

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

О применении кибернетических методов в физике

А.Л. Фрадков

Рассматриваются основные особенности предмета и методов сравнительно новой, быстро развивающейся области, возникшей на стыке физики и теории управления (кибернетики) и ориентированной на исследование физических систем кибернетическими методами. Решения задач управления энергией для двух важнейших классов физических систем: консервативных и диссипативных, изложены на основе гамильтонова формализма и метода скоростного градиента. Приводятся примеры приложений к задаче о маятнике Капицы, управлению переходом через потенциальный барьер, управлению связанными осцилляторами и молекулярными системами. Представлен подход к применению принципа скоростного градиента для построения моделей динамики физических систем.

PACS numbers: 02.30.Yy, 05.45.Gg, 05.45.Xt, 32.80.Qk, 45.80.+r

Содержание

1. Введение. Физика и кибернетика (113).
2. Особенности применения кибернетических методов в физике (115).
 - 2.1. Модели динамики объектов управления. 2.2. Цели управления. 2.3. Алгоритмы управления. 2.4. Методы построения алгоритмов управления. 2.5. Результаты.
3. Управление консервативными системами (120).
4. Управление диссипативными системами (122).
 - 4.1. Индекс возбудимости. 4.2. Резонанс с обратной связью.
5. Примеры (124).
 - 5.1. Управляемый маятник Капицы. 5.2. Задача о выбросе из потенциальной ямы. 5.3. Управление синхронизацией двух осцилляторов.
6. Управление распределенными системами (128).
 - 6.1. Задачи и методы управления в распределенных системах. 6.2. Управление энергией в моделях синус-Гордона и Френкеля–Конторовой.
7. Управление молекулярными и квантовыми системами (130).
 - 7.1. Лазерное управление молекулярной динамикой. 7.2. Синтез управления диссоциацией двухатомной молекулы. 7.3. Результаты моделирования при классическом и квантово-механическом описании молекул.
8. Законы управления и законы динамики систем (134).
 - 8.1. Вариационные принципы. Принцип скоростного градиента. 8.2. Примеры скоростно-градиентных законов динамики. 8.3. Соотношения Онсагера. 8.4. Динамика и цель.
9. Заключение (136).
- Список литературы (137).

А.Л. Фрадков, Институт проблем машиноведения РАН, 199178 Санкт-Петербург, Васильевский остров, Большой просп. 61, Российская Федерация
Тел. (812) 321-47-66. Факс (812) 321-47-71
E-mail: alf@control.ipme.ru

Статья поступила 20 августа 2004 г.,
после доработки 30 ноября 2004 г.

1. Введение. Физика и кибернетика

Традиционно в физике исследуются два типа взаимодействий системы с внешней средой: обмен веществом и обмен энергией. Во второй половине XX века значительное внимание стал привлекать третий тип взаимодействия — обмен информацией. Связь информации с другими характеристиками физических систем обсуждалась в работах Л. Сцилларда [1], Д. Габора [2], Л. Бриллюэна [3], Р.Л. Стратоновича [4, 5] и др. [6–8]. В 1994 г. в УФН была опубликована статья Б.Б. Кадомцева "Динамика и информация" [9], в которой детально анализировались свойства физических систем, обладающих способностью обмениваться информацией с внешней средой (такие системы в [9] были названы информационно открытыми). Обмен информацией существенно обогащает класс возможных поведений системы и ставит новые задачи, решению которых в последние годы посвящено немало исследований [10–13]. В частности, детально изучались вопросы передачи и обработки информации в квантовых системах; результаты этих исследований нашли применение при разработке принципов построения и функционирования квантовых компьютеров [13, 14].

В то же время в статье [9], как и в последующей книге [10], был сделан вывод, что изучение взаимоотношений динамики и информации в физических системах — всего лишь первый шаг; дальнейшие исследования должны учитывать не только статистические закономерности передачи информации, но также цели и способы ее использования в системе. В частности, отмечалось, что "...следует идти дальше и изучать иерархизацию структур, образование структур с памятью и возможностями извлечения информации извне, накопления ее в памяти, использования информации для управления и обработки ее с целью оптимального управления" [9].

Десятилетие, прошедшее после опубликования статьи [9], подтвердило правильность этого прогноза.

Произошел бурный рост числа публикаций, посвященных вопросам управления в физических системах, или, более широко, применению кибернетических методов в физике. Обсуждению некоторых результатов в этой области и посвящен настоящий обзор.

Кибернетика имеет признанную дату рождения: день публикации в 1948 г. первого издания книги американского математика Норберта Винера [15], который определял ее как науку об управлении и связи в живом организме, машине и обществе. В настоящее время кибернетика понимается как теория управления в широком смысле, а к кибернетическим методам относят не только методы управления, но и методы оценивания переменных и параметров системы, методы фильтрации, оптимизации, распознавания образов и др.

В последние десятилетия теория управления интенсивно развивалась в связи с потребностями инженерной практики. Тем не менее до недавних пор кибернетические термины редко появлялись на страницах ведущих физических журналов, а влияние кибернетики на физические исследования практически не ощущалось. И это не удивительно, поскольку науки совсем непохожи: физика, в частности механика, является классической *описательной* (descriptive) наукой, а кибернетика (теория управления) представляет собой "в некотором смысле парадигму *предписательных* (prescriptive) наук" [16]. Это означает, что, тогда как задача физики — исследование и *описание* систем, задача кибернетики состоит в преобразовании их с помощью управляющих воздействий с целью формирования *предписанного* поведения.

Следует отметить, что хотя автоматические и автоматизированные системы измерений и управления давно и широко применяются в экспериментальных физических исследованиях, а современный физический опыт немалым без автоматики, в экспериментальных исследованиях система управления обычно играет вспомогательную роль, обеспечивая поддержание заранее заданного режима эксперимента. При этом не возникает качественно нового взаимодействия физики и теории управления, даже когда при применении кибернетических методов обнаруживаются новые теоретические результаты и качественно новые физические эффекты.

Ситуация коренным образом изменилась в 1990-х годах с началом бурного развития двух новых областей: "управление хаосом" и "управление квантовыми системами". Показательна история управления хаосом. В 1990 г. появилась статья Э. Отта, Ч. Гребоджи и Дж. Йорке из Мэрилендского университета (США) "Управление хаосом" ("Controlling chaos") [17], которая вызвала настоящий взрыв публикаций. По данным журнала *Science Citation Index*, в начале 2000-х годов по этой тематике публиковалось более 400 статей в год, а их общее число перевалило за 3000. В статье [17] был сделан вывод, что даже малое управление в виде обратной связи, приложенное к нелинейной (хаотически колеблющейся) системе, может коренным образом изменить ее динамику и свойства, например превратить хаотическое движение в периодическое. Эта работа породила лавину публикаций, в которых иногда экспериментально, а чаще с помощью компьютерного моделирования демонстрировалось, как управление (с обратной связью или без нее) может влиять на поведение разнообразных реальных и модельных физических систем. Предложенный в [17] метод стали называть методом Отта–Гребоджи–

Йорке (OGY), а число ссылок на [17] к 2002 г. превысило 1300. Большинство статей по этой теме публикуется в физических журналах, а авторы многих работ — физики. Таким образом, новое направление с достаточным основанием можно отнести к области физики. Развитие методов управления хаотическими процессами стимулировалось новыми потребностями появившихся приложений в лазерных и химических технологиях, технике телекоммуникаций, биологии и медицине.

Отметим, что еще в 1980-х годах в работах исследователей из МГУ была показана возможность превращения под действием внешнего гармонического возбуждения хаотических процессов в периодические, что можно интерпретировать как управление подавлением хаоса в системе (см., например, [18–24]). Однако эти работы, к сожалению, не породили лавины публикаций.

Как ни странно, но во многих работах, хотя и подчеркивалась ключевая роль нелинейности системы в подобных явлениях, аппарат современной теории нелинейного управления, как правило, использовался слабо. Объяснить это можно тем, что возникающие задачи зачастую отличаются от традиционных задач автоматического управления: вместо классических целей управления — приведения траектории системы в заданную точку (задача регулирования) и приближения траектории к заданному движению (задача программного управления, задача слежения) — ставятся ослабленные цели: создание режимов с частично заданными свойствами, качественное изменение фазовых портретов систем, синхронизация хаотических колебаний и т.п. С другой стороны, предъявляется более жесткое требование к "малости" управляющего воздействия, соответствующее физически ясному условию минимального вмешательства исследователя в естественный ход изучаемого процесса. Впоследствии оказалось, что подобные постановки важны и интересны не только для хаотических систем, но и для более широкого класса задач управления колебательными процессами [25]. Естественным следующим шагом стала постановка общей проблемы изучения тех свойств физической системы, которые можно создать или изменить, воздействуя на нее с помощью обратных (слабых) связей [26–28]. Растет число публикаций по применению методов кибернетики — теории управления — для поиска новых физических эффектов в различных областях физики и механики: активное управление вибрациями и шумами, оптимальное управление термодинамическими системами, управление пучками частиц в ускорителях, стабилизация плазмы в задачах термоядерного синтеза.

Особенно бурный рост за последнее десятилетие испытала область управления молекулярными и квантовыми системами. Пожалуй, именно в эту область идеи управления проникли раньше всего. История идей управления молекулярными системами уходит своими корнями в средневековье, когда алхимики искали способы вмешательства в ход химических реакций, стремясь превратить свинец и ртуть в золото. Следующую веху установил английский физик Джеймс Клерк Максвелл, придумавший в 1871 г. гипотетическое существо (демон Максвелла), способное измерять скорости отдельных молекул газа в сосуде и направлять быстрые молекулы в одну часть сосуда, а более медленные молекулы — в другую. Именно к демону Максвелла обращались физики в XX веке, изучая связь между энергией и

информацией [1, 3, 4, 7, 29]. Понимание того, что любые измерения и вычисления требуют определенных затрат энергии, и стремление снизить эти затраты [8, 14] привели к идее создания квантовых компьютеров [13, 14]. Всерьез обсуждаются вопросы экспериментальной реализации демона Максвелла [30, 31].

В конце 1970-х годов появились первые постановки и решения задач управления квантовыми системами на основе методов теории управления, в частности, были установлены критерии управляемости квантовых систем [32]. В 1980–1990-х годах успехи лазерной техники привели к появлению лазеров, позволяющих генерировать импульсы когерентного излучения продолжительностью порядка нескольких фемтосекунд. Длительность импульса такого лазера сравнима с периодом собственных колебаний молекул, что в принципе делает фемтосекундный лазер средством управления поведением отдельных атомов и молекул. Развитие новых технологий стимулировало бурный рост исследований по когерентному управлению молекулярными системами на основе как классических, так и квантовых моделей [33, 34]. Число публикаций только по управлению квантовыми системами превысило 600 статей в год. Использование методов теории управления открывает новые горизонты для возможностей изучения и изменения движения атомов и молекул, определяя как способы, так и, очевидно, существующие границы допустимого вмешательства в интимные природные процессы микромира.

О применимости кибернетических методов в физике говорилось давно. Например, в книге В.Ф. Турчина *Феномен науки*, написанной в 1960-е годы, отмечалось: "В кибернетических понятиях с равным успехом описываются явления физико-химические, биологические, социальные" [35]. Однако описания различных применений кибернетических методов в физике с единых позиций, по-видимому, до сих пор не проводилось. Цель настоящего обзора — привлечь внимание к быстро развивающейся области исследований физических систем кибернетическими методами, сформулировать и проиллюстрировать на примерах некоторые общие принципы, лежащие в ее основе.

2. Особенности применения кибернетических методов в физике

Будем для краткости называть *кибернетической физикой* область исследований, направленную на изучение физических систем кибернетическими методами. Ниже описываются основные особенности предмета этой области, включающего в себя модели и задачи управления физическими системами, и ее методов, опирающихся на методы теории управления.

2.1. Модели динамики объектов управления

Формальная постановка любой задачи управления начинается с выбора модели динамики управляемой системы — объекта управления (ОУ) — и модели цели управления. Даже если модель ОУ не дана или не известна, то и в этом случае она должна быть определена в том или ином виде. Отличие кибернетических моделей от традиционных для физики и механики моделей динамики состоит в том, что в первых явно указываются входы и выходы системы, поскольку это необходимо для построения обратных связей. В литера-

туре по управлению физическими системами рассматривается несколько классов моделей ОУ. Ограничимся рассмотрением часто встречающихся моделей со сосредоточенными параметрами, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ) в пространстве состояний:

$$\dot{x} = F(x, u), \quad (2.1)$$

где $x = x(t)$ — n -мерный вектор переменных состояния ОУ¹; $\dot{x} = dx/dt$; $u = u(t)$ — m -мерный вектор входов (управляющих переменных). Компоненты вектора состояния будем обозначать как x_1, \dots, x_n , а компоненты вектора управляющих воздействий — через u_1, \dots, u_m . Таким образом, уравнение состояния (2.1) — не что иное, как компактная запись системы ОДУ

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.2)$$

Модели типа (2.1) пригодны для описания двух физически различных классов ОУ.

1. *Объекты с координатным управлением.* Входные переменные представляют собой некоторые физические величины: силы, моменты, напряженность электрических или магнитных полей и т.д. Например, модель управляемого осциллятора (маятника) может быть представлена в форме

$$J\ddot{\varphi} + \varrho\dot{\varphi} + mgl \sin \varphi = u, \quad (2.3)$$

где $\varphi = \varphi(t)$ — угол отклонения маятника от вертикали (выходная величина); $u = u(t)$ — управляющий момент (входная величина); J, m, l, g, ϱ — соответственно момент инерции, масса, длина маятника, ускорение свободного падения, коэффициент трения. Уравнение (2.3) можно привести к форме (2.1), где вектор состояния будет иметь вид $x = (\varphi, \dot{\varphi})^T$.

2. *Объекты с параметрическим управлением.* Входные переменные представляют собой изменения физических параметров системы, например, $u(t) = p - p_0$, где p_0 — номинальное значение физического параметра p . Пусть, например, маятник управляется путем медленного изменения его длины. Тогда модель (2.3) примет вид

$$J\ddot{\varphi} + \varrho\dot{\varphi} + mg[l_0 + u(t)] \sin \varphi = 0, \quad (2.4)$$

где l_0 — начальная длина маятника.

В ряде публикаций предпочитают говорить об указанных выше двух вариантах ОУ как о существенно различных. Однако с кибернетической точки зрения это различие принципиально, когда речь идет о процессах, описываемых нелинейными моделями типа (2.1). Рассматривать отдельно случаи координатного и парамет-

¹ В обзоре используются следующие обозначения: $x \in \mathcal{R}^n$ — вещественный n -мерный вектор (столбец); $x = \text{col}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — вектор-столбец с компонентами x_1, x_2, \dots, x_n ;

$$|x| = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$$

— евклидова норма вектора x ; если X — вектор или матрица, то X^T — результат транспонирования (в частности, если X — вектор-столбец, то X^T — вектор-строка); через I_n обозначается единичная $n \times n$ -матрица.

рического управления имеет смысл только в линейной модели ОУ, поскольку линейная система с линейной обратной связью по координатам сохраняет линейность, а такая же система с линейной обратной связью по параметрам не сохраняет (становится билинейной) и требует применения более сложных методов для анализа и синтеза.

Кроме описания динамики модель ОУ должна включать в себя описание измерений (наблюдаемых величин). Пусть наблюдению доступны l переменных y_1, \dots, y_l , называемых выходами объекта или *наблюдаемыми*, а влиянием измерений на динамику ОУ и помехами измерения можно пренебречь². Тогда измерение можно описать с помощью l -мерной вектор-функции $y = h(x)$.

2.2. Цели управления

Классификацию задач управления удобно проводить по типу целей управления (ЦУ).

2.2.1. Регулирование (стабилизация). Регулирование понимается как приведение вектора переменных состояния объекта $x(t)$ или вектора выходных переменных $y(t)$ к некоторым равновесным состояниям x_* и y_* соответственно. При постановке задачи от времени достижения цели абстрагируются и задают ЦУ в виде предельных соотношений

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_* \quad (2.5)$$

или

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_* \quad (2.6)$$

При наличии ограниченных возмущений достижение целей (2.5) и (2.6), как правило, становится невозможным, поэтому они заменяются оценочными соотношениями для верхней границы предельной ошибки

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |x(t) - x_*| \leq \Delta \quad (2.7)$$

или

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |y(t) - y_*| \leq \Delta, \quad (2.8)$$

где Δ — величина (параметр) допустимой погрешности. При действии на ОУ случайных возмущений или помех обычно рассматривают усредненные целевые условия вида

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} M|x(t) - x_*| \leq \Delta \quad (2.9)$$

или

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} M|y(t) - y_*| \leq \Delta, \quad (2.10)$$

где M обозначает математическое ожидание (усреднение).

² Данное предположение, вообще говоря, не выполняется для процессов микромира, в частности для квантово-механических, поскольку макроскопический измерительный прибор может оказывать существенное воздействие на микроскопическую систему, вплоть до ее разрушения. Каждую такую задачу следует рассматривать отдельно.

Сложность достижения целей (2.5)–(2.10) возрастает, если желаемое состояние равновесия x_* неустойчиво при отсутствии управления. Такой случай типичен для задач управления хаотическими системами. Возможно также, что без управления состояние x_* не является равновесным, что не вносит дополнительных сложностей — просто в таком случае управляющее воздействие не исчезает при приближении траектории к точке x_* .

2.2.2. Слежение. В задачах слежения требуется приблизить вектор переменных состояния ОУ $x(t)$ или вектор выхода $y(t)$ к желаемым функциям времени $x_*(t)$, $y_*(t)$ соответственно, т.е. ставятся ЦУ

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) - x_*(t)] = 0, \quad (2.11)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [y(t) - y_*(t)] = 0. \quad (2.12)$$

Желаемый выход $y_*(t)$ может интерпретироваться как *задание* или *командный сигнал*. Функция $x_*(t)$ (или $y_*(t)$) может быть задана как явная функция времени или измеряться по ходу развития процесса. Она может быть также определена через движение другой, вспомогательной, системы, называемой *эталонной моделью* или *моделью цели*. В последнем случае задача нахождения регулятора, обеспечивающего достижение цели (2.11) или (2.12), называется *задачей управления с эталонной моделью*. Типичная задача управления хаосом — стабилизация неустойчивого периодического решения (орбиты) — также относится к задачам слежения, где $x_*(t)$ — T -периодическое решение свободной ($u(t) = 0$) системы (2.1) с начальным условием $x_*(0) = x_{*0}$, т.е. $x_*(t+T) = x_*(t)$ для всех $t \geq 0$.

2.2.3. Возбуждение (раскачка, раскрутка, разгон) колебаний. В задачах возбуждения колебаний предполагается, что первоначально система находится в состоянии покоя и ее необходимо привести в колебательное движение с заданными характеристиками, причем траектория, по которой должен двигаться фазовый вектор системы, заранее не задана, является неизвестной или ее вид не имеет значения для достижения цели. Подобные задачи хорошо известны в электротехнике, радиотехнике, акустике, лазерной и вибрационной технике, где требуется запустить процесс генерации периодических колебаний. К этому классу относятся также задачи диссоциации и ионизации молекулярных систем, выброса из потенциальной ямы, хаотизации и другие задачи, связанные с возрастанием энергии, которое может привести к фазовому переходу в системе. Формально подобные задачи сводятся к задачам слежения, но желаемые движения при этом становятся неперiodическими, нерегулярными, а целевая траектория $x_*(t)$ может быть задана лишь частично.

