)^{1/(p+q)}$. Как показывает анализ [58], в результате наиболее низкий масштаб возникает при кубическом по Π члене, и этот масштаб задается выражением (7.39). Аналогичная ситуация существует в случае нелинейной модели Паули–Фирца (с полным эйнштейновским членом в безмассовой части действия): масштаб сильной связи в ней оказывается равным $(m^4 M_P)^{1/5}$ [69]¹⁹.

Таким образом, в DGP-модели возникает иерархия масштабов длин, соответствующих масштабу горизонта, масштабу сильной связи, масштабу перехода теории к инфракрасной фазе и, наконец, планковскому

¹⁸ Ковариантные структуры такого типа, как реализация нелокальной космологической "постоянной", в контексте теории перенормировок обсуждались также в [63, 64].

¹⁹ На классическом уровне проблема сильной связи и проблема Ван Дама–Вельтмана–Захарова в нелинейной модели Паули–Фирца, по-видимому, могут преодолеваться путем учета нелинейных членов [70], однако на квантовом уровне в теории остается масштаб сильной связи [71], который путем включения операторов высших порядков можно поднять максимум до $(m^2 M_P)^{1/3}$ [69].

масштабу квантовой гравитации

$$L \gg L_{\text{strong}} \gg L_{\text{cross}} \gg L_P. \quad (7.40)$$

Мода бранных вибраций начинает сильно взаимодействовать на расстояниях ниже $L_{\text{strong}} \sim 1000$ км и нарушает согласие с данными кавендишевских экспериментов и данными небесной механики.

В целом вся эйнштейновская теория, фаза которой в космологии наступает при масштабе L_{cross} , в такой иерархии выпадает из области применимости теории возмущений с длинами волн, превышающими L_{strong} . Фактически квантовые эффекты вибрационной моды становятся сильными на этом масштабе, и DGP-модель в инфракрасной области становится чувствительной к ее ультрафиолетовому поведению, что подрывает ее предсказательную силу вне рамок фундаментальной теории.

8. Заключение: проблемы и перспективы

Физика дополнительных измерений и бранная космология предлагают много новых интересных механизмов для решения проблемы иерархий, проблемы космологической постоянной и проблемы космологического ускорения. Это направление исследований открывает полуфеноменологический путь к созданию единой теории поля, по-видимому, прокладываемый с фундаментальной стороны в рамках теории струн. Как видно, оба подхода уже приходят в соприкосновение в лице механизма AdS/CFT-соответствия, объясняющего локализацию безмассового гравитона на бране и восстановление в бранном мире эйнштейновской теории гравитации.

Модель Рандалл–Сундрума, модели индуцированной на бране гравитации и другие модели инфракрасных модификаций эйнштейновской теории все еще остаются очень наивными для непротиворечивого объяснения основных фундаментальных проблем в ранней и поздней Вселенной, однако их комбинации уже могут претендовать на более реалистическое описание последней. Например, проблема восстановления фазы эйнштейновской теории в DGP-модели (с правильной четырехмерной тензорной структурой пропагатора в (7.36)) может быть разрешена путем ее синтеза с моделью Рандалл–Сундрума.

Если наряду с эйнштейновским членом брана имеет натяжение, а объем наделен отрицательной космологической постоянной, согласованной с натяжением соотношением (4.7), то в области справедливости линейного анализа ($\square \ll \Lambda_{\text{strong}}^2$) гравитационный потенциал реализуется в виде (7.17) с операторными функциями [72]

$$M_1^2(\square) = M_4^2 \left[1 + \frac{m K_1(l\Delta)}{\Delta K_2(l\Delta)} \right], \quad (8.1)$$

$$\alpha(\square) = \frac{2}{2 + lm} + \frac{2}{3} \frac{lm}{2 + lm} \left[1 + \frac{K_1(l\Delta)}{l\Delta K_2(l\Delta)} \right], \quad (8.2)$$

