

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Дифференциальное вращение звезд

Л.Л. Кичатинов

Астрономические наблюдения последних лет существенно расширили представления о вращении звезд. Гелиосейсмология установила, что наблюдаемое на солнечной поверхности уменьшение угловой скорости от экватора к полюсам сохраняется до значительных глубин в недрах Солнца. Появились новые сведения о зависимости неоднородности вращения от угловой скорости и массы звезды. Эти достижения стимулировали развитие теории дифференциального вращения, которая является основной темой данного обзора. Неоднородное вращение возникает в результате взаимодействия турбулентной конвекции с вращением. Изучение турбулентных механизмов переноса углового момента достигло того уровня, когда его результаты могут служить основой для количественных моделей вращения звезд. Такие модели практически не содержат свободных параметров, но близко воспроизводят данные гелиосейсмологии о внутреннем вращении Солнца. Предсказания теории о дифференциальном вращении звезд подтверждаются наблюдениями. Кратко обсуждается связь неоднородного вращения с магнитной активностью звезд, а также перспективы развития теории.

PACS numbers: 47.27. – i, 47.32. – y, 97.10. – q

Содержание

1. Введение (475).
 2. Основные наблюдения (476).
 - 2.1. Солнце. 2.2. Звезды.
 3. Происхождение дифференциального вращения (478).
 - 3.1. Роль турбулентности. 3.2. Меридиональная циркуляция.
 - 3.3. Конвективный перенос тепла.
 4. Эффекты турбулентности в средних полях (481).
 - 4.1. Квазилинейное приближение. 4.2. А-эффект. 4.3. Эффективные вязкости. 4.4. Эффективные теплопроводности.
 5. Модели (486).
 - 5.1. Предварительные замечания. 5.2. Модели средних полей.
 - 5.3. Результаты моделей средних полей. 5.4. Численные эксперименты.
 6. Перспективы (492).
- Список литературы (493).

1. Введение

Практически все космические объекты вращаются. Будучи слабо взаимодействующими с окружающим веществом и другими объектами, они, как правило, сохраняют существенную часть углового момента, который имели во время своего возникновения. Все это

справедливо, в частности, в отношении звезд. Ближайшая к нам звезда — Солнце, — хотя и потеряла приблизительно за 4,6 млрд лет своего существования более 90 % первичного углового момента, все еще обладает значительной угловой скоростью и совершает полный оборот вокруг своей оси за время немногим менее одного месяца.

Примечательной особенностью вращения Солнца является его неоднородность. Угловая скорость зависит от широты и уменьшается от экватора к полюсам приблизительно на 30 %. Такое состояние вращения принято называть дифференциальным. По всей вероятности, вращение подобных Солнцу звезд также неоднородно. Многие десятилетия дифференциальное вращение привлекает внимание исследователей. Помимо интереса к его происхождению, изучение неоднородного вращения стимулируется также и тем, что оно, по всей вероятности, играет ключевую роль в магнитной активности звезд [1, 2]. Одиннадцатилетний солнечный цикл, вспышки и пятна на солнечной поверхности связаны с дифференциальным вращением (дифференциальное вращение, кстати, и было обнаружено по наблюдениям пятен около полутора веков назад [3]; первые сведения появились много раньше [4]).

В последние годы интерес к дифференциальному вращению усилился по ряду причин. Во-первых, развитие гелиосейсмологии [5, 6] позволило определить состояние вращения внутренних областей Солнца. По наблюдаемым частотам глобальных колебаний оказалось возможным определить распределение угловой скорости не только на поверхности Солнца, но и в его недрах [7, 8]. Во-вторых, метод доплер-зеemanовских изображений [9] позволил отслеживать вращение пятен на звездах и определять неоднородность вращения, как

Л.Л. Кичатинов. Институт солнечно-земной физики СО РАН
664033 Иркутск, ул. Лермонтова 126, Российская Федерация
Тел. (3952) 27-89-31. Факс (3952) 51-16-75
E-mail: kit@iszf.irk.ru

Статья поступила 27 октября 2004 г.,
после доработки 28 декабря 2004 г.

это когда-то делалось для Солнца. К настоящему времени количество звезд, для которых таким образом определено дифференциальное вращение, исчисляется десятками [10]. В-третьих, развитие теории достигло определенной степени завершенности, о чем свидетельствовало появление количественных моделей дифференциального вращения, учитывающих индивидуальные особенности звезд. Теория воспроизводит внутреннее вращение Солнца в хорошем согласии с данными гелиосейсмологии, ее предсказания для звезд подтверждаются наблюдениями. По всей вероятности, достигнуто в основном правильное понимание физики дифференциального вращения.

Последнее, однако, не означает, что данная область знаний переходит в состояние "мертвой науки". Появляются новые данные об изменении вращения звезд во времени (о так называемых крутильных колебаниях), о связи вращения с магнитной активностью, об особенностях вращения в двойных звездных системах. Имеющаяся гидродинамическая теория вращения звезд должна быть фундаментом для развития магнитной гидродинамики крупномасштабных звездных полей. Некоторые шаги в этом направлении уже сделаны.

Данный обзор посвящен главным образом теории дифференциального вращения звезд. Однако, как это обычно бывает в астрофизике, данные наблюдений имеют для теории первостепенное значение. Поэтому наиболее важные для обсуждаемого предмета результаты наблюдений также будут изложены. Магнитные эффекты в дифференциальном вращении обсуждаются лишь кратко.

2. Основные наблюдения

2.1. Солнце

Наблюдаемое распределение угловой скорости Ω на солнечной поверхности принято представлять в виде

$$\Omega = \Omega_0(1 - b \cos^2 \vartheta - c \cos^4 \vartheta); \quad (1)$$

Ω_0 — угловая скорость на экваторе, ϑ — широта, т.е. полярный угол сферической системы координат, отсчитываемый от оси вращения, а b и c — безразмерные численные коэффициенты, определяющие степень неоднородности вращения.

По-видимому, наиболее надежными являются прямые измерения скорости вращения по доплеровскому сдвигу спектральных линий. Такие измерения дают $\Omega_0 = 2,87 \times 10^{-6}$ рад с^{-1} , $b = 0,12$ и $c = 0,17$ [11]. До появления спектральных методов профиль (1) определяли по вращению солнечных пятен. Наиболее известный результат, полученный таким методом, принадлежит Ньютону и Нанну [12]: $\Omega_0 = 2,90 \times 10^{-6}$ рад с^{-1} , $b = 0,19$; коэффициент c не определялся, поскольку солнечные пятна наблюдаются лишь на относительно низких широтах.

В настоящее время история наблюдений Солнца повторяется для звезд, и данные о движении звездных пятен используют для определения их дифференциального вращения. Имеет смысл сравнить результаты применения такого метода к Солнцу со спектральными измерениями, что может дать представление о точности измерений звездного дифференциального вращения. Такое сравнение проведено на рис. 1.

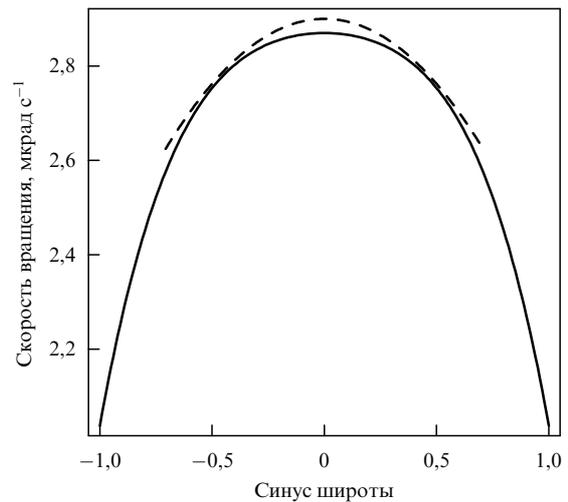


Рис. 1. Вращение солнечной поверхности по доплеровским измерениям [11] (сплошная линия) и по вращению пятен [12] (штриховая линия).

Распределение скорости вращения внутри Солнца известно благодаря гелиосейсмологии [7, 8]. На рисунке 2 показаны зависимости частоты вращения от относительного радиуса $x = r/R_\odot$ для ряда широт. Обращает на себя внимание быстрое уменьшение неоднородности вращения с глубиной при x немногим более 0,7. Это значение относительного радиуса соответствует основанию конвективной зоны. Из теории строения звезд известно, что внешние слои Солнца охвачены турбулентной конвекцией. Ниже конвективного слоя располагается так называемая лучистая зона с устойчивой (диаадиабатической) стратификацией, в которой сколько-нибудь существенное перемешивание вещества, по всей вероятности, отсутствует. Основание зоны конвекции располагается при $x \approx 0,73$ [13]. Из рисунка 2 видно, что неоднородное вращение охватывает всю зону конвекции, но быстро

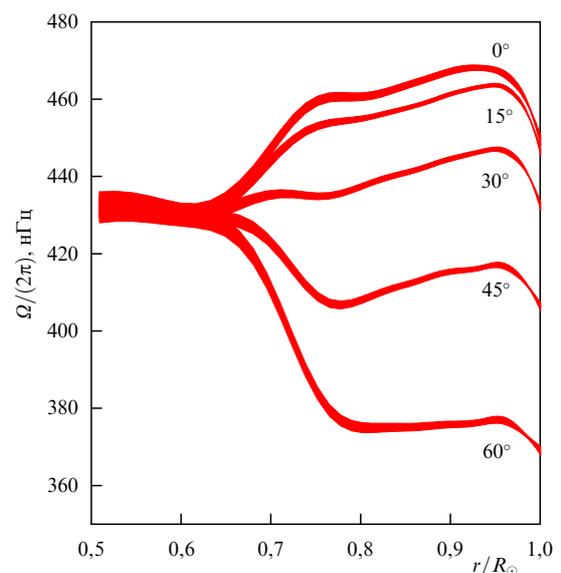


Рис. 2. Зависимости угловой скорости от относительного радиуса по результатам гелиосейсмологической программы GONG [8]. Отдельные кривые помечены соответствующими им значениями широты.

уменьшается с глубиной в лучистой зоне. Это обстоятельство дает важную подсказку теории и согласуется с ее основной концепцией: дифференциальное вращение поддерживается конвекцией.

Кроме собственно распределения угловой скорости к теории дифференциального вращения имеют отношение и другие наблюдаемые величины, такие, как меридиональное течение или различие температур между полюсом и экватором. Дело в том, что невозможно определить одно лишь распределение угловой скорости, не выяснив одновременно ряд других характеристик, связанных с неоднородным вращением. Некоторые из этих характеристик можно определить из наблюдений. Тем не менее отложим обсуждение этих наблюдений до того момента, когда выяснится их отношение к основному предмету данного обзора.

Заметим, что представление неоднородного вращения формулой (1) не всегда удобно. Некоторые преимущества имеет разложение по присоединенным полиномам Лежандра

$$\Omega = \Omega_0 \sum_{n=1}^N \frac{\omega_n}{\sin \vartheta} P_{2n-1}^1(\cos \vartheta), \quad (2)$$

в особенности, когда рассматриваются изменения вращения во времени. Дело в том, что только первый член разложения (2) обладает конечным угловым моментом, все остальные вклады в угловой момент не дают. Поэтому если наблюдается изменение ω_1 во времени, то это означает, что поверхностные слои обмениваются угловым моментом с более глубокими. Разумеется, между формулами (1) и (2) имеется соответствие: $\omega_1 = 1 - b/5 - 3c/35$, $\omega_2 = -2b/15 - 4c/45$, $\omega_3 = -8c/315$.

2.2. Звезды

Определить неоднородность вращения звезд из наблюдений непросто, поскольку даже в самые мощные телескопы звезды наблюдаются как точечные источники излучения. Длительное время использовались косвенные методы определения дифференциального вращения, точность которых оценить затруднительно.

Ситуация изменилась с появлением метода доплеровских изображений [14]. Еще до получения своего современного названия этот метод применялся к быстровращающимся звездам с неоднородным распределением химического состава по поверхности [15–17]. Метод позволяет строить карты температурных неоднородностей на поверхности звезды и отслеживать их изменения со временем (развитие этого метода, позволяющее определять распределение магнитного поля по звездной поверхности, получило название "доплер-зеemanовские изображения"). При этом можно определять дифференциальное вращение по движению звездных пятен, как это когда-то делалось для Солнца. Основные идеи метода изложены в обзоре [9], и их более детальное описание можно найти в цитируемой там литературе.

Метод получил свое название от эффекта Доплера, на котором он основан. Вращение звезды приводит к доплеровскому уширению спектральных линий. Если на поверхности звезды имеется область (пятно), излучающая иначе, чем остальная поверхность, то на профиле линии возникает связанное с этой областью возмущение. По мере прохождения пятна по диску звезды это возмущение перемещается из коротковолновой области профиля линии в длинноволновую, как схематически

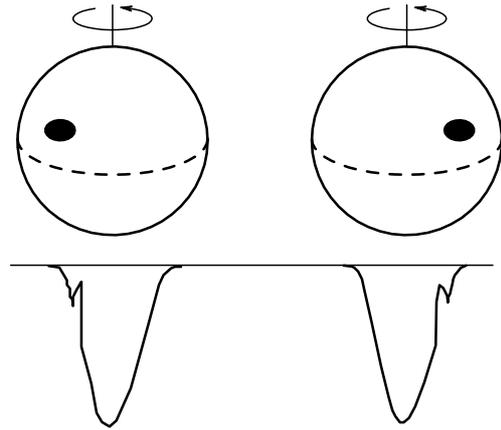


Рис. 3. Иллюстрация метода доплеровских изображений. При перемещении пятна с восточной на западную часть звездного диска связанная с ним особенность на профиле спектральной линии (поглощения) перемещается из относительно коротковолновой области в длинноволновую.

показано на рис. 3. Масштаб такого перемещения увеличивается с уменьшением широты пятна. Таким образом можно определять широты пятен и отслеживать их вращение. Метод работает тем лучше, чем выше скорость вращения. Экваториальная скорость около 15 км с^{-1} считается минимальной для его применения (для сравнения заметим, что скорость вращения Солнца на экваторе составляет около 2 км с^{-1}).

Уже первое измерение дифференциального вращения методом доплеровских изображений, проведенное для звезды южного неба AB Doradus [18], дало интересные результаты. Эта звезда подобна Солнцу как по своей массе, так и по химическому составу, но много моложе Солнца и вращается с периодом около 0,51 сут. Выяснилось, что величина неоднородности угловой скорости $\Delta\Omega$ для "новорожденного солнца" практически такая же, как и для современного. К настоящему времени измерения дифференциального вращения проведены для десятков звезд (см., например, [10, 19]). Некоторые из этих результатов, относящиеся к звездам, близким к Солнцу по массе, приведены на рис. 4. Видно, что абсолютная

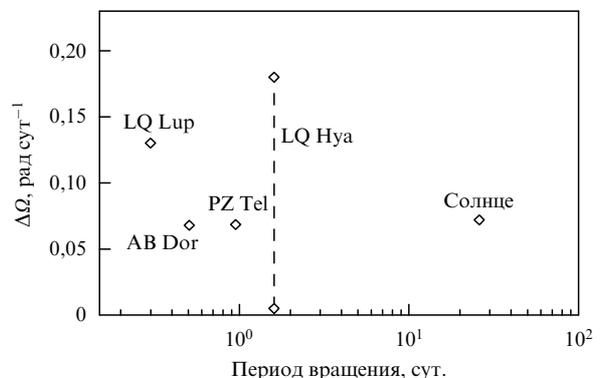


Рис. 4. Дифференциальное вращение для звезд с массой, близкой к солнечной, но вращающихся с различными скоростями. AB Dor [18], PZ Tel [20] и LQ Hya [21] — молодые звезды главной последовательности. Дифференциальное вращение LQ Hya подвержено сильным изменениям во времени. LQ Lup еще не достигла главной последовательности [22].