Задачи возбуждения колебаний часто можно переформулировать с помощью некоторой скалярной *целевой функции* $G(x)$, задав ЦУ как достижение предельного равенства

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G(x(t)) = G_* \quad (2.13)$$

или неравенства для нижнего предела целевой функции

$$\underline{\lim}_{t \rightarrow \infty} G(x(t)) \geq G_* \quad (2.14)$$

Часто в качестве целевой функции выступает полная энергия свободной системы $H(x)$.

2.2.4. Синхронизация. Под синхронизацией понимается совпадение или сближение переменных состояния двух или более систем либо согласованное изменение некоторых количественных характеристик систем. Задача синхронизации отличается от задачи управления с эталонной моделью, поскольку в ней допускается наличие временных сдвигов между согласуемыми переменными. Сдвиги могут быть либо постоянными, либо стремящимися к постоянным (асимптотические фазы). Кроме того, во многих задачах синхронизации связи между системами являются двусторонними (двунаправленными). Это означает, что предельный режим в системе (синхронное решение) заранее не известен.

Общей особенностью задач управления возбуждением и синхронизацией колебаний является то, что желаемое поведение не фиксируется однозначно — его характеристики задаются лишь частично. Например, в задаче возбуждения колебаний могут быть наложены требования лишь на величину амплитуды колебаний, а их частота и форма могут изменяться в определенных границах. В задачах синхронизации часто основным требованием является совпадение или согласованность колебаний всех подсистем, в то время как характеристики движения каждой подсистемы могут варьироваться в широких пределах.

Если требуемое соотношение устанавливается только асимптотически, при $t \rightarrow \infty$, то можно говорить об асимптотической синхронизации. Если же синхронизация в системе без управления (при $u = 0$) отсутствует или синхронный режим является либо неустойчивым, либо обладающим слишком узкой областью притяжения, то можно сформулировать задачу управления синхронизацией как нахождение управляющего воздействия, обеспечивающего синхронный режим. При этом синхронизация будет выступать в качестве ЦУ. Например, цель, соответствующую обеспечению асимптотической синхронизации векторов состояний (фазовых координат) двух систем, можно записать в виде

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [x_1(t) - x_2(t)] = 0. \quad (2.15)$$

Соотношение (2.15) выражает условие сходимости решений $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ в объединенном пространстве состояний двух систем к диагональному множеству $x_1 = x_2$. Часто оказывается удобным переписать целевое условие вида (2.11)–(2.13) или (2.15) в терминах подходящей целевой функции $Q(x, t)$ как предельное соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(x(t), t) = 0. \quad (2.16)$$

Например, чтобы привести цель (2.15) к форме (2.16), можно использовать квадратичную целевую функцию $Q(x) = |x_1 - x_2|^2$. Вместо евклидовой нормы для задания той же цели можно выбрать другую норму, например, часто используется квадратичная целевая функция $Q(x, t) = [x - x_s(t)]^T \Gamma [x - x_s(t)]$, где Γ — симметричная положительно определенная матрица. Целевые функции, соответствующие другим видам синхронизации (частотной, фазовой, экстремальной и др.), приведены в [28, 36, 37].

2.2.5. Модификация предельных множеств (аттракторов) систем. Этот класс целей включает в себя такие частные виды целей, как

— изменение типа равновесия (например, преобразование неустойчивого положения равновесия в устойчивое или наоборот);

— изменение вида предельного множества (например, преобразование предельного цикла в хаотический аттрактор или наоборот, изменение фрактальной размерности предельного множества и т.д.);

— изменение положения и типа точки бифуркации в пространстве параметров системы (см., например, [38]).

Цели подобного типа часто соответствуют фазовым переходам. Во многих работах по управлению хаотическими режимами вообще не предполагается задания количественных характеристик желаемого движения. Вместо этого задается желаемый качественный тип предельного множества (аттрактора). Например, требуется преобразовать хаотические, нерегулярные колебания в периодические или квазипериодические. При необходимости количественного задания желаемой степени нерегулярности целевые функции можно формировать через известные характеристики хаотичности: показатели Ляпунова, фрактальные размерности, энтропию и т.п. (см. обзоры работ по управлению хаосом в [28, 39, 40]).

Кроме основной ЦУ могут быть заданы дополнительные цели или ограничения, одним из которых является требование обеспечить достижение ЦУ при малом (маломощном, малозатратном) управлении. Требование "малости управления" важно для физических задач, поскольку оно означает, что внешние воздействия не разрушают присущих физической системе внутренних свойств, не осуществляют "насилия" над системой.

Достижение или недостижение ЦУ может зависеть от того, каким образом были заданы начальные условия системы. Если цель достигается при любых начальных условиях, то говорят о ее глобальной достижимости. В противном случае должно быть задано начальное условие или определено множество начальных условий Ω , такое, что цель достигается для любого решения $x(t)$ системы (2.1) с управлением при начальных условиях из этого множества, т.е. при $x(0) = x_0 \in \Omega$.

2.3. Алгоритмы управления

В физических работах часто говорят об управлении системой, если в системе (или ее модели) выделен некоторый параметр, называемый входным, бифуркационным или управляющим параметром, вариация которого приводит к изменению некоторой характеристики поведения системы, называемой выходным параметром. При этом говорят об управляемости системы, если при вариации входного параметра в диапазоне допустимых значений область изменения выходного параметра охватывает значения, соответствующие желательным режимам функционирования системы.

Строго говоря, при такой постановке задачи управление еще не является таковым. Существует лишь принципиальная возможность достижения заданного значения выхода при постоянном значении входа. В действительности подача на объект рассчитанного по величине, но постоянного во времени воздействия может и не привести к желаемой цели. Рассмотрим, например, задачу о стабилизации неустойчивого равно-

весия $\varphi = \pi$ маятника (2.3), но управляющее воздействие будем считать постоянным. Из условия равновесия $\varphi = \pi$ следует, что $u(t) = 0$. Однако из-за неустойчивости равновесия $\varphi = \pi$ сколь угодно малые отклонения начальных условий или сколь угодно малые возмущения могут привести к достаточно большим отклонениям от ЦУ.

Значительно бóльшими возможностями обладает управление, являющееся функцией времени. Если управляющее воздействие (величина или параметр) зависит только от времени, $u = u(t)$, то такое воздействие называется *программным* или *задающим*, а способ управления — управлением *по возмущению* или *по разомкнутой контуре* (program control, open loop control, feedforward control). На самом деле программное управление может зависеть еще и от параметров, а также от начальных условий объекта управления, $u(t) = U(t, x_0)$. Возможность качественного изменения динамики системы при задании управления в виде высокочастотной функции времени впервые была экспериментально обнаружена в конце 1940-х годов П.Л. Капицей, показавшим, что верхнее, неустойчивое положение равновесия маятника становится устойчивым, если ось подвеса маятника вибрирует в вертикальном направлении с достаточно большой частотой [41] (см. также [42, 43]). Этот эксперимент был объяснен П.Л. Капицей на основе введения так называемого "эффективного потенциала", что соответствует варианту метода усреднения. Работа П.Л. Капицы дала толчок к развитию нового раздела механики — вибрационной механики [42, 43]. Аналогичные идеи легли также в основу соответствующего раздела теории управления — вибрационного управления [44, 45].

Значительное число работ посвящено исследованию виброиндуцированных или шумоиндуцированных эффектов, которые можно интерпретировать как задачи управления с управляющей функцией, зависящей только от времени. К таким эффектам относятся виброиндуцированный (вибрационный) резонанс [46], виброиндуцированный транспорт (виброперемещение) [43], стохастический резонанс [47], шумоиндуцированные переходы [48–50], шумоиндуцированный транспорт (stochastic ratchets) [49–51], синхронизация под действием внешней периодической или случайной силы [52].

Принцип автофокусировки ускорителей, предложенный в 1944–1945-х годах независимо В.И. Векслером и Э.М. Макмилланом, можно рассматривать как управление путем подачи воздействия с медленно изменяющейся частотой. Такой способ управления (называемый также динамическим авторезонансом [53] или чирпингом [54]) позволяет наращивать энергию нелинейной системы при сохранении в ней резонансного режима и в настоящее время находит применение для возбуждения атомов [55], плазмы [53], молекулярных систем [54], гидродинамических солитонов [56] и др. Для исследования подобных систем используется метод усреднения [57].

Еще более широкими возможностями обладает управляющее воздействие, в котором при вычислении $u(t)$ используются результаты измерений состояния объекта или его выходов (наблюдаемых величин). Такое управление называется *обратной связью по состоянию* (state feedback):

$$u(t) = U(x(t)) \quad (2.17)$$

или *по выходу* (output feedback):

$$u(t) = U(y(t)). \quad (2.18)$$

В физических задачах встречаются все три типа управления: постоянное, программное и обратная связь. Поскольку реализация управления в виде обратной связи требует доступности измерения необходимых для построения управления величин, которая часто отсутствует, исследование свойств управляемой системы обычно начинают с изучения низшей формы — постоянного управления, затем переходят к исследованию возможностей управления разомкнутого типа (программного), и лишь после этого исследуется управление с обратной связью, если удается осуществить такую постановку задачи.

Типичная формулировка задачи управления с учетом особенностей физического исследования следующая.

Найти все возможные виды поведения системы, которые могут быть обеспечены при помощи управляющих функций с нормой, не превышающей заданной (достаточно малой) величины u , возможно, при выполнении заданных ограничений.

При решении этой задачи может оказаться полезным решение вспомогательной, более характерной для теории управления задачи.

Найти управляющую функцию (или закон обратной связи) с минимальной нормой, обеспечивающую достижение заданного поведения системы (заданной цели управления).

2.4. Методы построения алгоритмов управления

Методы кибернетической физики основываются на хорошо разработанных в теории управления методах: линейного, нелинейного, оптимального и адаптивного управления; идентификации (реконструкции) параметров, фильтрации и оценивания состояний (параметров); оптимизации систем. Обычно некоторые параметры физической системы не известны, а некоторые переменные не доступны для измерения, т.е. по терминологии теории управления, синтез управления должен выполняться в условиях неопределенности. Для решения подобных задач разработаны методы робастного и адаптивного управления.

Перечисленные методы составляют основу курсов теории автоматического управления, входящих в учебные планы большинства инженерных специальностей. Для ознакомления с ними можно порекомендовать книги [58–61].

Опишем кратко один достаточно общий подход к построению алгоритмов управления в нелинейных системах, часто упоминаемый в настоящем обзоре, — метод скоростного градиента (СГ) [62]. Метод предназначен для решения задач управления непрерывными по времени системами, в которых ЦУ задана через целевую функцию. Опишем построение алгоритмов на основе вычисления СГ для непрерывной нестационарной системы

$$\dot{x} = F(x, u, t) \quad (2.19)$$

при ЦУ, определяемой соотношением (2.16), где $Q(x, t) \geq 0$ — гладкая целевая функция.

Для построения алгоритма сначала вычисляется скалярная функция $\dot{Q} = \omega(x, u, t)$ — скорость изменения величины $Q = Q(x(t), t)$; в силу уравнения объекта (2.19)

$$\omega(x, u, t) = \frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} + [\nabla_x Q(x, t)]^T F(x, u, t).$$

Затем находится градиент функции $\omega(x, u, t)$ по входным переменным

$$\nabla_u \omega(x, u, t) = \left(\frac{\partial \omega}{\partial u} \right)^T = \left(\frac{\partial F}{\partial u} \right)^T \nabla_x Q(x, t).$$

Наконец, дифференциальным уравнением задается алгоритм изменения $u(t)$:

$$\frac{du}{dt} = -\Gamma \nabla_u \omega(x, u, t), \quad (2.20)$$

где $\Gamma = \Gamma^T > 0$ — симметричная положительно определенная матрица, например $\Gamma = \text{diag} \{ \gamma_1, \dots, \gamma_m \}$, $\gamma_i > 0$. Алгоритм (2.20) естественно назвать *алгоритмом скоростного градиента* (АСГ), поскольку в нем изменение $u(t)$ происходит пропорционально градиенту скорости изменения Q .

Происхождение алгоритма (2.20) можно объяснить следующим образом. Для достижения ЦУ (2.16) желательно изменять $u(t)$ в направлении уменьшения $Q(x(t), t)$. Однако, поскольку $Q(x(t), t)$ не зависит от $u(t)$, найти такое направление затруднительно (в частности, это связано с необходимостью нахождения функций чувствительности). Вместо этого можно пытаться уменьшить \dot{Q} , добиваясь выполнения неравенства $\dot{Q} < 0$, являющегося условием уменьшения $Q(x(t), t)$. Функция $\dot{Q} = \omega(x, u, t)$ уже явно зависит от u , что и позволяет построить алгоритм (2.20).

В качестве примера выпишем АСГ для задачи регулирования линейной по входам системы

$$\dot{x} = A(x, t) + B(x, t)u, \quad (2.21)$$

где $A(x, t)$ — n -вектор, $B(x, t)$ — $n \times m$ -матрица. Уравнение (2.21) можно представить также в виде

$$\dot{x} = A(x, t) + \sum_{i=1}^m B_i(x, t)u_i, \quad (2.22)$$

где u_i — компоненты вектора $u \in \mathcal{R}^m$; $B_i(x, t)$ — столбцы матрицы $B(x, t)$, $B_i(x, t) \in \mathcal{R}^n$. Пусть целевая функция имеет вид

$$Q(x, t) = \frac{1}{2} [y - y_*(t)]^T P [y - y_*(t)], \quad (2.23)$$

где $y = G(x, t) \in \mathcal{R}^l$; $y_*(t)$ — задающее воздействие (желаемая траектория выхода), $y_*(t) \in \mathcal{R}^l$; $G(x, t)$ — гладкая вектор-функция, P — симметричная положительно определенная $l \times l$ -матрица. Скорость изменения $Q(x(t), t)$ будет равна

$$\omega(x, u, t) = [y - y_*(t)]^T P [CA(x, t) + CB(x, t)u - \dot{y}_*(t)], \quad (2.24)$$

где $C = C(x, t) = \partial G(x, t) / \partial x$, а скоростной градиент и АСГ соответственно примут вид

$$\nabla_u \omega(x, u, t) = B(x, t)^T C^T P [y - y_*(t)], \quad (2.25)$$

$$\frac{du}{dt} = -\Gamma B(x, t)^T C^T P [y - y_*(t)]. \quad (2.26)$$

В качестве матрицы усиления Γ часто выбирается диагональная ($\Gamma = \text{diag} \{ \gamma_i \}$) или скалярная ($\Gamma = \gamma I$) матрица, где γ_i, γ — положительные числа. Алгоритм (2.26) при $B(x, t) = \text{const}$ и $C(x, t) = \text{const}$ представляет собой хорошо известный интегральный закон регулирования.

Аналогичным образом строится и обобщение другого классического закона регулирования — пропорционального. Это так называемый *алгоритм скоростного градиента в конечной форме*:

$$u(t) = u_0 - \Gamma \nabla_u \omega(x(t), u(t), t), \quad (2.27)$$

где u_0 — некоторое начальное (опорное) значение управления (обычно полагают $u_0 = 0$). Используются алгоритмы и еще более общей структуры:

$$u(t) = u_0 - \gamma \psi(x(t), u(t), t), \quad (2.28)$$

где $\gamma > 0$ — скалярный множитель шага (коэффициент усиления), а вектор-функция $\psi(x, u, t)$ удовлетворяет условию псевдоградиентности

$$\psi(x, u, t)^T \nabla_u \omega(x, u, t) \geq 0. \quad (2.29)$$

Алгоритмы вида (2.28) называют *алгоритмами скоростного псевдоградиента*. Их частным случаем является так называемый *знаковый* или *релейный* алгоритм

$$u(t) = u_0 - \gamma \text{sign} \nabla_u \omega(x(t), u(t), t), \quad (2.30)$$

где знак (sign) для вектора понимается покомпонентно: для $x = \text{col} (x_1, \dots, x_m)$ имеем

$$\text{sign} x = \text{col} (\text{sign} x_1, \dots, \text{sign} x_m).$$

Для правильного и обоснованного выбора параметров алгоритмов СГ требуется проверка условий их применимости. Такие условия для различных случаев можно найти в [60, 62]. Основные из них: выпуклость функции $\omega(x, u, t)$ по u и существование "идеального управления" — вектора u_* , такого, что $\omega(x, u_*, t) \leq 0$ для всех x (условие достижимости).

Алгоритм скоростного градиента тесно связан с понятием функции Ляпунова $V(x)$ — функции состояния системы, убывающей вдоль ее траекторий. Функция Ляпунова является абстрактным аналогом таких физических характеристик как энергия и энтропия. Важно, что функция Ляпунова может использоваться не только для анализа, но и для синтеза систем, т.е. для решения обратных задач. В частности, конечная форма СГ-алгоритмов получается, если в качестве функции Ляпунова взять целевую функцию: $V(x) = Q(x)$. Дифференциальная форма СГ-алгоритмов соответствует выбору $V(x, u) = Q(x) + 0,5(u - u_*)^T \Gamma^{-1}(u - u_*)$, где u_* — желаемое ("идеальное") значение управляющих переменных.

2.5. Результаты

Значительная часть результатов в традиционных разделах физики представлена или может быть представлена в виде законов сохранения, отражающих фундаментальные законы природы и утверждающих, что некоторые величины не изменяются в процессе эволюции системы. При исследовании систем с управлением результаты

должны устанавливаться, до какой степени эволюция системы может быть изменена с помощью управления. Поэтому результаты в кибернетической физике формулируются не как законы сохранения, а как **законы преобразования**, определяющие класс возможных видов поведения, достижимых с помощью управлений из заданного класса (пределы управления).

Примером закона преобразования является принцип, предложенный в основополагающей работе [17] (закон Отта – Гребоджи – Йорке).

Каждая управляемая хаотическая траектория может быть преобразована в периодическую с помощью сколь угодно малого управления.

Термин "управляемая" в приведенной формулировке закона означает принципиальную разрешимость задачи. Достаточные для управляемости условия зависят от конкретной задачи и составляют предмет отдельного исследования. Другие примеры законов преобразования приводятся в разделах 3 и 4.

Подводя итог, еще раз подчеркнем, что предметом кибернетической физики является исследование свойств физических систем при наличии прямых и(или) обратных связей с окружающей средой. В этом проявляется ее сходство с теорией открытых систем [63]. Отличие от теории открытых систем состоит в том, что обратные связи не предполагаются заданными, а подлежат синтезу. При этом используются методы синтеза обратных связей, развитые в кибернетике.