в терминах функций МакДональда первого и второго порядков $K_{1,2}(x)$ и радиуса кривизны l фонового AdS-объема. В области расстояний $1/m \gg 1/\Delta \gg l$ гравитационный потенциал описывает четырехмерный общерелятивистский закон тяготения с $\alpha(\square) \simeq 1$ и эффективной планковской массой [72]

$$M_P^2 = M_4^2 \left(1 + \frac{l}{2L} \right) \simeq M_4^2. \quad (8.3)$$

Таким образом, при иерархии масштабов горизонта и радиуса кривизны объема $1/m = L \gg l$ в такой модели существует фаза эйнштейновской гравитации, не страдающая от проблемы Ван Дама–Вельтмана–Захарова. Фактически это обобщение хорошо известного результата, что такая проблема отсутствует для свободного массивного поля спина 2 на фоне (A)dS-пространства [73, 74] с космологической постоянной Λ в пределе $m^2/\Lambda \rightarrow 0$. Однако, к сожалению, синтез модели Двали–Габададзе–Поррати и модели Рандалл–Сундрума не решает проблемы низкого масштаба сильной связи и наличия духовых нестабильностей, как было показано в широком классе моделей с нефакторизуемой геометрией в объеме и индуцированным эйнштейновским членом на одной из бран [68]. В частности, самоускоряющаяся ветвь космологического решения в DGP-модели (6.32) неустойчива относительно возмущений вибрационной моды P , которая является духовой на фоне (квази)деситтеровского решения [58, 75].

Другое возможное обобщение состоит в увеличении числа дополнительных измерений в DGP-модели (коразмерности браны в объеме) с 1 до $N = D - 4 \geq 2$, что, в частности, диктуется уже простейшей ADD-моделью (3.9) и может быть реализовано в теории струн [76, 77]. Это обобщение интересно тем, что оно, по-видимому, содержит интересный качественный механизм решения проблемы космологической постоянной [78]. Если вакуумная энергия на бране становится больше масштаба гравитации в объеме: $\mathcal{E} \gg M_D^4$ (где $G_D = (M_D)^{2-N}$ — D -мерная гравитационная постоянная), то она порождает инфляцию бранного мира с постоянной Хаббла, убывающей с ростом \mathcal{E} при $N > 2$:

$$H^2 \sim M_D^2 \left(\frac{M_D^4}{\mathcal{E}} \right)^{1/(N-2)}. \quad (8.4)$$

(Интересно, что эта формула интерполирует между обычным четырехмерным законом фридмановской эволюции $H^2 \sim \mathcal{E}$ при $N = 0$, законом эволюции $H \sim \mathcal{E}$ в пятимерной DGP-модели для $N = 1$ и перевернутой зависимостью для $N > 2$.)

В DGP-модели масштаб инфракрасной модификации, аналогичный (6.25), равен

$$L = \frac{M_4}{M_D^2}. \quad (8.5)$$

Хорошее свойство этой модели заключается в том, что для промежуточных расстояний $1/M_D \ll |x| \ll L$, для которых реализуется четырехмерный закон тяготения, пропагатор в запаздывающем потенциале (7.17) имеет правильную четырехмерную тензорную структуру с $\alpha = 1$. Оказывается, однако, что в скалярном секторе метрики на бране присутствует дух тахионной природы, и именно его отрицательный вклад в вычете пропагатора восстанавливает правильную тензорную природу последнего [67]. Наличие тахионов и духов свидетельствует о классических и квантовых нестабильностях, что вызывает сомнение в пригодности модели в качестве кандидата на непротиворечивую инфракрасную модификацию теории Эйнштейна [67].

Для преодоления этой трудности были предложены два подхода. Как оказывается, бранные модели с коразмерностью больше единицы проявляют интересное явление инфракрасно-ультрафиолетового смешивания,

обусловленного тем, что пропагатор от браны к бране (который является обратным к ядру квадратичной формы эффективного бранного действия) сингулярен и требует регуляризации [79]. Ультрафиолетовая по своей природе регуляризация существенно влияет на поведение результирующей эффективной теории в инфракрасной области.

В работе [67] в качестве регуляризации использовались высшие производные в действии, которые делали D -мерную гравитацию в объеме мягкой в ультрафиолетовом пределе. В качестве альтернативы в работе [80] использовалась регуляризация в виде размыивания браны. (Более того, скаляр четырехмерной кривизны на бране заменялся D -мерным скаляром, что не запрещено соображениями ковариантности, хотя и выглядит не совсем естественным с геометрической точки зрения.) В результате DGP-модель оказывалась свободной от духов и тахионов, а ее пятимерный вариант даже получал масштаб сильной связи $\Lambda_{\text{strong}} = (M_5^7 m^2)^{1/9}$, намного превосходящий (7.39) [81].