величина дифференциального вращения меняется мало даже при изменении скорости вращения почти на два порядка.

Результаты измерений дифференциального вращения методом доплеровских изображений для звезд солнечного типа систематизированы в [23]. Согласно этой работе, для звезд данного спектрального класса (данной массы) величина $\Delta\Omega$ мало зависит от скорости вращения, возможно, слабо возрастает с увеличением этой скорости. Имеется, однако, существенная зависимость от массы. С уменьшением массы, т.е. для более поздних спектральных классов, вращение звезд становится более однородным. Это вполне согласуется с предсказаниями теории [24, 25].

3. Происхождение дифференциального вращения

3.1. Роль турбулентности

За продолжительную историю теории дифференциального вращения выдвигалось несколько гипотез его происхождения. Свою жизнеспособность доказала только одна: неоднородность вращения возникает из-за взаимодействия конвекции с глобальным вращением. Конвективная турбулентность во вращающейся среде испытывает воздействие кориолисовых сил. Обратное воздействие возмущает вращение и делает его неоднородным. Впервые эта идея была высказана в работе А.И. Лебединского [26].

Для создания дифференциального вращения турбулентность должна выполнять перенос углового момента. Убедиться в этом можно, обратившись к уравнению движения

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla P = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \sigma(\mathbf{v}),$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{v}) = \rho v \left(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i - \frac{2}{3} \delta_{ij} \operatorname{div} \mathbf{v} \right), \quad (3)$$

где \mathbf{v} — гидродинамическая скорость, ρ — плотность, P — давление, σ — тензор вязких напряжений и v — вязкость. Для учета эффектов турбулентности обычно используют методы статистической гидромеханики [27]. В поле скорости и других физических полях разделяют флуктуационную и усредненную составляющие:

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{V}, \quad \langle \mathbf{v} \rangle = \mathbf{V}, \quad \langle \mathbf{u} \rangle = 0. \quad (4)$$

Здесь угловые скобки означают усреднение. В теории используют усреднение по ансамблю реализаций турбулентного течения. При обработке данных наблюдений усреднение проводится по пространству или по времени. Можно надеяться, что все виды усреднения дают близкие результаты.

Турбулентность на звездах возникает из-за конвективной неустойчивости. При этом конвекция происходит в сильно закритическом нелинейном режиме (числа Рэлея много больше критического), что и приводит к развитию турбулентности. Такая турбулентная конвекция на звездах имеет свои особенности. Скорости турбулентных течений, как правило, малы по сравнению со скоростью звука. Тем не менее сжимаемостью пренебрегать нельзя, поскольку течение происходит в поле тяжести и в

присутствии существенной пространственной неоднородности плотности и других термодинамических характеристик (такую радиальную неоднородность принято называть *стратификацией*). Стратификация в конвективных зонах звезд близка к адиабатической. Это связано с тем, что развитая конвективная неустойчивость, как и большинство прочих неустойчивостей, истощает источник своего существования. Для конвекции таким источником является сверхадиабатичность стратификации. Поэтому в конвективных зонах стратификация хотя и сверхадиабатическая, но от адиабатической отличается мало. Например, для Солнца относительная величина такого отклонения $\sim 10^{-4}$ [13]. Поэтому турбулентное течение вызывает лишь малые флуктуации термодинамических параметров, и уравнение непрерывности можно записать как

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (5)$$

В отличие от приближения несжимаемости $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ уравнение (5) называют *приближением неупругости* [28, 29].

Усреднение уравнения (3)

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \frac{1}{\rho} \nabla P = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{R} \quad (6)$$

показывает, что влияние турбулентности на среднее крупномасштабное течение описывается тензором напряжений Рейнольдса

$$R_{ij} = -\rho Q_{ij}, \quad Q_{ij} = \langle u_i u_j \rangle. \quad (7)$$

В уравнении для крупномасштабного течения (6) опущен вклад вязкости (число Рейнольдса велико). Напряжения Рейнольдса содержат гораздо большую турбулентную вязкость.

Для описания крупномасштабных течений на звездах удобно пользоваться сферическими координатами (r, ϑ, ϕ) . Полярной осью системы координат служит ось вращения. Будем считать, что крупномасштабное течение, а также усредненные характеристики турбулентности обладают осевой симметрией, т.е. не меняются при поворотах вокруг оси вращения. Тогда среднее течение включает неоднородное вращение с угловой скоростью $\Omega(r, \vartheta)$ и так называемую меридиональную циркуляцию — течение, вектор скорости которого \mathbf{V}^m лежит в меридиональных плоскостях. Как мы увидим, меридиональная циркуляция неизбежно возникает при неоднородном вращении. С учетом условия (5) меридиональное течение можно описать токовой функцией $\psi(r, \vartheta)$:

$$\mathbf{V} = \mathbf{e}_\phi r \sin \vartheta \Omega + \frac{1}{\rho} \operatorname{rot} \left(\mathbf{e}_\phi \frac{\psi}{r \sin \vartheta} \right), \quad (8)$$

где \mathbf{e}_ϕ — единичный азимутальный вектор.

Азимутальная компонента (6) дает уравнение для угловой скорости

$$\rho r^2 \sin^2 \vartheta \frac{\partial \Omega}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho r \sin \vartheta \langle u_\phi \mathbf{u} \rangle + \rho r^2 \sin^2 \vartheta \Omega \mathbf{V}^m). \quad (9)$$

Вектор под знаком дивергенции есть поток углового момента. Турбулентное течение дает вклад в этот

поток, если недиагональные компоненты корреляционного тензора (7) $Q_{\phi r}$ и $Q_{\phi\theta}$ отличны от нуля.

Предположим, что в некоторый момент времени вращение однородно. Если турбулентный поток углового момента отличен от нуля, то в последующие моменты времени области с положительной дивергенцией потока замедлят, а области с отрицательной дивергенцией ускорят свое вращение, и вращение станет неоднородным. Присутствие отличных от нуля турбулентных потоков углового момента в *однородно* вращающихся средах называют *A*-эффектом [30]. Этот эффект был обнаружен в [26] и, по всей вероятности, является основной причиной дифференциального вращения. В том случае, когда $\cos\vartheta Q_{\phi\theta}^A > 0$, *A*-эффект приводит к относительно быстрому вращению экватора, как это наблюдается на Солнце. (Происхождение *A*-эффекта обсуждается в разделе 4.)

Вероятно, наиболее известным последствием турбулентности для крупномасштабных полей является возникновение эффективных коэффициентов переноса, в частности турбулентной вязкости. Вязкие, или диссипативные, потоки углового момента равны нулю для однородного вращения, но в общем случае присутствуют в напряжениях Рейнольдса (7):

$$Q_{ij} = Q_{ij}^A + Q_{ij}^v. \quad (10)$$

Здесь первое слагаемое в правой части соответствует *A*-эффекту, а второе — вкладу турбулентной вязкости.

В первом (довольно грубом) приближении формирование дифференциального вращения можно описать как установление баланса между недиссипативными потоками углового момента и эффективной вязкостью. В состоянии однородного вращения диссипативные потоки углового момента отсутствуют, но имеется *A*-эффект, и соответствующие недиссипативные потоки будут переносить угловой момент от полюсов к экватору. Возникнет и будет расти со временем неоднородность вращения. При этом появятся также и диссипативные потоки от экватора к полюсам, $\cos\vartheta Q_{\phi\theta}^v < 0$. Последние будут тем больше, чем больше неоднородность вращения. В результате установится стационарное дифференциальное вращение, в котором недиссипативные и вязкие потоки углового момента уравновесят друг друга.

В таком стационарном состоянии вектор потока углового момента становится соленоидальным, но не обязательно равным нулю. Это необходимо отметить, поскольку с потоками углового момента связано одно из давних заблуждений. Идея *A*-эффекта привела к представлению о том, что для поддержания относительно быстрого вращения солнечного экватора требуется корреляция азимутальных и меридиональных движений определенного знака, $\cos\vartheta Q_{\phi\theta} > 0$. Такая корреляция была обнаружена в движениях солнечных пятен [31]. В последующем, однако, "профиль Уорда", как стали называть зависимость соответствующей корреляции от широты, был уточнен, и оказалось, что величина $Q_{\phi\theta}$ находится в пределах погрешностей наблюдений [32, 33] или даже имеет знак, противоположный ожидаемому [34]. Это было воспринято как противоречие между теорией и наблюдениями. Однако полная корреляция (10), которую, по всей вероятности, и дают наблюдения, включает вклады как *A*-эффекта, так и эффективных вязкостей. Любой ее знак совместим с наблюдаемым на

Солнце экваториальным ускорением (модельные расчеты [35] дают $\cos\vartheta Q_{\phi\theta} < 0$ вблизи поверхности в согласии с [34]). История с профилем Уорда является далеко не единственным примером того, как почти очевидное утверждение оказывается неверным.

3.2. Меридиональная циркуляция

Обратимся теперь ко второму слагаемому в правой части (9). Оно учитывает вклад меридиональной циркуляции в поток углового момента. Не этот вклад создает дифференциальное вращение, но он оказывается крайне важным. Меридиональной циркуляцией нельзя пренебречь. Как впервые показал Киппенхан [36], меридиональное течение неизбежно возникает при неоднородном вращении. Это обстоятельство налагает существенные ограничения на установившиеся равновесные распределения угловой скорости на звездах.

A-эффект не оказывает прямого влияния на меридиональную циркуляцию, которая лишь ослабляется турбулентностью из-за эффективной вязкости. Диссипативная составляющая корреляции флуктуационных скоростей (10) определяется тензором турбулентных вязкостей \mathcal{N} :

$$Q_{ij}^v = -\mathcal{N}_{ijkl} \frac{\partial V_k}{\partial r_l}. \quad (11)$$

В простейшем случае изотропной турбулентности имеется лишь два коэффициента переноса:

$$\mathcal{N}_{ijkl} = \nu_T \left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} - \frac{2}{3} \delta_{ij}\delta_{kl} \right) + \mu_T \delta_{ij}\delta_{kl}. \quad (12)$$

Вращающаяся турбулентность обычно обладает существенной анизотропией, и турбулентные вязкости определяются более сложным выражением (34).

Уравнение для меридиональной циркуляции, которую будем полагать стационарной, возникает как азимутальная составляющая ротора уравнения (6) для средней скорости [25, 37]:

$$\mathcal{D}(\psi) = \sin\vartheta r \frac{\partial \Omega^2}{\partial z} - \frac{g}{c_p r} \frac{\partial S}{\partial \vartheta}, \quad (13)$$

где опущен малый вклад второго порядка относительно скорости меридионального течения; $z = r \cos\vartheta$ — пространственная координата вдоль оси вращения (расстояние до экваториальной плоскости); g — ускорение свободного падения; $S = c_v \ln(P/\rho^\gamma)$ — удельная энтропия идеального газа; c_p и c_v — удельные теплоемкости при постоянном давлении и постоянной плотности соответственно.

Левая часть (13) учитывает вклад турбулентных вязкостей:

$$\mathcal{D}(\psi) = -(\mathbf{e}_\phi)_n \varepsilon_{nmi} \frac{\partial}{\partial r_m} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r_j} \rho \mathcal{N}_{ijkl} \frac{\partial V_k^m}{\partial r_l} \right). \quad (14)$$

Явное выражение для этого вклада крайне громоздко, но не требуется для дальнейшего обсуждения. Важно лишь помнить, что левая часть (13) учитывает вязкое сопротивление меридиональному течению. В правой части выписаны два источника меридиональной циркуляции.

Это, во-первых, непотенциальная составляющая центробежной силы. Данную силу можно определить

через центробежный потенциал только в том случае, когда угловая скорость постоянна на цилиндрических поверхностях, соосных оси вращения, т.е. не зависит от координаты z . В этом случае центробежная сила может быть скомпенсирована давлением и к существенным последствиям не приводит. Однако источники дифференциального вращения создают распределение угловой скорости, зависящие от z . В этом случае центробежная сила создает меридиональную циркуляцию. Если, например, угловая скорость возрастает вдоль оси z по направлению к экваториальной плоскости, то возникает момент центробежных сил, такой, что результирующая меридиональная циркуляция направлена от экватора к полюсам на поверхности звезды и замыкается течением к экватору в глубине конвективной зоны. Можно убедиться, что эти качественные рассуждения согласуются со знаком первого вклада в правой части (13). Характерная величина отношения этого вклада к левой части (13) есть число Тейлора

$$\text{Ta} = \frac{4\Omega^2 R^4}{v_T^2}. \quad (15)$$

Данное число для Солнца велико, $\text{Ta} \simeq 10^7$. Это означает, что центробежные силы не могут уравновеситься вязким сопротивлением меридиональному течению. Если в уравнении для меридионального течения пренебречь бароклинным вкладом (второй вклад в правой части), то стабилизация меридионального течения происходит из-за исчерпания его источника: меридиональная циркуляция создает поток углового момента в (9), который изменяет неоднородное вращение таким образом, что угловая скорость становится практически постоянной на цилиндрических поверхностях. Такое состояние вращения можно считать частным следствием теоремы Тейлора–Праудмана [38].

По этим причинам в ряде численных моделей дифференциального вращения Солнца получались цилиндрические изоротационные поверхности [39–42]. Казалось, что такое состояние вращения с необходимостью возникает при больших числах Тейлора. Оно, однако, противоречит данным гелиосейсмологии. Противоречие долгое время оставалось одной из основных трудностей теории дифференциального вращения и даже получило самостоятельное название "загадка числа Тейлора" [43].

Ее решение, однако, нетрудно найти из уравнения (13). К нему приводит учет бароклинного источника меридиональной циркуляции [37, 44–46] — второго вклада в правой части (13). Вклад называют бароклинным, поскольку он возникает из-за несовпадения изобарических поверхностей с поверхностями постоянной плотности (см., например, [25]):

$$\rho^{-2}(\nabla P \times \nabla \rho)_\phi = \frac{g}{c_p r} \frac{\partial S}{\partial \vartheta}.$$

Характерная величина отношения этого вклада к левой части уравнения имеет для Солнца тот же порядок величины, что и число Тейлора.

Уравнение (13) для меридиональной циркуляции оказывается весьма информативным. Из него, в частности, следует, что характер распределения угловой скорости в конвективной зоне звезды определяется балансом центробежного и бароклинного источников меридионального течения (балансом Тейлора–Праудмана). Как

мы увидим, именно из уравнения (13) можно оценить ожидаемую величину дифференциального вращения и даже предсказать характер ее зависимости от массы звезды. С меридиональной циркуляцией связаны еще два обстоятельства, важных для теории дифференциального вращения.

Скорость меридиональной циркуляции определяется малым нарушением равновесия между центробежным и бароклинным источниками. Поэтому обратная задача о нахождении меридионального течения по заданным распределениям угловой скорости и температуры является плохо обусловленной. Малые изменения в этих распределениях приводят к большим изменениям меридионального течения. Поэтому попытки определения меридиональной циркуляции по наблюдаемым распределениям температуры и угловой скорости вряд ли могут быть успешными [47].

