

21. Fukuzawa T, Mendez E E, Hong J M *Phys. Rev. Lett.* **64** 3066 (1990)
22. Golub J E et al. *Phys. Rev. B* **41** 8564 (1990)
23. Kash J A et al. *Phys. Rev. Lett.* **66** 2247 (1991)
24. Butov L V et al. *Phys. Rev. Lett.* **73** 304 (1994)
25. Butov L V, in *Proc. of the 23th Intern. Conf. on the Physics of Semiconductors, Berlin, Germany, July 21–26, 1996* (Eds M Scheffer, R Zimmermann) (Singapore: World Scientific, 1996)
26. Timofeev V B et al. *Europhys. Lett.* **41** 535 (1998)
27. Timofeev V B et al. *Письма в ЖЭТФ* **67** 580 (1998)
28. Krivolapchuk V V et al. *Solid State Commun.* **111** 49 (1999)
29. Butov L V et al. *Phys. Rev. B* **59** 1625 (1999)
30. Ларионов А В и др. *ЖЭТФ* **117** 1255 (2000)
31. Butov L V et al. *Phys. Rev. B* **62** 1548 (2000)
32. Ларионов А В и др. *Письма в ЖЭТФ* **75** 233 (2002)
33. Ivanov A L, Ell C, Haug H *Phys. Rev. E* **55** 6363 (1997)
34. Ivanov A L, Littlewood P B, Haug H *Phys. Rev. B* **59** 5032 (1999)
35. Hohenberg P C *Phys. Rev.* **158** 383 (1967)
36. Mermin N D, Wagner H *Phys. Rev. Lett.* **17** 1133 (1966)
37. Kosterlitz J M, Thouless D J *J. Phys. C: Solid State Phys.* **6** 1181 (1973)
38. Zhu X et al. *Phys. Rev. Lett.* **74** 1633 (1995)
39. Yoshioka D, MacDonald A H *J. Phys. Soc. Jpn.* **59** 4211 (1990)
40. Chen X M, Quinn J J *Phys. Rev. Lett.* **67** 895 (1991)
41. Fernández-Rossier J, Tejedor C *Phys. Rev. Lett.* **78** 4809 (1997)
42. Лозовик Ю Е, Берман О Л *ЖЭТФ* **111** 1879 (1997)
43. Liu L, Świerkowski L, Neilson D *Physica B* **249–251** 594 (1998)
44. Lozovik Yu E, Ovchinnikov I V *Письма в ЖЭТФ* **74** 318 (2001)
45. Ларионов А В и др. *Письма в ЖЭТФ* **75** 689 (2002)
46. Дремин А А и др. *Письма в ЖЭТФ* **76** 526 (2002)
47. Timofeev V B et al. *Phys. Rev. B* **60** 8897 (1999)
48. Горбунов А В, Тимофеев В Б, Бисти В Е *ЖЭТФ* (2005) (в печати)
49. Горбунов А В, Тимофеев В Б *Письма в ЖЭТФ* **80** 210 (2004)
50. Butov L V, Gossard A C, Chemla D S *Nature* **418** 751 (2002)
51. Butov L V et al. *Phys. Rev. Lett.* **92** 117404 (2004)
52. Snoke D et al. *Nature* **418** 754 (2002); Snoke D *Science* **298** 1368 (2002)
53. Rapaport R et al. *Phys. Rev. Lett.* **92** 117405 (2004)
54. Лернер И В, Лозовик Ю Е *ЖЭТФ* **78** 1167 (1980)
55. Butov L V et al. *Phys. Rev. Lett.* **87** 216804 (2001)
56. Lozovik Yu E et al. *Phys. Rev. B* **65** 235304 (2002)

PACS numbers: 42.65. – k, 71.36. + e, 78.65. – n

## Жесткий режим возбуждения поляритон-поляритонного рассеяния в полупроводниковых микрорезонаторах

Н.А. Гишпиус, С.Г. Тиходеев,  
Л.В. Келдыш, В.Д. Кулаковский

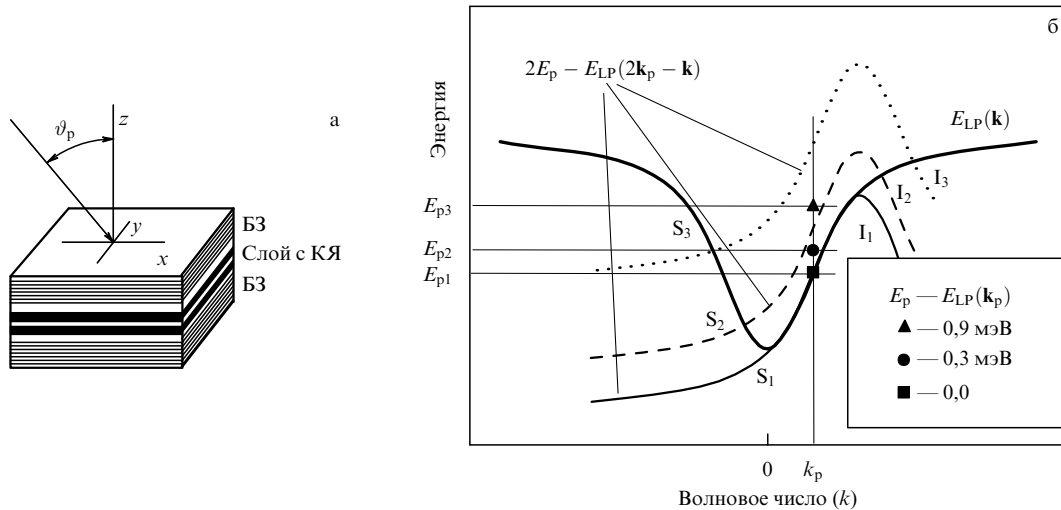
В последнее время большой интерес вызывают необычные свойства поляритон-поляритонного рассеяния света в полупроводниковых микрорезонаторах [1–12]. В частности, экспериментально показано [13]<sup>1</sup>, что при сдвиге частоты резонансного возбуждения от точки перегиба нижней поляритонной ветви (НПВ) рассеянный сигнал выше порога стимулированного рассеяния оказывается всегда направленным примерно по нормали к плоскости микрорезонатора (МР). Тогда как исходя из простой модели четырехволнового смешивания [7] можно было бы ожидать его сдвига вдоль нижней поляритонной ветви (см. схему рассеяния на рис. 1). Это обстоятельство недавно подтверждено в работе [15]. Такое поведе-

ние было теоретически объяснено [16–19] взаимодействием двух неустойчивостей: бистабильности отклика на внешнее воздействие раскачиваемой поляритонной моды и параметрической неустойчивости этой моды по отношению к распаду на рассеянные поляритоны. Бистабильность линейного оптического отклика при накачке по нормали к поверхности микрорезонатора (в область минимума НПВ) была недавно продемонстрирована в работе [20]. Однако в случае взаимодействия бистабильности и параметрической неустойчивости, которое возможно при накачке вблизи точки перегиба НПВ, возникают совершенно новые и неожиданные нелинейные эффекты. В настоящей статье обсуждается физический смысл найденных в работах [16–19] неустойчивостей, а также анализируется влияние квазидвумерности поляритон-поляритонного рассеяния и насыщения экситонных переходов. Подчеркнем, что макрозаполненные поляритонные моды, поведение которых будет рассмотрено, с квантовой точки зрения подчиняются статистике Бозе, и поэтому речь идет, по существу, о кинетике сильнонеравновесной бозе-системы.