3. Управление консервативными системами

Одной из важнейших физических величин является энергия, представляющая собой не только основной инвариант системы и ключ к ее описанию на основе гамильтонова формализма, но и меру взаимодействия различных систем. Уравнения динамики в гамильтоновой форме используются для описания самых разнообразных физических систем и явлений: от космических тел до молекулярных ансамблей. Поэтому изучение фундаментальных законов преобразования свойств систем с помощью управления естественно начать с законов преобразования энергии. В этом разделе будем предполагать, что система консервативна, т.е. потерями и диссипацией можно пренебречь. Тогда при свободном движении (т.е. в отсутствие внешних сил) энергия представляет собой инвариант системы. Поэтому оправданной является постановка задачи о переводе системы с одного уровня энергии на другой с помощью малого (в идеале — сколь угодно малого) по величине управления.

Для краткости ограничимся рассмотрением задач управления, в которых математическая модель системы задана в *гамильтоновой форме*:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(q, p, u)}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H(q, p, u)}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.1)$$

где n — число степеней свободы; $q = \text{col}(q_1, \dots, q_n)$, $p = \text{col}(p_1, \dots, p_n)$ — векторы обобщенных координат и обобщенных импульсов, образующие вектор состояния системы $x = \text{col}(q, p)$; $H = H(q, p, u)$ — гамильтониан управляемой системы; $u(t)$ — вход (вектор внешних обобщенных сил), $u(t) \in \mathcal{R}^m$.

Приводимые ниже результаты распространяются на системы более общего вида, чем гамильтоновы, в том

числе на системы, в модели которых управляющие переменные входят нелинейно [64].

В векторной записи модель (3.1) имеет вид

$$\dot{q} = \nabla_p H(q, p, u), \quad \dot{p} = -\nabla_q H(q, p, u). \quad (3.2)$$

Рассмотрим задачу приближения к заданному уровню H_* энергии свободной (неуправляемой) системы, т.е. зададим ЦУ как

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H_0(q(t), p(t)) = H_*, \quad (3.3)$$

где $H_0(q, p) = H(q, p, 0)$ — гамильтониан свободной системы, описываемой уравнениями (3.1) при $u = 0$. В дальнейшем будем предполагать, что гамильтониан является линейным по управлению:

$$H(q, p, u) = H_0(q, p) + H_1(q, p)^T u,$$

где $H_0(q, p)$ — гамильтониан свободной системы, $H_1(q, p)$ — m -мерный вектор так называемых *гамильтонианов взаимодействия*.

Применим для решения задачи метод СГ (см. раздел 2.4). Введем целевую функцию

$$Q(x) = \frac{1}{2} (H_0(q, p) - H_*)^2, \quad (3.4)$$

где $x = \text{col}(q, p)$. Тогда ЦУ (3.3) примет вид

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(x(t)) = 0. \quad (3.5)$$

Для применения метода СГ вычислим скорость изменения целевой функции в силу управляемой системы:

$$\dot{Q} = (H_0 - H_*) \left(\frac{\partial H_0}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial H_0}{\partial p} \dot{p} \right) = (H_0 - H_*) \{H_0, H_1\} u, \quad (3.6)$$

а затем СГ по u : $\nabla_u \dot{Q} = (H_0 - H_*) \{H_0, H_1\}^T$, где $\{H_0, H_1\}$ — скобка Пуассона³ гамильтонианов H_0, H_1 . Теперь легко выписать АСГ в конечной форме, например в линейном и релейном вариантах:

$$u = -\gamma (H_0 - H_*) \{H_0, H_1\}^T, \quad (3.7)$$

$$u = -\gamma \text{sign} [(H_0 - H_*) \{H_0, H_1\}^T], \quad (3.8)$$

где $\gamma > 0$ — коэффициент усиления. Можно применять и другие варианты общего алгоритма, выбирая в соот-

³ Напомним, что скобкой Пуассона гладких функций $f(q, p)$ и $g(q, p)$ называется функция

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right).$$

Если f, g — вектор-функции размерностью l, m соответственно, то скобка Пуассона определяется покомпонентно и является матрицей размером $l \times m$:

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial f}{\partial q_i} \left(\frac{\partial g}{\partial p_i} \right)^T - \frac{\partial f}{\partial p_i} \left(\frac{\partial g}{\partial q_i} \right)^T \right].$$

В частности, если f — скаляр, а g — m -мерный вектор-столбец, то $\{f, g\}$ — m -мерный вектор-строка (ковектор). Аналогично, если f, g — векторы размерностью l, m соответственно, то $\{f, g\}$ — матрица размером $l \times m$.

ношении

$$u = -\psi[(H_0 - H_*)\{H_0, H_1\}^T] \quad (3.9)$$

в качестве ψ некоторую вектор-функцию со значениями в \mathcal{R}^m , удовлетворяющую условию $\psi(z)^T z > 0$ при $z \in \mathcal{R}^m$, $z \neq 0$ (условие строгой псевдоградиентности).

Возможности изменения свойств управляемой гамильтоновой системы путем воздействия на нее управления определяются свойствами построенной замкнутой системы. В работах [25, 28] получены следующие условия достижения цели (3.3).

Если первые и вторые частные производные функций H_0, H_1 на множестве $\Omega_0 = \{x: Q(x) \leq Q_0\}$ ограничены для некоторого $Q_0 > 0$, а функция $\psi(z)$ в (3.9) непрерывна и удовлетворяет условию строгой псевдоградиентности $\psi(z)^T z > 0$ при $z \in \mathcal{R}^m$, $z \neq 0$, то алгоритм (3.9) для системы (3.2) при начальном условии $x(0) \in \Omega_0$ обеспечивает соотношение $u(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и, кроме того, альтернативу: на траектории $x(t)$ либо достигается цель (3.3), либо обеспечивается сходимость $\{H_0, H_1\}(x(t)) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Пусть дополнительно выполнены следующие условия.

A1. Для любого $c \neq H_*$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что любое непустое связное подмножество множества

$$D_{\varepsilon, c} = \{x: |\{H_0(x), H_1(x)\}| \leq \varepsilon, |H_0(x) - c| \leq \varepsilon\} \cap \Omega_0$$

ограничено.

A2. Наибольшее инвариантное множество $M \subset D_0$ свободной системы (т.е. множество целых траекторий системы (3.2) при $u = 0$, содержащееся в D_0), где $D_0 = \{x: \{H_0(x), H_1(x)\} = 0\} \cap \Omega_0$ состоит из не более чем счетного числа изолированных точек без конечных точек сгущения.

Тогда любое решение системы (3.2), (3.9) либо обеспечивает цель (3.3), либо стремится к некоторой точке из D_0 , соответствующей равновесию свободной системы. Кроме того, множество начальных условий, при которых решение системы (3.2), (3.9) стремится к неустойчивому равновесию свободной системы, имеет меру нуль.

Пусть гамильтониан управляемой системы имеет вид $H(q, p, u) = H_0(q, p) + H_1(q, p)^T u$ при

$$H_0(q, p) = \frac{1}{2} p^T A(q)^{-1} p + \Pi(q), \quad H_1(q, p) = q, \quad (3.10)$$

где q, p — n -мерные обобщенные координаты; $A(q)$ — симметричная положительно определенная матрица кинетической энергии; $\Pi(q) \geq 0$ — потенциальная энергия. В этом случае справедливо соотношение $p = A(q)\dot{q}$, и уравнения системы могут быть приведены к лагранжевой форме

$$\frac{d}{dt}(A(q)\dot{q}) - \frac{1}{2} \dot{q}^T \frac{\partial}{\partial q}(A(q))\dot{q} + \nabla_q \Pi(q) = u. \quad (3.11)$$

В координатах (q, \dot{q}) энергия примет вид

$$H_0(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T A(q)\dot{q} + \Pi(q). \quad (3.12)$$

Свободная система имеет состояния равновесия вида $(0, \bar{q})$, где \bar{q} — стационарная (критическая) точка потенциала $\Pi(q)$ ($\nabla \Pi(\bar{q}) = 0$). Предположим, что все стационарные

точки функции $\Pi(q)$ изолированы. Тогда из приведенного выше результата следует, что если начальный энергетический слой

$$\Omega_0 = \{(q, p): H_0 \leq H_0(q, p) \leq H_*\} \text{ при } H_0 \leq H_*$$

или

$$\Omega_0 = \{(q, p): H_* \leq H_0(q, p) \leq H_0\} \text{ при } H_0 \geq H_*$$

не содержит минимумов потенциала $\Pi(q)$, то почти для всех решений достигается цель (3.3). Кроме того, если матрица $A(q)$ равномерно положительно определена, т.е. $p^T A(q)p \geq \mu |p|^2$ для некоторого $\mu > 0$ и всех $p \in \mathcal{R}^n$, то, как нетрудно показать, почти все решения замкнутой системы приближаются к множеству

$$S = \{(q, p): H_0(q, p) = H_*\}.$$

Пример. Для модели простого маятника гамильтониан свободной системы имеет вид

$$H_0(q, p) = \frac{p^2}{2J} + mgl(1 - \cos q), \quad (3.13)$$

где $q(t)$ — угловая координата, $q(t) \in \mathcal{R}^1$; p — импульс системы; J — момент инерции относительно оси вращения; l — расстояние между осью вращения и центром тяжести маятника. Если в качестве управляющего воздействия выбран вращающий момент, приложенный к оси подвеса, то уравнения движения в гамильтоновой форме записываются следующим образом:

$$\dot{q} = J^{-1}p, \quad \dot{p} = -mgl \sin q + u(t), \quad (3.14)$$

где $u(t)$ — управляющий момент. Из уравнения (3.14) следует, что $p = J\dot{q}$, а гамильтониан взаимодействия имеет вид $H_1(q, p) = q$. Цель (3.3) будет соответствовать стабилизации маятника в нижнем положении при $H_* = 0$, раскачке маятника до амплитуды

$$q_* = \arccos\left(1 - \frac{H_*}{mgl}\right)$$

при $0 < H_* < 2mgl$ и приведению маятника во вращение при $H_* > 2mgl$, причем $H_* = 2mgl$ является особым значением. Это значение соответствует движению по сепаратрисе — множеству, состоящему из счетного числа гладких кривых, разделяющих на фазовой плоскости области колебательного и вращательного движения. Алгоритмы СГ (3.7), (3.8) в случае маятника (3.14) принимают простой вид

$$\dot{u} = -\gamma(H_0 - H_*)\dot{q}, \quad (3.15)$$

$$u = -\gamma \operatorname{sign}[(H_0 - H_*)\dot{q}]. \quad (3.16)$$

Приведенный выше результат для случая управления энергией маятника означает, что если начальный энергетический слой между уровнями H_0 и H_* не содержит состояний равновесия, то уровень H_* будет достигаться при всех начальных условиях, а если начальный слой содержит только неустойчивые равновесные состояния $(\pi(2k+1), 0)$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, то цель (3.3) будет достигаться при почти всех начальных условиях.

В частности, для любой гамильтоновой системы, удовлетворяющей условиям A1, A2 (см. выше), цель (3.3) достигается при приложении сколь угодно малого по величине управляющего воздействия и при почти всех начальных условиях, если стационарные точки потенциала $\Pi(q)$ изолированы и в начальном энергетическом слое нет устойчивых равновесных состояний системы, т.е. $H_* > \sup_{\bar{q}} \Pi(\bar{q})$, где верхняя грань берется по всем локальным минимумам $\Pi(q)$, находящимся в начальном компоненте связности энергетического слоя Ω_0 . Действительно, правые части замкнутой системы ограничены в области Ω_0 , и управление может быть сделано сколь угодно малым путем выбора достаточно малого коэффициента γ . Разумеется, уменьшение коэффициента усиления γ приводит к увеличению времени, необходимому для достижения цели, но принципиальная достижимость цели остается неизменной.

Интерпретируя условия A1, A2 как достаточные условия управляемости системы по отношению к энергии, можно сформулировать результат [25, 28] как закон преобразования системы обратной связью.

Если система управляема по отношению к энергии, то значение энергии свободной системы можно изменить на произвольную величину с помощью сколь угодно малой обратной связи.

Полученные результаты распространяются на задачи достижения более сложных целей, в частности, на задачу стабилизации на заданных уровнях нескольких инвариантов (первых интегралов) свободной системы [61, 64].

Пусть задано k скалярных инвариантов $G_i(q, p)$, $i = 1, \dots, k$, т.е. $\{H_0, G_i\} \equiv 0$, $i = 1, \dots, k$, а ЦУ выбрана в виде

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G_i(p(t), q(t)) = G_i^*, \quad i = 1, \dots, k, \quad (3.17)$$

где G_i^* — заданные числа. Введем целевую функцию

$$Q(q, p) = \frac{1}{2} (G(q, p) - G^*)^T R (G(q, p) - G^*), \quad (3.18)$$

где

$$G(q, p) = \text{col} \{G_1(q, p), \dots, G_k(q, p)\};$$

$$G^* = \text{col} \{G_1^*, \dots, G_k^*\},$$

а матрица $R = R^T$ размером $k \times k$ симметрична и положительно определена. Тогда алгоритм СГ, построенный по цели (3.17), (3.18), можно представить следующим образом:

$$u = -\gamma \{\bar{H}, Q\} = -\gamma \{\bar{H}, G\} R (G(q, p) - G^*). \quad (3.19)$$

Здесь \bar{H} обозначает вектор-столбец с компонентами, составленными из гамильтонианов взаимодействия H_j , $j = 1, \dots, m$, т.е. скобка $\{\bar{H}, Q\}$ является вектор-столбцом с компонентами $\{H_j, Q\}$, а скобка $\{\bar{H}, G\}$ представляет собой матрицу-функцию размером $m \times k$ с элементами $\{H_j, G_i\}$. Можно рассмотреть и более широкий класс алгоритмов:

$$u = -\psi(\{\bar{H}, Q\}), \quad (3.20)$$

где $\psi(y)$ — вектор-функция, удовлетворяющая условию $\psi(z)^T z > 0$ при $z \neq 0$.

В работах [61, 64] получены условия управляемости для гамильтоновой системы

$$\dot{q} = \nabla_p H_0(q, p) + \sum_{j=1}^m \nabla_p H_j u_j, \quad (3.21)$$

$$\dot{p} = -\nabla_q H_0(q, p) - \sum_{j=1}^m \nabla_q H_j u_j.$$

Результаты этих работ можно интерпретировать следующим образом.

Если система управляема по отношению к некоторому набору инвариантов, то их значения можно изменить на произвольные величины с помощью сколь угодно малой обратной связи вида (3.19).

4. Управление диссипативными системами

4.1. Индекс возбудимости

Будем рассматривать гамильтоновы системы с диссипацией⁴

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(q, p, u)}{\partial p_i}, \quad (4.1)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H(q, p, u)}{\partial q_i} - R_i(q, p), \quad i = 1, \dots, n,$$

где $q = \text{col}(q_1, \dots, q_n)$, $p = \text{col}(p_1, \dots, p_n)$ — векторы обобщенных координат и обобщенных импульсов, образующие вектор состояния системы $x = \text{col}(q, p)$; $H = H(q, p, u)$ — гамильтониан управляемой системы; $u(t)$ — вход (вектор внешних обобщенных сил), $u(t) \in \mathcal{R}^m$; $R(q, p) = \text{col}(R_1(q, p), \dots, R_n(q, p))$ — функция диссипации, удовлетворяющая условию

$$R(q, p)^T \frac{\partial H_0(q, p)}{\partial p} \geq 0, \quad (4.2)$$

где $H_0(q, p) = H(q, p, 0)$ — энергия свободной системы. Неравенство (4.2) означает, что происходит рассеяние энергии при свободных движениях системы: $\dot{H}_0 \leq 0$.

Ясно, что диссипация затрудняет управление энергией системы. Поэтому представляют интерес оценки возможности преобразования энергии систем при заданных уровнях управления и диссипации. Особо интересен случай малой диссипации (слабодемпфированные системы), для которого характерны колебательность процессов в системе и наличие резонансных явлений. Оценим пределы возможного преобразования энергии при заданных уровнях управления и диссипации, а также возможность создания резонансных режимов посредством управления с обратной связью для линейных по входам гамильтоновых систем с диссипацией, задаваемых гамильтонианом $H(q, p, u) = H_0(q, p) + H_1(q, p)u$.

Для анализа изменения характеристик системы в результате управления необходимо ввести количественную меру пределов этого изменения, которая может зависеть от выбора входа и выхода системы, а также от допустимой величины управляющего воздействия. Для определенности будем рассматривать в качестве выхода

⁴ Результаты для более широкого класса систем приведены в [28].

энергию свободной системы $E(x) = H_0(q, p)$, а величину входа будем измерять по его уровню — максимальному по времени абсолютному значению. Скорость изменения энергии свободной системы с диссипацией определяется выражением

$$\dot{H}_0 = \{H_0, H_1\}u - R(q, p)^T \frac{\partial H_0}{\partial p},$$

т.е. величина $E(x)$ в отсутствие управления имеет тенденцию к убыванию, характеризуемую скоростью диссипации

$$\varrho(x) = R(q, p)^T \frac{\partial H_0}{\partial p}.$$

Поэтому важное значение имеет характеристика, описывающая степень возрастания $E(x(t))$ вследствие управления. Такая характеристика определяет меру возбудимости движений (колебаний) в системе и может быть названа *индексом возбудимости*.

Для определения индекса возбудимости следует вычислять максимальное значение $E(x(t))$, достижимое при ограниченном управлении в асимптотике, т.е. при $t \rightarrow \infty$. Однако вычислительные эксперименты показывают, что предел при $t \rightarrow \infty$ может не существовать. Поэтому будем рассматривать верхний и нижний пределы и называть *верхним и нижним индексами возбудимости системы* (4.1) по отношению к выходу $E(x)$ функции $\chi_E^+(\gamma)$, $\chi_E^-(\gamma)$, определенные при $\gamma \geq 0$ следующим образом:

$$\chi_E^+(\gamma) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \sup_{\substack{|u(\cdot)| \leq \gamma \\ x(0)=0}} E(x(t)), \quad (4.3)$$

$$\chi_E^-(\gamma) = \underline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \sup_{\substack{|u(\cdot)| \leq \gamma \\ x(0)=0}} E(x(t)). \quad (4.4)$$

Индекс возбудимости может быть измерен экспериментально так же, как и обычная частотная характеристика линейной системы. В отличие от измерения частотной характеристики, при котором на вход системы подается гармоническое воздействие с постоянной амплитудой и изменяющейся частотой, при измерении характеристики возбудимости изменяется амплитуда (уровень) входного сигнала, а сам сигнал задается в виде обратной связи. Из результатов [28, с. 60] вытекает, что если выход $E(x)$ и скорость диссипации $\varrho(x)$ для некоторых положительных α_0 , α_1 , ϱ_0 , ϱ_1 , d удовлетворяют соотношениям

$$\alpha_0 |y|^2 \leq E(x) \leq \alpha_1 |y|^2 + d, \quad (4.5)$$

$$\varrho_0 |y|^2 \leq \varrho(x) \leq \varrho_1 |y|^2, \quad (4.6)$$

где $y = \{H_0, H_1\}$, а множество

$$\Omega^- = \left\{ x: \{H_0, H_1\} = 0, E(x) < \alpha_0 \left(\frac{\gamma}{\varrho_1} \right)^2 \right\}$$

не содержит целых траекторий свободной системы (4.1) (при $u = 0$), то индексы возбудимости $\chi_E^+(\gamma)$, $\chi_E^-(\gamma)$ по отношению к $E(x)$ удовлетворяют неравенствам

$$\alpha_0 \left(\frac{\gamma}{\varrho_1} \right)^2 \leq \chi_E^-(\gamma) \leq \chi_E^+(\gamma) \leq m\alpha_1 \left(\frac{\gamma}{\varrho_0} \right)^2 + d, \quad (4.7)$$

а индексы возбудимости $\chi_y^+(\gamma)$, $\chi_y^-(\gamma)$ по отношению к y — неравенствам

$$\sqrt{\alpha_0} \frac{\gamma}{\varrho_1} \leq \chi_y^-(\gamma) \leq \chi_y^+(\gamma) \leq (m\alpha_1)^{1/2} \frac{\gamma}{\varrho_0} + \sqrt{d}. \quad (4.8)$$

При этом нижняя оценка реализуется для

$$u(t) = \gamma \operatorname{sign} y(t). \quad (4.9)$$

Отметим, что закон управления (4.9), реализующий нижнюю границу индексов возбудимости, не зависит от параметров управляемой системы: функций потенциальной энергии, кинетической энергии и диссипации.