В другом варианте DGP-модели с $N \geq 2$ была предложена отличная от [67] трактовка полюсов функции Грина от браны к бране или, что эквивалентно, другой выбор краевых условий для функции Грина [82]. В результате в спектральном представлении пропагатора восстанавливалась унитарность: вклад духового тахиона, обнаруженнего в [67], учитывался не посредством стандартного виковского поворота из евклидовой теории, а в смысле главного значения, не дающего неунитарного отрицательного вклада в спектральную плотность (что, по-видимому, является аналогом прескрипции Ли и Вика в локальной теории поля с духами [83]).

При этом сам пропагатор утрачивал аналитичность в комплексной плоскости четырехмерного момента, что означало потерю причинности. Однако поскольку отсутствие причинности проявляло себя только на масштабе горизонта $L = M_4/M_D^2$, это свойство оставалось приемлемым с точки зрения наблюдаемой физики промежуточных расстояний. (Заметим, что идея отсутствия причинности в форме задания в далеком будущем асимптотически деситтеровских краевых условий была предложена в [47] как составная часть инфракрасной модификации теории Эйнштейна с нелокальной гравитационной "постоянной".)

Как видно, бранные модели Вселенной с дополнительными измерениями большого размера имеют далеко идущие перспективы развития. В заключение отметим, что, несмотря на свою экзотичность, бранные модели, по-видимому, могут служить серьезными кандидатами на объяснение проблем современной Вселенной либо сами по себе, либо как модели, подсказывающие новые механизмы, выходящие за рамки собственно бранной концепции. Отметим, в частности, такой механизм, как нарушение лоренцевой инвариантности, который может, например, приводить к инфракрасной модификации теории Эйнштейна посредством введения лоренци-неинвариантного массивного члена.

В [84] показано, что такой вариант теории Паули–Фирца позволяет обойти как проблему духов, так и проблемы низкого масштаба сильной связи и Ван Дама–Вельтмана–Захарова. В этой модели непертурбативный масштаб оказывается равным $\Lambda_{\text{strong}} = \sqrt{m M_P}$ и вопреки иерархии (7.40) совмещается с субмиллиметровым масш-

табом инфракрасно-ультрафиолетового перехода в космологической эволюции DGP-модели: $\Lambda_{\text{cross}} = L_{\text{cross}}^{-1} \sim \sim (0,1 \text{ мм})^{-1}$, так что ее эйнштейновская фаза попадает в область применимости теории возмущений. Другой многообещающий механизм инфракрасной модификации заключается в так называемой модели духовой конденсации [85], которая также может включать явление космологического ускорения (хотя и путем введения остаточного космологического члена), демонстрирует нарушение лоренцевой инвариантности [86] и может трактоваться как хиггсовская фаза гравитации.

Все это делает предмет бранной физики и космологии неисчерпаемо привлекательным и потенциально способным раскрыть многие загадки ранней, современной и грядущей Вселенной.

Автор благодарен сотрудникам ОТФ ФИАН за полезные, стимулирующие обсуждения предмета данного обзора. Он хотел бы также отметить особенно полезные дискуссии с Р. Вудардом, Г. Габададзе, Н. Калопером, А. Каменщиком, К. Кифером, В. Мухановым, А. Ратке, В. Рубаковым, С. Солодухиным и В. Унру. Автор признателен Д.В. Нестерову за помощь в оформлении рукописи. Работа над данным обзором поддержана грантом РФФИ (05-02-17661) и грантом поддержки ведущих научных школ (1578.2003.2).