Обычно считается, что возникновение стимулированного рассеяния происходит "мягко" (по аналогии с мягким режимом возбуждения генератора), когда система теряет устойчивость для определенных рассеянных мод при превышении порога. При плавном прохождении порога такие моды становятся макрозаполненными, а их амплитуда плавно нарастает по мере увеличения накачки. Поскольку рост макрозаполненных мод происходит медленно (вследствие малого инкремента нарастания неустойчивых мод вблизи порога), они эффективно подавляют накопление рассеянного сигнала в близких модах с меньшим инкрементом нарастания. Одновременно амплитуда накачиваемой моды стабилизируется вследствие баланса поступающей в систему энергии. Такое поведение можно также уподобить фазовому переходу *второго* рода, происходящему в неравновесной системе под действием внешнего возбуждения, когда в результате перехода вся система согласованно и плавно переходит в ставшее более устойчивым макроскопическое состояние.

В работах [17–19] показано, что стимулированное рассеяние экситонных поляритонов в полупроводниковом МР может возникать "жестко" (по аналогии с жестким режимом возбуждения генератора). При этом амплитуда *возбуждаемой* поляритонной моды сначала скачком возрастает вследствие ее бистабильности, обычной для нелинейного осциллятора. Если в результате такой трансформации возбуждаемой моды система попадает в область сильной неустойчивости относительно поляритон-поляритонного рассеяния (или любого другого рассеяния, например, на фонах или свободных носителях), то соответствующие моды в большой области фазового пространства обладают большими инкрементами нарастания и начинают заселяться взрывообразно. Вследствие баланса поступающей в систему энергии населенность возбуждаемой моды скачкообразно уменьшается, а рассеянный сигнал получается сильно стохастическим. Такое поведение можно также уподобить фазовому переходу *первого* рода, происходящему в неравновесной системе под действием внешнего возбуждения. Хотя в работах [17–19] система предполагается пространственно однородной, можно, в соответствии с этой аналогией, ожидать ее

<sup>1</sup> См. также следующий доклад [14] в этом номере.



**Рис. 1.** (а) Схема рассеяния света в планарном микрорезонаторе, состоящем из  $\lambda$ - или  $3/2\lambda$ -слоя ( $\lambda$  — резонансная длина волны), содержащего квантовые ямы (КЯ), и заключенного между распределенными брэгговскими зеркалами (БЗ). (б) Схема поляритон-поляритонного рассеяния при низкой интенсивности накачки. Жирная сплошная кривая показывает нижнюю поляритонную ветвь  $E_{LP}(k)$ . Тонкие кривые (сплошная, штриховая и пунктирная) соответствуют холостым модам  $2E_p - E_{LP}(2k_p - k)$  для нескольких значений расстройки частоты накачки относительно нижней поляритонной ветви  $E_p - E_{LP}(k_p)$  (квадрат, кружок и треугольник). Вследствие сохранения энергии и импульса, рассеяние максимально для энергий и импульсов на пересечениях кривых  $E_{LP}(k)$  и  $2E_p - E_{LP}(2k_p - k)$ . Поэтому в рамках этой модели естественно ожидать сдвиг сигнала (signal)  $S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_3$  и холостой моды (idler)  $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow I_3$  вдоль нижней поляритонной ветви при увеличении расстройки накачки  $E_{p1} \rightarrow E_{p2} \rightarrow E_{p3}$ .

расслоения на пространственно неоднородные области. Отметим, что обусловленная бистабильностью возможность нелинейной пространственно неоднородной самоорганизации рассеянного сигнала была недавно рассмотрена теоретически в рамках аналогичного подхода в работе [21]. Наконец, в недавней работе [22] этот же подход применен для исследования возможности сверхтекучести в системе поляритонов в микрорезонаторе.

Для теоретического анализа возможных сценариев развития процесса параметрического рассеяния поляритонов, схематически представленного на рис. 1, исследуем квазиклассические уравнения для  $\mathcal{E}_{QW}$ , электрического поля на квантовой яме (КЯ) в микрорезонаторе, и  $\mathcal{P}(k, t)$ , усредненной (по ширине КЯ) экситонной поляризации [19]:

$$\left[ i \frac{d}{dt} - E_C(k) \right] \mathcal{E}_{QW}(k, t) = \alpha(k) \mathcal{E}_{ext}(k, t) + \beta(k) \mathcal{P}(k, t), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \left[ i \frac{d}{dt} - E_X(k) \right] \mathcal{P}(k, t) = \\ = A \sum_{q, q'} [\delta_{q, k} - V_{sat} \mathcal{P}(q', t) \mathcal{P}^*(q + q' - k, t)] \mathcal{E}_{QW}(q, t) + \\ + F \sum_{q, q'} \mathcal{P}(q', t) \mathcal{P}^*(q + q' - k, t) \mathcal{P}(q, t) + \xi(k, t). \quad (2) \end{aligned}$$

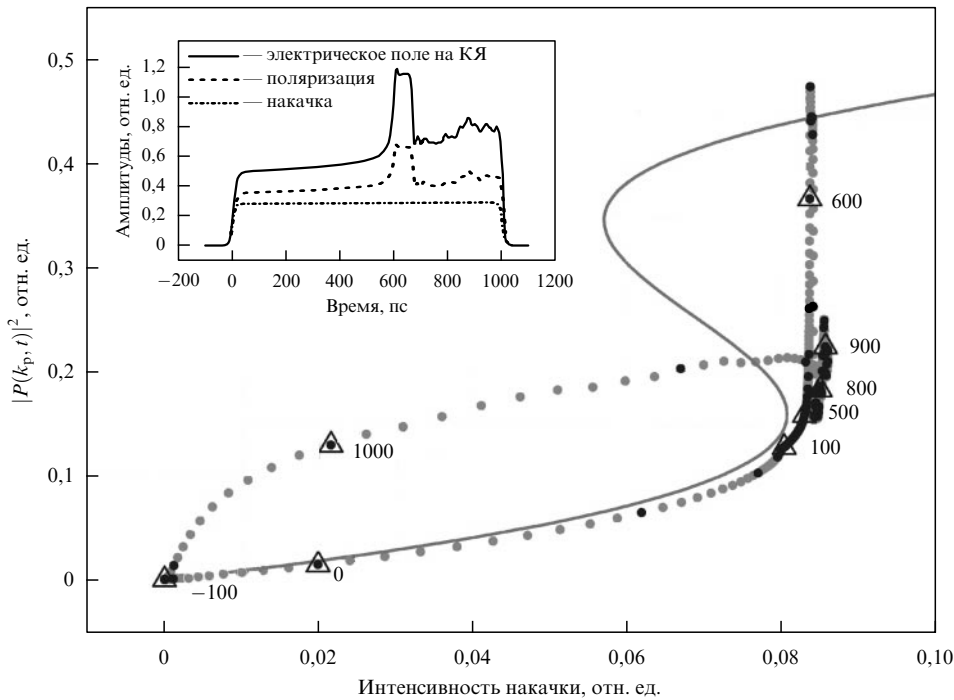
Здесь  $\mathcal{E}_{ext} = \mathcal{E}(t) \exp(-iE_p t) \delta(k - k_p)$  — электрическое поле падающей электромагнитной волны накачки вдали от МР, которое описывается как макрозаполненная фотонная мода с фиксированной частотой  $E_p$ , волновым числом  $k_p = E_p \sin \vartheta / c$  и переменной во времени амплитудой  $\mathcal{E}(t)$ .  $E_C$  и  $E_X$  — соответственно резонансная частота пустого МР и частота экситона в свободной КЯ,  $F$  — константа экситон-экситонного взаимодействия,  $A$  — экситонная поляризуемость,  $\xi(k, t)$  — случайная