Приведенные оценки применимы к управляемым механическим системам, описываемым уравнениями в лагранжевой форме. При этом неравенства (4.5) отвечают условиям равномерной невырожденности и ограниченности матрицы кинетической энергии $A(q)$ (стандартное предположение для механических систем), а также ограниченности функции потенциальной энергии. Неравенства (4.6) соответствуют вязкому трению, возрастающему со скоростью не быстрее, чем линейно.

Соотношения (4.7) можно трактовать как законы преобразования энергии ограниченным управлением для систем с диссипацией. Пусть, например, $R(p) = \varrho \dot{q}$ и $\varrho \rightarrow 0$. Тогда для управляемой лагранжевой или гамильтоновой системы с малой диссипацией степени ϱ уровня энергии, достижимой при помощи управления уровня γ , имеет порядок $(\gamma/\varrho)^2$.

Рассмотрим вновь маятник из примера раздела 3, в модели которого учтем трение с коэффициентом ϱ . Приведенные выше в этом разделе оценки для $n = 1$ представляются как

$$0,5 \left(\frac{\gamma}{\varrho} \right)^2 \leq \bar{H} \leq \left(\frac{\gamma}{\varrho} \right)^2 + 2\omega_0^2, \quad (4.10)$$

а закон управления (4.9) принимает вид $u = \gamma \operatorname{sign} (\dot{q})$.

Оценки (4.7), (4.8) позволяют судить о степени возбудимости и резонансных свойствах нелинейных систем, предоставляя дополнительную количественную информацию об их динамических характеристиках.

4.2. Резонанс с обратной связью

На основе общих результатов можно установить некоторые свойства физических систем, выявляемые посредством воздействий с обратной связью по измерениям. Опишем, в частности, явление резонанса с обратной связью.

Явление резонанса играет важнейшую роль в физике и технике, вызывая как полезные, так и вредные последствия. По-видимому, впервые явление резонанса было описано и изучено Галилео Галилеем, который в своем труде *Диалоги и математические доказательства, касающиеся двух новых наук*, опубликованном в 1638 г., писал [67]: "... маятник, находящийся в покое, хотя бы и очень тяжелый, мы можем привести в движение, и притом очень заметное простым дуновением, если мы будем приостанавливать дыхание при возвращении маятника, и вновь дуть в соответствующий его качанию момент".

Для колебательных систем резонансный режим означает возбуждение значительных колебаний системы при подаче малого воздействия и, следовательно, наиболее

эффективную передачу энергии от возбуждающей системы к возбуждаемой. Закономерности резонанса хорошо изучены для линейных систем. Однако для нелинейных колебательных систем даже определение понятия резонанса нуждается в уточнении. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Пусть управляемый нелинейный осциллятор с одной степенью свободы описывается уравнением

$$\ddot{\varphi} + P'(\varphi) = u, \quad (4.11)$$

где $\varphi = \varphi(t)$ — скалярная фазовая координата; $u = u(t)$ — скалярное управляющее воздействие; $P(\varphi) \geq 0$ — потенциал. Состоянием системы (4.11) является вектор $x = \text{col}(\varphi, \dot{\varphi})$, а ее полная энергия имеет вид $H(\varphi, \dot{\varphi}) = \dot{\varphi}^2/2 + P(\varphi)$. Поставим вопрос: насколько можно изменить траекторию системы (4.11) с помощью сколь угодно малого внешнего воздействия $u(t)$?

Хорошо известно, что в случае квадратичного потенциала $P(\varphi) = \omega_0^2 \varphi^2/2$, т.е. для гармонического осциллятора, описываемого линейным уравнением $\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = u$, гармоническое внешнее воздействие $u(t) = \gamma \sin \omega t$ при $\omega = \omega_0$ и сколь угодно малой амплитуде γ приводит к появлению неограниченных решений, например, вида

$$\varphi(t) = -\frac{\gamma t}{2\omega_0} \cos \omega t,$$

что и называется обычно резонансом.

Динамика нелинейных систем более сложна. Даже для простого маятника вынужденные колебания могут иметь сложный, нерегулярный характер [65, 66]. Сложность создания и исследования резонансных режимов в нелинейных системах объясняется тем, что частота колебаний в них зависит от амплитуды. Возникает естественная мысль: создавать колебания в нелинейной системе, варьируя частоту внешнего воздействия в зависимости от амплитуды колебаний. Это означает, что $u(t)$ должно зависеть от $\varphi(t)$, т.е. фактически формироваться в виде обратной связи. Из результатов, приведенных в разделе 3, следует, что воздействие вида (4.9) позволяет достичь любого заданного уровня энергии, т.е. создать в системе аналог резонансного режима.

Пусть теперь в системе (4.11) имеются потери (диссипация) типа вязкого трения, т.е. вместо (4.11) рассматривается уравнение

$$\ddot{\varphi} + \varrho \dot{\varphi} + P'(\varphi) = u, \quad (4.12)$$

где $\varrho > 0$ — коэффициент диссипации. Для линейных систем вида (4.12) (при $P(\varphi) = \omega_0^2 \varphi^2/2$) резонансом принято называть режим наибольшей амплитуды колебаний, который наступает при воздействии $u(t) = \gamma \sin \omega t$ с частотой $\omega^2 = \omega_0^2 - \varrho^2/4$. При этом для малых ϱ колебания в системе (4.12) при $u(t) = \gamma \sin \omega t$ имеют амплитуду $\bar{A} \approx \gamma/(\varrho\omega_0)$ и среднюю за период энергию $0,5(\gamma/\varrho)^2$. Амплитуда колебания нелинейного осциллятора (4.12) при воздействии (3.15) или (3.16) также может достигать больших значений. Из оценок раздела 4.1 следует, что в системе (3.16), (4.12) достигается значение энергии, не меньшее, чем

$$\bar{H} = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{\varrho} \right)^2, \quad (4.13)$$

если параметры закона (3.16) выбраны так, что $H_* \geq \bar{H}$. Таким образом, можно сказать, что обратная связь (3.15)

(или (3.16)) создает в нелинейной системе (4.12) резонансный режим, энергия которого (в частном случае гармонического осциллятора) не меньше, чем энергия колебаний при возбуждении гармоникой с резонансной частотой. Описанное явление будем называть [26, 27] *резонансом с обратной связью* (feedback resonance, f-resonance).

Надо сказать, что понимание резонанса в физике осталось практически неизменным со времен Галилея. В подавляющем большинстве работ рассматривается гармоническое (в крайнем случае — периодическое) входное воздействие. В книге [68], первое издание которой вышло в 1937 г., было введено понятие авторезонанса как "резонанса под действием силы, порождаемой движением самой системы", т.е. указывалось на возможность воздействий в виде обратной связи. Однако в [68] был рассмотрен лишь случай линейной системы второго порядка при наличии реле в обратной связи, для которого были даны оценки размера предельных циклов. Система при этом считалась замкнутой, т.е. фактически исследовался *внутренний* резонанс в системе, чем, по видимому, и было мотивировано введение термина "авторезонанс".

Анализ авторезонансных режимов в нелинейных системах проводился в работах [69, 70]. В частности, было предложено использовать АСГ для настройки параметров нелинейной системы с целью обеспечения резонансного режима [70]. В других работах возбуждение рассматривалось либо как периодическая функция, причем допускалась возможность лишь "адиабатического" изменения частоты [53, 71], либо как стохастическое воздействие (стохастический резонанс, см. [47, 49, 50]). Описанное выше явление резонанса с обратной связью возникает при подаче *внешнего* воздействия, которое изменяет свой характер в темпе процесса.

Интересно, что галилеево описание резонанса не противоречит наличию обратной связи. Более того, оно подсказывает, как ее использовать для введения маятника в резонансный режим: надо просто "...дуть в соответствующий его качанию момент!"

Явление резонанса с обратной связью может иметь разнообразные применения. Некоторые из них рассматриваются в разделе 5.

5. Примеры

5.1. Управляемый маятник Капицы

Математическая модель маятника, управляемого путем изменения положения точки подвеса, имеет вид

$$J\ddot{\varphi} + \varrho\dot{\varphi} + mgl \sin \varphi = mlu \sin \varphi, \quad (5.1)$$

где $\varphi = \varphi(t)$ — угол отклонения маятника от нижнего вертикального положения; $u = u(t)$ — вертикальное ускорение точки подвеса, являющееся управляющим воздействием; $J = ml^2$ — момент инерции маятника; $\varrho \geq 0$ — коэффициент трения.

П.Л. Капица рассматривал гармонический закон перемещения точки подвеса и экспериментально обнаружил эффект стабилизации маятника вблизи верхнего, неустойчивого равновесия. Многочисленные теоретические исследования, проводившиеся как до, так и после экспериментов П.Л. Капицы (см., например, [43, 72]),

показывают, что стабилизация неустойчивого равновесия при перемещении точки подвеса с частотой ω и амплитудой A , при котором $u(t)$ имеет вид $u(t) = A\omega^2 \sin \omega t$, наступает при достаточно большом ω , т.е. когда входное воздействие в (5.1) достаточно велико, точнее, при выполнении условия $A\omega > J\omega_0^2$, где $\omega_0 = \sqrt{2g/l}$ — частота малых колебаний маятника вблизи нижнего положения равновесия (см. [41, 43, 73]). При этом перемещение точки подвеса может оставаться малым, что усиливает парадоксальность эффекта. Таким образом, стабилизация неустойчивого равновесия высокочастотным гармоническим воздействием возможна, однако для этого требуется приложение значительных сил.

Поставим вопрос: можно ли добиться аналогичного поведения маятника Капицы при меньшей амплитуде $u(t)$, если в законе вибрации оси подвеса используется обратная связь?

Традиционный для теории автоматического управления подход, основанный на линеаризации модели объекта, в данном случае не годится. Действительно, линеаризация дает хорошее приближение лишь вблизи положения равновесия или некоторой траектории, в то время как нас интересует глобальное решение, работающее во всем пространстве состояний маятника.

Поставим вспомогательную цель управления:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H(t) = H_*, \quad (5.2)$$

где H — полная энергия маятника,

$$H = \frac{J}{2}(\dot{\varphi})^2 + mgl(1 - \cos \varphi). \quad (5.3)$$

Цель (5.2) несколько отличается от традиционных для теории управления целей — регулирования и слежения. Скорее, она выглядит как цель человека, раскачивающегося на качелях. Аналогичная задача может возникнуть при запуске вибрационной установки, проектирования шагающего робота, для маятниковых часов и т.д. Здравый смысл подсказывает, что раскачивание требует значительно меньше усилий, чем удержание маятника (или руки робота) в некоторой фиксированной позиции. Можно ли раскачать тяжелые качели до верхнего положения маломощным воздействием?

Выбирая в качестве целевой функции квадратичное отклонение $Q = (H - H_*)^2/2$ полной энергии маятника от желаемого значения H_* и применяя метод СГ, приходим к простым алгоритмам

$$u = -\gamma(H - H_*)\dot{\varphi} \sin \varphi, \quad (5.4)$$

$$u = -\gamma \operatorname{sign} [(H - H_*)\dot{\varphi} \sin \varphi]. \quad (5.5)$$

Остановимся на алгоритме (5.5) и выберем в качестве желаемого уровня энергии значение энергии маятника в верхнем положении равновесия $H_* = 2mgl$. Тогда из результатов, приведенных в разделе 4.1, следует, что в системе (5.1), (5.5) достигается уровень энергии не меньший, чем

$$\bar{H} = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{\varrho} \right)^2 \quad (5.6)$$

и, значит, уровень $H_* = 2mgl$ будет обеспечиваться при $\gamma > 2\varrho\omega_0$. В частности, при $\varrho = 0$ стабилизация поверхности уровня энергии $H = H_*$ достигается при сколь угодно

малой амплитуде управления γ . При малом демпфировании ϱ амплитуда управления γ также может быть выбрана малой.

Достижение требуемого уровня энергии еще не означает стабилизации равновесия, соответствующего этому уровню. Однако в работах [64, 74] показано, что если $\varrho = 0$, то алгоритм (5.5) при $H_* = 2mgl$ обеспечивает сходимость $H(\varphi(t), \dot{\varphi}(t)) \rightarrow H_*$ и сходимость $(\varphi(t), \dot{\varphi}(t)) \rightarrow (\pi, 0)$ при $t \rightarrow \infty$ почти для всех начальных условий, причем величина $\gamma > 0$ может быть сколь угодно малой.

Задача об управлении маятником путем перемещения точки подвеса имеет интересную особенность. Поскольку управляющим воздействием $u(t)$ является ускорение, то из общих свойств АСГ следует, что $u(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Однако при этом остается неясным, что будет происходить со скоростью и положением точки подвеса. Формальная модель допускает, что скорость и отклонение положения точки подвеса от начального не стремятся к нулю и могут даже неограниченно возрастать, что лишает решение практической значимости.

Опишем, следуя [74], модификацию алгоритмов управления, свободную от указанного недостатка. Для этого введем расширенную целевую функцию

$$Q_1 = Q + \frac{1}{2} z^T P z, \quad (5.7)$$

где $z = \operatorname{col}(\zeta, \dot{\zeta})$, $\zeta, \dot{\zeta}$ — высота и скорость точки подвеса соответственно, $P = P^T \geq 0$ — положительно полуопределенная весовая матрица. Тогда соотношение $\ddot{\zeta} = u$ можно рассматривать как дополнительное уравнение движения, т.е. система превращается в систему с двумя степенями свободы и состоянием $x = \operatorname{col}(q, \dot{q}, \zeta, \dot{\zeta})$.

Используя метод СГ, приходим к алгоритму управления

$$u = -\gamma(H_0 - H_*)\dot{q} \sin q - \mu\dot{\zeta} - \nu\zeta, \quad (5.8)$$

где $\gamma > 0$, $\mu > 0$, $\nu > 0$ — коэффициенты усиления.

Результаты, представленные в разделе 3, не могут быть применены для исследования полученной системы, поскольку ЦУ задана не в терминах энергии системы. Тем не менее, используя более общие результаты [27, 61], можно показать, что новая ЦУ достигается и $\zeta(t) \rightarrow \operatorname{const}$ почти для всех начальных условий при $\nu = 0$. Ввиду условий $\mu > 0$, $\nu > 0$ в системе обеспечивается более сильное свойство: $\zeta(t) \rightarrow 0$, т.е. отклонение точки подвеса от начального положения асимптотически стремится к нулю.

Аналогичным образом может быть получен алгоритм раскачки и для случая, когда точка подвеса перемещается горизонтально или наклонно. Дополнительные трудности могут возникнуть из-за неполноты или неточности измерений, например, если недоступна измерению угловая скорость $\dot{\varphi}(t)$. Может также помешать неполнота управления, например, когда нельзя пренебречь инерционностью двигателя, вращающего маятник, и динамика управляемой системы описывается уравнениями

$$J\ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi = mlu \sin \varphi, \quad T\dot{u} + u = v, \quad (5.9)$$

где $v = v(t)$ — новый сигнал управления. Действительно, управляющее воздействие $v(t)$ не входит в

правую часть первого уравнения (5.9) и СГ оказывается равным нулю.

Современная теория нелинейного и адаптивного управления предлагает широкий арсенал подходов к преодолению указанных трудностей [60, 61].

5.2. Задача о выбросе из потенциальной ямы

Задача о выбросе из потенциальной ямы (или о преодолении потенциального барьера) под воздействием внешних сил встречается во многих областях физики и механики и исследовалась начиная с 1930-х годов [75]. Иногда выброс — явление нежелательное ("прощелкивание" мембран и оболочек, опрокидывание судов или экипажей), в других случаях выброс полезен и необходим. Часто переход через потенциальный барьер соответствует фазовому переходу в физической системе. Во всех случаях необходимы условия, гарантирующие наличие перехода через барьер или его отсутствие. В большинстве работ исследуется случай типового внешнего воздействия: гармонического или шумоподобного [46, 49, 50]. При этом представляет интерес: насколько может быть мала интенсивность воздействия, вызывающая выброс?

Во многих работах это явление исследуется для нелинейных осцилляторов с одной степенью свободы, описываемых уравнением

$$\ddot{\varphi} + \varrho \dot{\varphi} + P'(\varphi) = u, \quad (5.10)$$

где $\varrho > 0$. Например, в работе [76] минимальная амплитуда гармонического воздействия

$$u(t) = \gamma \sin \omega t, \quad (5.11)$$

вызывающая выброс решения (5.10) из потенциальной ямы, определена путем компьютерного моделирования для двух типовых потенциалов: $P(\varphi) = \varphi^2/2 - \varphi^3/3$ (иногда называемого потенциалом Гельмгольца) и $P(\varphi) = \varphi^2/2 - \varphi^4/4$ (соответствующего уравнению Дуффинга и имеющего две потенциальные ямы, симметричные относительно нуля).

В частности, в работе [76] показано, что для потенциала Дуффинга в системе (5.10), (5.11) при значении⁵ $\varrho = 0,25$ выброс неизбежен, если $\gamma > 0,212$, $\omega \approx 1,07$, тогда как при $\gamma < 0,212$ и любых значениях частоты внешнего воздействия выброса не происходит (рис. 1а при $\gamma = 0,211$, $\omega = 1,08$).