Равновесие между двумя источниками меридионального течения выполняется для основного объема конвективной оболочки звезды, но нарушается вблизи ее границ. Причина в том, что баланс Тейлора–Праудмана противоречит граничным условиям. Поэтому при больших числах Тейлора (15) вблизи поверхностей конвективной зоны образуются пограничные слои толщиной $d \sim R \text{Ta}^{-1/4}$. Эти слои хорошо известны в геофизике, где характерные числа Тейлора еще больше, чем для Солнца, как слои Экмана [38] (число Экмана $E = 2/\text{Ta}^{1/2}$). Вероятно, именно с этими слоями связано обнаруженное в численных экспериментах по солнечной конвекции нарушение баланса Тейлора–Праудмана вблизи границ [48]. Пограничные слои повышают требования к пространственному разрешению в численных экспериментах.

Меридиональная циркуляция на Солнце обнаруживается наблюдениями. Прямые доплеровские измерения показывают течение от экватора к полюсам на солнечной поверхности с амплитудой $\sim 10 \text{ м с}^{-1}$ [49]. В последнее время появились данные гелиосейсмологии о меридиональном течении [50]. Течение к полюсам присутствует на глубинах до 12 тыс. км (для больших глубин нет данных). Это течение является доминирующим. На его фоне имеется зависящее от времени течение меньшей амплитуды, сходящееся к широте с наибольшей частотой появления солнечных пятен. Данная широта наибольшей активности пятен меняется со временем, и вместе с ней изменяется сходящееся меридиональное течение [50].

Как мы убедились, данные гелиосейсмологии о внутреннем вращении Солнца можно надеяться объяснить лишь с учетом бароклинного источника меридиональной циркуляции — второго вклада в правой части уравнения (13). В противном случае неизбежно состояние вращения с постоянной угловой скоростью на цилиндрических поверхностях, что противоречит имеющимся данным. Для учета бароклинной циркуляции необходимо выяснить, по какой причине температура в звездных конвективных оболочках может зависеть от широты. Ответить на этот вопрос позволяет рассмотрение переноса тепла во вращающихся турбулентных средах.

3.3. Конвективный перенос тепла

Для определения присутствующего в (13) бароклинного источника меридиональной циркуляции удобно использовать уравнение для удельной энтропии (см., напри-

мер, [51])

$$\rho T \left(\frac{\partial S}{\partial t} + (\mathbf{V}^m \cdot \nabla) S \right) = -\operatorname{div}(\mathbf{F}^{\text{conv}} + \mathbf{F}^{\text{rad}}) + \epsilon. \quad (16)$$

Здесь \mathbf{F}^{rad} — поток тепла из-за диффузии фотонов (молекулярной теплопроводностью для подобных солнцу звезд, как правило, можно пренебречь), \mathbf{F}^{conv} — конвективный тепловой поток и ϵ — функция источника.

Поток тепла

$$F_i^{\text{conv}} = -\rho T \chi_{ij} \frac{\partial S}{\partial r_j} \quad (17)$$

определяется тензором эффективной температуропроводности χ_{ij} . Температуропроводность не является изотропной, поскольку имеются выделенные направления, связанные с вращением и стратификацией. Стратификация, однако, не приводит к существенным последствиям, так как соответствующее радиальное выделенное направление не нарушает сферической симметрии в распределениях термодинамических характеристик среды. Отклонения от сферической симметрии связаны с вращением:

$$\chi_{ij} = \chi_T \left(\phi(\Omega^*) \delta_{ij} + \phi_{\parallel}(\Omega^*) \frac{\Omega_i \Omega_j}{\Omega^2} \right). \quad (18)$$

Здесь χ_T — изотропная турбулентная температуропроводность для невращающейся среды, функции ϕ и ϕ_{\parallel} (см. раздел 4.4, рис. 9) учитывают влияние вращения, Ω^* — соответствующим образом обезразмеренная угловая скорость (25). Для невращающейся среды $\phi(0) = 1$, $\phi_{\parallel}(0) = 0$ и температуропроводность становится изотропной. Формула (18) учитывает то обстоятельство, что под влиянием вращения турбулентность приобретает анизотропию и приближается к двумерному состоянию [52]: корреляционная длина и среднеквадратичная скорость вдоль оси вращения больше соответствующих величин для поперечного направления. Поэтому эффективная температуропроводность вдоль оси вращения χ_{\parallel} больше поперечной χ_{\perp} на величину $\chi_{\parallel} - \chi_{\perp} = \chi_T \phi_{\parallel}$. Вращение приводит к двум важным последствиям.

Во-первых, коэффициент переноса для радиального направления зависит от широты,

$$\chi_{rr} = \chi_T (\phi(\Omega^*) + \phi_{\parallel}(\Omega^*) \cos^2 \vartheta), \quad (19)$$

и, во-вторых, отличны от нуля недиагональные компоненты тензора температуропроводностей,

$$\chi_{r\vartheta} = \chi_{\vartheta r} = -\chi_T \phi_{\parallel}(\Omega^*) \cos \vartheta \sin \vartheta. \quad (20)$$

В результате появляется зависимость температуры от широты. При этом особенно важны недиагональные компоненты (20), которые дают меридиональные потоки тепла из-за (доминирующей) радиальной неоднородности удельной энтропии. Учет одной лишь зависимости температуропроводности от широты (19) не решает загадки числа Тейлора [43].

Влияние вращения на конвективный теплоперенос приводит к тому, что полярные области звезды оказываются чуть теплее экваториальных. Появляется момент архимедовых сил, стремящийся создать меридиональное течение от полюсов к экватору на поверхности звезды и от экватора к полюсам в глубине: относительно горячая

жидкость от полюсов растекается по поверхности, а относительно холодное вещество на экваторе погружается в глубину. Поэтому бароклиный источник меридионального течения в уравнении (13) действует противоположно центробежному источнику, что обеспечивает отклонение изоротационных поверхностей от цилиндрической формы и в конечном счете дает согласие расчетного дифференциального вращения с гелиосейсмологическими данными.

Бароклиный и центробежный источники меридиональной циркуляции имеют одинаковый порядок величины, когда $\Delta T/T \sim R \Delta \Omega \Omega / g \sim 10^{-5}$ ($R_{\odot} = 6,9 \times 10^{10}$ см, ускорение свободного падения на поверхности Солнца $g = 2,7 \times 10^4$ см s^{-2}). Характерная температуры в конвективной оболочке составляет сотни тысяч градусов. Для решения загадки числа Тейлора требуется "дифференциальная температура" $T' \sim 1$ К. Такая вариация температуры может показаться ничтожной для очень большого и горячего Солнца, но, присутствуя постоянно, она приведет к существенным последствиям для глобальной циркуляции солнечного вещества. Кроме того, конвективные движения могут влиять на распределение лишь так называемой потенциальной температуры ΔT — проинтегрированного по радиусу сверхадиабатического градиента, $\nabla \Delta T = \nabla T - \mathbf{g}/c_p$. Ее характерная величина $\Delta T \sim 10$ К. Поэтому требуемая величина дифференциальной температуры составляет порядка 10 % от максимальной возможной и в этом смысле не так уж мала.

Предпринимались попытки обнаружить на Солнце дифференциальную температуру, которые в значительной степени стимулировались теорией дифференциального вращения. Они не дали результата. Удалось лишь установить верхнюю границу для величины T' приблизительно 5 К [53, 54]. Есть указания на то, что фактическая величина дифференциальной температуры на Солнце действительно составляет около 1 К [55].

Функция источника в уравнении (16) связана с тензором напряжений Рейнольдса (7) [51]:

$$\epsilon = R_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial r_j} = -\rho (Q_{ij}^A + Q_{ij}^v) \frac{\partial V_i}{\partial r_j}, \quad (21)$$

где учтено уравнение (10). Обмен энергией между средним течением и турбулентной средой в гидромеханике средних полей определяется не только турбулентной вязкостью, но и A -эффектом [56]. О последнем часто забывают, что ведет к противоречиям. Мощность нагрева солнечной конвективной зоны из-за одной лишь турбулентной вязкости была бы сопоставима со светимостью Солнца [57]. Ясно, что в действительности такой нагрев осуществиться не может. Учет недиссипативных напряжений (A -эффекта) исправляет ситуацию. С учетом граничного условия (45) функция источника (21) при интегрировании по объему конвективной зоны обращается в нуль, как и должно быть в силу условия сохранения энергии. В расчетах дифференциального вращения этим источником обычно пренебрегают.

4. Эффекты турбулентности в средних полях

В разделе 3 было выяснено, *какие* эффекты, имеющие отношение к задаче о дифференциальном вращении, создает турбулентность. Цель данного раздела — выяснить, *как* она это делает. Можно также сказать, что ранее

рассматривались течения, характерный пространственный масштаб которых велик по сравнению с корреляционным масштабом ℓ турбулентных движений. В данном разделе основное внимание направлено на течения масштаба ℓ и меньше.

Для описания дифференциального вращения необходимо определить создаваемые турбулентностью недиссипативные потоки углового момента, а также эффективные коэффициенты переноса — турбулентные вязкость и температуропроводность. Строго говоря, для этого не обязательно рассчитывать характеристики турбулентности. Незвестные величины могут быть свободными параметрами моделей. Так когда-то и поступали, но все модели такого рода не согласовывались с наблюдениями. Причины понятны: свободных параметров было слишком много. Блуждая наугад в пространстве параметров, трудно попасть в "нужную область". Количество свободных параметров обычно сокращают, полагая часть из них равными нулю, но это несколько не уменьшает произвола "параметрических" моделей. Перелом наступил после того, как все параметры турбулентности, нужные для моделирования дифференциального вращения, были рассчитаны в рамках, возможно, грубого, но единого для всех расчетов подхода.

Физика мелкомасштабных явлений может, разумеется, представлять интерес и безотносительно к задачам моделирования крупномасштабных течений.

4.1. Квазилинейное приближение

Основная трудность заключается в том, что надежных методов обращения с турбулентностью нет. Существенные нелинейность и неравновесность [27, 58] делают явление турбулентности исключительно трудным для описания. Положение несколько исправляет то, что гидромеханика средних полей требует не описания собственно турбулентности, а ее влияния на усредненные поля. Для таких задач имеется хотя и не получившее строгого обоснования, но хорошо себя зарекомендовавшее квазилинейное приближение (в теории средних полей его называют также *сглаживанием первого порядка* [59] или *приближением корреляций второго порядка* [52]).

Это приближение позволяет найти напряжения Рейнольдса (7) из уравнения для флуктуационной скорости. Последнее получается вычитанием уравнения для средней скорости (6) из исходного уравнения движения (3):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{u})}{\partial r_j} + \frac{\partial}{\partial r_j} (\rho u_i u_j - \rho \langle u_i u_j \rangle) = \\ = 2\rho \varepsilon_{ijk} u_j \Omega_k - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P'}{\partial r_i} - \frac{\partial}{\partial r_j} (\rho u_i V_j + \rho u_j V_i), \end{aligned} \quad (22)$$

где P' — флуктуационное давление. Уравнение записано во вращающейся системе отсчета, и в его правой части выписана кориолисова сила. Решить это уравнение не удастся из-за нелинейных членов в левой части. Поэтому либо отбрасывают нелинейные вклады, либо всю левую часть уравнения (22) заменяют на τ -релаксирующий член:

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{u})}{\partial r_j} + \frac{\partial}{\partial r_j} (\rho u_i u_j - \rho \langle u_i u_j \rangle) = \rho \frac{u_i}{\tau}, \quad (23)$$

где $\tau = \ell / \langle u^2 \rangle^{1/2}$ — характерное время нелинейных взаимодействий и ℓ — характерный масштаб турбулентных движений. Приближение (23) называют по-разному. Следуя работе [60], где оно впервые использовано в задаче о дифференциальном вращении, будем называть его *приближением средней длины перемешивания*. Отбрасывание нелинейных членов в (22) и есть квазилинейное приближение. Его можно обосновать для случая, когда время корреляции флуктуационных скоростей $\tau_{\text{corr}} \ll \tau$. Для короткокоррелированного во времени случайного течения квазилинейное приближение является строгим, и потому оно не может привести к результатам, запрещенным какими-либо законами физики. В реальных ситуациях, однако, $\tau_{\text{corr}} \simeq \tau$. Распространено мнение, что приближение длины перемешивания, хотя и довольно грубое, в большей степени соответствует реальным условиям, чем квазилинейное. С формальной точки зрения, однако, квазилинейное приближение ни в чем не уступает и является более общим подходом, так как существует предельный переход от квазилинейного приближения к приближению длины перемешивания [61]. Обратного перехода, по видимому, не существует.

Все нужные для теории дифференциального вращения характеристики турбулентности были рассчитаны в квазилинейном приближении (результаты можно найти в цитируемой ниже литературе). И все же в количественных моделях дифференциального вращения используется приближение средней длины перемешивания. Дело в том, что квазилинейные выражения, например, для турбулентной вязкости, содержат спектральные функции турбулентности. Для солнечной турбулентной конвекции эти функции неизвестны. Поэтому переходят к соответствующим формулам длины перемешивания, которые включают лишь хорошо известные величины и дают математические упрощения. В последующем изложении используется исключительно приближение длины перемешивания.

Практически все расчеты для обсуждаемого круга задач сводятся к учету влияния вращения на турбулентность. При этом фактически вводят в рассмотрение две турбулентности. Одна из них, которую обычно называют *исходной*, имела бы место в невращающейся среде при реальных источниках турбулентности. Исходная турбулентность считается заданной. По заданным свойствам исходной турбулентности рассчитывают характеристики турбулентности во вращающейся среде.

Из соображений математического удобства вместо скорости (сжимаемого) течения используют (соленоидальную) плотность импульса $\mathbf{m} = \rho \mathbf{u}$ (5) и проводят преобразование Фурье по пространственным координатам,

$$\mathbf{m}(\mathbf{r}) = \int \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \hat{\mathbf{m}}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}.$$

В результате уравнения в частных производных превращаются в алгебраические уравнения для фурье-амплитуд, и можно найти линейное соотношение между плотностями импульса для исходной и вращающейся турбулентностей [62, 63]:

$$\hat{m}_i(\mathbf{k}) = D_{ij}(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{k}) \hat{m}_j^0(\mathbf{k}), \quad D_{ij}(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{k}) = \frac{\delta_{ij} + \Omega^* \mu \varepsilon_{ijn} k_n / k}{1 + \Omega^{*2} \mu^2}, \quad (24)$$

где индекс $^\circ$ относится к исходной турбулентности, $\mu = \cos(\widehat{\Omega\mathbf{k}})$ — косинус угла между волновым вектором и угловой скоростью, а число Кориолиса

$$\Omega^* = 2\tau\Omega \quad (25)$$

характеризует интенсивность взаимодействия турбулентной конвекции с вращением.

С помощью (24) можно выразить характеристики вращающейся турбулентности через число Кориолиса и параметры исходной турбулентности. Вспомним, однако, что гипотетическая исходная турбулентность реально не существует, но имела бы место при фактических источниках турбулентности (фактической сверхадиабатичности) в невращающейся среде. Поэтому ее интенсивность можно определить из соотношения для невращающейся среды (см., например, [13, 64]):

$$\langle u^2 \rangle^\circ = -\frac{\ell^2 g}{4c_p} \frac{\partial S}{\partial r}, \quad (26)$$

где энтропия S должна определяться из уравнения переноса тепла (16).

4.2. Λ -эффект

Как отмечалось в разделе 3, Λ -эффектом называют наличие турбулентных потоков углового момента при однородном вращении [30, 52]. Однородность вращения отмечается, чтобы подчеркнуть, что эти потоки не связаны с диссипацией, т.е. с действием турбулентной вязкости.