ланжевенковская сила,  $\langle \xi(k, t) \rangle = 0$  и  $\langle \xi(k, t) \xi(k', t') \rangle \propto \delta(k - k') \delta(t - t')$ . Константы отклика микрорезонатора  $\alpha$  и  $\beta$  были рассчитаны методом матрицы рассеяния [23]. Энергия измеряется в миллиэлектронвольтах, а поляризация и электрическое поле измеряются в таких единицах, что  $F = 1$ .

Уравнение (1) является уравнением Максвелла, учитывающим экситонную поляризацию и написанным в резонансном скалярном (т.е. в пренебрежении смешиванием  $\sigma^\pm$ -поляризаций) приближении. Уравнение (2) есть неоднородное нелинейное уравнение Шрёдингера для экситонной поляризации, учитывающее два типа источников: когерентное внешнее возбуждение и стохастический ланжевенковский шум. Последний позволяет смоделировать квантовые флуктуации сигнала рассеяния при использовании квазиклассических уравнений (1), (2).

Уравнения (1), (2), в отличие от рассмотренных в работах [17, 18] (см. также следующий доклад [14]), содержат дополнительный член (с коэффициентом  $V_{sat}$ ), описывающий насыщение экситонного перехода. Строго говоря, для полного учета насыщения следует решить систему уравнений для электронно-дырочной матрицы плотности, которая связывает диагональные элементы матрицы плотности с динамикой недиагональных компонент, описывающих когерентную поляризацию. Здесь мы используем упрощенный подход [24], в котором нелинейный член, пропорциональный  $|\mathcal{P}(x)|^2 \mathcal{E}(x)$ , добавляется в уравнение для усредненной по КЯ экситонной поляризации (2). Записанная система уравнений предполагает, что вся динамика полей и поляризаций системы достаточно полно описывается на основе лишь одной недиагональной компоненты матрицы плотности.

Имея в виду это приближение, мы покажем, что при значениях  $V_{sat} \lesssim 0,1$  учет насыщения экситонного перехода не приводит к качественным изменениям в картине рассеяния и сводится, по сути, к дополнительному нелинейному синему сдвигу нижней поляритонной ветви.

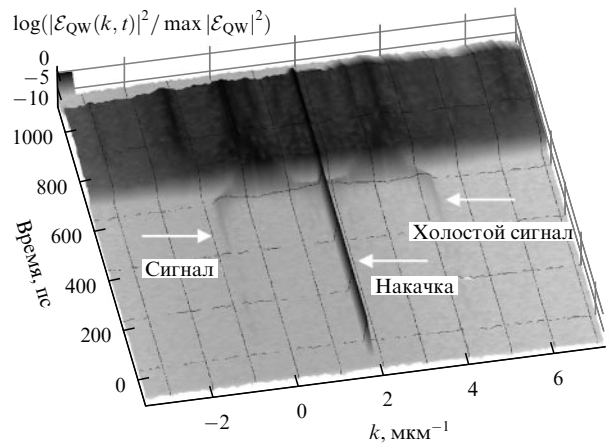


**Рис. 2.** Траектория поляризации возбуждаемой поляритонной моды в координатах " $|P(k_p, t)|^2$  – Внешняя накачка". Временная задержка между серыми (черными) точками составляет 1 пс (10 пс), моменты времени, соответствующие треугольникам, приведены рядом с ними в пикосекундах. Сплошная S-образная кривая — решение уравнения (5) для стационарной внешней накачки. На вставке показано изменение во времени амплитуды электрического поля на КЯ (сплошная кривая), амплитуды экситонной поляризации (пунктирная кривая) и амплитуды поля внешней накачки (штрихпунктирная кривая). Видно, что при практически неизменной накачке система испытывает два резких перехода при  $t \approx 600$  и  $700$  пс.

Введенный параметр  $V_{\text{sat}}$  описывает относительную величину насыщения экситонного перехода [3, 20]. Для GaAlAs-микрорезонаторов безразмерный параметр  $V_{\text{sat}}$  является малым числом<sup>2</sup>,  $V_{\text{sat}} \approx 0,1$ . Это соответствует хорошо установленному факту: в GaAlAs-микрорезонаторах режим экситонной столкновительной нелинейности наблюдается при значениях интенсивности ниже порога насыщения экситонного перехода.

Нелинейное уравнение Шрёдингера учитывает лишь экситон-экситонное контактное взаимодействие. За рамками модели остается, например, экситон-фононное взаимодействие, которое может играть весьма существенную роль в процессах параметрического рассеяния МР-поляритонов. Однако уже в этом простейшем приближении и в некотором диапазоне параметров модель, как оказывается [16–18], демонстрирует пороговое поведение, качественно соответствующее наблюдаемому в эксперименте [13]. Получающиеся значения пороговых накачек лежат в диапазоне  $10^2 - 10^3$  Вт см<sup>-2</sup>, что по порядку величины соответствует экспериментальным данным.