Нельзя ли вызвать выброс при существенно меньших амплитудах воздействия, создавая режим резонанса с обратной связью? Выбирая в качестве \bar{H} высоту потенциального барьера и разрешая соотношение (4.13) относительно γ , получаем амплитуду воздействия вида (4.9), гарантирующую выброс. Для уравнения Дуффинга, например, $\bar{H} = 0,25$, откуда $\gamma = 0,1767$, что составляет 83 % от величины, найденной в [76]. Для систем с одной степенью свободы закон (4.9) принимает вид

$$u(t) = \gamma \operatorname{sign} \dot{\varphi}. \quad (5.12)$$

Отметим, что как закон (5.12), так и закон (4.9) не зависят от вида потенциала $P(\varphi)$ и, следовательно, годятся для

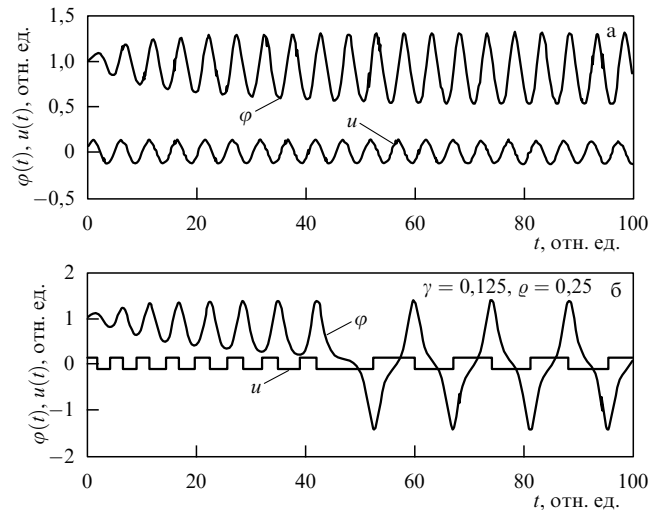


Рис. 1. Выброс из потенциальной ямы для системы Дуффинга: (а) гармоническое возбуждение, (б) возбуждение по алгоритму скоростного градиента.

создания резонансного режима в любом осцилляторе, описываемом моделью (5.10).

Моделирование показывает, что выброс наступает при еще меньших значениях амплитуды входного сигнала (5.12) (см., например, рис. 1б при $\gamma = 0,125$). В общем случае выигрыш в мощности, получаемый при возбуждении системы под воздействием обратной связи, обратно пропорционален степени диссипации и может быть сколь угодно велик для слабодемпфированных систем.

5.3. Управление синхронизацией двух осцилляторов

Рассмотрим задачу синхронизации колебаний двух связанных одномерных осцилляторов с одной степенью свободы, например математических маятников. Такая модель встречается при описании различных физических и механических систем (см., например, [66]). В предположении линейности диссипации система из двух связанных осцилляторов описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1(t) + \varrho \dot{\varphi}_1 + P'(\varphi_1(t)) &= k(\varphi_2(t) - \varphi_1(t)) + u(t), \\ \ddot{\varphi}_2(t) + \varrho \dot{\varphi}_2 + P'(\varphi_2(t)) &= k(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)), \end{aligned} \quad (5.13)$$

где $\varphi_i(t)$ — обобщенная координата i -го осциллятора (например, угол поворота маятника), $i = 1, 2$; $u(t)$ — управляющее воздействие (например, приложенный к первому маятнику момент внешних сил, выраженный в единицах углового ускорения); ϱ — коэффициент трения (диссипации); k — коэффициент связи (например, коэффициент жесткости пружины); $P(\varphi)$ — потенциал (например, для маятника $P(\varphi) = \omega_0^2(1 - \cos \varphi)$).

Введем вектор состояния системы

$$x(t) = \operatorname{col}(\varphi_1, \dot{\varphi}_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_2) \in \mathcal{R}^4.$$

Полная энергия системы (5.13) $H(x)$ с учетом энергии связи определяется выражением

$$H(x) = \frac{\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2}{2} + P(\varphi_1) + P(\varphi_2) + \frac{k(\varphi_2 - \varphi_1)^2}{2}. \quad (5.14)$$

⁵ Значения всех переменных здесь и ниже даются в относительных единицах.

Рассмотрим задачу возбуждения синхронных антифазных колебаний осцилляторов с заданной амплитудой с помощью дополнительной ограниченной обратной связи, которую можно трактовать как задачу достижения заданного уровня энергии системы с дополнительным требованием: осцилляторы должны иметь противоположные фазы колебаний. Синтез алгоритма управления выполним по методу СГ, вводя частные целевые функции

$$Q_\varphi(\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) = \frac{\delta_\varphi^2}{2}, \quad Q_H(x) = \frac{(H(x) - H^*)^2}{2}, \quad (5.15)$$

где $\delta_\varphi = \dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2$, $H(x(t))$ — полная энергия системы, H^* — ее заданное значение.

Минимальное значение функции Q_φ соответствует требованию противофазности колебаний (во всяком случае при малых начальных фазах $\varphi_1(0)$, $\varphi_2(0)$ тождество $Q_\varphi(\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) \equiv 0$ выполняется только при $\dot{\varphi}_1 \equiv -\dot{\varphi}_2$). Минимизация Q_H означает достижение желаемой амплитуды колебаний. Полную целевую функцию $Q(x)$ определим как взвешенную сумму частных целевых функций, а именно:

$$Q(x) = \alpha Q_\varphi(\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) + (1 - \alpha) Q_H(x), \quad (5.16)$$

где α — заданный весовой коэффициент, $0 \leq \alpha \leq 1$. Вычисляя СГ, получим алгоритм управления:

$$u(t) = -\gamma [\alpha \delta_\varphi(t) + (1 - \alpha) \delta_H(t)] \dot{\varphi}_1(t), \quad (5.17)$$

где $\delta_\varphi(t) = \dot{\varphi}_1(t) + \dot{\varphi}_2(t)$, $\delta_H(t) = H_t - H^*$, $\gamma > 0$ — коэффициент усиления.

Результаты, представленные в разделе 3, к данной задаче непосредственно не применимы, поскольку величина δ_φ не является инвариантом системы даже при $\varrho = 0$ (она сохраняет свое значение при движениях свободной системы только на целевом множестве). Поэтому существует проблема аналитического исследования достижимости цели в системе (5.13), (5.17). В то же время вычислительные эксперименты показывают работоспособность алгоритма синхронизации (5.17).

Приведем некоторые результаты моделирования процесса возбуждения и синхронизации колебаний по алгоритму (5.17) в системе из двух одинаковых маятников. При моделировании выбирались следующие значения параметров: $k = 5$, $\omega_0 = 0,4\pi$, $\gamma = 0,8$, $\alpha = 0,7$, $H^* = 4,0$. Все начальные условия принимались нулевыми за исключением $\varphi_2(0) = 0,05\pi$.

Рассмотрим сначала случай $\varrho = 0$. Из рисунков 2–5 видно, что после некоторого переходного процесса оба

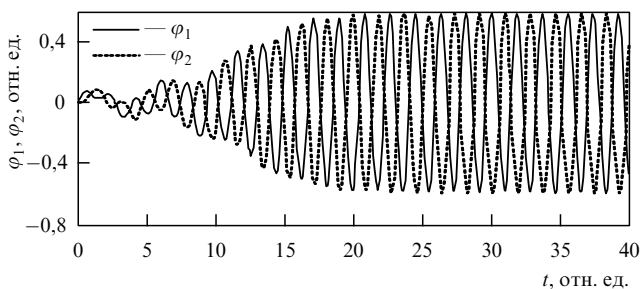


Рис. 2. Процесс возбуждения противофазных колебаний маятников.

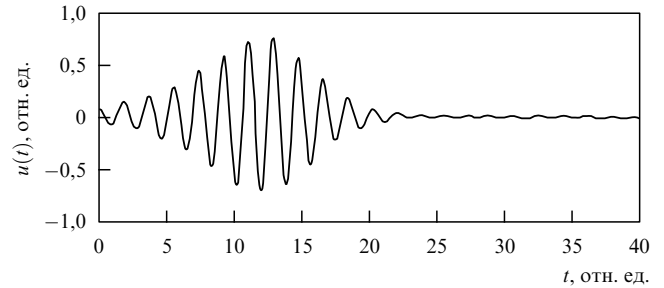


Рис. 3. Сигнал управления $u(t)$.

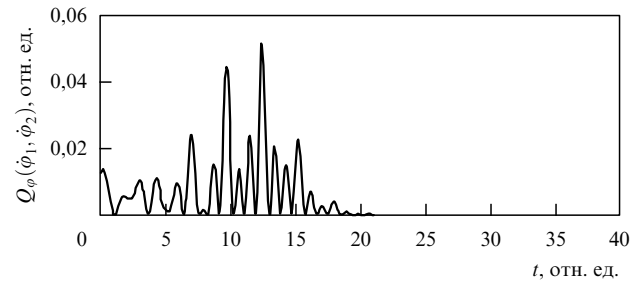


Рис. 4. Динамика целевой функции синхронизации $Q_\varphi(\dot{\varphi}_1(t), \dot{\varphi}_2(t))$.

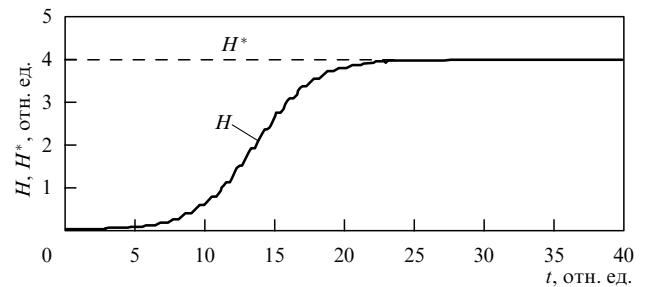


Рис. 5. Динамика энергии колебаний H_t .

маятника совершают колебания с противоположными фазами, а обе частные целевые функции приближаются к желаемым значениям. Время переходного процесса как для H_t , так и для Q_φ примерно одинаковое (около 20 отн. ед.). Соотношение между временами переходных процессов по H_t и по Q_φ можно изменить, варьируя коэффициент α . Амплитуда управляющего воздействия может быть сделана сколь угодно малой путем уменьшения коэффициента усиления γ .

При наличии диссипации также удастся достичь синхронизации маятников на заданном уровне энергии, но величина управления уже не может быть произвольно уменьшена. Из рисунка 6, на котором представлены результаты моделирования при $\varrho = 0,05$, видно, что при достижении того же уровня энергии, как и в случае без диссипации, $H^* = 4,0$ амплитуда управляющего воздействия устанавливается вблизи значения

$$u_\infty = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |u(t)| \approx 0,5.$$

Расчет по формуле (4.10) дает величину того же порядка, т.е. согласие теории и эксперимента достаточно хорошее. Отметим, что при смене знака в выражении для ошибки синхронизации, т.е. задавая $\delta_\varphi = \dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2$, можно получить режим синфазной синхронизации [36].

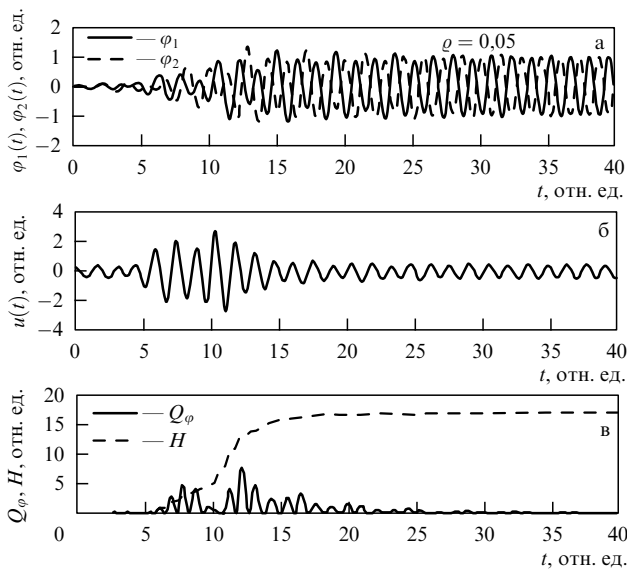


Рис. 6. Процессы синхронизации при наличии диссипации.

6. Управление распределенными системами

6.1. Задачи и методы управления в распределенных системах

Методы управления колебаниями в пространственно распределенных (distributed, spatio-temporal) системах во многом опираются на идеи, развитые для сосредоточенных (lumped) систем. Более того, в значительной части работ для синтеза управления используются конечномерные модели объекта управления в виде систем ОДУ. Такие модели могут быть получены либо путем дискретизации по пространству распределенных моделей, описываемых уравнениями в частных производных, либо как набор ОДУ, описывающих отдельные пространственные элементы (ячейки, клетки), либо в результате отбрасывания "хвоста" в разложении по базису в исходном бесконечномерном пространстве состояний (методы Бубнова–Галеркина). В этом разделе остановимся на двух первых вариантах, считая, что ячейки взаимодействуют между собой с помощью связей, отражающих пространственную структуру всей системы, называемой часто массивом (array) или решеткой (lattice).

Типичным классом моделей физико-химических процессов являются уравнения "реакция-диффузия":

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \varepsilon \Delta x + F(x, u), \quad (6.1)$$

где $x = x(r, t)$ — функция пространственных переменных $r \in D \subset \mathcal{R}^n$ и времени t (возможно, векторная), определяющая состояние системы;

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial r_i^2}$$

— оператор Лапласа, задающий диффузионный тип пространственного взаимодействия элементов, ε — коэффициент диффузии. Граничные условия обычно задаются либо периодические: $x(a, t) = x(b, t)$ при

$D = [a, b] \subset \mathcal{R}^1$, либо описывают отсутствие потока через границы

$$\left. \left(\frac{\partial x}{\partial r} \right) \right|_{r=a} = \left. \left(\frac{\partial x}{\partial r} \right) \right|_{r=b} = 0.$$

При дискретизации уравнения (6.1) по пространству множество D заменяется конечным числом точек-узлов r_i , $i = 1, 2, \dots, N$, каждому из которых соответствует переменная состояния $x_i(t)$. Динамика величин $x_i(t)$ определяется как собственной динамикой $F(x_i, u_i)$, так и взаимосвязями с соседними узлами. Например, если пространство является одномерным, $r \in [a, b]$, а связи имеют диффузионный характер, то получим систему уравнений

$$\dot{x}_i = \varepsilon(x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}) + F(x_i, u_i), \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (6.2)$$

Если граничные условия периодические, то дополнительно задается связь $x_0(t) = x_N(t)$, а при отсутствии потока через границы накладываются связи $x_0(t) = x_1(t)$, $x_{N-1}(t) = x_N(t)$. Часто отдельно рассматривают случай нулевых граничных условий $x_i(t) = 0$ при $i \leq 0$ и при $i \geq N$. Во многих работах системы дискретизируются также по времени, что приводит к так называемым *моделям связанных отображений* (coupled maps), или клеточных автоматов:

$$x_i(n+1) = x_i(n) + \varepsilon[x_{i-1}(n) - 2x_i(n) + x_{i+1}(n)] + hF(x_i(n), u_i(n)), \quad i = 1, \dots, N-1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.3)$$

В моделях (6.1), (6.3) управление влияет на динамику каждой ячейки, что соответствует случаю пространственного (полевого) управления. Другой класс задач — *граничное управление* — возникает, когда правые части в (6.2), (6.3) не зависят от управления, т.е. $F(x, u) \equiv F(x)$, а управление входит в уравнение граничных ячеек, например $\dot{x}_0 = \varepsilon(x_1 - x_0) + F_0(x, u)$ (при периодическом граничном условии). Наибольшей общностью обладают пространственно неоднородные системы, описываемые в одномерном случае моделью

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= F_i(x_i, x_{i-1}, x_{i+1}, u), \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ \dot{x}_0 &= F_0(x_0, x_1, u), \\ \dot{x}_N &= F_N(x_N, x_{N-1}, u). \end{aligned} \quad (6.4)$$

В качестве ЦУ, в дополнение к обычным целям, таким же, как в сосредоточенных системах, рассматриваются различные виды взаимосвязи колебаний в соседних ячейках. Как и в сосредоточенных системах, достижение цели не определяет полностью процесс в системе. Интерес для исследования представляет определение возможных видов поведения системы с управлением и без него.

К специфическим целям управления в распределенных системах относятся:

- стабилизация заданного равномерного (однородного) или пространственно периодического стационарного поля (стоячей волны);
- стабилизация заданного пространственно периодического нестационарного поля (бегущей волны);
- создание или уничтожение спиральной волны (при пространственной размерности не менее двух);

— создание или уничтожение заданного неравномерного поля (контрастной структуры, кластеров, паттернов);

— управление самоорганизацией и дезорганизацией систем.

Задачи управления распределенными системами рассматривались в теории управления еще в 1960-х годах (см., например, [77]). Однако интерес физиков к этой тематике, судя по публикациям, существенно повысился лишь в середине 1990-х в связи с возникшим интересом к управлению хаосом в распределенных системах. В первых работах по управлению хаосом в распределенных системах в основном использовались методы, развитые для сосредоточенных систем: метод OGY, запаздывающая обратная связь и т.д. [78]. В последующих работах исследовались (как правило, численно) и другие подходы.

Например, в работе [79] рассматривается одномерный массив с числом ячеек $N = 100$, описываемых логистическим отображением при $F(x, u) = 1 - \alpha x^2 + u$, где параметр α задается таким, чтобы колебания в каждой ячейке при $u \equiv 0$ являлись хаотическими. Вычислительные эксперименты показали, что локальная обратная связь

$$u_i(n) = \gamma \left[x_i(n) - \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^N x_j(n-1) \right], \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (6.5)$$

при достаточно большом коэффициенте усиления γ стабилизирует пространственно однородное распределение, $x_i \equiv x_*$, $i = 0, 1, 2, \dots, N$. При меньших γ устанавливается неоднородное распределение, состоящее из нескольких кластеров однородности, причем каждая ячейка колеблется в периодическом режиме. Аналогичное поведение системы наблюдалось при локальной обратной связи по невязке (погрешности)

$$u_i(n) = \gamma(x_i(n) - x_*), \quad (6.6)$$

а также при введении более соответствующих реальности "глобальных" обратных связей, зависящих от наблюдаемых средних значений переменных:

$$u_i(n) = -\frac{\gamma}{N+1} \sum_{j=0}^N [x_j(n) - x_j(n-1)] \quad (6.7)$$

или

$$u_i(n) = -\frac{\gamma}{N+1} \sum_{j=0}^N x_j(n) - x_* \quad (6.8)$$

Эти результаты получили обоснование в [80].

В работе [81] рассмотрен случай "игольчатого" управления (pinning control) одномерной решеткой, когда управление действует лишь на каждую p -ю ячейку, описываемую системой Лоренца. Продемонстрирована возможность приближения к пространственно однородному (когерентному), но хаотическому во времени движению, если управление изменяется дискретно во времени по закону (6.6) при $\gamma = 1$ и приложено к первому уравнению системы Лоренца. Этот результат в работе [82] распространен на двумерную решетку из систем Лоренца с помощью использования интегральной обратной связи, названной в этой работе "адаптивной".

Аналогичные результаты получены [83] также для комплексного уравнения Гинзбурга–Ландау

$$\dot{A} = A + (1 + i\mu_1) \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} - (1 + i\mu_2) |A|^2 A \quad (6.9)$$

и для уравнения Свифта–Хоэнберга (Swift–Hohenberg), описывающего динамику лазеров [84]. Уравнение Гинзбурга–Ландау с игольчатым управлением, примененным в конечном числе точек, изучалось в [85, 86]. Уравнение Гинзбурга–Ландау описывает целый ряд явлений в лазерной физике, гидродинамике, химической турбулентности и др. и может представлять разнообразие видов сложного поведения. В результате вычислительного эксперимента в работе [85] найдено наиболее близкое расстояние между точками приложения управления, обеспечивающее достижение ЦУ. Аналогичный результат получен при граничном управлении [86].