Начнем обсуждение Λ -эффекта с качественного рассмотрения причин, по которым он возникает. На рисунке 5 схематически показаны движения во вращающейся среде. Штриховыми стрелками изображены исходные движения, а сплошными — возмущенные силами Кориолиса. Нетрудно понять, что конвективное перемешивание по радиусу приводит к переносу углового момента в глубь конвективной зоны (левая часть рисунка). Для исходного движения в радиальном направлении ($u_r^> 0$) сила Кориолиса отклоняет движущийся элемент жидкости против направления глобального вращения с характерной скоростью

$$u_\phi \simeq -2\tau\Omega u_r^\circ \sin\vartheta.$$

Произведение радиальной и азимутальной скоростей отрицательно:

$$u_r u_\phi \simeq -\Omega^* u_r^{\circ 2} \sin\vartheta < 0.$$

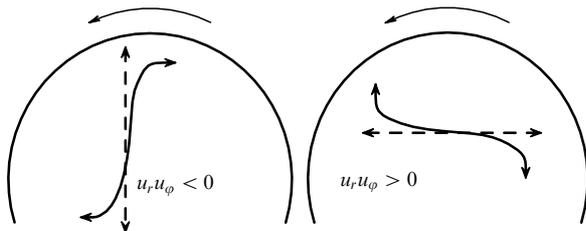


Рис. 5. Возникновение потоков углового момента в результате воздействия кориолисовых сил на исходную турбулентность. Штриховыми стрелками показаны исходные движения, а сплошными — возмущенные вращением.

Для исходного движения против радиального направления ($u_r < 0$) элемент жидкости отклоняется в направлении глобального вращения. Для произведения $u_r u_\phi$ имеем прежнюю оценку, поэтому при усреднении по восходящим и нисходящим исходным движениям получаем отрицательный радиальный поток углового момента:

$$\langle u_r u_\phi \rangle \simeq -\Omega^* \langle u_r^2 \rangle^\circ \sin\vartheta < 0.$$

Существенным оказывается то обстоятельство, что азимутальные исходные движения дают прямо противоположный эффект (см. правую часть рис. 5). Рассуждения, аналогичные предыдущим, для этого случая приводят к оценке

$$\langle u_r u_\phi \rangle \simeq \Omega^* \langle u_\phi^2 \rangle^\circ \sin\vartheta > 0.$$

Горизонтальное перемешивание приводит к переносу углового момента к поверхности конвективной зоны. Объединяя вклады радиальных и азимутальных движений, для радиального Λ -эффекта находим

$$Q_{r\phi}^\Lambda \simeq \Omega^* (\langle u_\phi^2 \rangle^\circ - \langle u_r^2 \rangle^\circ) \sin\vartheta. \quad (27)$$

Это уравнение показывает важное обстоятельство: для возникновения дифференциального вращения исходная турбулентность должна быть анизотропной. Впервые на это обстоятельство было указано в работе [26], а затем независимо в [65]. Для возникновения потока углового момента по радиусу нужно, чтобы характерные скорости радиальных и азимутальных движений в исходной турбулентности отличались.

С помощью оценок, аналогичных предыдущим, можно убедиться, что для возникновения меридионального потока углового момента требуется выделенное направление в горизонтальной плоскости — различие азимутальных и меридиональных движений. Здесь возникает сложность, поскольку причин для горизонтальной анизотропии в исходной невращающейся турбулентности нет. Тем не менее меридиональный поток углового момента требуется: на Солнце наблюдается именно широтная неоднородность вращения.

Возможны разные пути преодоления данной трудности. Наиболее результативным оказался следующий. Проведенные оценки, в частности, формула (27), справедливы для медленного вращения, т.е. для малых чисел Кориолиса (25), $\Omega^* \ll 1$. Силы Кориолиса превращают радиальные скорости в азимутальные (см. рис. 5). Поэтому во вращающейся среде исходной турбулентности с радиальной анизотропией соответствует анизотропная турбулентность, которая будет обладать также и горизонтальной анизотропией. Такая анизотропия появится во втором порядке по числу Кориолиса, а в следующем (третьем) порядке можно ожидать появления меридионального Λ -эффекта при наличии лишь радиальной анизотропии в исходной турбулентности. Расчеты с точностью до вкладов третьего порядка по числу Кориолиса подтвердили эти ожидания [66, 67].

Число Кориолиса на Солнце зависит от радиуса r . Оно меньше единицы вблизи поверхности, но больше десяти в основании конвективной зоны при среднем значении $\Omega^* \simeq 6$ (см. раздел 5.3.1, рис. 13). Состояния с $\Omega^* > 1$ типичны для звезд солнечного типа [68]. Поэтому учет нелинейных по Ω^* вкладов оправдан, но возникает

новая трудность. Нет оснований ограничиваться вкладом третьего порядка по числу Кориолиса. Нужно учитывать вклады всех порядков. Соответствующая условиям на звездах теория должна быть в полной степени нелинейной относительно Ω^* [69].

При наличии в исходной турбулентности лишь радиального выделенного направления возможна лишь следующая структура недиссипативной составляющей корреляционного тензора (10):

$$Q_{ij}^A = \nu_T \Omega_k n_l \left(U(\Omega^*) (n_i \varepsilon_{jkl} + n_j \varepsilon_{ikl}) - H(\Omega^*) \frac{(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega})}{\Omega^2} (\Omega_i \varepsilon_{jkl} + \Omega_j \varepsilon_{ikl}) \right). \quad (28)$$

Здесь ν_T — изотропная турбулентная вязкость (см. раздел 4.3); \mathbf{n} — единичный вектор в радиальном направлении; U и H — безразмерные функции, определяющие потоки углового момента в радиальном направлении и вдоль оси вращения соответственно:

$$Q_{\phi r}^A = \nu_T \Omega \sin \vartheta (U - H \cos^2 \vartheta),$$

$$Q_{\phi \vartheta}^A = \nu_T \Omega H \cos \vartheta \sin^2 \vartheta. \quad (29)$$

Расчеты A -эффекта для анизотропной исходной турбулентности, но без учета неоднородности среды дают [62, 63]

$$U(\Omega^*) = 2aI_0(\Omega^*), \quad H(\Omega^*) = 2aI_1(\Omega^*), \quad (30)$$

где a — параметр анизотропии,

$$a = \frac{\langle u_r^2 \rangle^\circ}{\langle u_\vartheta^2 \rangle^\circ} - 1, \quad -1 < a < 1. \quad (31)$$

Ограничение сверху на величину параметра анизотропии связано с положительностью спектральных функций флуктуаций скорости [27]. Функции I_0 и I_1 из (30) приведены на рис. 6.

Для малых чисел Кориолиса ($\Omega^* \ll 1$)

$$U = -\frac{4a}{5}, \quad H = O(\Omega^{*2}).$$

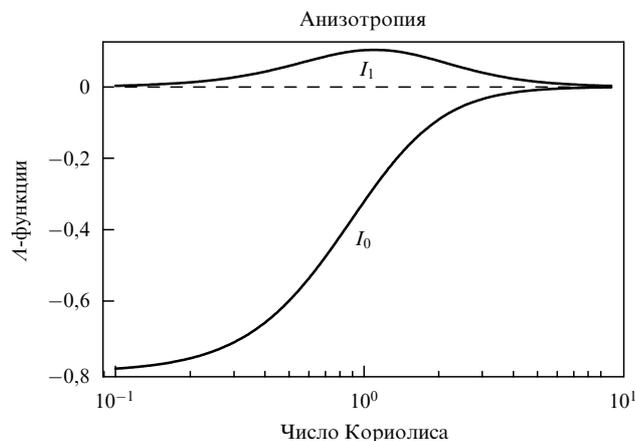


Рис. 6. Зависимости безразмерных потоков углового момента (29)–(31) от числа Кориолиса. При больших значениях аргумента обе составляющие потоков пропорциональны Ω^{*3} .

Это означает, что меридиональный поток углового момента мал, а радиальный поток направлен к центру (отрицателен) при преимущественно радиальном перемешивании и к поверхности при преобладании горизонтальных скоростей в соответствии с изложенными выше качественными соображениями.

В противоположном предельном случае быстрого вращения ($\Omega^* \gg 1$) функции (30) обратно пропорциональны третьей степени числа Кориолиса:

$$U = -\frac{H}{3} = -\frac{3a\pi}{8\Omega^{*3}}.$$

Такой результат может показаться странным, поскольку U и H не могут зависеть от направления вращения, т.е. должны быть четными функциями угловой скорости. Так оно и есть, что можно видеть из явного выражения, например, для функции $I_1(\Omega^*)$ из формулы (30):

$$I_1(\Omega^*) = \frac{3}{4\Omega^{*4}} \left(-15 + \frac{2\Omega^{*2}}{1 + \Omega^{*2}} + \frac{3\Omega^{*2} + 15}{\Omega^*} \arctg(\Omega^*) \right). \quad (32)$$

Функция (32) четная, но пропорциональна Ω^{*-3} при больших значениях Ω^* .

Важнейшим для теории дифференциального вращения оказалось обнаружение того, что не только анизотропия, но и неоднородность турбулентной среды приводит к возникновению A -эффекта. Наиболее существенной является неоднородность плотности [70, 71]. Стратификация плотности с учетом условия неупругости (5) влияет на турбулентность. При этом неизбежно возникает и анизотропия [72], но результирующий A -эффект нельзя приписать исключительно этой анизотропии.

Недиссипативные потоки углового момента, возникающие из-за неоднородности плотности турбулентной среды, даются прежней формулой (29), но в этом случае

$$U = \left(\frac{\ell}{H_\rho} \right)^2 J_0(\Omega^*), \quad H = \left(\frac{\ell}{H_\rho} \right)^2 J_1(\Omega^*), \quad (33)$$

где $H_\rho = -1/(d \ln(\rho)/dr)$ — масштаб неоднородности плотности, а функции J_0 и J_1 показаны на рис. 7.

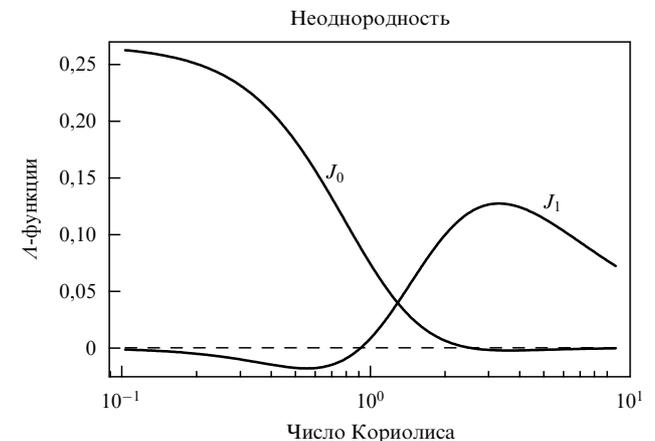


Рис. 7. Зависимости потоков углового момента (33), возникающих из-за неоднородности плотности, от числа Кориолиса (25). При больших числах Кориолиса $J_1 \sim 1/\Omega^*$.

Отметим еще раз, что в предельном случае медленного вращения только радиальный поток углового момента отличен от нуля: $J_0(0) = 4/15$ и $J_1(0) = 0$ [71]. Для приложений важнее противоположный предельный случай $\Omega^* \gg 1$, для которого имеем $J_1 = \pi/(4\Omega^*)$ и $J_0 = O(\Omega^{*-3})$. То, что при быстром вращении Λ -эффект обратно пропорционален числу Кориолиса, не означает малой величины дифференциального вращения [35], поскольку, как мы увидим, эффективные вязкости также показывают аналогичное поведение. Очень существенно, что при больших числах Кориолиса вклад неоднородности в Λ -эффект больше вклада анизотропии. Причины этого до конца не ясны. Возможно, дело в том, что быстрое вращение может существенно влиять на анизотропию турбулентности, но практически не меняет стратификации. Сравнение рис. 6 и 7 показывает, что уже для Солнца с $\Omega^* \simeq 6$ неоднородность дает основной вклад, а для молодых звезд с периодами вращения в несколько суток этот вклад является абсолютно доминирующим.

Данное обстоятельство оказывается весьма "удачным" для теории. Дело в том, что анизотропия звездной конвекции изучена недостаточно хорошо. Будь она существенной, это привнесло бы в модели дифференциального вращения свободный параметр. Однако для случая $\Omega^* \gg 1$, характерного для абсолютного большинства звезд, анизотропия не играет роли. Существенна лишь неоднородность, которая для звездных конвективных оболочек известна с высокой точностью. Как отмечалось в разделе 3.1, стратификация в конвективных зонах мало отличается от адиабатической. Именно по этим причинам современные модели дифференциального вращения практически не содержат свободных параметров.

4.3. Эффективные вязкости

Эффективные вязкости (11) определяются выражением (12) лишь в простейшем случае изотропной турбулентности и для невращающейся среды. Под влиянием вращения появляется анизотропия, и тензор эффективных вязкостей существенно усложняется. В данном разделе мы не будем учитывать анизотропию исходной турбулентности, или эффекты неоднородности среды, как это делалось при расчете Λ -эффекта. Такое приближение допускается методом теории возмущений: неоднородное течение в (11) появляется из-за анизотропии либо неоднородности, уже учтенных в Λ -эффекте. Крупномасштабная скорость \mathbf{V} в (11) уже неявно содержит вклад анизотропии турбулентности и/или неоднородности. Нет нужды учитывать эти вклады еще раз в расчетах тензора \mathcal{N} . Мы вернемся к этому обстоятельству несколько позже.

Расчет эффективных вязкостей для вращающейся среды был проведен в [73]:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{ijkl} = & v_1(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{jk}\delta_{il}) + v_2\left(\delta_{il}\frac{\Omega_j\Omega_k}{\Omega^2} + \delta_{jl}\frac{\Omega_i\Omega_k}{\Omega^2} + \right. \\ & \left. + \delta_{ik}\frac{\Omega_j\Omega_l}{\Omega^2} + \delta_{jk}\frac{\Omega_i\Omega_l}{\Omega^2} + \delta_{kl}\frac{\Omega_i\Omega_j}{\Omega^2}\right) + \\ & + v_3\delta_{ij}\delta_{kl} - v_4\delta_{ij}\frac{\Omega_k\Omega_l}{\Omega^2} + v_5\frac{\Omega_i\Omega_j\Omega_k\Omega_l}{\Omega^4}. \end{aligned} \quad (34)$$

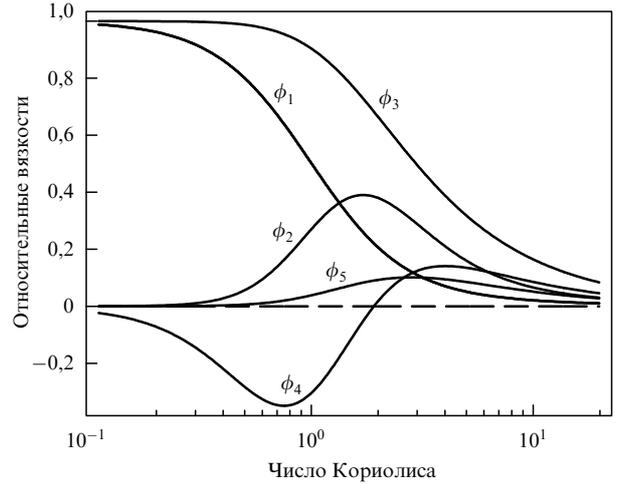


Рис. 8. Зависимости относительных вязкостей ϕ_n из уравнения (35) от Ω^* . При больших значениях аргумента все вязкости меняются пропорционально Ω^{*-1} .