Пример обнаруженного нами порогового поведения системы уравнений (1), (2) приведен на рис. 2 и 3. При численном моделировании рассеяние упрощенно предполагалось квазиодномерным (только в плоскости падения накачки), а форма импульса накачки  $\mathcal{E}_{\text{ext}}(t)$  (штрихпунктирная кривая на вставке рис. 2) выбиралась такой, чтобы пороговое значение интенсивности накачки достигалось плавно во время действия возбуждающего им-



**Рис. 3.** Теоретически рассчитанное изменение во времени пространственных гармоник электрического поля на КЯ в микрорезонаторе. Эта величина, нормированная на свое максимальное значение, отложена по вертикали в логарифмическом масштабе, и также показана градиентами серого цвета (см. вертикальную шкалу): темным тонам соответствуют большие интенсивности. Возбуждающая волна (накачка) имеет угол падения  $14^\circ$ , отвечающий импульсу  $k_p \approx 1,9$  мкм<sup>-1</sup>. Отметим, что при  $t \lesssim 600$  пс, т.е. до первого перехода, сигнал и холостой сигнал максимальны при  $k_s < 0$  и  $k_i > 2k_p$  соответственно. После второго перехода при  $t \approx 700$  пс максимумы сдвигаются на  $k_s \gtrsim 0$  и  $k_i \lesssim 2k_p$ , а средняя интенсивность рассеянных гармоник с  $k \neq k_p$  возрастает на пять-шесть порядков.

пульса. Именно, накачка  $\mathcal{E}_{\text{ext}}(t)$  включалась на 97% от максимума за первые  $\sim 100$  пс импульса накачки, потом медленно нарастала до максимума в течение  $\sim 1000$  пс и

<sup>2</sup> Однако не столь малым, как приведенная в [20] оценка  $10^{-2}$ .

затем выключалась за  $\sim 100$  пс. Из рисунка видно, что на самом деле в кинетике системы наблюдаются два резких перехода: при  $t \approx 600$  и  $700$  пс. При обоих переходах резко изменяются и поляризация возбуждаемой поляритонной моды  $\mathcal{P}_0$ , и соответствующая пространственная гармоника электрического поля на квантовой яме  $\mathcal{E}_0$  (сплошная и пунктирная кривые на рис. 2 соответственно).

Переходы сопровождаются суммарным увеличением интенсивности рассеянного поляритонного сигнала на много порядков (см. рис. 3, показывающий зависимость рассеянного поляритонного сигнала от времени и волнового числа). Из рисунка 3 видно, что до первого перехода при  $t \approx 600$  пс максимумы рассеянного сигнала (signal) и холостого сигнала (idler) расположены в точном соответствии с теорией четырехволнового смешивания [7, 8]. Именно, для положительной расстройки накачки (энергия кванта накачки выше энергии НПВ на волновом числе накачки, как показано на рис. 1), сигнал и холостой сигнал максимальны при  $k_s < 0$  ( $\vartheta_s < 0$ ) и  $k_i > 2k_p$  соответственно.

Для понимания природы резких переходов, которые демонстрируют численные решения уравнений (1), (2), нужно исследовать [18, 19] устойчивость их решений при стационарной внешней накачке  $\mathcal{E}_{\text{ext}}(t) = \text{const}$  и с одной макрозаполненной модой, т.е. вида

$$\mathcal{P}(k, t) = \tilde{\mathcal{P}}(k, t) + \delta_{k, k_p} \mathcal{P}_0 \exp(-iE_p t), \quad (3)$$

$$\mathcal{E}_{\text{QW}}(k, t) = \tilde{\mathcal{E}}(k, t) + \delta_{k, k_p} \mathcal{E}_0 \exp(-iE_p t). \quad (4)$$

Здесь  $\tilde{\mathcal{P}}$  и  $\tilde{\mathcal{E}}$  предполагаются малыми отклонениями от решения с одной макрозаполненной модой,  $|\tilde{\mathcal{P}}/\mathcal{P}_0|$ ,  $|\tilde{\mathcal{E}}/\mathcal{E}_0| \ll 1$ .

В нулевом порядке по  $\tilde{\mathcal{P}}$  и  $\tilde{\mathcal{E}}$  получаем [19] следующее кубическое уравнение для амплитуды возбуждаемой моды  $\mathcal{P}_0$ :

$$(\Delta_{\text{PC}} \Delta_{\text{PX}} - \tilde{A}\tilde{\beta})\mathcal{P}_0 - \Delta_0 F |\mathcal{P}_0|^2 \mathcal{P}_0 = \tilde{A}\alpha \mathcal{E}_{\text{ext}}, \quad (5)$$

где

$$\tilde{A} = A(1 - V_{\text{sat}} |\mathcal{P}_0|^2), \quad \Delta_{\text{PC}} = E_p - E_C(k_p),$$

$$\Delta_{\text{PX}} = E_p - E_X(k_p).$$

Эта зависимость, начиная с некоторых положительных значений расстройки, является S-образной, что показано на рис. 4 для случая отсутствия насыщения,  $V_{\text{sat}} = 0$  (сплошная кривая) и при  $V_{\text{sat}} = 0,1$  (штриховая кривая). S-образная кривая для  $V_{\text{sat}} = 0$  приведена также на рис. 2.

Такого типа S-образные кривые исследовались в теории "пустых" нелинейных микрорезонаторов с керровской нелинейностью, не содержащих резонансных экситонов в КЯ (см., например, [25–27]). Что касается самого факта наличия S-образности, то абсолютная неустойчивость решения (5) в области отрицательности производной  $d\mathcal{P}_0/d\mathcal{E}_{\text{ext}}$  приводит к бистабильности отклика нелинейного осциллятора, что хорошо известно, по крайней мере после работы Дюффинга [28] (см. обзоры [29, 30]). Необходимо отметить, что в первых теоретических исследованиях поляритон-поляритонного рассеяния в МР [3, 7–9, 11] управляющим параметром считалась амплитуда поляризации раскачиваемой моды (а не внешнее электромагнитное поле вдали от резонатора), и поэтому, в принципе, бистабильность не могла

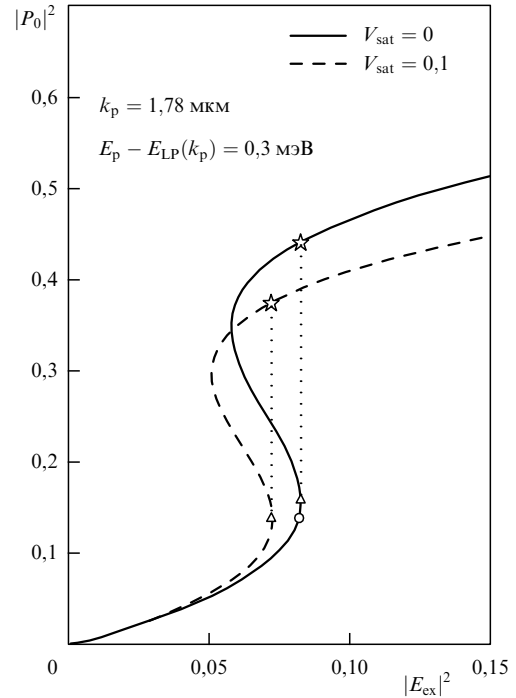


Рис. 4. S-образная кривая вынужденных колебаний нелинейного экситонного осциллятора в координатах " $|$ Экситонная поляризация $|^2$  – Внешняя накачка", рассчитанная без учета насыщения экситонного перехода (сплошная кривая, та же, что на рис. 2) и с учетом насыщения при  $V_{\text{sat}} = 0,1$  (штриховая кривая). Открытый кружок на сплошной S-образной кривой показывает параметры, соответствующие порогу параметрической неустойчивости. Треугольниками отмечены точки потери стабильности нижней ветви S-образной кривой, перенормированные спектры в этих точках приведены на рис. 5а, б и ба, б. Звездочками показаны состояния системы с высокой поляритонной плотностью на верхней ветви S-образной кривой, соответствующие перенормированные спектры приведены на рис. 5в, г и бв, г.