В работе [87] показана возможность стабилизации решений уравнения Курамото–Сивашинского

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial r^4} = u \quad (6.10)$$

периодической запаздывающей обратной связью по скорости $u = \varepsilon^t \partial \varphi(t - \tau) / \partial t$, где τ — время запаздывания.

Игольчатое управление в работе [88] применялось к задаче стабилизации нулевого решения ($x_i(t) \equiv 0$) системы связанных осцилляторов с диффузионно-градиентными связями

$$\dot{x}_i = f(x_i) + \frac{\varepsilon}{2}(x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}) + \frac{\rho}{2}(x_{i-1} - x_{i+1}) + u_i, \quad (6.11)$$

а также к уравнению Гинзбурга–Ландау с начальным условием, соответствующим хаотическому режиму. Использовалась линейная обратная связь с большим коэффициентом усиления в каждом l -м осцилляторе. Анализ устойчивости замкнутой системы проводился по линеаризованным вблизи целевого решения моделям.

Минимальная плотность точек локального управления и их оптимальное расположение для одномерного массива связанных логистических систем — $f(x) = ax(1-x)$ в (6.11) — при стабилизации линейной обратной связью определены в [89]. Метод стабилизации неустойчивого пространственно однородного решения уравнения реакции-диффузии развит и продемонстрирован на примере комплексного уравнения Курамото–Цузуки в работе [90]. В работе [91] предложен метод подавления хаоса и спиральных волн в уравнении Максвелла–Блоха с дифракционными связями слабым пространственным возмущением.

Интересные задачи "кластерной синхронизации" в двух- и трехмерных массивах нелинейных осцилляторов рассматривались в работах [92–95]. На основе функций Ляпунова специального вида найдены условия разбиения массива на заданное число компактных кластеров осцилляторов, колеблющихся синхронно. Показано, что с ростом степени взаимосвязи число кластеров уменьшается вплоть до единицы, т.е. происходит полная синхронизация всего массива. Хотя в перечисленных работах управление в явном виде не присутствует, результаты этих работ можно интерпретировать как выбор (синтез) коэффициента связи k , обеспечивающего заданную степень кластеризации в системе.

6.2. Управление энергией в моделях синус-Гордона и Френкеля–Конторовой

Продemonстрируем возможность применения метода СГ для управления системами типа синус-Гордона по энергетическим критериям. Введем обозначения

$$\begin{aligned} x_t &= \frac{\partial x}{\partial t}, & x_{tt} &= \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \\ x_{r_i} &= \frac{\partial x}{\partial r_i}, & x_{r_i t} &= \frac{\partial^2 x}{\partial r_i \partial t}, & x_{r_i r_i} &= \frac{\partial^2 x}{\partial r_i^2} \end{aligned}$$

и рассмотрим систему, описываемую уравнением синус-Гордона

$$Jx_{tt} = k\Delta x - E \sin x, \quad (6.12)$$

где $x = x(r, t)$ — функция состояния системы; $r \in X \subset \mathcal{R}^n$; $\Delta x = \sum_{i=1}^n x_{r_i r_i}$; J, k — параметры системы; $E = E(t)$ — внешнее воздействие (например, напряженность внешнего электрического поля). Будем считать, что $E = E_0 + u(t)$, где E_0 — базовый уровень поля, $u(t)$ — управляющее воздействие. Систему (6.12) можно рассматривать как модель массива диффузионно связанных осцилляторов (например, маятников, жидких кристаллов и т.д.), каждый из которых помещен в точку r_i . Тогда $x(r_i, t)$ — угол поворота осциллятора.

Поставим задачу вывода значения энергии свободной системы

$$H = \frac{1}{2} \int_X \left[J \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 + k |\nabla_r x|^2 + 2E_0(1 - \cos x) \right] dr \quad (6.13)$$

на заданный уровень H_* , что соответствует ЦУ

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H(t) = H_*. \quad (6.14)$$

Вводя функцию $V(t) = (H(t) - H_*)^2/2$ и рассмотрев соотношение

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} = -u(t)(H(t) - H_*) \int_X x_t \sin x dr, \quad (6.15)$$

получим, что $\dot{V} \leq 0$ при

$$u(t) = \gamma(H(t) - H_*) \int_X x_t \sin x dr, \quad (6.16)$$

т.е. воздействие (6.16) приближает систему к достижению цели.

Рассмотрим пространственно одномерный, пространственно дискретный вариант задачи

$$J\ddot{x}_j = \frac{k}{h^2}(x_{j+1} - 2x_j + x_{j-1}) - (E_0 + u(t)) \sin x_j, \quad (6.17)$$

$$j = 1, 2, \dots, N,$$

соответствующий непрерывной системе

$$Jx_{tt} = kx_{rr} - (E_0 + u(t)) \sin x \quad (6.18)$$

на множестве $X = [a, b]$, где $x_j = x[a + j(b - a)/(N + 1)]$.

Система (6.17) есть не что иное как управляемая версия предложенной в 1939 г. классической модели Френкеля–Конторовой (см., например, [66]), исследованию которой посвящено много работ.

Обычно при исследовании системы без управления задают для (6.18) либо нулевые граничные условия $x(a, t) = x(b, t) = 0$, соответствующие в дискретной модели (6.17) соотношениям

$$x_0(t) \equiv x_{N+1}(t) \equiv 0, \quad (6.19)$$

либо условия отсутствия потока через границу $x_r|_{r=a} = x_r|_{r=b} = 0$, задаваемые в (6.17) как

$$x_0 = x_1, \quad x_N = x_{N+1}. \quad (6.20)$$

Задача управления энергией цепочки может быть решена на основе результатов, рассмотренных в разделе 3. Алгоритм управления энергией, полученный методом СГ, имеет вид

$$u(t) = \gamma(H(t) - H_*) \sum_{j=1}^N \dot{x}_j \sin x_j, \quad (6.21)$$

где $\gamma > 0$. Из условий достижимости цели такого вида (см. раздел 3) следует, что ЦУ (6.14) в системе (6.17), (6.21) достигается, если энергетический слой между уровнями $H(0)$ и H_* не содержит равновесных состояний системы, удовлетворяющих условиям $\sin x_j = 0$, $j = 1, \dots, N$.

Отметим, что в частном случае $N = 2$ при граничных условиях (6.20) система приобретает вид

$$J\ddot{x}_1 = \frac{2k}{h^2}(x_2 - x_1) - (E_0 + u(t)) \sin x_1, \quad (6.22)$$

$$J\ddot{x}_2 = \frac{2k}{h^2}(x_1 - x_2) - (E_0 + u(t)) \sin x_2.$$

В этом случае задача управления энергией становится близка к задаче о синхронизации двух маятников, рассматривавшейся в разделе 5.3.

Дискретный аналог алгоритма управления (6.16) имеет вид

$$u(t) = \gamma(H(t) - H_*)(x_2 - x_1)(\sin x_1 - \sin x_2), \quad (6.23)$$

где $H(t)$ определяется как дискретное представление (6.13)

$$H = \frac{J}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + \frac{k}{2}(x_1 - x_2)^2 + E_0(2 - \cos x_1 - \cos x_2). \quad (6.24)$$

Построенные алгоритмы управления можно применять для исследования свойств нелинейных колебательных систем в различных задачах, в том числе, для управления колебаниями осциллирующих частиц, для ориентации частиц в заданном направлении и т.д.

Задача управления возбуждением и синхронизацией колебаний в цепочке из N последовательно соединенных математических маятников рассматривается в [36] (частный случай $N = 2$ см. в разделе 5.3).

7. Управление молекулярными и квантовыми системами

7.1. Лазерное управление молекулярной динамикой

Задачи управления процессами микромира имеют богатую историю. Демон Максвелла уже обсуждался в разделе 1. В XX веке были изучены разнообразные

задачи управления процессами химической технологии (в рамках бурно развивавшейся в 1960–1970-х годах "химической кибернетики" [96]), задачи управления ядерными реакторами [62, 97], пучками частиц [98], процессами в твердом теле посредством лазерного излучения [99] и др.

Главными трудностями при управлении процессами на атомно-молекулярном уровне являются малые пространственные размеры управляемых объектов и большие скорости протекания процессов в них. Средний размер молекул (мономеров) порядка 10 нм, среднее расстояние между атомами в молекуле порядка 1 нм, в то время как средняя скорость движения атомов и молекул при комнатной температуре составляет $10^2 - 10^3$ м с⁻¹, а период собственных колебаний атомов в молекуле — $1 - 10^2$ фс. Создание приборов для измерения и управления в таких пространственно-временных масштабах представляет собой сложнейшую научно-техническую проблему. Отметим, что существующие химические и ядерные реакторы основаны на использовании естественного замедления быстротекущих процессов. Например, реализация систем управления ядерными реакциями возможна лишь потому, что скорость нейтронно-физических процессов существенно замедляется из-за наличия так называемых запаздывающих нейтронов, движение которых имеет постоянные времена порядка нескольких единиц или десятков секунд. Скорость молекул, вступающих в химические реакции, уменьшается вследствие диффузии, что создает предпосылки для управления процессами химической технологии. Однако для "тонких" задач управления, например для разрыва сильной химической связи при сохранении более слабой (так называемая *селективная химия*), необходимо избирательное вмешательство в процессы с характерными временами в пределах фемтосекундного диапазона. Технических возможностей для управления столь быстро протекающими процессами до последнего времени не существовало.

Положение изменилось в конце 1980-х годов с появлением сверхбыстродействующих фемтосекундных лазеров, генерирующих импульсы длительностью порядка нескольких десятков, а в настоящее время и нескольких единиц фемтосекунд, а также способов компьютерного управления формой лазерных импульсов. Возникло новое направление в химии — фемтохимия, за успехи в которой А. Зивейлю в 1999 г. была присуждена Нобелевская премия по химии [100]. С развитием способов использования фемтосекундных лазеров возник термин "фемтосекундные технологии", или "фемтотехнологии".

Предложено несколько подходов к управлению молекулярными системами. В подходе П. Брюмера и М. Шапиро [101] управление основано на интерференции двух лазерных пучков с различными частотами, амплитудами и фазами — схема накачки-гашения (pump-dump scheme). Д. Таннор и С. Райс [102] предложили двухимпульсные схемы накачки-гашения во временной области. Для оптимизации импульсов впоследствии были использованы методы оптимального управления, в частности на основе метода В.Ф. Кротова [103]. Х. Рабиц с соавторами [104–107] исследовали различные варианты оптимального управления при классическом и квантовом описании динамики молекулярного движения. В работе [105] была выдвинута идея реализации адаптивного лазерного управления химическими реакциями с

применением методов поисковой оптимизации (генетических алгоритмов), впоследствии неоднократно подтвержденная экспериментами [108–110]. О современном состоянии проблемы можно судить по статьям, представленным в сборниках [111, 112], а также в сборнике переводов [33].

Одной из простейших задач этого класса является задача о диссоциации двухатомной молекулы [54, 113–115]. В то же время эта задача является типичной, на примере которой удобно сравнивать достоинства и недостатки различных методов. В работе [113] численно исследованы возможности диссоциации молекулы фтористого водорода HF при воздействии периодически изменяющегося поля (монохроматического лазерного излучения). Аналогичным методом в [114] изучена диссоциация двухчастотным (бихроматическим) воздействием и показано, что интенсивность диссоциирующего поля может быть существенно снижена. В работе [54] получена оценка интенсивности диссоциирующего поля путем chirпирования — равномерного изменения частоты внешнего воздействия. Показана возможность дальнейшего понижения интенсивности поля, требующейся для диссоциации.

Новые возможности для изменения физико-химического состояния вещества возникают при неперiodическом воздействии в виде обратной связи. В разделе 5.2 на примере задачи о выбросе из потенциальной ямы показано, что обратная связь позволяет на несколько порядков уменьшить интенсивность воздействия, требующуюся для преодоления потенциального барьера. При выборе воздействия с помощью метода СГ интенсивность, необходимая для достижения заданного уровня энергии, оказывается обратно пропорциональной степени диссипации системы (см. раздел 4.1), а для консервативных систем соответствующий эффект теоретически может быть достигнут при сколь угодно малой интенсивности возбуждения. Поэтому представляет интерес применение обратной связи для синтеза управления молекулярными системами.

Главная проблема при управлении с обратной связью — это трудности, связанные с измерением состояния системы и реализацией управляющего воздействия на промежутках времени, сравнимых с периодом собственных колебаний молекулы.

В работах [106, 107, 115] и др. предложены различные алгоритмы управления с обратной связью, в том числе алгоритмы оптимального управления. Общей особенностью этих алгоритмов является то, что они используются в заданной модели молекулярной системы для синтеза управляющего воздействия как функции времени. В вычислительных экспериментах можно считать, что все нужные сигналы измеряются, а синтезированный алгоритм выполняется в вычислительной машине. В результате будет сгенерирован управляющий сигнал как функция времени, а его реализация на объекте проводится уже без измерений и обратной связи. Практическому применению такого подхода мешает значительное число неопределенностей: не точно известно начальное состояние системы, построенная управляющая функция вычисляется и реализуется с погрешностью. Наконец, сама модель молекулы не точна, поскольку не достоверно определены ее параметры, и, кроме того, выбор между классическим и квантовым описанием часто вызывает дискуссии.

В разделе 7.2 описывается новый подход к задаче о диссоциации двухатомной молекулы [116, 117], основанный на методе СГ с энергетической целевой функцией. Получаемые алгоритмы отличаются робастностью, поскольку не зависят от формы потенциала межмолекулярного взаимодействия. Они позволяют достигать диссоциации при меньшей интенсивности управляющего поля по сравнению с чирпингом и более просты для синтеза и расчета по сравнению с методами оптимального управления.

7.2. Синтез управления диссоциацией двухатомной молекулы

Идея подхода состоит в том, что задача управления диссоциацией ставится как задача достижения заданного уровня энергии молекулы (порог диссоциации). Для упрощения будем считать, что заданный уровень энергии несколько меньше порога диссоциации, т.е. будем рассматривать задачу *преддиссоциации*. Целевая функция формируется как квадрат отклонения текущей энергии от заданной. Алгоритм управления строится по стандартной схеме СГ (см. раздел 3) и применяется к динамической модели молекулы ("эталонная молекула") в течение времени T_1 , достаточного для ее диссоциации. Если сгенерированный таким образом управляющий сигнал как функцию времени подать на реальную молекулярную систему, то его воздействие приведет к диссоциации лишь тех молекул, начальное состояние которых находится в некоторой окрестности начального состояния эталонной молекулы x_0 ("зона диссоциации"). Однако если управление подается импульсами продолжительностью T_1 , промежутки между которыми достаточно велики, то за время паузы между импульсами в ходе хаотического теплового движения некоторые молекулы приблизятся к состоянию x_0 , войдут в зону диссоциации и будут диссоциированы следующим управляющим импульсом. Если алгоритм достаточно грубый, робастный, то можно ожидать, что доля молекул, находящихся в зоне диссоциации, будет не слишком мала и процесс пойдет достаточно быстро. Рассмотрим описанный подход более детально, следуя [117].

Примем классическое описание динамики отдельной молекулы в виде гамильтоновой модели (3.1). Роль координаты в (3.1) играет межатомное расстояние $r(t)$, а гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{p^2}{2m} + \Pi(r) + \mu(r)u, \quad (7.1)$$

где m — масса молекулы, $\Pi(r)$ — потенциал межатомного взаимодействия, $\mu(r)$ — дипольный момент молекулы, $u = u(t)$ — внешнее управляющее поле. Для описания межатомного взаимодействия используется потенциал Морзе

$$\begin{aligned} \Pi(r) &= D\{1 - \exp[-\alpha(r - a)]\}^2 - D = \\ &= D\{\exp[-2\alpha(r - a)] - 2\exp[-\alpha(r - a)]\}, \end{aligned} \quad (7.2)$$

где D — энергия связи, a — равновесное межатомное расстояние. Дипольный момент задается в форме [115, 118]

$$\mu(r) = Ar \exp(-\zeta r^4), \quad \mu'(r) = A(1 - 4\zeta r^4) \exp(-\zeta r^4), \quad (7.3)$$

где A, ζ — постоянные параметры. Если величина ζa^4 мала по сравнению с единицей, то дипольный момент можно аппроксимировать линейной функцией $\mu(r) = Ar$, $\mu'(r) = A$. При этом уравнение управляемой системы в лагранжевой форме примет вид

$$m\ddot{r} = 2\alpha D\{\exp[-2\alpha(r - a)] - \exp[-\alpha(r - a)]\} + Au(t). \quad (7.4)$$

Такое описание предполагает, что движение молекулы является одномерным, а ее ось ориентирована вдоль силовых линий управляющего внешнего поля, т.е. эффектами изменения ориентации и вращения молекулы пренебрегается.

При формулировке ЦУ учтем, что по мере приближения значения полной энергии молекулы к уровню $\Pi_* = \lim_{r \rightarrow \infty} \Pi(r)$, диссоциация становится все более вероятной. Очевидно, что в случае потенциала Морзе (7.6) имеем $\Pi_* = 0$.

Выберем в качестве целевой функции квадратичное отклонение энергии $Q(q, p) = (H_0(q, p) - H_*)^2/2$, где $H_0(q, p) = p^2/(2m) + \Pi(r)$ — энергия свободной молекулы, H_* — заданная величина, близкая к порогу диссоциации Π_* . Вычислив СГ так же, как и ранее, придем к простым законам обратной связи

$$u = -E(H_0(q, p) - H_*)\dot{r}, \quad (7.5)$$

$$u = -E \operatorname{sign}(H_0(q, p) - H_*) \operatorname{sign} \dot{r}, \quad (7.6)$$

где $E > 0$; $\operatorname{sign}(H) = 1$ при $H > 0$, $\operatorname{sign}(H) = -1$ при $H < 0$, $\operatorname{sign}(0) = 0$. Для моделирования использовался упрощенный вариант алгоритма (7.6), полученный в предположении, что энергия молекулы всегда меньше порога диссоциации H_* :

$$u = E \operatorname{sign} \dot{r}. \quad (7.7)$$

Алгоритм (7.7) не требует точного знания порога диссоциации H_* и может применяться также для других задач, например для локализации молекулы в области повышенной энергии (преддиссоциации).

7.3. Результаты моделирования при классическом и квантово-механическом описании молекул

Вычислительные эксперименты с системой (7.4), (7.7) проводились при численных значениях параметров, соответствующих молекуле HF [115, 118]: $m = 1732$, $D = 0,2101$, $\alpha = 1,22$, $a = 1,75$, $A = 0,4541$, $\zeta = 0,0064$, $E = 0,1$. Значения указаны в атомных единицах Хартри (а.е.). Для расчета управляющего воздействия выбирались начальные условия вблизи равновесного состояния $r = a$, $\dot{r} = 0$ ("эталонная молекула"). Интенсивность поля задавалась достаточно низкой: $E = 0,005$ а.е. Результатом расчета являлась функция $u(t)$ при $0 \leq t \leq T_1$.