Список литературы

1. Nordström G *Phys. Z.* **15** 504 (1914)
2. Kaluza T *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Math.-Phys. Kl.* **33** 966 (1921)
3. Riess A G et al. *Astron. J.* **116** 1009 (1998); Perlmutter S et al. *Astrophys. J.* **517** 565 (1999)
4. Tonry J L et al. *Astrophys. J.* **594** 1 (2003); Knop R A et al. *Astrophys. J.* **598** 102 (2003); astro-ph/0309368; Riess A G et al. *Astrophys. J.* **607** 665 (2004); astro-ph/0402512
5. Jaffe A H et al. *Phys. Rev. Lett.* **86** 3475 (2001); Lange A E et al. *Phys. Rev. D* **63** 042001 (2001); Balbi A et al. *Astrophys. J.* **545** L1 (2000); Spergel D N et al. *Astrophys. J. Suppl.* **148** 175 (2003); astro-ph/0302209
6. Рубаков В А УФН **171** 913 (2001); Rubakov V A, hep-ph/0104152
7. Rubakov V A, Shaposhnikov M E *Phys. Lett. B* **125** 136 (1983)
8. Akama K, in *Gauge Theory and Gravitation: Proc. of the Intern. Symp., Nara, Japan, 1982* (Lecture Notes in Physics, Vol. 176, Eds K Kikkawa, N Nakanishi, H Narai) (Berlin: Springer-Verlag, 1983) p. 267; hep-th/0001113
9. Arkani-Hamed N, Dimopoulos S, Dvali G *Phys. Lett. B* **429** 263 (1998); hep-ph/9803315; Antoniadis I et al. *Phys. Lett. B* **436** 257 (1998); hep-ph/9804398
10. Hoyle C D et al. *Phys. Rev. Lett.* **86** 1418 (2001); hep-ph/0011014
11. Randall L, Sundrum R *Phys. Rev. Lett.* **83** 3370 (1999); hep-ph/9905221
12. Randall L, Sundrum R *Phys. Rev. Lett.* **83** 4690 (1999); hep-th/9906064
13. Gibbons G W, Hawking S W *Phys. Rev. D* **15** 2752 (1977)
14. Israel W *Nuovo Cimento B* **44** (S10) 1 (1966)
15. Lykken J, Randall L J. *High Energy Phys. (JHEP06)* 014 (2000); hep-th/9908076
16. Hořava P, Witten E *Nucl. Phys. B* **460** 506 (1996)
17. Garriga J, Tanaka T *Phys. Rev. Lett.* **84** 2778 (2000); hep-th/9911055
18. Giddings S B, Katz E, Randall L J. *High Energy Phys. (JHEP03)* 023 (2000); hep-th/0002091
19. Charmousis C, Gregory R, Rubakov V A *Phys. Rev. D* **62** 067505 (2000); hep-th/9912160
20. Barvinsky A O et al. *Phys. Rev. D* **67** 023513 (2003); hep-th/0206188
21. Maldacena J *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** 231 (1998); Gubser S S, Klebanov I R, Polyakov A M *Phys. Lett. B* **428** 105 (1998)
22. Gubser S S *Phys. Rev. D* **63** 084017 (2001); hep-th/9912001
23. Hawking S W, Hertog T, Reall H S *Phys. Rev. D* **62** 043501 (2000); hep-th/0003052
24. Hawking S W, Hertog T, Reall H S *Phys. Rev. D* **63** 083504 (2001); hep-th/0010232