Коэффициенты в этом уравнении зависят от числа Кориолиса (25)

$$v_n = v_T \phi_n(\Omega^*), \quad v_T = \frac{4}{15} \tau \langle u^2 \rangle^\circ, \quad (35)$$

где v_T — эффективная вязкость для невращающейся среды, которую можно выразить через сверхадиабатичность стратификации с помощью формулы (26). Явные выражения для функций $\phi_n(\Omega^*)$ приведены в [73]. Их зависимости от Ω^* показаны на рис. 8. Для невращающейся среды только v_1 и v_3 отличны от нуля, и (34) превращается в (12). При быстром вращении все эффективные вязкости обратно пропорциональны числу Кориолиса: $\phi_n = O(\Omega^{*-1})$.

Сложная структура тензора (34) означает, что величина эффективной вязкости зависит от взаимной ориентации вектора скорости и направления ее неоднородности, а также от расположения этих направлений относительно оси вращения. Например, в случае сдвигового течения, в котором как скорость, так и ее градиент нормальны к оси вращения, действует вязкость $v_{\perp\perp} = v_1$. Для нормальной скорости и продольного градиента применима вязкость $v_{\perp\parallel} = v_1 + v_2$. Точно такая же вязкость $v_{\parallel\perp} = v_{\perp\parallel}$ действует, когда скорость сдвигового течения параллельна оси вращения и неоднородна вдоль направления, нормального к этой оси, и т.д. Наконец выпишем вязкие потоки углового момента, противодействующие недиссипативным потокам (29) [62, 44]:

$$\begin{aligned} Q_{\phi r}^v = & -v_1 r \sin \vartheta \frac{\partial \Omega}{\partial r} - v_2 \sin \vartheta \cos \vartheta \left(r \cos \vartheta \frac{\partial \Omega}{\partial r} - \sin \vartheta \frac{\partial \Omega}{\partial \vartheta} \right), \\ Q_{\phi \vartheta}^v = & -v_1 \sin \vartheta \frac{\partial \Omega}{\partial \vartheta} - v_2 \sin^2 \vartheta \left(\sin \vartheta \frac{\partial \Omega}{\partial \vartheta} - r \cos \vartheta \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (36)$$

Необходимо отметить еще два обстоятельства, касающихся эффективных вязкостей.

В относительно давних работах [26, 65, 66, 74] причиной дифференциального вращения называли анизотропную вязкость, а не недиссипативные потоки

углового момента (A -эффект см. в разделе 4.2). Выше мы рассматривали потоки углового момента во вращающейся системе отсчета и определили полные нелинейные зависимости их недиссипативных и вязких составляющих от скорости вращения среды, которая фактически являлась угловой скоростью системы отсчета. В принципе возможен и другой, более компактный способ определения тех же характеристик. Для инерциальной системы отсчета в корреляционном тензоре (10) может присутствовать лишь второе слагаемое Q^v (11), а Q^d должно быть равно нулю. Это следует из галилеевской инвариантности напряжений Рейнольдса (7).

Противоречия с предшествующим обсуждением здесь нет. Дело в том, что анизотропная турбулентность приводит к тензору эффективных вязкостей, который не удовлетворяет принципу симметрии кинетических коэффициентов, $\mathcal{N}_{ijkl} = \mathcal{N}_{klij}$ [75] (из определения (7) следует лишь симметрия относительно перестановки двух первых индексов, $\mathcal{N}_{ijkl} = \mathcal{N}_{jikl}$). Для однородного вращения $\mathbf{V} = \mathbf{e}_\phi r \sin \vartheta \Omega$ из формулы (11) имеем

$$\begin{aligned} Q_{\phi r} &= (\mathcal{N}_{r\phi r\phi} - \mathcal{N}_{r\phi\phi r}) \sin \vartheta \Omega + (\mathcal{N}_{r\phi\vartheta\vartheta} - \mathcal{N}_{r\phi\vartheta\vartheta}) \cos \vartheta \Omega, \\ Q_{\phi\vartheta} &= (\mathcal{N}_{\vartheta\phi r\phi} - \mathcal{N}_{\vartheta\phi\phi r}) \sin \vartheta \Omega + (\mathcal{N}_{\vartheta\phi\vartheta\vartheta} - \mathcal{N}_{\vartheta\phi\vartheta\vartheta}) \cos \vartheta \Omega. \end{aligned} \quad (37)$$

Эти выражения соответствуют недиссипативным потокам углового момента, т.е. A -эффекту. Иными словами, существует принципиальная возможность описания напряжений Рейнольдса, используемых в теории дифференциального вращения, исключительно с помощью тензора турбулентных вязкостей. Для этого нужно вычислить тензор вязкостей с учетом анизотропии турбулентности, а также его полной зависимости от усредненной скорости. Такая программа, однако, затруднительна для практической реализации. Гораздо дальше удастся продвинуться, проводя вычисления во вращающейся системе отсчета с разделением недиссипативных и диссипативных составляющих тензора напряжений. Кроме того, такой "единый подход" приводит к путанице из-за введения эффектов генерации крупномасштабных течений через величины, формально называемые вязкостями. Заметим, что тензор (34) удовлетворяет принципу симметрии кинетических коэффициентов и дает нуль при подстановке в (37).

Второе замечание близко к предыдущему. Формальный вывод тензора турбулентных вязкостей дает наряду с вкладом, выписанным в (34), также нечетные вклады относительно угловой скорости [73]. Они не имеют отношения к турбулентной диссипации, но дают генерацию крупномасштабного течения: из-за неоднородного вращения возбуждается меридиональная циркуляция и, наоборот, из меридионального течения генерируется неоднородное вращение [76]. Все это очень близко к известному в теории гидромагнитного динамо $\mathbf{\Omega} \times \mathbf{J}$ -эффекту генерации магнитных полей [77], который также появляется при формальном выводе тензора турбулентной диффузии магнитного поля. Нечетные относительно Ω вклады в тензоре эффективных вязкостей могут представлять интерес для гидромеханики средних полей и, возможно, даже приводить к самовозбуждению глобальных течений во вращающихся турбулентных телах. Эта возможность еще должным образом не изучена. Однако для задачи о дифференциальном вращении, в которой имеются более существ-

венные причины для поддержания неоднородного вращения и меридионального течения, она, по всей вероятности, не имеет значения.

4.4. Эффективные теплопроводности

Эффективные теплопроводности (18)–(20) для вращающейся турбулентной среды были рассчитаны в [73]. Структура тензора (18) означает, что во вращающейся среде турбулентная теплопроводность χ_{\parallel} для направления вдоль оси вращения больше соответствующего коэффициента переноса χ_{\perp} для направлений, поперечных к этой оси:

$$\chi_{\perp} = \chi_T \phi(\Omega^*), \quad \chi_{\parallel} = \chi_T (\phi(\Omega^*) + \phi_{\parallel}(\Omega^*)). \quad (38)$$

Приведенные на рис. 9 зависимости от числа Кориолиса (25) показывают, что для быстрого вращения теплопроводности для двух указанных направлений различаются в два раза.

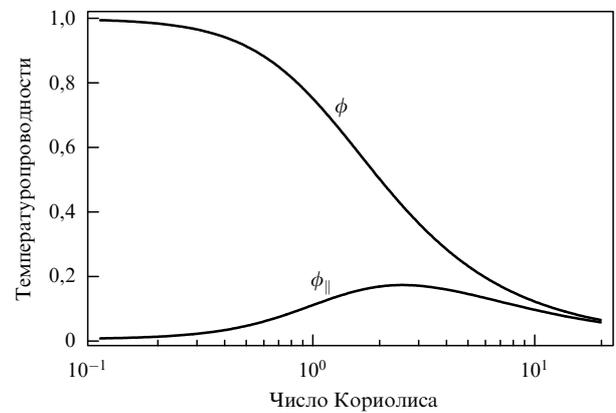


Рис. 9. Зависимости относительных теплопроводностей из уравнений (18), (38) от числа Кориолиса (по расчетам [73]). При медленном вращении теплопроводность изотропна. Вращение вызывает анизотропию. При быстром вращении теплопроводность вдоль оси вращения в два раза выше, чем для направлений, поперечных к этой оси.

Коэффициент переноса χ_T для невращающейся среды зависит от сверхадиабатичности:

$$\chi_T = -\frac{\tau \ell^2 g}{12c_p} \frac{\partial S}{\partial r}. \quad (39)$$

Поэтому уравнение для удельной энтропии (16) является нелинейным.

Уравнения для крупномасштабных (усредненных) полей раздела 3 вместе с A -эффектом и турбулентными коэффициентами переноса, обсуждавшимися в данном разделе, представляют достаточную основу для количественных моделей дифференциального вращения, к обсуждению которых мы переходим.

5. Модели

5.1. Предварительные замечания

На рисунке 10 показана общая схема формирования дифференциального вращения в конвективных оболочках звезд. Представленные на ней процессы обсуждались

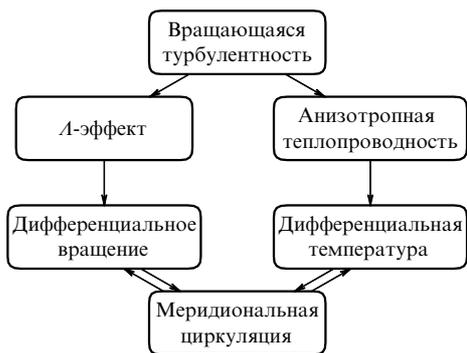


Рис. 10. Общая схема формирования дифференциального вращения во вращающейся конвективной оболочке звезды.

в разделе 3. Разумеется, можно найти и другие факторы, не представленные на рис. 10, которые в принципе могут влиять на дифференциальное вращение, но ни один из них, по всей вероятности, не оказывает сколько-нибудь существенного влияния. Включение в модель второстепенных эффектов кажется противоречащим смыслу моделирования.

В то же время ни один элемент схемы, показанной на рис. 10, нельзя исключить без существенных последствий для результата. Это подтверждает история развития моделей дифференциального вращения, которая коротко и без претензий на полноту излагается в данном разделе.

Идея Киппенхана [36] о том, что для наблюдаемой на Солнце широтной неоднородности вращения достаточно радиального потока углового момента (радиального A -эффекта), стимулировала целый ряд работ и в конечном счете привела к созданию количественной модели [78]. В ней не учитывались термодинамические эффекты, представленные в правой части рис. 10. Радиальный A -эффект, о котором в то время говорили как об анизотропии турбулентной вязкости, приводил к радиальной неоднородности угловой скорости. Такая неоднородность в свою очередь неизбежно приводит к возникновению меридиональной циркуляции из-за непотенциальных центробежных сил. Обратное влияние меридионального течения на вращение приводит к его широтной неоднородности. Выяснилось, что для относительно быстрого вращения экватора требуется анизотропная турбулентность, в которой горизонтальные скорости больше радиальных. Уже в то время обнаружили слаботи чисто гидродинамических моделей: при характерных для Солнца больших числах Тейлора дифференциальное вращение меньше наблюдаемого и угловая скорость постоянна на цилиндрических поверхностях. Такое состояние вращения противоречит данным гелиосейсмологии, в то время, впрочем, еще не известным. Кроме того, расчетная меридиональная циркуляция на поверхности направлена от полюсов к экватору (противоположно наблюдаемой) [49].

Дифференциальное вращение можно получить и вовсе без A -эффекта, только за счет бароклинной меридиональной циркуляции. При этом игнорируются процессы в левой части рис. 10. Первая из моделей такого рода была представлена в работе [79]. Затем аналогичный подход развивался в [80, 81]. При этом учитывалась дифференциальная температура, возникающая в резуль-

тате зависимости радиальной теплопроводности (19) от широты, а недиагональные компоненты (20) не учитывались. Выяснилось, что в таких моделях можно получить наблюдаемую на Солнце величину дифференциального вращения, но для этого, во-первых, требуется дифференциальная температура, превышающая максимальную величину ~ 5 К, которую допускают наблюдения, и, во-вторых, меридиональное течение (на поверхности) от полюсов к экваторам. Кроме того, и распределение угловой скорости, как теперь ясно, не соответствовало гелиосейсмологическим данным.

Постепенно произошло осознание того, что реалистичные модели требуют учета как A -эффекта, так и термодинамических вкладов [82–84]. Только в таких моделях удается удовлетворить всем ограничениям, следующим из наблюдений. При этом, однако, возникает другая трудность. Необходимые для моделирования характеристики турбулентности, обсуждавшиеся в разделе 4, известны не были. Поэтому они вводились как свободные параметры. Число таких параметров было значительным. Оставалось неясным, является соответствие наблюдениям реальным достижением или следствием умелого подбора параметров. После того как произвол был практически исключен в результате развития теории турбулентных эффектов (см. раздел 4), модели, как ни удивительно, оказались еще более успешными. Они не только воспроизвели данные гелиосейсмологии для Солнца, но и дали предсказания для звезд, получающие определенные подтверждения в наблюдениях.

Для полноты картины заметим, что развитие теории A -эффекта для произвольных скоростей вращения открыло возможность построения простейших моделей, в которых не учитывается ни меридиональная циркуляция, ни анизотропия турбулентного теплопереноса. Широтная неоднородность вращения при этом возникает из-за нелинейного по Ω^* меридионального потока углового момента (29). Такие модели [35, 71] дали неплохие результаты для Солнца, но их предсказания для звезд оказались совершенно неверными (см., например, [85]). Ясно, что модели, основанные исключительно на напряжениях Рейнольдса, не являются согласованными: они пренебрегают меридиональным течением, которое должно возникать для получаемого в моделях дифференциального вращения.

5.2. Модели средних полей

В данном разделе сформулированы модели дифференциального вращения, основанные на гидромеханике средних полей, обсуждавшейся в разделах 3 и 4. В этих моделях практически отсутствуют свободные параметры. Имеется, тем не менее, ряд входных параметров, которые определяют, для какой именно звезды будет рассчитано дифференциальное вращение.

Хотя устройство таких моделей можно отнести к "техническим деталям", мы кратко его обсудим, чтобы были ясны основные предположения и допущения, которые, разумеется, в моделях имеются.

5.2.1. Исходная атмосфера. Приповерхностные области звезды отличаются сильной пространственной неоднородностью, что создает трудности для вычислений. Поэтому тонкий сферический слой вблизи поверхности исключают из рассмотрения, и верхнюю границу обла-

сти моделирования помещают на относительном расстоянии $x_e = r_e/R < 1$.

Предполагается, что форма звезды близка к сферической, т.е. центробежная сила мала по сравнению с гравитационной и вращение слабо влияет на строение звезды. Для расчетов требуются плотность ρ_e и температура T_e на внешней границе $r = r_e$, которые нужно взять из соответствующей модели строения звезды [86]. Как отмечалось в разделе 3, стратификация в конвективных зонах звезд близка к адиабатической. Поэтому хорошим приближением для распределения термодинамических характеристик (малые отклонения от которого рассчитываются в модели) является адиабатическая стратификация, для которой с учетом гидростатического равновесия имеем

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{g(r)}{c_p}, \quad \frac{dg}{dr} = -2\frac{g}{r} + 4\pi G\rho, \quad \rho = \rho_e \left(\frac{T}{T_e}\right)^{1/(\gamma-1)}, \quad (40)$$

где γ — показатель адиабаты и G — гравитационная постоянная.