возникнуть. Такое приближение, оправданное при малых расстройках от НПВ (когда S-образности не возникает), приводит к неправильным предсказаниям при больших расстройках. И только в последнее время, после работ [16–18], была осознана важная роль бистабильности для МР с поляритонами [20–22, 31].

Исследуем теперь условия устойчивости решения с одной макрозаполненной модой (5). Это можно сделать, линеаризуя (1), (2) по малым отклонениям амплитуд сигнала

$$\tilde{\mathcal{E}}(k, t) = \tilde{\mathcal{E}}(k) \exp(-i\omega t), \quad \tilde{\mathcal{P}}(k, t) = \tilde{\mathcal{P}}(k) \exp(-i\omega t)$$

и холостого сигнала

$$\tilde{\mathcal{E}}^*(\bar{k}, t) \exp(-2iE_p t) = \tilde{\mathcal{E}}(\bar{k}) \exp(-i\omega t),$$

$$\tilde{\mathcal{P}}^*(\bar{k}, t) \exp(-2iE_p t) = \tilde{\mathcal{P}}(\bar{k}) \exp(-i\omega t),$$

где  $\bar{k} = 2k_p - k$ ,

$$\omega \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{E}}(k) \\ \tilde{\mathcal{P}}(k) \\ \tilde{\mathcal{E}}(\bar{k}) \\ \tilde{\mathcal{P}}(\bar{k}) \end{pmatrix} = \hat{H}_{\text{eff}} \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{E}}(k) \\ \tilde{\mathcal{P}}(k) \\ \tilde{\mathcal{E}}(\bar{k}) \\ \tilde{\mathcal{P}}(\bar{k}) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Здесь эффективный "гамильтониан" имеет вид матрицы размером  $(4 \times 4)$  [19]:

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \begin{pmatrix} E_C(k) & \beta & & \\ \tilde{A} & E_X + 2F|\mathcal{P}_0|^2 - AV_{\text{sat}}\mathcal{P}_0^*\mathcal{E}_0 & & \dots \\ 0 & 0 & & \\ 0 & -(F\mathcal{P}_0^2 - AV_{\text{sat}}\mathcal{P}_0\mathcal{E}_0)^* & & \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & & \\ 0 & F\mathcal{P}_0^2 - AV_{\text{sat}}\mathcal{P}_0\mathcal{E}_0 & & \\ \dots & 2E_p - E_C^*(\bar{k}) & & -\beta^* \\ -\tilde{A}^* & 2E_p - (E_X + 2F|\mathcal{P}_0|^2 - AV_{\text{sat}}\mathcal{P}_0^*\mathcal{E}_0)^* & & \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Собственные частоты  $\Omega(k)$  линейной задачи (6), (7) позволяют ответить на вопрос о стабильности решения с одной макрозаполненной модой (3)–(5). Если мнимая часть собственных частот  $\Omega(k)$  отрицательна, то решение с одной макрозаполненной модой (3)–(5) является устойчивым, поскольку отклонения от него экспоненциально убывают со временем,  $\propto \exp[\text{Im } \Omega(k)t]$ ,  $\text{Im } \Omega(k) < 0$ . В противном случае инкремент нарастания положителен,  $\text{Im } \Omega(k) > 0$ , и такое решение является неустойчивым.

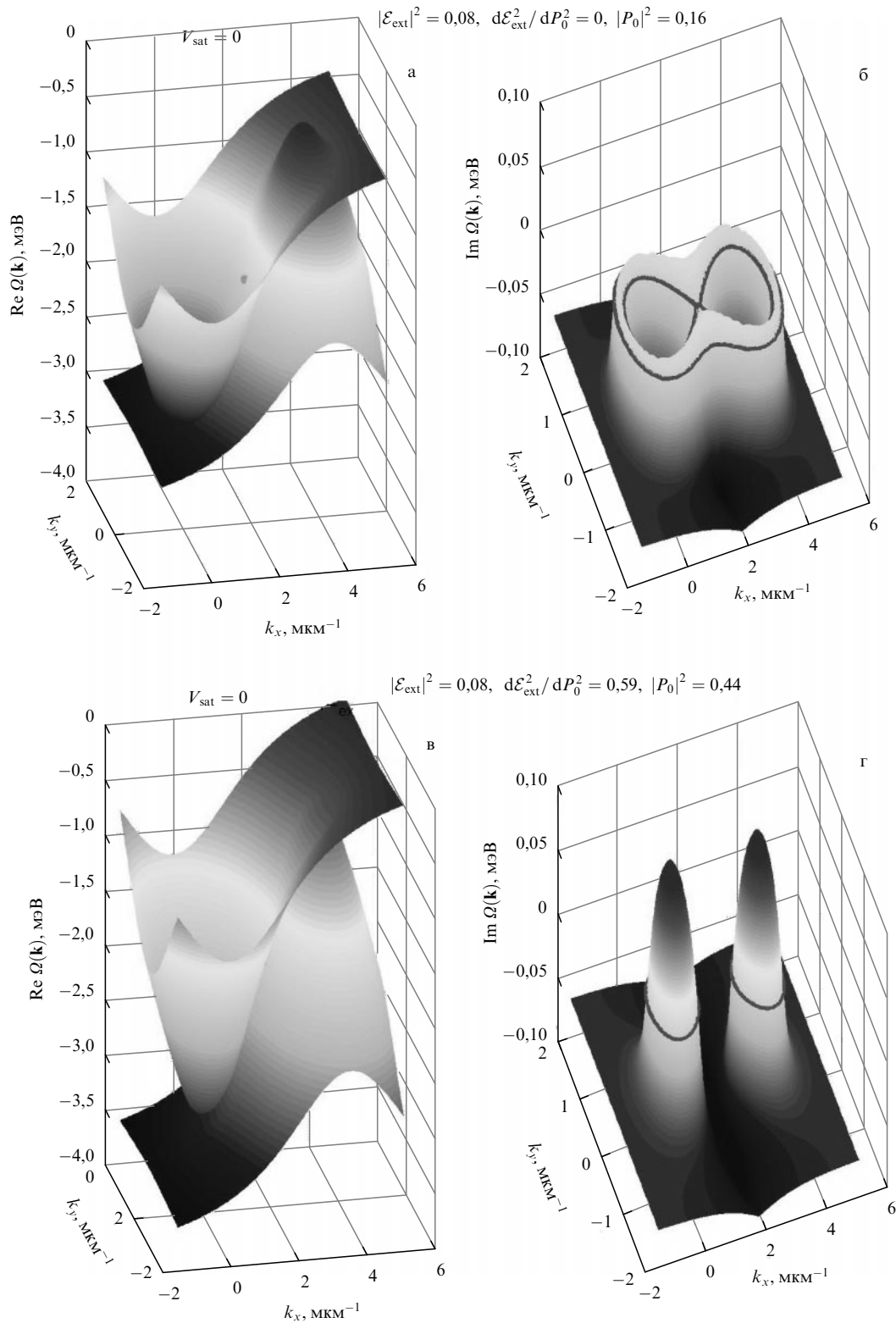
На рисунке 5а, б показаны зависимости собственных частот линейной задачи (6), (7) от двумерного волнового числа, рассчитанные для  $V_{\text{sat}} = 0$  при  $|\mathcal{P}_0|^2 = 0,16$ ,  $|\mathcal{E}_{\text{ext}}|^2 = 0,083$ , т.е. на конечной правой точке нижней устойчивой ветви S-образной кривой (см. треугольник на сплошной кривой на рис. 4). Интересно, что при данных значениях параметров микрорезонатора и накачки порог этой неустойчивости находится при слегка большем внешнем поле, чем граница параметрической неустойчивости (см. кружок на рис. 4, отвечающий  $|\mathcal{P}_0|^2 = 0,14$ ,  $|\mathcal{E}_{\text{ext}}|^2 = 0,081$ ). То, что порог параметрической неустойчивости уже пройден, можно увидеть из существования области неустойчивости одномодового решения на рис. 5б, имеющей вид восьмерки: всюду внутри контура восьмерки мнимая часть собственной частоты уже положительна, и соответствующие поляритонные моды неустойчивы. При накачках несколько ниже порога параметрической неустойчивости эти же моды обладают максимальным временем жизни. В стационарном режиме сигнал накапливается в этих долгоживущих модах, и поэтому ниже порога интенсивность рассеянного сигнала максимальна по направлениям, образующим восьмерку. Этот эффект, теоретически предсказанный в работе [7], недавно продемонстрирован экспериментально [32].