Расчитанное управляющее воздействие $u(t)$ применялось к модели ансамбля, состоящего из числа молекул $N = 1000$. Предполагалось, что молекулы не взаимодействуют между собой и с границей. Начальные условия для молекул ансамбля задавались как случайные величины, равномерно распределенные на поверхности заданного уровня энергии $H_0 = -0,8689D$. Управление подавалось в виде повторяющихся импульсов с периодом повторения T_2 , достаточно большим, чтобы дать молекулам возможность "перемешаться" за время паузы между импульсами. В экспериментах выбиралось $T_2 =$

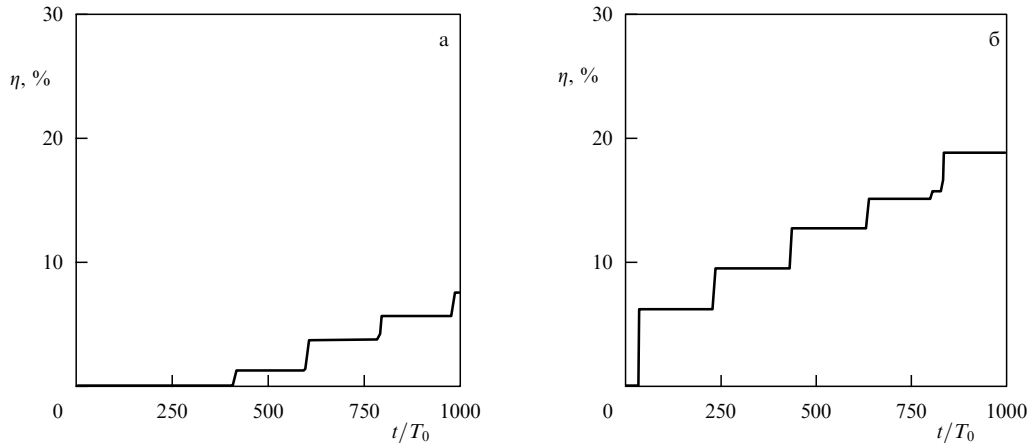


Рис. 7. Управляемая диссоциация в классическом ансамбле: (а) линейно чирпированные импульсы, (б) импульсы, рассчитанные по методу СГ. η — доля продиссоциировавших молекул.

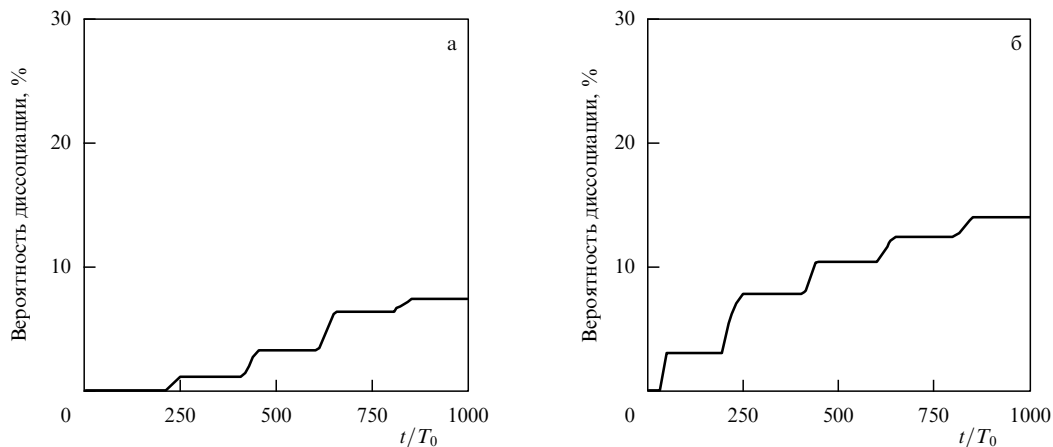


Рис. 8. Вероятность диссоциации при квантово-механическом моделировании для $E = 0,005$ а.е.: (а) линейно чирпированные импульсы, (б) импульсы, рассчитанные по методу СГ.

$= 200T_0$, где T_0 — период малых колебаний молекулы вблизи равновесного положения. Мерой эффективности управления являлась доля продиссоциировавших молекул (в процентах к общему числу молекул). Под диссоциацией, точнее, преддиссоциацией понималось превышение молекулой уровня энергии $H_* = -0,1185D$.

Предложенный алгоритм сравнивался по эффективности со стандартным алгоритмом чирпинга $u(t) = E \cos(\phi_0 + \Omega_0 t - \varepsilon t^2/2)$. На рисунке 7а представлена зависимость доли продиссоциировавших молекул от времени при управлении линейно чирпированным полем. Скорость чирпа ε (скорость изменения частоты импульсов) подбиралась экспериментально для достижения наибольшей доли диссоциированных молекул и в эксперименте составляла $\varepsilon = 0,01\Omega_0/T_0$. На рисунке 7б приведена аналогичная зависимость для алгоритма СГ. Из рисунков видно, что эффективность последнего в несколько раз выше эффективности линейного чирпинга. Важно, что система с чирпингом весьма чувствительна к величине скорости чирпа ε . Подбор параметра ε требует значительного объема вычислений и более точного знания параметров молекулярного гамильтониана и дипольного момента, чем требуется для эффективной работы алгоритма (7.7).

Интересным и до сих пор вызывающим дискуссии является вопрос о правомерности использования класси-

ческих представлений при моделировании и управлении молекулярными процессами. Динамика двухатомной молекулы более адекватно, по сравнению с классической моделью (7.4), описывается квантово-механической, точнее, полуклассической моделью, представленной нестационарным уравнением Шрёдингера

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \Pi(r)\Psi + Aru(t)\Psi, \quad (7.8)$$

где $\Psi = \Psi(t, r)$ — волновая функция, $\Pi(r)$ — потенциал Морзе (7.2). Однако классические вычисления во многих случаях дают результат, достаточно близкий к реальности. Поэтому было проведено численное сравнение результатов моделирования процессов управляемой диссоциации в классической и квантовой постановках.

Для численного анализа квантовой модели (7.8) была построена конечно-уровневая аппроксимация модели путем разложения решения по собственным функциям невозмущенного уравнения Шрёдингера с потенциалом Морзе [119]. Управляющее воздействие и время моделирования были взяты такими же, как и в классическом случае. Начальное состояние системы выбиралось как чистое состояние с энергией, равной второму энергетическому уровню, а порог диссоциации H_* соответствовал пятнадцатому энергетическому уровню молекулы HF,

опять так же, как и в классическом случае. Вероятность диссоциации (доля продиссоциировавших молекул) определялась как вероятность состояний с энергией, превышающей порог диссоциации H_* .

Результаты квантово-механического моделирования представлены на рис. 8. Видно, что АСГ обеспечивает вероятность диссоциации 14 % после 5 импульсов, что существенно превышает вероятность диссоциации для chirпированного импульса и согласуется с результатами для классического случая (10–12 %).

8. Законы управления и законы динамики систем

Ниже исследуются связи между законами управления в технических системах и законами динамики физических систем. Показано, что методы синтеза алгоритмов управления, в частности метод СГ, при соответствующем выборе целевой функции, позволяют выводить законы динамики физических систем.

8.1. Вариационные принципы.

Принцип скоростного градиента

Рассмотрим класс открытых физических систем, модели динамики которых описываются системами дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad (8.1)$$

где x — вектор состояния системы, $x \in \mathcal{R}^n$, u — вектор входных (свободных) переменных, $t \geq 0$. Задача моделирования (построения модели) системы может быть поставлена как нахождение закона изменения (эволюции) $u(t)$, удовлетворяющего некоторому критерию "естественности" ее поведения и придающего создаваемой модели свойства, наблюдаемые у реальной физической системы.

В физике подобные постановки хорошо известны. Давно получили признание вариационные принципы построения моделей систем. Вариационный принцип обычно предполагает задание некоторого интегрального функционала (например, функционала действия в принципе наименьшего действия [120]), характеризующего поведение системы. Минимизация функционала определяет реально возможные траектории системы $\{x(t), u(t)\}$ как точки в соответствующем функциональном пространстве. Для явного определения закона динамики системы используется развитый аппарат вариационного исчисления.

Интересно, что вариационный подход лег в основу целого направления в теории управления: *теории оптимального управления*, в которой минимизация функционала используется для нахождения подходящего в заданном смысле закона управления технической системой. В свою очередь, методы оптимального управления (динамическое программирование Беллмана, принцип максимума Понтрягина и др.), являющиеся развитием методов классического вариационного исчисления, могут быть применены к построению моделей динамики механических [121], термодинамических [122] и других систем.

Кроме интегральных были предложены и дифференциальные (локальные по времени) принципы, такие, как принцип наименьшего принуждения Гаусса, принцип минимальной диссипации энергии и др. Как отмечал М. Планк [123], локальные принципы имеют

некоторое преимущество перед интегральными, поскольку они не ставят текущее состояние и движение системы в зависимость от ее более поздних состояний и движений. Следуя [62], сформулируем еще один локальный вариационный принцип, основанный на методе СГ.

8.1.1. Принцип скоростного градиента. Среди всех возможных движений в системе реализуются лишь те, для которых входные переменные изменяются пропорционально скоростному градиенту некоторого "целевого" функционала Q .

Принцип СГ предлагает исследователю на выбор два типа моделей динамики систем:

а) модели, следующие из алгоритмов СГ в дифференциальной форме

$$\dot{u} = -\Gamma \nabla_u \dot{Q}; \quad (8.2)$$

б) модели, следующие из алгоритмов СГ в конечной форме

$$u = -\Gamma \nabla_u \dot{Q}. \quad (8.3)$$

Здесь \dot{Q} — скорость изменения целевого функционала вдоль траектории системы (8.1).

Опишем схему применения принципа в простейшем (но и важнейшем) случае, когда класс моделей динамики (8.1) задан соотношением

$$\dot{x} = u. \quad (8.4)$$

Соотношение (8.4) означает всего лишь, что мы ищем закон изменения скоростей переменных состояния системы. В соответствии с принципом СГ прежде всего нужно ввести целевой функционал (функцию) $Q(x)$. Выбор $Q(x)$ должен быть основан на физике реальной системы и отражать наличие в ней тенденции к уменьшению текущего значения $Q(x(t))$. После этого закон динамики может быть немедленно выписан в виде (8.2) или (8.3).

При этом задание закона динамики в виде (8.2) порождает дифференциальные уравнения движения второго порядка, которые инвариантны относительно замены времени $t \rightarrow -t$, т.е. соответствуют обратимым процессам. Напротив, выбор конечной формы (8.3) соответствует, как правило, необратимым процессам.

В разделе 8.2 применение введенного принципа демонстрируется на примерах.

8.2. Примеры скоростно-градиентных законов динамики

8.2.1. Движение материальной точки в потенциальном поле. В качестве первого примера рассмотрим задачу описания движения материальной точки в потенциальном поле. Переменными состояниями здесь являются координаты точки, т.е. $x = \text{col}(x_1, x_2, x_3)$. Выберем в качестве целевой функции потенциал поля $Q(x)$ и выведем скоростно-градиентный закон движения в дифференциальной форме. Вычислим СГ:

$$\dot{Q} = [\nabla_x Q(x)]^T u, \quad \nabla_u \dot{Q} = \nabla_x Q(x).$$

Выбирая диагональную положительно определенную матрицу Γ в виде $\Gamma = m^{-1} I_3$, где $m > 0$ — параметр, I_3 — единичная 3×3 -матрица, приходим к классическому

закону динамики Ньютона $\dot{u} = -m^{-1}\nabla_x Q(x)$, или

$$m\ddot{x} = -\nabla_x Q(x). \quad (8.5)$$

При этом параметр m интерпретируется как масса точки.

Пример допускает далеко идущие обобщения. Для систем, движущихся под действием потенциальных сил потенциал поля может играть роль целевой функции $Q(x)$, а матрица инерции определяет матрицу коэффициентов усиления в алгоритме. Причем, если инерционные свойства системы различны в различных точках конфигурационного пространства, то метрика в пространстве скоростей (управляющих переменных) будет переменной. Таким образом можно строить модели динамики сложных механических систем, описываемых уравнениями Лагранжа 2-го рода.

Принцип СГ применим и к построению моделей динамики распределенных систем, описываемых в бесконечномерных пространствах состояний. В частности, x может быть вектором гильбертова пространства \mathcal{X} , а $f(x, u, t)$ — нелинейным оператором, определенным на плотном множестве $D_F \subset \mathcal{X}$ (при этом решения уравнения (8.1) понимаются как обобщенные решения).

8.2.2. Волновое уравнение и уравнение теплопроводности.

Пусть $x = x(r)$ — поле температур или концентраций вещества, определенное в некоторой области $\Omega \subset \mathcal{R}^3$, $r = \text{col}(r_1, r_2, r_3) \in \Omega$. Выберем в качестве целевого функционала меру неоднородности поля:

$$Q(x) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla_r x(r, t)|^2 dr, \quad (8.6)$$

где $\nabla_r x(r, t)$ — пространственный градиент поля $x = x(r)$. Полагая для простоты граничные условия нулевыми, вычислим СГ функционала (8.6). Из формулы Грина с учетом нулевых граничных условий имеем

$$\dot{Q} = \int_{\Omega} (\nabla_r x(r, t))^T \nabla_r u(r, t) dr = - \int_{\Omega} \Delta x(r, t) u(r, t) dr, \quad (8.7)$$

где

$$\Delta = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial r_i^2}$$

— оператор Лапласа. Учитывая, что градиент от скалярного произведения по одному сомножителю равен другому сомножителю⁶, получаем, что оператор СГ в данном случае — не что иное как оператор Лапласа: $\nabla_u \dot{Q} = -\Delta x(r, t)$. Следовательно, скоростно-градиентный закон эволюции системы в дифференциальной форме (8.2) примет вид

$$\frac{\partial^2 x(r, t)}{\partial t^2} = \gamma \Delta x(r, t), \quad (8.8)$$

что соответствует волновому уравнению.

Если выбирается алгоритм в конечной форме (8.3), то соответствующее уравнение динамики

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t} = \gamma \Delta x(r, t) \quad (8.9)$$

совпадает с простейшим уравнением теплопроводности.

8.2.3. Динамика вязкой жидкости. Пусть бесконечномерный вектор состояния системы образован двумя функциями: $x = \text{col}(v(r, t), p(r, t))$, где $v(r, t)$ — скорость трехмерного течения жидкости, $v(r, t) \in \mathcal{R}^3$, $p(r, t)$ — давление. Введем целевой функционал следующим образом:

$$Q = \int_{\Omega} p(r, t) dr + v_0 \int_{\Omega} |\nabla_r v(r, t)|^2 dr, \quad (8.10)$$

где $v_0 > 0$ — весовой коэффициент. Вычисление СГ функционала (8.10) по u , определяемому выражением (8.4), дает $\nabla_u Q = \nabla_r p - v_0 \Delta v$. Поэтому дифференциальная форма закона СГ — не что иное как уравнение Навье–Стокса, описывающее движение вязкой жидкости:

$$\rho \frac{\partial v(r, t)}{\partial t} = -\nabla_r p(r, t) + \nu \Delta v(r, t), \quad (8.11)$$

где $\nu = v_0 \gamma^{-1}$ — коэффициент вязкости, $\rho = \gamma^{-1}$ — плотность жидкости.

Другие примеры вывода уравнений динамики механических, электрических и прочих систем можно найти в [62]. Принцип СГ применим к описанию широкого класса физических систем, находящихся под действием потенциальных или диссипативных сил. С другой стороны, для применимости к системам, совершающим вихревые движения, например к механическим системам, находящимся под действием гироскопических сил, принцип нуждается в модификации.

Еще раз подчеркнем, что этот принцип носит двойственный характер: дифференциальная форма закона СГ соответствует обратимым, тогда как конечная форма — необратимым процессам. Выбор между ними так же, как и выбор цели и целевого функционала, полностью относится к области физики. В каких-то случаях этот выбор неоднозначен: например, процесс, обратимый на одних масштабах времени может быть необратимым на других масштабах. Таким образом, этот принцип не освобождает физика от необходимости выбора или построения модели системы, а лишь помогает сузить множество вариантов при принятии решения и выявить целенаправленность в поведении системы.

8.3. Соотношения Онсагера

Принцип скоростного градиента позволяет по-новому взглянуть на некоторые известные физические факты и явления. Выведем, например, обобщенный вариант известного принципа симметрии кинетических коэффициентов (принцип Онсагера) в термодинамике [124, 125]. Рассмотрим изолированную физическую систему, состояние которой характеризуется набором термодинамических переменных $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$. Обозначим через $x_i = \xi_i - \xi_i^*$ отклонения переменных от равновесных значений $\xi_1^*, \xi_2^*, \dots, \xi_n^*$. Пусть динамика величин x_1, x_2, \dots, x_n описывается дифференциальными уравне-

⁶ Для корректности этого рассуждения следует считать, что обе подинтегральные функции принадлежат какому-либо гильбертову пространству, например, $L_2(\Omega)$, что, впрочем, не накладывает серьезных ограничений на общность рассуждений.

ниями

$$\dot{x}_i = u_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (8.12)$$

Линеаризуем уравнения (8.12) вблизи равновесия:

$$\dot{x}_i = - \sum_{k=1}^n \lambda_{ik} x_k, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (8.13)$$

Принцип Онсагера [124, 125] состоит в том, что так называемые кинетические коэффициенты λ_{ik} удовлетворяют соотношениям симметрии

$$\lambda_{ik} = \lambda_{ki}, \quad i, k = 1, 2, \dots, n. \quad (8.14)$$

Принцип Онсагера верен не для всех систем. Его доказательства (см., например, [124, 125]) опираются на дополнительные постулаты. В частности, считается, что система находится вблизи термодинамического равновесия. Ниже дается новое доказательство, которое показывает, что для скоростно-градиентных систем обобщенный вариант принципа Онсагера верен без дополнительных предположений и не требует предварительной линеаризации модели системы.

Прежде всего необходимо сформулировать этот вариант. Легко видеть, что для линейной модели системы (8.13) соотношения (8.14) равносильны следующим тождествам:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k}(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \frac{\partial u_k}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (8.15)$$

Будем называть *обобщенным принципом Онсагера* выполнение соотношений (8.15) для систем, описываемых нелинейными уравнениями (8.12).

Оказывается, что если существует гладкая функция $Q(x)$, такая, при которой уравнения динамики (8.12) могут быть получены исходя из принципа СГ в конечной форме, то для всех x_1, x_2, \dots, x_n справедливы тождества (8.15), т.е. обобщенный принцип Онсагера.