25. Fefferman C, Graham C R "Conformal invariants", in *Élie Cartan et les Mathématiques d'aujourd'hui* (Astérisque, Numéro Hors Série) (Paris: Société Mathématique de France, 1985) p. 95
26. Henningson M, Skenderis K *J. High Energy Phys.* (JHEP07) 023 (1998); hep-th/9806087
27. de Haro S, Skenderis K, Solodukhin S N *Commun. Math. Phys.* **217** 595 (2001); hep-th/0002230
28. Duff M J, Liu J T *Phys. Rev. Lett.* **85** 2052 (2000); hep-th/0003237
29. Lee S et al. *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** 697 (1998); hep-th/9806074; Aharony O et al. *Phys. Rep.* **323** 183 (2000); hep-th/9905111
30. Metsaev R R *Nucl. Phys. B* **625** 70 (2002); hep-th/0112044
31. Minahan J A, Zarembo K *J. High Energy Phys.* (JHEP03) 013 (2003); hep-th/0212208; Kazakov V A et al. *J. High Energy Phys.* (JHEP05) 024 (2004); hep-th/0402207
32. Barvinsky A O, Nesterov D V *Nucl. Phys. B* **654** 225 (2003); hep-th/0210005
33. Barvinsky A O *Phys. Rev. D* **65** 062003 (2002); hep-th/0107244
34. Cline J M, Firouzjahi H *Phys. Lett. B* **514** 205 (2001); hep-ph/0012090
35. Dvali G, Tye S-HH *Phys. Lett. B* **450** 72 (1999); hep-ph/9812483
36. Kaloper N *Phys. Rev. D* **60** 123506 (1999); hep-th/9905210
37. Kaloper N, Linde A *Phys. Rev. D* **59** 101303 (1999); hep-th/9811141
38. Barvinsky A O, Nesterov D V *Nucl. Phys. B* **608** 333 (2001); gr-qc/0008062
39. Felder G et al. *Phys. Rev. D* **66** 023507 (2002)
40. Barvinsky A O et al. *Phys. Lett. B* **571** 229 (2003); hep-th/0212015; *Ann. Phys. (Leipzig)* **12** 343 (2003); hep-th/0305256
41. Lukas A, Ovrut B A, Waldram D *Phys. Rev. D* **57** 7529 (1998)
42. Vilenkin A, Shellard E P S *Cosmic Strings and Other Topological Defects* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1994)
43. Barvinsky A O, Solodukhin S N *Nucl. Phys. B* **675** 159 (2003); hep-th/0307011
44. Barish B, "LIGO overview", NSF Annual Reviews, LIGO-G020481-00-M, 23 Oct. (Cambridge, MA, 2002); http://www.ligo.caltech.edu/LIGO_web/conferences/nsf_reviews.html
45. Hughes S A *Ann. Phys. (New York)* **303** 142 (2003); astro-ph/0210481
46. Weinberg S *Rev. Mod. Phys.* **61** 1 (1989)
47. Arkani-Hamed N et al., hep-th/0209227
48. Parikh M K, Solodukhin S N *Phys. Lett. B* **503** 384 (2001); hep-th/0012231
49. Ratra B, Peebles P J E *Phys. Rev. D* **37** 3406 (1988); Caldwell R R et al. *Phys. Rev. Lett.* **80** 1582 (1998)
50. Dvali G R, Gabadadze G, Porrati M *Phys. Lett. B* **485** 208 (2000); hep-th/0005016
51. Shiromizu T, Maeda K, Sasaki M *Phys. Rev. D* **62** 024012 (2000); gr-qc/9910076
52. Binétruy P et al. *Phys. Lett. B* **477** 285 (2000); hep-th/9910219
53. Kraus P J. *High Energy Phys.* (JHEP12) 011 (1999); hep-th/9910149; Ida D J. *High Energy Phys.* (JHEP09) 014 (2000); gr-qc/9912002
54. Langlois D, Sorbo L, Rodriguez-Martinez M *Phys. Rev. Lett.* **89** 171301 (2002); hep-th/0206146; Langlois D, Sorbo L *Phys. Rev. D* **68** 084006 (2003); hep-th/0306281
55. Langlois D *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **148** 181 (2003); hep-th/0209261
56. Deffayet C *Phys. Lett. B* **502** 199 (2001); hep-th/0010186
57. Deffayet C, Dvali G, Gabadadze G *Phys. Rev. D* **65** 044023 (2002); astro-ph/0105068
58. Luty M A, Porrati M, Rattazzi R J. *High Energy Phys.* (JHEP09) 029 (2003); hep-th/0303116
59. Rubakov V A, hep-th/0303125
60. Barvinsky A O *Phys. Lett. B* **572** 109 (2003)
61. Barvinsky A O, Vilkovisky G A *Nucl. Phys. B* **282** 163 (1987); *Nucl. Phys. B* **333** 471 (1990); Barvinsky A O et al. *J. Math. Phys.* **35** 3525, 3543 (1994)
62. van Dam H, Veltman M *Nucl. Phys. B* **22** 397 (1970); Захаров В И *Письма в ЖЭТФ* **12** 447 (1970); Vainshtein A I *Phys. Lett. B* **39** 393 (1972)
63. Barvinsky A O et al. *Phys. Rev. D* **68** 105003 (2003); hep-th/0306052
64. Gorbar E V, Shapiro I L *J. High Energy Phys.* (JHEP02) 021 (2003)
65. Gregory R, Rubakov V A, Sibiryakov S M *Phys. Rev. Lett.* **84** 5928 (2000); hep-th/0002072
66. Pilo L, Rattazzi R, Zaffaroni A J. *High Energy Phys.* (JHEP07) 056 (2000); hep-th/0004028
67. Dubovsky S L, Rubakov V A *Phys. Rev. D* **67** 104014 (2003); hep-th/0212222
68. Dubovsky S L, Libanov M V *J. High Energy Phys.* (JHEP11) 038 (2003); hep-th/0309131
69. Arkani-Hamed N, Georgi H, Schwartz M D *Ann. Phys. (New York)* **305** 96 (2003); hep-th/0210184
70. Vainshtein A I *Phys. Lett. B* **39** 393 (1972); Deffayet C et al. *Phys. Rev. D* **65** 044026 (2002); hep-th/0106001
71. Aubert A *Phys. Rev. D* **69** 087502 (2004); hep-th/0312246
72. Tanaka T *Phys. Rev. D* **69** 024001 (2004); gr-qc/0305031
73. Higuchi A *Nucl. Phys. B* **282** 397 (1987); **325** 745 (1989)
74. Porrati M *Phys. Lett. B* **498** 92 (2001); hep-th/0011152
75. Nicolis A, Rattazzi R J. *High Energy Phys.* (JHEP06) 059 (2004); hep-th/0404159
76. Dvali G, Gabadadze G *Phys. Rev. D* **63** 065007 (2001); hep-th/0008054
77. Antoniadis I, Minasian R, Vanhove P *Nucl. Phys. B* **648** 69 (2003); hep-th/0209030
78. Dvali G, Gabadadze G, Shifman M *Phys. Rev. D* **67** 044020 (2003); hep-th/0202174
79. Kiritsis E, Tetradis N, Tomaras T N *J. High Energy Phys.* (JHEP08) 012 (2001); hep-th/0106050; Dvali G et al. *Phys. Rev. D* **67** 044019 (2003); hep-th/0111266
80. Kolanovic M, Porrati M, Rombouts J-W *Phys. Rev. D* **68** 064018 (2003)
81. Porrati M, Rombouts J-W *Phys. Rev. D* **69** 122003 (2004); hep-th/0401211
82. Gabadadze G, Shifman M *Phys. Rev. D* **69** 124032 (2004); hep-th/0312289
83. Lee T D, Wick G C *Nucl. Phys. B* **9** 209 (1969)
84. Rubakov V, hep-th/0407104
85. Arkani-Hamed N et al. *J. High Energy Phys.* (JHEP05) 074 (2004); hep-th/0312099
86. Arkani-Hamed N et al., hep-ph/0407034