Вернемся теперь к кинетике рассеяния, показанной на рис. 2, и сравним эволюцию возбуждаемой моды (точки и треугольники) с S-образной кривой решения с одной макрозаполненной модой (сплошная кривая). Очевидно, что первый резкий переход при  $t \approx 600$  пс является переходом вынужденного решения нелинейного осциллятора с нижней на верхнюю ветвь S-образной кривой. Итак, первая нестабильность при  $t \approx 600$  пс в приближении одномерного рассеяния и в отсутствие насыщения является следствием потери стабильности решения в конце нижней устойчивой ветви S-контура. Поскольку S-контур не зависит от пространственной размерности, эта нестабильность сохраняется и при учете квазидвумерности.

В результате развития первой неустойчивости система попадает в область верхней ветви S-контура (см. траекторию поведения возбуждаемой моды на рис. 2). В случае пустого МР, дисперсионная кривая которого не имеет точки перегиба, верхняя ветвь является устойчивой [25, 26]. Однако в случае МР с поляритонами ситуация меняется: верхняя ветвь может оказаться также неустойчивой (см. переход при  $t \approx 700$  пс на рис. 2). Причина этой второй неустойчивости может быть понята из рис. 5в, г, показывающего дисперсии собственных частот линейной задачи (6), (7) в отсутствие насыщения, рассчитанные для параметров  $|\mathcal{P}_0|^2 = 0,44$ ,  $|\mathcal{E}_{\text{ext}}|^2 = 0,083$ , т.е. на верхней ветви S-контура (см. звездочку на сплошной кривой на рис. 4). Из рисунка 2 видно, что примерно в эту область и попадает возбуждаемая мода в результате развития первой неустойчивости при  $t \approx 600$  пс. Теперь области вблизи  $k_s \approx 0$ ,  $k_i \approx 2k_p$ , как видно из рис. 5г, характеризуются очень сильной параметрической нестабильностью, с большим инкрементом нарастания. В отличие от восьмерки при параметрическом рассеянии поляритонов на нижней ветви S-контура [7, 32], на верхней ветви S-контура рассеянный сигнал оказывается максимальным в компактных телесных углах внутри восьмерки, вблизи  $k_s \approx 0$ ,  $k_i \approx 2k_p$ . Это находится в качественном согласии с экспериментом [13, 15]. Вследствие развития этой второй неустойчивости решение с одной макрозаполненной модой распадается: быстро заселяются другие поляритонные моды (см. также рис. 3). В результате возбуждаемый поляритон скачком уменьшает свою амплитуду при  $t \approx 700$  пс, и это состояние оказывается более или менее стабильным, однако сильно флуктуирует во времени из-за перерассеяния на других поляритонных модах.

Добавим, что учет конечности насыщения  $V_{\text{sat}} = 0,1$ , приводя к количественно другому положению S-образной кривой (ср. сплошную и штриховую кривые на рис. 4), не вызывает, однако, качественного изменения сценария рассеяния. Это видно, например, из малости разницы между собственными частотами линейной задачи (6), (7) для  $V_{\text{sat}} = 0$  и  $V_{\text{sat}} = 0,1$ , рассчитанными в характерных точках скачков на соответствующих S-кривых (см. рис. 6).