Уравнения (40) интегрируются (численно) от верхней границы области моделирования до расстояния $x_i = r_i/R$, где лучистый поток тепла

$$\mathbf{F}^{\text{rad}} = -\frac{16\sigma T^3}{3\kappa\rho} \nabla T, \quad (41)$$

соответствует светимости звезды L : $F^{\text{rad}} = L/(4\pi r_i^2)$. На этом расстоянии располагается основание конвективной зоны — нижняя граница области моделирования. Еще ниже находится лучистая зона с устойчивой стратификацией, где турбулентность отсутствует. Здесь непосредственно под основанием конвективного слоя располагается так называемый тахоклин — тонкий переходный слой от дифференциального к однородному вращению, который будет обсуждаться отдельно.

Непрозрачность κ из уравнения (41) для конвективных зон подобных Солнцу звезд неплохо описывается формулой Крамерса $\kappa = c_\kappa \rho T^{-7/2}$, где c_κ зависит от химического состава (для Солнца $c_\kappa = 2,04 \times 10^{24}$ ед. СГС). На практике величина x_i также берется из моделей строения звезд, а соответствующее ему значение c_κ подбирается так, чтобы расчетная величина x_i совпала с заданной.

5.2.2. Исходная турбулентность. Коэффициенты переноса для исходной турбулентности определяются через фактическую сверхадиабатичность среды с помощью уравнения (26):

$$\nu_T = -\frac{\tau \ell^2 g}{15c_p} \frac{\partial S}{\partial r}, \quad \chi_T = \frac{5\nu_T}{4}. \quad (42)$$

Распределение энтропии S должно определяться из системы уравнений модели, поэтому уравнения с коэффициентами переноса (42) являются нелинейными.

Длина перемешивания ℓ принимается пропорциональной шкале высот:

$$\ell = \alpha_{\text{MLT}} H_p = \frac{\alpha_{\text{MLT}} P}{\rho g}. \quad (43)$$

Коэффициент пропорциональности α_{MLT} , как правило, является единственным свободным параметром (те

случаи, когда это не так, оговариваются особо). Как мы увидим, результаты малочувствительны к изменениям этого параметра.

Время перемешивания τ для невращающейся среды можно определить из решения S_0 стационарного уравнения (16) с изотропной теплопроводностью, в котором (в отсутствие вращения) исчезает вклад меридиональной циркуляции:

$$\tau = \left(-\frac{g}{4c_p} \frac{\partial S_0}{\partial r}\right)^{-1/2}. \quad (44)$$

Предполагается, что время τ не зависит от скорости вращения. Тогда расчеты по формуле (44) можно использовать в определении числа Кориолиса (25), в котором Ω — локальная скорость неоднородного вращения. В результате все коэффициенты переноса сложным образом зависят от этой скорости (см., например, (32)), что привносит дополнительную нелинейность в уравнения модели. Предположение об отсутствии зависимости времени перемешивания от скорости вращения является, по всей вероятности, довольно грубым, но избежать его не удастся.

5.2.3. Система уравнений, граничные условия, входные параметры. Модель определяет распределения угловой скорости, меридиональной циркуляции и удельной энтропии в конвективной оболочке звезды путем численного решения системы стационарных уравнений (9), (13) и (16) с напряжениями Рейнольдса и турбулентными теплопроводностями, определенными в разделе 4.

В качестве граничных условий для крупномасштабного течения используется равенство нулю напряжений Рейнольдса (7),

$$R_{\phi r} = R_{\theta r} = 0, \quad (45)$$

на верхней (r_e) и нижней (r_i) границах. Условие (45) означает отсутствие внешних поверхностных сил. Кроме того, границы считаются "закрытыми", т.е. радиальная составляющая усредненной скорости обращается на границах в нуль.

Поток тепла на нижней границе полагается постоянным во времени и не зависящим от широты, $F_r = L/(4\pi r_i^2)$. Предполагается, что внешняя граница излучает как абсолютно черное тело. Некоторые осложнения связаны с тем, что верхняя граница области моделирования располагается несколько ниже поверхности звезды. Поэтому приходится использовать дополнительное предположение о том, что тонкий слой $r_e < r < R$ является идеальным теплообменником, т.е. обладает очень высокой эффективной теплопроводностью, так что все возмущения энтропии (невозмущенная энтропия здесь полагается равной нулю) в основании этого слоя без каких-либо искажений проявляются на излучающей поверхности [29]. Тогда для $r = r_e$ выполняется условие

$$F_r = \frac{L}{4\pi r_e^2} \left(1 + \frac{TS}{c_p T_{\text{eff}}}\right)^4, \quad (46)$$

где $T_{\text{eff}} = (L/(4\pi\sigma R^2))^{1/4}$ — эффективная температура звезды.

Для A -эффекта учитывается лишь наиболее существенная его составляющая (33), связанная с неоднородностью плотности, а вклад анизотропии (30) отбрасывается. Такое приближение уменьшает число свободных параметров, но может приводить к некоторым погрешностям, обсуждаемым в разделе 6.1.

Мы не будем останавливаться на методах численного решения уравнений. Заметим лишь, что пограничные слои (см. окончание раздела 3.2) требуют высокого пространственного разрешения по радиусу. Попытки исключить эти слои, например, учитывая их влияние в каком-либо образом модифицированных граничных условиях, не дали результата.

Модель требует задания девяти параметров, среди которых: радиус R , светимость L и масса M звезды, средняя скорость вращения Ω_0 , относительные радиусы основания конвективной зоны x_i и верхней границы области моделирования x_e , плотность ρ_e и температура T_e на верхней границе, а также параметр α_{MLT} теории длины перемешивания. Число параметров велико, но лишь в выборе α_{MLT} имеется некоторая свобода. Остальные параметры являются не свободными, но входными, т.е. они определяют, для какой именно звезды будет рассчитано дифференциальное вращение.

5.2.4. Оценка ожидаемого дифференциального вращения.

Оценить ожидаемое дифференциальное вращение можно из уравнения для меридионального течения (13). Для больших чисел Тейлора (15) левая часть уравнения (13) мала по сравнению с каждым из слагаемых в правой части. Для основного объема конвективной зоны два вклада в правой части уравнения уравновешивают друг друга, т.е. выполняется баланс Тейлора–Праудмана. Оценивая неоднородность угловой скорости вдоль оси вращения как $\partial\Omega/\partial z \sim \Delta\Omega/R$, находим

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega} \sim \frac{g\nabla S}{\Omega^2 c_p} \sim \frac{\langle u^2 \rangle^\circ}{\ell^2 \Omega^2 \sqrt{\phi(\Omega^*)}}, \quad (47)$$

где относительная температуропроводность $\phi(\Omega^*)$ для больших чисел Кориолиса ведет себя как $\phi \simeq 1/\Omega^*$ [73]. Тогда приходим к оценке

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega} \sim \frac{4}{\Omega^{*3/2}}. \quad (48)$$

Численные расчеты неплохо согласуются с оценкой (48) для скоростей вращения, близких к солнечной, но при больших скоростях $\Delta\Omega/\Omega$ уменьшается с Ω^* медленнее, чем следует из (48). Возможно, это связано с влиянием пограничных слоев, в которых баланс Тейлора–Праудмана нарушается.

Тем не менее из оценки (48) следуют два важных вывода, которые по крайней мере качественно подтверждаются как модельными расчетами, так и наблюдениями дифференциального вращения звезд.

1. Для звезд данного спектрального класса (данного τ (44)) абсолютная величина дифференциального вращения $\Delta\Omega$ слабо зависит от скорости вращения.

2. Для фиксированной угловой скорости Ω звезды более поздних спектральных классов (меньших масс) вращаются более однородно.

Второй из этих выводов следует из увеличения времени перемешивания τ с уменьшением массы звезды [86].

5.2.5. Тахоклин. Нижней границей для изложенной модели дифференциального вращения является основание конвективной зоны. Еще ниже располагается так называемый тахоклин — тонкий переходный слой от дифференциального к однородному вращению (см. рис. 2). Процессы, формирующие тахоклин, по всей вероятности, не имеют прямого отношения к дифференциальному вращению конвективной зоны, и переходный слой должен рассматриваться отдельно.

Высказывались различные гипотезы о происхождении тахоклина. Обсуждаемые ниже результаты получены с помощью модели, в которой переходный слой возникает из-за реликтового магнитного поля лучистой зоны [87–89]. Полной уверенности в правильности такой модели нет, но она является на данное время единственным подходом, позволяющим получить тахоклин из решения МГД-уравнений. Для возникновения тахоклина достаточно реликтового поля напряженностью всего лишь 10^{-3} Гс [87]. Наличие такого поля не может иметь заметных последствий для формирования дифференциального вращения в конвективной зоне звезды. Расчеты неоднородного вращения ведутся с помощью изложенной выше модели независимо от расчетов переходного слоя, но они поставляют граничное условие для модели тахоклина — распределение угловой скорости на нижней границе конвективной зоны [90].

Высказывались и другие гипотезы о происхождении тахоклина, не связанные с реликтовым магнитным полем [91–94]. В них так или иначе привлекается неустойчивость дифференциального вращения в лучистой зоне, которая, как полагают, должна разрушать неоднородность вращения. Основная трудность таких подходов связана с тем, что неустойчивость развивается при превышении величиной дифференциального вращения некоторого порогового значения. Развитие неустойчивостей обычно приводит подверженные им системы к пороговым относительно этих неустойчивостей состояниям. Поэтому неустойчивость неоднородно вращающейся лучистой зоны могла бы уменьшить величину дифференциального вращения, но не привести к его полному исчезновению.

5.3. Результаты моделей средних полей

5.3.1. Солнце. Входные параметры для "стандартной" модели солнечного дифференциального вращения приведены в табл. 2 следующего раздела. Вспомним, что усредненная по широте угловая скорость Солнца $\Omega_0 = 2,87 \times 10^{-6}$ рад с^{-1} . Наилучшие результаты в теории строения звезд получаются для $1,5 < \alpha_{\text{MLT}} < 2$ [86]. Если не оговаривается противное, обсуждаемые ниже расчеты относятся к случаю $\alpha_{\text{MLT}} = 1,7$.

Расчетное распределение угловой скорости приведено на рис. 11. Эти результаты в общих чертах согласуются с данными гелиосейсмологии о внутреннем вращении Солнца [7, 8] (см. рис. 2). Во всем объеме конвективной зоны имеется так называемое экваториальное ускорение: угловая скорость возрастает от полюсов к экватору. Его величина несколько уменьшается с глубиной. Под конвективной зоной располагается тонкий переходный слой от дифференциального к твердотельному вращению. В основном объеме лучистой зоны вращение практически однородно. Расчетное вращение поверхности практически повторяет данные доплеровских измерений (см. рис.1).

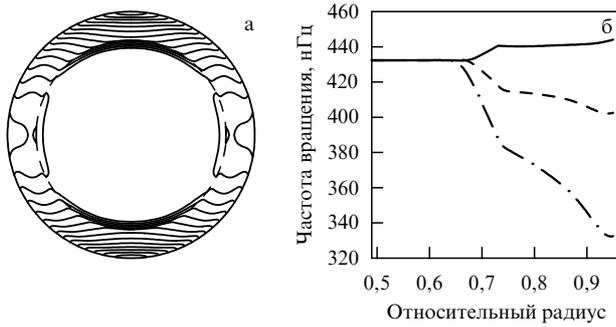


Рис. 11. Расчетные изолинии угловой скорости (а) и зависимости скорости вращения от глубины (б) на экваторе (сплошная линия), широте 45° (штриховая линия) и на полюсе (штрихпунктирная линия).

Некоторые несоответствия между модельными расчетами и данными наблюдений обнаруживаются вблизи внешней поверхности. Они особенно заметны в расчетной меридиональной циркуляции, показанной на рис. 12. Обращает на себя внимание изменение направления меридиональной циркуляции на малых глубинах, так что на поверхности течение направлено к экватору. Наблюдения показывают течение к полюсам [49].

Эти несоответствия могут быть связаны с тем, что используемый в модели Λ -эффект обусловлен исключительно неоднородностью плотности. Вклад анизотропии турбулентности отброшен. Из сравнения рис. 6 и рис. 7 видно, что вклады анизотропии малы при больших числах Кориолиса. Зависимость числа Кориолиса от глубины в конвективной зоне Солнца показана на рис. 13. В глубоких слоях Солнца это число существенно больше единицы, и анизотропия не играет роли. Однако вблизи поверхности $\Omega^* \sim 1$, поэтому анизотропия может иметь значение.

Недавние расчеты [90] показали, что учет анизотропии действительно позволяет улучшить согласие с наблюдениями. В том случае, когда радиальные скорости исходной турбулентности приблизительно на 10% больше горизонтальных, получается одна ячейка меридиональной циркуляции с течением к полюсам на поверхности и к экватору вблизи основания конвектив-

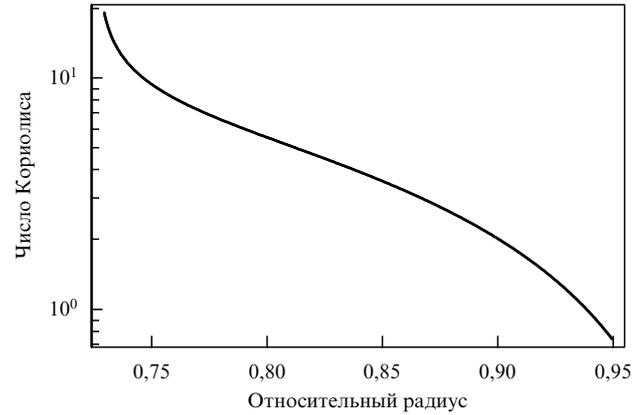


Рис. 13. Число Кориолиса, $2\tau\Omega_0$, в зависимости от глубины в конвективной зоне Солнца.

ной зоны. Однако, как отмечалось в разделе 4.2, учет анизотропии привносит свободный параметр. Модели средних полей основаны на квазилинейной теории эффектов турбулентности и не могут претендовать на высокую точность. Вряд ли устранение тонких различий с наблюдениями может компенсировать произвол, возникающий при использовании дополнительного свободного параметра.

Заметим, что в расчетах дифференциального вращения звезд наибольший интерес представляет случай быстрого вращения ($\Omega^* \gg 1$), для которого анизотропия не играет роли. Все обсуждаемые ниже результаты получены для Λ -эффекта, обусловленного исключительно неоднородностью. В этом случае можно варьировать лишь параметр α_{MLT} , и лишь в относительно узких пределах. Дело в том, что этот параметр используется также в теории строения звезд, где он оказывает заметное влияние на расчетный радиус звезды [13, 86], и лишь его значения в интервале, представленном в табл. 1, дают приемлемые результаты. Как видно из табл. 1, результаты модельных расчетов слабо зависят от величины α_{MLT} . Заметим, что расчетная дифференциальная температура находится в пределах ограничений, налагаемых наблюдениями. В моделях температура на полюсах выше, чем на экваторе.