Cosmological branes and macroscopic extra dimensions

A.O. Barvinsky

P.N. Lebedev Physics Institute, Russian Academy of Sciences,
Leninskii prosp. 53, 119991 Moscow, Russian Federation
Tel. (7-095) 132-60 49. Fax (7-095) 135-85 33
E-mail: barvin@td.lpi.ru

The idea of adding extra dimensions to the physical world — thus making the observable Universe a timelike surface (or brane) embedded in a higher-dimensional spacetime — is briefly reviewed, which is believed to hold serious promise for solving fundamental problems concerning the hierarchy of physical interactions and the cosmological constant. Brane localization of massless gravitons is discussed as a mechanism leading, in the low-energy limit, to the effective four-dimensional Einstein gravity theory on the brane. It is shown that this mechanism is a corollary of the AdS/CFT-correspondence principle well-known from string theory. Inflation and other cosmological evolution scenarios induced by the local and nonlocal structures of the gravitational brane effective action are considered, as are effects that enable the developing gravitational-wave astronomy to be used in the search of extra dimensions. Finally, a new approach to the cosmological constant and cosmological acceleration problems is discussed, which involves the variable local and nonlocal gravitational ‘constants’ arising in the infrared modifications of Einstein theory that incorporate brane induced gravity models and models of massive gravitons.

PACS numbers: **04.50.+h, 11.25.-w, 98.80.Cq**

Bibliography — 86 references
Uspekhi Fizicheskikh Nauk **175** (6) 569–601 (2005)

Received 15 February 2005, revised 29 April 2005
Physics – Uspekhi **48** (6) (2005)