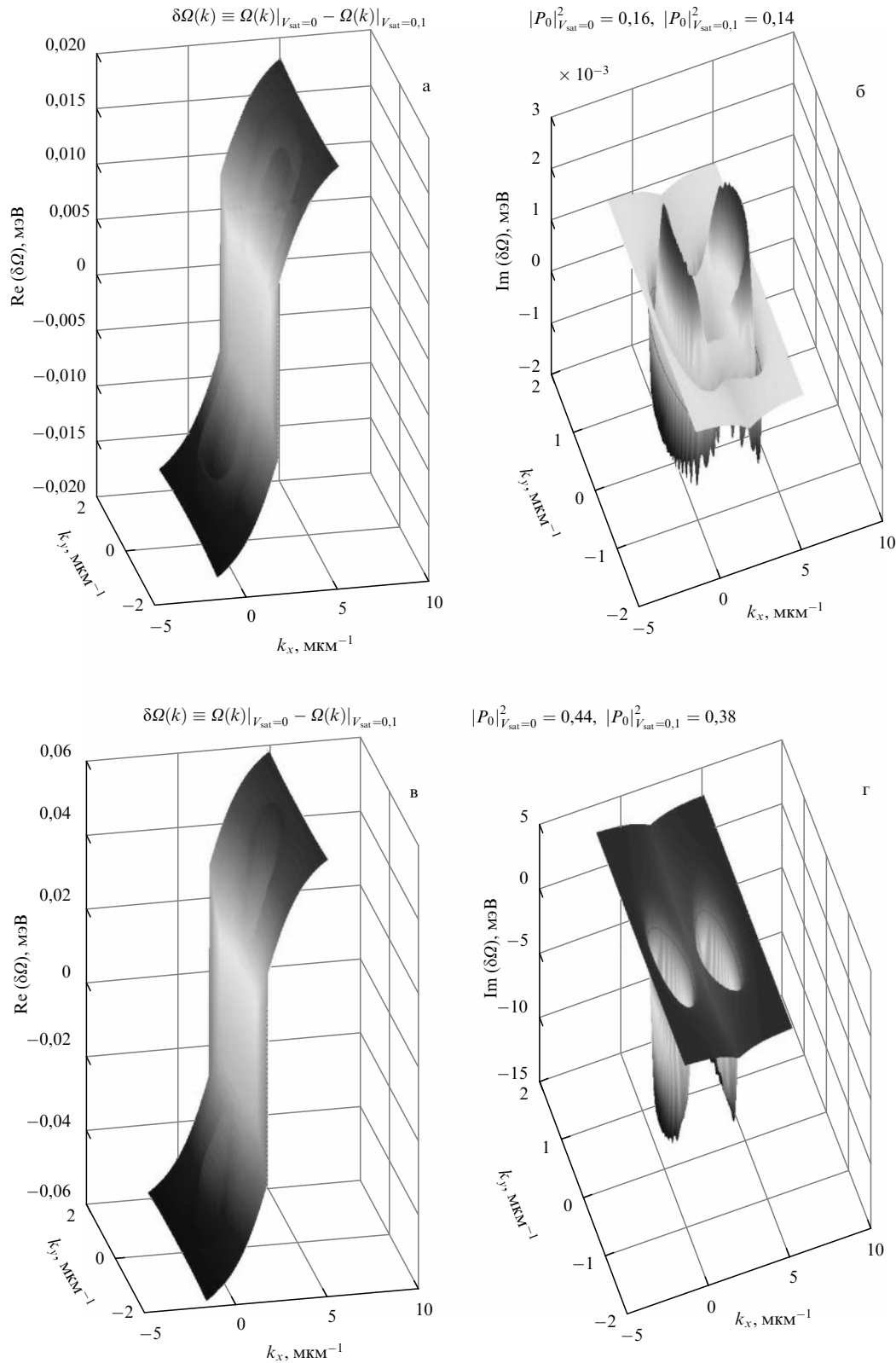
Таким образом, на упрощенной квазидвумерной модели поляритон-поляритонного рассеяния в МР мы численно продемонстрировали возможность жесткого возбуждения поляритон-поляритонного рассеяния при плавном изменении внешней накачки. Это происходит благодаря взаимовлиянию бистабильности отклика возбуждаемой поляритонной моды и ее неустойчивости относительно параметрического рассеяния. В результате рассеянный сигнал оказывается направленным примерно по нормали к микрорезонатору,  $k_s \approx 0$ , в качественном согласии с экспериментом [13, 15]. Анализ устойчивости поляритон-поляритонного рассеяния показывает, что этот результат должен сохраниться при учете квазидвумерности рассеяния и экситонного насыщения. В заключение подчеркнем, что необходимым условием существования области неустойчивости верхней ветви S-образной кривой нелинейного осциллятора относительно рассеяния в другие поляритонные моды является наличие точки перегиба у нижней поляритонной дисперсионной ветви. В случае пустого МР с квадратичной дисперсией или при накачке вдали



**Рис. 5.** Рассчитанные перенормированные двумерные спектры сигнальной и холостой мод  $\Omega(\mathbf{k})$  для случая  $V_{\text{sat}} = 0$ : (а, б) спектры в точке потери устойчивости нижней ветви S-образной кривой ( $|P_0|^2 = 0,16$ ,  $\mathcal{E}_{\text{ext}}^2 = 0,083$ ) (треугольник на сплошной S-образной кривой на рис. 4); (в, г) спектры на верхней ветви S-образной кривой, в точке отвечающей той же внешней накачке  $\mathcal{E}_{\text{ext}}^2 = 0,083$ , но с большей поляризацией,  $|P_0|^2 = 0,44$  (звездочка на сплошной S-образной кривой на рис. 4). Действительные части перенормированных энергий сигнальной и холостой мод  $\text{Re } \Omega(\mathbf{k})$  показаны на рис. а и в. Рисунки б и г показывают мнимую часть  $\text{Im } \Omega(\mathbf{k})$  только наиболее долгоживущей (или даже неустойчивой) моды. Жирный сплошной контур на рис. б, г — граница стабильной области  $\text{Im } \Omega(\mathbf{k}) = 0$ .

от области перегиба этой неустойчивости не возникает, и поведение системы оказывается просто бистабильным.

Авторы благодарны П.В. Елютину и Н.С. Масловой за обсуждения. Работа была частично поддержана грантами РФФИ и ОФН РАН.



**Рис. 6.** Рассчитанные изменения действительных (а, в) и мнимых (б, г) частей перенормированных спектров сигнала и холостой моды при учете экситонного насыщения. Рисунки а, б показывают изменения спектров в точках потери стабильности нижней ветви S-образной кривой, помеченных треугольниками на рис. 4; рис. в, г соответствуют состояниям с теми же значениями внешнего поля, но существенно большей поляризации, помеченные звездочками на рис. 4. Перенормированные спектры на рис. а, б рассчитаны при наведенной экситонной поляризации и интенсивности внешнего поля  $|P_0|^2 = 0,16$ ,  $\mathcal{E}_{\text{ext}}^2 = 0,083$  (для  $V_{\text{sat}} = 0$ ) и  $0,14$ ,  $0,072$  (для  $V_{\text{sat}} = 0,1$ ), а на рис. в, г эти параметры составляют  $0,44$ ,  $0,083$  (для  $V_{\text{sat}} = 0$ ) и  $0,38$ ,  $0,072$  (для  $V_{\text{sat}} = 0,1$ ). Масштаб по вертикальной оси на этих "дифференциальных" спектрах значительно меньше, чем на рис. 5, показывающем сам спектр, что означает слабое влияние насыщения на перестройку спектров в характерных точках S-образной кривой.