Таблица 1. Зависимость от α_{MLT}

α_{MLT}	1,4	1,7	2,0	2,3
$\Delta\Omega/\Omega$	0,30	0,26	0,23	0,21
$\Delta T, K$	5,7	4,5	3,6	3,0

5.3.2. Звезды, подобные Солнцу. Параметры подобных Солнцу звезд главной последовательности, для которых проводились расчеты дифференциального вращения, приведены в табл. 2. Звезда спектрального класса G2 и есть Солнце. Представляется интересным рассчитать

Таблица 2. Параметры звезд главной последовательности

Звезда	M/M_\odot	L/L_\odot	R/R_\odot	x_i	x_c	$\rho_c, g\ cm^{-3}$	T_c, K
G2	1	1	1	0,73	0,95	$7,46 \times 10^{-3}$	$2,86 \times 10^5$
K5	0,7	0,133	0,644	0,69	0,95	$6,77 \times 10^{-2}$	$3,43 \times 10^5$

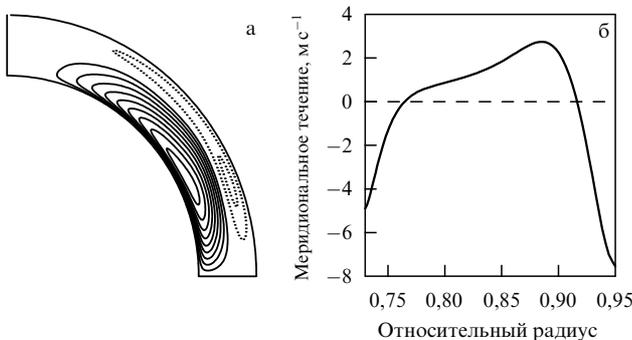


Рис. 12. Линии тока меридионального течения (а) и зависимость меридиональной скорости от радиуса для широты 45° (б). Отрицательные значения скорости означают течение к экватору. Сплошные линии тока соответствуют циркуляции против часовой стрелки, штриховые — по часовой.

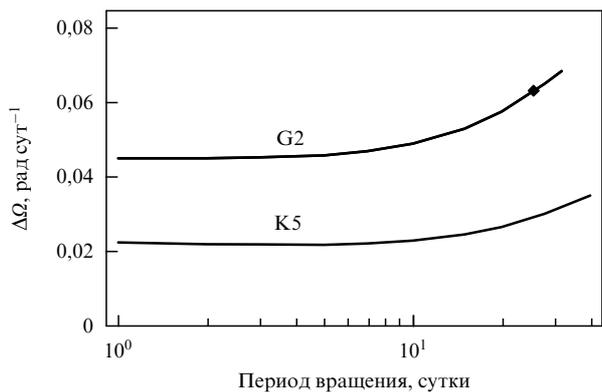


Рис. 14. Расчетные зависимости различия угловых скоростей между экватором и полюсом $\Delta\Omega = \Omega_{eq} - \Omega_{pole}$ от периода вращения для карликовых звезд главной последовательности. Значком отмечен результат для Солнца.

дифференциальное вращение для эпохи молодости Солнца, когда оно вращалось гораздо быстрее, чем в наше время. В этих расчетах не будет учитываться изменение строения звезды с возрастом. Вторая звезда имеет относительно малую массу и относится к спектральному классу K5.

Наблюдения дают лишь дифференциальное вращение на поверхностях звезд. Расчетные зависимости от периода вращения показаны на рис. 14. Другие расчетные характеристики можно найти в [24, 25]. Для некоторого фиксированного спектрального класса абсолютная величина дифференциального вращения остается практически постоянной для достаточно малых периодов. Имеется, однако, существенная зависимость от массы звезды. Для более раннего спектрального класса неоднородность вращения больше. Как отмечалось в разделе 5.2, это может быть связано с относительно медленной конвекцией для более поздних спектральных классов.

Для быстро вращающихся звезд становятся существенными пограничные слои, о которых говорилось в разделе 3.2. Пример показан на рис. 15, где видна концентрация меридионального течения в тонких слоях вблизи границ конвективной зоны. Пограничные слои более выражены для звезд поздних спектральных классов.

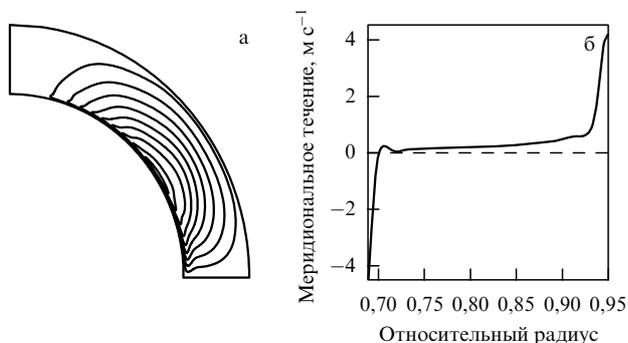


Рис. 15. Линии тока меридиональной циркуляции (а) и ее скорость для широты 45° в зависимости от радиуса (б) для звезды K5 с периодом вращения 10 сут. Меридиональное течение концентрируется в тонких слоях вблизи границ конвективной оболочки, где нарушается условие баланса Тейлора – Праудмана.

сов, поскольку для числа Тейлора (15) справедлива оценка $Ta \approx 10\Omega^2(R/\ell)^4$ [25], согласно которой Ta больше для более поздних спектральных классов при фиксированном периоде вращения.

Предсказания теории неплохо согласуются с недавними измерениями дифференциального вращения методом доплеровских изображений для звезд спектральных классов K и G (см. рис. 4 и работу [23]). Возрастание неоднородности вращения с массой звезды, по-видимому, продолжается для F-звезд [95, 96].

Имеются, однако, противоречия с более ранними определениями зависимости дифференциального вращения от угловой скорости по длинным рядам фотометрических наблюдений [97, 98]. Найденные зависимости аппроксимировались степенным законом $\Delta\Omega \sim \Omega^n$. Были получены значения $n \approx 0,15$ [97] и $n \approx 0,7$ [98], в то время как для расчетных зависимостей на рис. 14 $n \approx 0$. Причина расхождения, как отмечалось в [99], может состоять в том, что для определения дифференциального вращения использовались большие группы звезд без разделения по спектральным классам. Относительно большие периоды вращения были представлены в основном K-звездами, а самые малые — F-звездами. При этом определяемая из наблюдений зависимость как бы переходит с нижней кривой рис. 14 для больших периодов на верхнюю кривую при меньших периодах. Ясно, что при этом значение показателя n завышается.

5.3.3. Гиганты. Другим классом звезд, для которых теория дифференциального вращения может найти применение, являются гиганты III класса светимости, или "нормальные" гиганты. Это звезды, в несколько раз превосходящие Солнце по массе и в десятки раз — по светимости. Они уже завершили свое пребывание на главной последовательности. По ходу последующей эволюции нормальные гиганты приобретают внешние конвективные зоны и становятся похожими по своему строению на обсуждавшиеся выше карликовые звезды.

Ряд интереснейших особенностей нормальных гигантов побуждает проведение расчетов их дифференциального вращения. Скорость вращения этих звезд является однозначной функцией их спектрального класса [100]:

$$u_{э\text{кв}} = 7,31 - 0,417 \text{ Sp}, \tag{49}$$

где $u_{э\text{кв}}$ — скорость вращения на экваторе (км с^{-1}) и Sp — параметр спектра, равный 3 для спектрального класса G3, 4 — для G4, 10 — для K0 и т.д. (имеются, однако, примеры вращения нормальных гигантов со скоростями гораздо выше предписанных формулой (49) [101, 102]). Спектральный класс меняется с возрастом звезды, поэтому формулу (49) можно рассматривать как соотношение между скоростью вращения и возрастом. Такая зависимость, возможно, определяется магнитной активностью [103]. По крайней мере некоторые из нормальных гигантов показывают циклы магнитной активности продолжительностью около 10 лет [104]. Подобно Солнцу, пятна на нормальных гигантах появляются в основном в приэкваториальных широтах [103, 105].

Гиганты имеют большие размеры и вращаются медленно, но по своим безразмерным параметрам они близки к Солнцу [25]. По ряду характеристик их в гораздо большей степени можно отнести к звездам солнечного типа, чем молодые быстро вращающиеся карлики главной последовательности.

Таблица 3. Параметры эволюционирующей звезды с массой $2,5M_{\odot}$

T_{eff}, K	R/R_{\odot}	x_i	$\rho_c, \text{г см}^{-3}$	T_c, K	$\Omega_0, \text{рад с}^{-1}$
5413	7,96	0,69	$2,56 \times 10^{-5}$	$7,94 \times 10^4$	$1,17 \times 10^{-6}$
5236	7,91	0,61	$5,69 \times 10^{-5}$	$8,07 \times 10^4$	$1,07 \times 10^{-6}$
5016	8,88	0,47	$6,75 \times 10^{-5}$	$7,23 \times 10^4$	$7,48 \times 10^{-7}$
4900	10,3	0,36	$4,40 \times 10^{-5}$	$6,00 \times 10^4$	$4,98 \times 10^{-7}$
4794	12,1	0,27	$2,83 \times 10^{-5}$	$5,14 \times 10^4$	$3,63 \times 10^{-7}$
4689	14,6	0,177	$1,38 \times 10^{-5}$	$3,93 \times 10^4$	$2,73 \times 10^{-7}$

Входные параметры для моделирования дифференциального вращения приведены в табл. 3. Отдельные строки таблицы относятся к различным стадиям эволюции одной звезды и получены с помощью модели [106]. Расчеты проводились для тех этапов эволюции, для которых на звездах рассматриваемого типа наблюдается магнитная активность.

Относительные величины расчетного дифференциального вращения [25] показаны на рис. 16. Они близки к наблюдаемой неоднородности вращения Солнца. Возможно, что в этом и состоит причина подобия магнитной активности гигантов III класса светимости солнечной. К сожалению, наблюдения не дали сведений о дифференциальном вращении нормальных гигантов. Имеются лишь отдельные данные для звезд с аномально быстрым вращением. Трудности наблюдательной проверки предсказаний теории связаны с очень медленным вращением звезд данного типа.

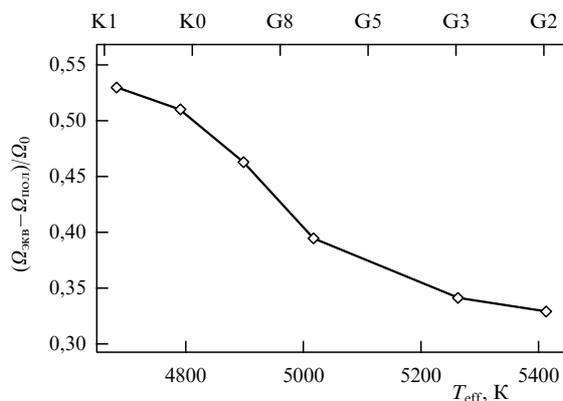


Рис. 16. Относительная величина дифференциального вращения поверхности эволюционирующего гиганта с массой $2,5M_{\odot}$. Расчеты проведены для ряда состояний табл. 3. На верхней шкале приведены спектральные классы.

5.4. Численные эксперименты

До сих пор обсуждались лишь модели, основанные на теории средних полей. В них глобальные течения на звездах определяются из уравнений, усредненных по ансамблю турбулентных течений. Эти уравнения содержат усредненные характеристики турбулентности, определяемые из квазилинейной теории (см. разделы 3 и 4). Разумеется, возможен подход с обратным порядком действий: сначала решаются уравнения, затем усреднением найденного решения определяется крупномасштабное течение. В таком подходе решение приходится определять численными методами. Численные расчеты такого рода дают надежду определить глобальное течение без детализации причин, по которым оно возникает,

и потому получили название численных экспериментов. До настоящего времени численные эксперименты проводились лишь для одной звезды — Солнца. Их цель, разумеется, не в том, чтобы показать, что Солнце подчиняется фундаментальным уравнениям. Будь численные эксперименты успешными, они позволили бы определить, например, конвективные потоки углового момента, недоступные прямым наблюдениям, и тем самым проверить правильность представлений о природе дифференциального вращения.

Первые трехмерные численные эксперименты по дифференциальному вращению [39, 107] были выполнены в приближении Буссинеска. Затем был проведен учет сжимаемости в приближении неупругости [41, 108, 109]. Расчетная величина дифференциального вращения на поверхности была сравнима с имеющейся на Солнце, но распределение угловой скорости в конвективной зоне, как стало ясно благодаря гелиосейсмологии, далеко от реальности. Угловая скорость для моделируемого дифференциального вращения была почти постоянной на цилиндрических поверхностях, соосных оси вращения. Предпринятые в последнее время новые численные эксперименты [48, 110, 111] были до некоторой степени более успешными.

Причины неудач численных экспериментов до конца не ясны, но, по всей вероятности, связаны с их недостаточным пространственным разрешением. Для того чтобы "включились" турбулентные механизмы переноса, числа Рейнольдса должны быть достаточно велики. Речь, разумеется, не идет о реальных числах Рейнольдса, которые, очевидно, недостижимы для численных экспериментов, но эти числа должны быть достаточно большими, чтобы процессы переноса определялись турбулентным перемешиванием, а не предписанными микроскопическими коэффициентами диффузии. Для численных расчетов, по всей вероятности, характерна обратная ситуация: работа сил плавучести для различных конвективных мод уравнивается в основном потерями на диссипацию, а нелинейное взаимодействие между модами мало (см., например, рис. 5 работы [41]). Наибольшие сложности с пространственным разрешением встречаются вблизи поверхности, где присутствует мелкомасштабная конвекция. Поэтому микроскопическую вязкость часто предполагают возрастающей к поверхности, например обратно пропорциональной плотности среды [48]. Тогда сложности с пространственным разрешением до некоторой степени снижаются, но становится неясным, остаются приповерхностные слои конвективно-неустойчивыми или становятся областью проникающей конвекции.

Надежды на успех численных экспериментов, по видимому, можно связывать только с появлением более мощных компьютеров.

6. Перспективы

Теория дифференциального вращения, вероятно, достигла определенной степени завершенности. Основные механизмы, формирующие неоднородное вращение, детально изучены в гидромеханике средних полей вращающихся турбулентных сред [52, 69]. Опирающиеся на эту теорию количественные модели неплохо согласуются с наблюдаемым вращением Солнца и подобных ему звезд. Тем не менее астрономические наблюдения при-

носят новые данные, и не все наблюдаемые явления имеют теоретическое объяснение.

Это прежде всего относится к изменениям дифференциального вращения во времени. Многие годы известны так называемые крутильные колебания Солнца — периодические 11-летние изменения вращения [112, 113]. Однако данные о распределении крутильных колебаний в недрах Солнца [114] появились совсем недавно. Поступает информация о крутильных колебаниях на звездах [115, 116]. Развитие теории крутильных колебаний сдерживается, в основном, отсутствием адекватных моделей звездных магнитных полей. Периодические изменения вращения, по всей вероятности, связаны с циклическими изменениями магнитного поля. Остается, однако, неясным, возникают они в результате прямого воздействия магнитных сил на крупномасштабные течения или связаны с влиянием магнитных полей на конвективные потоки углового момента, формирующие дифференциальное вращение [117]. Решение этого вопроса имеет значение и для выяснения природы изменений солнечной циклическости на масштабах времени в сотни и более лет [118].

Обсуждавшаяся выше теория приводит лишь к неоднородному вращению одного типа — возрастанию угловой скорости от полюсов к экватору. Дифференциальное вращение такого вида наблюдается на Солнце, а также на большинстве звезд, на которых его удается измерить. Имеются, однако, исключения. Известно уже около десяти звезд с так называемым антисолнечным вращением, при котором угловая скорость возрастает с широтой [10]. Такие состояния вращения могут быть следствием быстрого меридионального течения. Когда число Рейнольдса для меридиональной циркуляции велико, плотность углового момента слабо меняется вдоль линий тока. Поэтому угловая скорость возрастает с широтой вдоль этих линий. Быструю меридиональную циркуляцию можно ожидать для тех случаев, когда либо гравитационный потенциал, либо распределение температуры на поверхности звезды имеют существенные отклонения от сферической симметрии [119]. Эти соображения согласуются с наблюдениями случаев антисолнечного вращения, большинство которых относятся к тесным двойным системам либо к звездам-гигантам с большими пятнами [10]. Однако теория дифференциального вращения как для двойных систем, так и для звезд, магнитные поля которых порождают крупномасштабные температурные неоднородности, еще ожидает своего развития.