## Список литературы

1. Savvidis P G et al. *Phys. Rev. Lett.* **84** 1547 (2000)
2. Houdré R et al. *Phys. Rev. Lett.* **85** 2793 (2000)
3. Ciuti C et al. *Phys. Rev. B* **62** R4825 (2000)
4. Tartakovskii A I, Krizhanovskii D N, Kulakovskii V D *Phys. Rev. B* **62** R13298 (2000)
5. Stevenson R M et al. *Phys. Rev. Lett.* **85** 3680 (2000)
6. Baumberg J J et al. *Phys. Rev. B* **62** R16247 (2000)
7. Ciuti C, Schwendimann P, Quattropani A *Phys. Rev. B* **63** 041303 (2001)
8. Whittaker D M *Phys. Rev. B* **63** 193305 (2001)
9. Savvidis P G et al. *Phys. Rev. B* **64** 075311 (2001)
10. Saba M et al. *Nature* **414** 731 (2001)
11. Savasta S, Di Stefano O, Girlanda R *Phys. Rev. Lett.* **90** 096403 (2003)
12. Huynh A et al. *Phys. Rev. Lett.* **90** 106401 (2003)
13. Kulakovskii V D et al. *Nanotechnology* **12** 475 (2001)
14. Кулаковский В Д и др. *УФН* **175** 334 (2005)
15. Butté R et al. *Phys. Rev. B* **68** 115325 (2003)
16. Gippius N A et al., in *Proc. of the 26th Intern. Conf. on the Physics of Semiconductors, Edinburgh, UK, 29 July – 2 August 2002* (Institute of Physics Conf. Ser., No. 171, Eds A R Long, J H Davies) (Bristol: IOP Publ., 2003) paper G4-6
17. Кулаковский В Д и др. *УФН* **173** 995 (2003)
18. Gippius N A et al. *Europhys. Lett.* **67** 997 (2004)
19. Gippius N A, Tikhodeev S G *J. Phys.: Condens. Matter* **16** S3653 (2004)
20. Baas A et al. *Phys. Rev. A* **69** 023809 (2004)
21. Whittaker D M, in *Proc. of PLCMN4, St. Petersburg, June 2004* (2004)
22. Carusotto I, Ciuti C *Phys. Rev. Lett.* **93** 166401 (2004)
23. Tikhodeev S G et al. *Phys. Rev. B* **66** 045102 (2002)
24. Tassone F, Yamamoto Y *Phys. Rev. B* **59** 10830 (1999)
25. Firth W J, Scroggie A J *Phys. Rev. Lett.* **76** 1623 (1996)
26. Kuszelewicz R et al. *Phys. Rev. Lett.* **84** 6006 (2000)
27. Vladimirov A G et al. *Phys. Rev. E* **65** 046606 (2002)
28. Duffing G *Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz* (Braunschweig: Vieweg, 1918)
29. Luchinsky D G, McClintock P V E, Dykman M I *Rep. Prog. Phys.* **61** 889 (1998)
30. Gilmore R *Rev. Mod. Phys.* **70** 1455 (1998)
31. Baas A et al. *Phys. Rev. B* **70** 161307(R) (2004)
32. Langbein W *Phys. Rev. B* **70** 205301 (2004)

PACS numbers: 42.65. – k, 71.36. + e, 78.65. – n

## Стимулированное поляритон-поляритонное рассеяние в полупроводниковых микрорезонаторах

В.Д. Кулаковский, Д.Н. Крижановский,  
М.Н. Махонин, А.А. Деменев,  
Н.А. Гишпиус, С.Г. Тиходеев

Смешанные экситон-фотонные состояния в плоских полупроводниковых микрорезонаторах (МР) с квантовыми ямами (КЯ) в активном слое толщиной  $1-3\lambda$ , где  $\lambda$  — длина волны света, представляют собой новый класс квазидвумерных квазичастиц с уникальными свойствами [1]. Такие состояния, получившие название микрорезонаторных поляритонов, реализуются в МР при условии, что затухания фотонной и экситонной мод не превышают энергию экситон-фотонного взаимодействия. Квантование света в плоском МР перпендикулярно плоскости зеркал приводит к почти параболической дисперсии фотонной моды с очень малой эффективной

массой вблизи нулевого латерального квазимпульса  $\mathbf{k}$ :

$$E_C = \left( E_C^2(0) + \frac{(\hbar ck)^2}{\varepsilon} \right)^{1/2}, \quad (1)$$

где  $\hbar$  — постоянная Планка,  $c$  — скорость света и  $\varepsilon$  — диэлектрическая постоянная. В режиме сильного взаимодействия экситонная и фотонная моды расталкиваются и возникают две — верхняя и нижняя — поляритонные ветви, дисперсия которых определяется двумя параметрами — рассогласованием  $\delta = E_C - E_X$  энергий пустого МР  $E_C$  и экситона  $E_X$  при  $\mathbf{k} = 0$  и величиной экситон-фотонного взаимодействия  $\Omega$ . Из-за большой фотонной составляющей эффективная масса МР-поляритонов оказывается на несколько порядков меньше эффективной массы экситонов, а их когерентный размер превышает несколько микрон, что качественно изменяет свойства экситонной системы [1–3]. Благодаря уникальным особенностям дисперсии поляритонов в МР, с одной стороны, и короткому времени их жизни, с другой, энергетическая релаксация поляритонов в МР-структурах существенно отличается от релаксации экситонов в КЯ.

Сильная зависимость энергии МР-поляритона от квазимпульса при малых  $k$  так же, как и в случае трехмерных поляритонов в полупроводниках, ведет к существенному подавлению их энергетической релаксации с испусканием акустических фононов. В результате при малых плотностях возбуждения наблюдается сильное уменьшение заселенности состояний при приближении ко дну нижней поляритонной ветви (НПВ), получившее название "эффекта узкого бутылочного горла" [4]. В условиях сильно подавленного поляритон-фотонного механизма релаксации, существенными становятся межчастичные рассеяния [5, 6]. В частности, уже при небольшой плотности двумерного электронного газа в КЯ рассеяние поляритонов на электронах приводит к более сильной энергетической релаксации поляритонов, чем рассеяние на фононах, что обуславливает сильную зависимость энергетического распределения поляритонов в НПВ от условий фотовозбуждения [7–9].

Наибольший интерес в последние годы вызывает поляритон-поляритонное рассеяние, благодаря которому экситон-поляритонная система демонстрирует сильнонелинейные свойства, проявляющиеся в поведении интенсивности и поляризации излучения при больших плотностях резонансного возбуждения вблизи точки перегиба дисперсионной кривой НПВ [2, 3, 10–17]. В частности, такое возбуждение приводит к появлению сильного параметрического рассеяния в состоянии с  $\mathbf{k} = 0$  и  $2\mathbf{k}_p$ , где  $\mathbf{k}_p$  — квазимпульс возбуждающего света. Эффект объясняется четырехволновым смешением или параметрическим рассеянием фотовозбужденных поляритонов из состояния  $(E_p, \mathbf{k}_p)$  с энергией  $E_p$  и моментом  $\mathbf{k}_p$  в состояния  $(E_s, \mathbf{k}_s)$  и  $(E_i, \mathbf{k}_i)$ , получившие названия "сигнал" (S) и "холостой сигнал" (idler, I) соответственно, и идет с сохранением энергии и квазимпульса:

$$\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i = 2\mathbf{k}_p, \quad E_s + E_i = 2E_p. \quad (2)$$

Коэффициент преобразования достигает 10%, поэтому МР-структуры могут оказаться весьма перспективными для применения в беспороговых лазерах на поляритонах [18].