Заметим, наконец, что теория дифференциального вращения широко использует квазилинейное приближение гидромеханики средних полей. Это приближение, по всей вероятности, довольно грубое. Просто удивительно, что основывающиеся на нем количественные модели неплохо согласуются с наблюдениями. Такое согласие не дает стимулов для применения более строгих подходов теории турбулентности (каким мог бы быть, например, метод перенормировок [58]). Тем не менее было бы желательно проверить предсказания квазилинейной теории с помощью численных экспериментов. Речь не идет о глобальных численных расчетах, обсуждавшихся в разделе 5.4, которые имеют существенные внутренние проблемы. Для проверки теории средних полей можно ограничиться численными расчетами конвекции для малой части вращающейся конвективной

зоны. Такие "локальные" численные эксперименты сопряжены с меньшими трудностями, и определенные шаги в этом направлении уже сделаны [120–122].

Как и для большинства астрофизических теорий, прогресс в физике дифференциального вращения зависит от наблюдений. Трудно представить, какое число неверных теоретических работ о вращении Солнца могло бы появиться, если бы не было данных гелиосейсмологии. В настоящее время расширяется применение сейсмологических методов к звездам. Выполнение астро-сейсмологических программ может дать самые неожиданные сведения.

Обзор подготовлен при поддержке РФФИ (проект 02-02-16044).

Список литературы

1. Parker E N *Cosmical Magnetic Fields: Their Origin and Their Activity* (Oxford: Clarendon Press, 1979)
2. Вайнштейн С И, Зельдович Я Б, Рузмайкин А А *Турбулентное динамо в астрофизике* (М.: Наука, 1980)
3. Carrington R C *Observations of the Spots on the Sun from November 9, 1853, to March 24, 1861* (London: Williams & Norgate, 1863)
4. Sokoloff D D *Solar Phys.* **224** 145 (2004)
5. Воронцов С В, Жарков В Н, в сб. *Итоги науки и техники. Астрономия* Т. 38 (М.: ВИНТИ, 1988) с. 253
6. Gough D O, Thompson M J, in *Solar Interior and Atmosphere* (Eds A N Cox, W C Livingston, M S Matthews) (Tucson: Univ. of Arizona Press, 1991) p. 519
7. Schou J et al. *Astrophys. J.* **505** 390 (1998)
8. Wilson P R, Burtonclay D, Li Y *Astrophys. J.* **489** 395 (1997)
9. Donati J-F, in *Stellar Surface Structure.: Proc. of the 176th Symp. of the IAU, Vienna, Austria, October 9–13, 1995* (Eds K G Strassmeier, J L Linsky) (Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1996) p. 53
10. Strassmeier K G, in *Stars as Suns: Activity, Evolution and Planets.* (IAU Symp., Vol. 219, Eds A K Dupree, A O Benz) (San Francisco, CA: Astron. Soc. of the Pacific, 2004) p. 39
11. Howard R et al. *Solar Phys.* **83** 321 (1983)
12. Newton H W, Nunn M L *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **111** 413 (1951)
13. Stix M *The Sun: An Introduction* (Berlin: Springer-Verlag, 1989)
14. Vogt S S, Penrod G D *Publ. Astron. Soc. Pacific* **95** 565 (1983)
15. Хохлова В Л *Астрон. журн.* **52** 950 (1975)
16. Khokhlova V L *Astron. Nachr.* **297** 203 (1976)
17. Гончарский А В, Черепашук А М, Ягола А Г *Некорректные задачи астрофизики* (М.: Наука, 1985)
18. Donati J-F, Cameron A C *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **291** 1 (1997)
19. Petit P, Donati J-F, Cameron A C *Astron. Nachr.* **325** 221 (2004)
20. Barnes J R et al. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **314** 162 (2000)
21. Donati J-F, Cameron A C, Petit P *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **345** 1187 (2003)
22. Donati J-F et al *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **316** 699 (2000)
23. Barnes J R et al. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **357** L1 (2005)
24. Кичатинов Л Л, Рюдигер Г *Письма в Астрон. журн.* **23** 838 (1997)
25. Kitchatinov L L, Rüdiger G *Astron. Astrophys.* **344** 911 (1999)
26. Лебединский А И *Астрон. журн.* **18** 10 (1941)
27. Монин А С, Яглом Ф М *Статистическая гидромеханика* (М.: Наука, 1965, 1967)
28. Gough D O *J. Atmos. Sci.* **26** 448 (1969)
29. Gilman P A, Glatzmaier G A *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **45** 335 (1981)
30. Rüdiger G *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **16** 239 (1980)
31. Ward F *Astrophys. J.* **141** 534 (1965)
32. Ribes E *Adv. Space Res.* **6** 221 (1986)
33. Komm R W, Howard R F, Harvey J W *Solar Phys.* **151** 15 (1994)
34. Nesme-Ribes E, Ferreira E N, Vince L *Astron. Astrophys.* **276** 211 (1993)
35. Küker M, Rüdiger G, Kitchatinov L L *Astron. Astrophys.* **279** L1 (1993)
36. Kippenhahn R *Astrophys. J.* **137** 664 (1963)
37. Kitchatinov L L, Rüdiger G *Astron. Astrophys.* **299** 446 (1995)
38. Greenspan H P *The Theory of Rotating Fluids* (London: Cambridge Univ. Press, 1968)
39. Gilman P A *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **8** 93 (1977)
40. Glatzmaier G A *J. Comput. Phys.* **55** 461 (1984)
41. Gilman P A, Miller J *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **61** 585 (1986)

42. Brandenburg A, Moss D, Tuominen I *Astron. Astrophys.* **265** 328 (1992)
43. Brandenburg A et al. *Solar Phys.* **128** 243 (1990)
44. Durney B R *Solar Phys.* **123** 197 (1989)
45. Кичатинов ЛЛ, Рюдигер Г *Письма в Астрон. журн.* **21** 216 (1995)
46. Durney B R *Astrophys. J.* **511** 945 (1999)
47. Durney B R *Astrophys. J.* **407** 367 (1993)
48. Bruun A S, Toomre J *Astrophys. J.* **570** 865 (2002)
49. Komm R W, Howard R F, Harvey J W *Solar Phys.* **147** 207 (1993)
50. Zhao J, Kosovichev A G *Astrophys. J.* **603** 776 (2004)
51. Ландау ЛД, Лифшиц ЕМ *Гидродинамика* (М.: Наука, 1988) с. 272
52. Rüdiger G *Differential Rotation and Stellar Convection* (New York: Gordon and Breach Sci. Publ., 1989)
53. Altrrock R C, Canfield R C *Solar Phys.* **23** 257 (1972)
54. Falciani R, Rigutti M, Roberti G *Solar Phys.* **35** 277 (1974)
55. Kuhn J R, Libbrecht K G, Dicke R H *Nature* **328** 326 (1987)
56. Пипин ВВ, Кичатинов ЛЛ *Астрон. журн.* **77** 872 (2000)
57. Brandenburg A, in *The Cosmic Dynamo: Proc. of the 157th Symp. of the IAU, Potsdam, Germany, September 7–11, 1992* (Eds F Krause, K-H Rädler, G Rüdiger) (Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1993) p. 111
58. McComb W D *Rep. Prog. Phys.* **58** 1117 (1995)
59. Мофпат Г *Возбуждение магнитного поля в проводящей среде* (М.: Мир, 1980)
60. Durney B R, Spruit H C *Astrophys. J.* **234** 1067 (1979)
61. Kitchatinov L L *Astron. Astrophys.* **243** 483 (1991)
62. Kitchatinov L L *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **35** 93 (1986)
63. Кичатинов ЛЛ *Астрон. журн.* **64** 135 (1987)
64. Шварцшильд М *Строение и эволюция звезд* (М.: ИЛ, 1961)
65. Wasiutynski J *Astrophys. Norvegica* **4** 1 (1946)
66. Ирошников Р С *Астрон. журн.* **46** 97 (1969)
67. Rüdiger G *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **25** 213 (1983)
68. Durney B R, Latour J *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **9** 241 (1978)
69. Rüdiger G, Hollerbach R *The Magnetic Universe* (Weinheim: Wiley-VCH, 2004)
70. Кичатинов ЛЛ *Письма в Астрон. журн.* **12** 410 (1986)
71. Kitchatinov L L, Rüdiger G *Astron. Astrophys.* **276** 96 (1993)
72. Kitchatinov L L *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **38** 273 (1987)
73. Kitchatinov L L, Pipin V V, Rüdiger G *Astron. Nachr.* **315** 157 (1994)
74. Biermann L Z. *Astrophys.* **28** 304 (1951)
75. Лифшиц ЕМ, Питаевский ЛП *Физическая кинетика* (М.: Наука, 1979) с. 45
76. Kitchatinov L L, in *Turbulence, Waves and Instabilities in the Solar Plasma* (NATO Sci. Series., Ser. II, Vol. 124, Eds R Erdélyi et al.) (Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2003) p. 81
77. Краузе Ф, Рэдлер К-Х *Магнитная гидродинамика средних полей и теория динамо* (М.: Мир, 1984)
78. Köhler H *Solar Phys.* **13** 3 (1970)
79. Durney B R, Roxburg I W *Solar Phys.* **16** 3 (1971)
80. Belvedere G, Paternó L *Solar Phys.* **54** 289 (1977)
81. Belvedere G, Paternó L, Stix M *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **14** 209 (1980)
82. Schmidt W *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **21** 27 (1982)
83. Moss D, Vilhu O *Astron. Astrophys.* **119** 47 (1983)
84. Pridatella R M et al *Astron. Astrophys.* **156** 22 (1986)
85. Johns-Krull C M *Astron. Astrophys.* **306** 803 (1996)
86. Kippenhahn R, Weigert A *Stellar Structure and Evolution* (Berlin: Springer-Verlag, 1994)
87. Кичатинов ЛЛ, Рюдигер Г *Письма в Астрон. журн.* **22** 312 (1996)
88. Rüdiger G, Kitchatinov L L *Astron. Nachr.* **318** 273 (1997)
89. MacGregor K B, Cyarboneau P *Astrophys. J.* **519** 911 (1999)
90. Кичатинов ЛЛ *Астрон. журн.* **81** 176 (2004)
91. Spiegel E A, Zahn J-P *Astron. Astrophys.* **265** 106 (1992)
92. Charbonneau P, Dikpati M, Gilman P A *Astrophys. J.* **526** 523 (1999)
93. Garaud P *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **324** 68 (2001)
94. Garaud P *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **329** 1 (2002)
95. Reiners A, Shmitt J H M M *Astron. Astrophys.* **393** L77 (2002)
96. Reiners A, Shmitt J H M M *Astron. Astrophys.* **412** 813 (2003)
97. Hall D S, in *The Sun and Cool Stars: Activity, Magnetism, Dynamos: Proc. of Colloq., No. 130 of the IAU, Helsinki, Finland, 17–20 July 1990* (Lecture Notes in Physics, Vol. 380, Eds I Tuominen, D Moss, G Rüdiger) (Berlin: Springer-Verlag, 1991) p. 353
98. Donahue R A, Saar S H, Baliunas S *Astrophys. J.* **466** 384 (1996)
99. Cameron A C et al., in *Cool Stars, Stellar Systems and the Sun: 11th Cambridge Workshop* (Astron. Soc. of the Pacific Conf. Ser., Vol. 223, Eds J Ramon et al.) (San Francisco, CA: Astron. Soc. of the Pacific, 2001) p. 251
100. Gray D F *Astrophys. J.* **347** 1021 (1989)
101. Hackman T, Jetsu L, Tuominen I *Astron. Astrophys.* **374** 171 (2001)
102. Strassmeier K G, Kratzwald L, Weber M *Astron. Astrophys.* **408** 1103 (2003)
103. Gray D F *Publ. Astron. Soc. Pacific* **101** 1126 (1989)
104. Donahue R A, in *Stellar Surface Structure: Proc. of the 176th Symp. of the IAU, Vienna, Austria, October 9–13, 1995* (Eds K G Strassmeier, J L Linsky) (Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1996) p. 261
105. Gray D F, in *The Sun and Cool Stars: Activity, Magnetism, Dynamos: Proc. of Colloq., No. 130 of the IAU, Helsinki, Finland, 17–20 July 1990* (Lecture Notes in Physics, Vol. 380, Eds I Tuominen, D Moss, G Rüdiger) (Berlin: Springer, 1991) p. 336
106. Herwig F et al. *Astron. Astrophys.* **324** L81 (1997)
107. Gilman P A, Miller J *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **46** 211 (1981)
108. Glatzmaier G A *Astrophys. J.* **291** 300 (1985)
109. Glatzmaier G A *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **31** 137 (1985)
110. Miesch M S et al. *Astrophys. J.* **532** 593 (2000)
111. Elliot J R, Miesch M S, Toomre J *Astrophys. J.* **533** 546 (2000)
112. Howard R, LaBonte B J *Astrophys. J.* **239** L33 (1980)
113. LaBonte B J, Howard R *Solar Phys.* **75** 161 (1982)
114. Vorontsov S V et al. *Science* **296** 101 (2002)
115. Cameron A C, Donati J-F *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **329** 23 (2002)
116. Лившиц М А, Алексеев И Ю, Кацова М М *Астрон. журн.* **80** 613 (2003)
117. Кичатинов ЛЛ *Письма в Астрон. журн.* **16** 652 (1990)
118. Кичатинов ЛЛ, Пипин ВВ *Астрон. журн.* **75** 913 (1998)
119. Kitchatinov L L, Rüdiger G *Astron. Nachr.* **325** 496 (2004)
120. Brandenburg A et al. *J. Fluid Mech.* **306** 325 (1996)
121. Brummel N H, Hulbert N E, Toomre J *Astrophys. J.* **493** 955 (1998)
122. Käpylä P J, Korpi M J, Tuominen I *Astron. Astrophys.* **325** 793 (2004)

Stellar differential rotation

L.L. Kitchatinov

*Institute for Solar-Terrestrial Physics, P.O. Box 4026,
ul. Lermontova 126, 664033 Irkutsk, Russian Federation
Tel. (7-3952) 27-89 31. Fax (7-3952) 51-16 75. E-mail: kit@iszf.irk.ru*

Recent observations have provided much deeper insight into stellar rotation. Helioseismology has revealed that the equator-to-pole decrease in angular velocity observed on the solar surface persists deep into the solar interior. New data has become available on how rotational nonuniformity varies with stellar mass and angular velocity. These developments prompted the differential rotation theory which is the main subject of this review. Non-uniform rotation results from the interaction between turbulent convection and rotation. The theory of angular momentum transport by turbulence has reached a high enough level to provide the basis for the quantitative modeling of star rotation. The resulting models have little or no free parameters but reproduce quite closely the helioseismological data on the internal rotation of the Sun. Theoretical predictions on the differential rotation of stars are confirmed by observations. The relation of non-uniform rotation to stellar magnetic activity is briefly discussed, as are future prospects for the development of the theory.

PACS numbers: **47.27. – i, 47.32. – y, 97.10. – q**
Bibliography — 122 references
Uspekhi Fizicheskikh Nauk **175** (5) 475–494 (2005)

Received 27 October 2004, revised 28 Dezember 2004
Physics – Uspekhi **48** (5) (2005)