Действительно, уравнения (8.12) выражают закон СГ для $Q(x)$, вследствие чего их правые части могут быть представлены в форме $u_i = -\gamma \partial \dot{Q} / \partial u_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда $u_i = -\gamma (\partial Q / \partial x_i)$ (в силу $\dot{Q} = (\nabla_x Q)^T u$) и

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = -\gamma \frac{\partial^2 Q}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial u_k}{\partial x_i},$$

откуда следует справедливость тождеств (8.15).

Очевидно, что соотношения (8.14) являются частным случаем (8.15) для линейных уравнений динамики. Таким образом, для систем, подчиняющихся принципу СГ, обобщенные соотношения Онсагера (8.15) справедливы без предположения о линейности уравнений динамики, т.е. не только вблизи равновесия. Поскольку приведенный выше вывод основан на дифференцировании, то предполагается гладкость правых частей (8.12). На первый взгляд, это исключает из рассмотрения задачи с негладкими и разрывными функциями, например, задачи о движении ударных волн. Однако в этих случаях можно использовать варианты алгоритмов СГ, специально разработанные для негладких задач, в которых градиент уступает место *субградиенту* [62].

8.4. Динамика и цель

Интересно сравнить описанный выше подход с результатами английского специалиста по системам управления

Г. Розенброка [126, 127], который показал, что уравнение Шрёдингера может быть выведено из принципа оптимальности Гамильтона – Якоби – Беллмана.

Хотя подход к построению уравнений динамики физических систем на основе экстремальных принципов хорошо известен, он обычно не увязывается в физике с понятием цели, поставленной как достижение экстремума целевого функционала. В этом проявляется отличие подходов в физике от подходов, применяемых в инженерных науках, в которых оптимальность как цель создания искусственной (технической) системы обычно ставится во главу угла. Наоборот, использование понятий цели и целесообразности поведения системы в физике и других естественных науках вызывало возражения ряда ученых. Наиболее ярко такие взгляды выразил А. Эйнштейн [128]: "... Для ученого есть только «существующее», но нет желающего, нет оценивающего, нет добра, нет зла, нет цели".

Г. Розенброк критикует позицию А. Эйнштейна, приводя аргументы в пользу того, что понятие цели естественно как для живой, так и неживой природы. Он отмечает, что неприятие цели возникло как реакция, которая на сегодняшний день не является актуальной, на конфликт XVII столетия между церковью и зарождающейся наукой. В XX – XXI столетиях машины, действующие целенаправленно и воплощающие цели, заложены в них человеком, распространились повсеместно и стали уже частью окружающей нас среды! Это заставляет придавать более серьезное значение понятию цели и в физике как науке о наиболее общих закономерностях систем окружающей среды — живых, неживых и искусственных, созданных человеком. Г. Розенброк пишет [33, 127]: "... Живые организмы, очевидно, имеют свои цели, и, если субстрат квантово-механических частиц, из которых состоит все живое, описывается как не имеющий целей, то возникает вопрос: как может цель возникнуть из бесцельного субстрата?"

Точка зрения Г. Розенброка перекликается с выводами Б.Б. Кадомцева [10]: "...существует много общих черт в поведении сложных систем как органических, так и неорганических, причем неорганические системы со сложной структурой тоже не являются простыми как в структурном плане, так и по характеру их поведения" и "...целесообразность и возможность выбора цели можно считать достаточно естественным продуктом развития сложных систем с информационным поведением".

Описанный выше локальный принцип эволюции на основе СГ опирается на понятие цели в еще большей степени, чем интегральные экстремальные принципы. Поэтому в тех случаях, когда понятия цели и целевой функции возникают естественным образом, он может оказаться более удобным и полезным для построения моделей динамики систем. Кстати, отметим, что принцип СГ согласуется с известным биологическим принципом, согласно которому организмы и популяции развиваются так, чтобы обеспечить максимальный прирост своей биомассы [62, 129].

9. Заключение

В настоящем обзоре проанализированы основные особенности задач управления в физических системах и представлены общие подходы к решению задач управления фундаментальной характеристикой систем —

энергией. Установлены законы преобразования энергии для основных классов систем: консервативных и диссипативных. Новые постановки потребовали введения новых понятий (индекс возбудимости) и привели к описанию новых эффектов (резонанс с обратной связью). Приведенные примеры решения задач управления физическими системами показывают плодотворность новых подходов к исследованию и управлению явлениями макро- и микромира.

Так как в одной журнальной публикации невозможно осветить все многообразие исследований по теме обзора, здесь не представлен целый ряд важных применений методов теории управления в физике. По мнению автора, современное физическое образование должно включать в себя курс кибернетической физики, содержащий такие разделы, как оптимизационная термодинамика [122], управление пучками частиц [98], теория динамических материалов [130], управление хаосом [39, 40], управление синхронизацией [28, 36], управляемый термоядерный синтез и др.

Работа выполнялась при поддержке РФФИ (проект 02-01-00765), программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 19 "Управление механическими системами" (проект 1.4. Управление колебаниями и хаосом в физико-технических системах), а также Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых ученых и ведущих научных школ (грант НШ-2257.2003.1). Автор благодарен Полине Соломоновне Ланда за ряд полезных замечаний.

Список литературы

- Szillard L Z. *Phys.* **53** 840 (1929)
- Gabor D *IRE Trans. Inf. Theory* **1** (1) 48 (1953)
- Бриллюэн Л *Наука и теория информации* (М.: Физматгиз, 1960)
- Стратонович Р Л *Теория информации* (М.: Сов. радио, 1975)
- Стратонович Р Л, Полякова М С *Элементы молекулярной физики, термодинамики и статистической физики* (М.: Изд-во МГУ, 1981)
- Поплавский Р П *УФН* **115** 465 (1975)
- Поплавский Р П *Термодинамика информационных процессов* (М.: Наука, 1981)
- Landauer R *Science* **272** 1914 (1996)
- Кадомцев Б Б *УФН* **164** 449 (1994)
- Кадомцев Б Б *Динамика и информация* 2-е изд. (М.: Ред. журн. "Успехи физических наук", 1999)
- Килин С Я *УФН* **169** 507 (1999)
- Холево А С *Введение в квантовую теорию информации* (М.: Изд-во МЦНМО, 2002)
- Валиев К А, Кокин А А *Квантовый компьютер: мечта или реальность?* (Ижевск: РХД, 2000)
- Квантовый компьютер и квантовые вычисления* Т. 2 (Ижевск: РХД, 1999)
- Винер Н *Кибернетика* 2-е изд. (М.: Сов. радио, 1968)
- Brockett R W, in *Geometric Control Theory, Lie Groups* Vol. VII (Eds C Martin, R Hermann) (Brookline, MA: Mat. Sci. Press, 1977) p. 1
- Ott E, Grebogi C, Yorke J A *Phys. Rev. Lett.* **64** 1196 (1990)
- Дудник Е Н и др. *Вестн. МГУ. Сер. 3. Физ. Астрон.* **24** (4) 84 (1983)
- Кузнецов Ю И и др. *ДАН СССР* **275** 1388 (1984)
- Кузнецов Ю И и др. *ДАН СССР* **281** 291 (1985)
- Ланда П С, Перминов С М *Изв. вузов. Радиофиз.* **28** 424 (1985)
- Алексеев В В, Лоскутов А Ю *Вестн. МГУ. Сер. 3. Физ. Астрон.* **26** (3) 40 (1985)
- Алексеев В В, Лоскутов А Ю *ДАН СССР* **293** 1346 (1987)
- Неймарк Ю И, Ланда П С *Стохастические и хаотические колебания* (М.: Наука, 1987)
- Fradkov A L, Pogromsky A Yu *Introduction to Control of Oscillations and Chaos* (Singapore: World Scientific, 1998)
- Fradkov A L *Physica D* **128** 159 (1999)
- Фрадков А Л *Автоматика и телемеханика* (3) 213 (1999)
- Фрадков А Л *Кибернетическая физика* (СПб.: Наука, 2003)
- Leff H S, Rex A F (Eds) *Maxwell's Demon — Entropy, Information, Computing* (New York: Random House, 1990)
- Bak P E, Yoshino R *Contrib. Plasma Phys.* **40** 227 (2000)
- Lloyd S *Phys. Rev. A* **56** 3374 (1997)
- Бутковский А Г, Самойленко Ю И *Управление квантовомеханическими процессами* (М.: Наука, 1984)
- Управление молекулярными и квантовыми системами. Сб. переводов* (Под ред. А Л Фрадкова, О А Якубовского) (М. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003)
- Саркисов О М и др. *Квантовая электрон.* **31** 483 (2001)
- Турчин В Ф *Феномен науки: Кибернетический подход к эволюции* 2-е изд. (М.: ЭТС, 2000)
- Управление мехатронными вибрационными установками* (Под ред. И И Блехмана, А Л Фрадкова) (СПб.: Наука, 2001) с. 85
- Blekhman I I, Fradkov A L, in *Selected Topics in Vibrational Mechanics* (Ed. I I Blekhman) (Singapore: World Scientific, 2004) p. 179
- Abed E H, Fu J-H *Systems Control Lett.* **7** 11 (1986); **8** 467 (1987)
- Лоскутов А Ю *Вестн. МГУ Сер. 3. Физ. Астрон.* (2) 3 (2001)
- Андреевский Б Р, Фрадков А Л *Автоматика и телемеханика* (5) 3 (2003); (4) 3 (2004)
- Капица П Л *ЖЭТФ* **21** 5 (1951)
- Блехман И И *Синхронизация динамических систем* (М.: Наука, 1971)
- Блехман И И *Вибрационная механика* (М.: Наука, 1994)
- Meerkov S M *IEEE Trans. Autom. Control* **AC-25** 755 (1980)
- Bellman R, Bentsman J, Meerkov S *IEEE Trans. Autom. Control* **AC-31** 8 710 (1986)
- Landa P S, McClintock P V E *J. Phys. A: Math. Gen.* **33** L433 (2000)
- Анищенко В С и др. *УФН* **169** 7 (1999)
- Хорстхемке В, Лефевр Р *Индукцированные шумом переходы* (М.: Мир, 1987)
- Landa P S, McClintock P V E *Phys. Rep.* **323** 2 (2000)
- Ланда П С *Радиотехника и электроника* **46** 1157 (2001)
- Doering C A *Physica A* **254** 1 (1998)
- Blekhman I I, Landa P S, Rosenblum M G *Appl. Mech. Rev.* **48** 733 (1995)
- Fajans J, Friedland L *Am. J. Phys.* **69** 1096 (2001)
- Liu W-K, Wu B, Yuan J-M *Phys. Rev. Lett.* **75** 1292 (1995)
- Meerson B, Friedland L *Phys. Rev. A* **41** 5233 (1990)
- Aranson I, Meerson B, Tajima T *Phys. Rev. A* **45** 7500 (1992)
- Боголюбов Н Н, Митропольский Ю А *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний* 4-е изд. (М.: Наука, 1974)
- Неймарк Ю И *Динамические системы и управляемые процессы* (М.: Наука, 1978)
- Первозванский А А *Курс теории автоматического управления* (М.: Наука, 1986)
- Андреевский Б Р, Фрадков А Л *Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB* (СПб.: Наука, 1999)
- Мирошник И В, Никифоров В О, Фрадков А Л *Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами* (СПб.: Наука, 2000)
- Фрадков А Л *Адаптивное управление в сложных системах* (М.: Наука, 1990)
- Климонтович Ю Л *Введение в физику открытых систем* (М.: Янус-К, 2002)
- Shiriaev A S, Fradkov A L *Automatica* **36** 1709 (2000)
- Заславский Г М, Сагдеев Р З *Введение в нелинейную физику: От маятника до турбулентности и хаоса* (М.: Наука, 1988)
- Ланда П С *Нелинейные колебания и волны* (М.: Физматлит, 1997)
- Галилей Г *Избранные труды* Т. 1, 2 (М.: Физматгиз, 1964)
- Андронов А А, Витт А А, Хайкин С Э *Теория колебаний* 2-е изд. (М.: Физматгиз, 1959)
- Бабицкий В И, Крупенин В Л *Колебания в сильно нелинейных системах* (М.: Наука, 1985)

70. Babitsky V I, Chitayev M I *Mechatronics* **6** 897 (1996)
71. Акуленко Л Д *Изв. РАН. Механика твердого тела* (3) 110 (1993)
72. Stephenson A *Mem. Proc. Manch. Lit. Philos. Soc.* **52** 1 (1908); *Philos. Mag.* **15** 233 (1909)
73. Леонов Г А, Шумафов М М *Проблемы стабилизации линейных управляемых систем* (СПб.: Изд-во СПбГУ, 2002)
74. Фрадков А Л, Шиегин В С *Изв. РАН. Теория и системы управления* (2) 19 (1999)
75. Понтрягин Л С, Андронов А А, Витт А А *ЖЭТФ* **3** 165 (1933)
76. Stewart H V et al. *Physica D* **85** 259 (1995)
77. Бутковский А Г *Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами* (М.: Наука, 1965); *Методы управления системами с распределенными параметрами* (М.: Наука, 1975)
78. Hu G, Qu Z, He K *Int. J. Bifurc. Chaos* **5** 901 (1995)
79. Parmananda P, Hildebrand M, Eiswirth M *Phys. Rev. E* **56** 239 (1997)
80. Gade P M *Phys. Rev. E* **57** 7309 (1998)
81. Kocarev L, Tasev Z, Parlitz U *Phys. Rev. Lett.* **79** 51 (1997)
82. Sinha S, Gupta N *Phys. Rev. E* **58** R5221 (1998)
83. Montagne R, Colet P *Phys. Rev. E* **56** 4017 (1997)
84. Bleich M E et al. *Phys. Rev. E* **55** 2119 (1997)
85. Boccaletti S, Bragard J, Arecchi F T *Phys. Rev. E* **59** 6574 (1999)
86. Xiao J H, Hu G, Gao J H *Int. J. Bifurc. Chaos* **10** 655 (2000)
87. Schuster H G, Stemmler M B *Phys. Rev. E* **56** 6410 (1997)
88. Hu Gang et al. *Phys. Rev. E* **62** R3043 (2000)
89. Grigoriev R O, Cross M C, Schuster H G *Phys. Rev. Lett.* **79** 2795 (1997)
90. Магницкий Н А, Сидоров С В *Дифференциальные уравнения* **35** 669 (1999)
91. Wang P-Y, Xie P *Phys. Rev. E* **61** 5120 (2000)
92. Belykh V N, Belykh I V, Hasler M *Phys. Rev. E* **62** 6332 (2000)
93. Belykh V N, Belykh I V, Mosekilde E *Phys. Rev. E* **63** 036216 (2001)
94. Belykh V N et al. *Int. J. Bifurc. Chaos* **13** 755 (2003)
95. Pogromsky A, Santoboni G, Nijmeijer H *Physica D* **172** 65 (2002)
96. Кафаров В В *Методы кибернетики в химии и химической технологии* (М.: Химия, 1976, 4-е изд. — 1985)
97. Емельянов И Я, Ефанов А И, Константинов Л В *Научно-технические основы управления ядерными реакторами* (М.: Энергоатомиздат, 1981)
98. Овсянников Д А *Математические методы управления пучками* (Л.: Изд-во ЛГУ, 1980)
99. Мирзоев Ф Х, Панченко В Я, Шелепин Л А *УФН* **166** 3 (1996)
100. Zewail A J. *Phys. Chem. A* **104** 5660 (2000)
101. Shapiro M, Brumer P *J. Chem. Phys.* **84** 4103 (1986)
102. Tannor D J, Rice S A *J. Chem. Phys.* **83** 5013 (1985)
103. Kosloff R et al. *Chem. Phys.* **139** 201 (1989)
104. Dahleh M et al. *Proc. IEEE* **84** 1 7 (1996)
105. Judson R S, Rabitz H *Phys. Rev. Lett.* **68** 1500 (1992)
106. Peirce A, Dahleh M, Rabitz H *Phys. Rev. A* **37** 4950 (1988)
107. Rabitz H, in *Proc. of the 39th IEEE Conf. on Decision and Control, Sydney, Australia, December 12–15, 2000* (Piscataway, NJ: IEEE, 2000) p. 1937
108. Assion A et al. *Science* **282** 919 (1998)
109. Bardeen C J et al. *Chem. Phys. Lett.* **280** 151 (1997)
110. Pearson B J et al. *Phys. Rev. A* **63** 063412 (2001)
111. Bandrauk A D, Fujimura Y, Gordon R J (Eds) *Laser Control and Manipulation of Molecules* (Oxford: Oxford Univ. Press, 2002)
112. Fradkov A L, Churilov A N (Eds) *Proc. Intern. Conf. "Physics and Control"* Vol. 3 *Control of Microworld Processes. Nano- and Femtotechnologies* (St. Petersburg: IEEE, 2003)
113. Goggin M E, Milonni P W *Phys. Rev. A* **37** 796 (1988)
114. Goggin M E, Milonni P W *Phys. Rev. A* **38** 5174 (1988)
115. Yu C et al. *Automatica* **9** 1617 (1997)
116. Fradkov A L, Krivtsov A M, Efimov A A *Differ. Eq. Control Proc.* (4) 36 (2001); <http://www.neva.ru/journal/>
117. Ananjevsky M et al., in *Proc. Intern. Conf. "Physics and Control 2003"* (St. Petersburg, 2003) p. 867
118. Guldberg A, Billing G D *Chem. Phys. Lett.* **186** (2–3) 229 (1991)
119. Флюгге З *Задачи по квантовой механике* Т. I, II (М.: Мир, 1974)
120. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Механика* (М.: Наука 1965)
121. Беллман Р, Дрейфус С *Прикладные методы динамического программирования* (М.: Физматлит, 1965)
122. Миронова В А, Амеликин С А, Цирлин А М *Математические методы термодинамики при конечном времени* (М.: Химия, 2000)
123. Планк М *Принцип наименьшего действия. Единство физической картины мира* (М.: Наука, 1966)
124. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Статистическая физика* (М.: Наука, 1964)
125. Гленсдорф П, Пригожин И *Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций* (М.: Мир, 1973)
126. Rosenbrock H N *Phys. Lett. A* **110** 343 (1986)
127. Rosenbrock H N *IEEE Trans. Autom. Control* **AC-45** 73 (2000)
128. Einstein A *Out of My Later Years* (New York: Thames and Hudson, 1950) p. 114
129. Свирежев Ю М, Логофет Д О *Устойчивость биологических сообществ* (М.: Наука, 1978)
130. Blekhman I I, in *Selected Topics in Vibrational Mechanics* (Ed. I I Blekhman) (Singapore: World Scientific, 2004)

Application of cybernetical methods in physics

A.L. Fradkov

*Institute for Problems of Mechanical Engineering, Russian Academy of Sciences,
Bol'shoi prosp. 61, Vasil'evskii Ostrov, 199178 St. Petersburg, Russian Federation
Tel. (7-812) 321-4766. Fax (7-812) 321-4771
E-mail: alf@control.ipme.ru*

Basic aspects of the subject and methodology are reviewed for a new and rapidly developing area of research that has emerged at the intersection of physics and control theory (cybernetics) and emphasizes the application of cybernetic methods to the study of physical systems. Speed-gradient and Hamiltonian solutions for energy control problems in conservative and dissipative systems are presented. Application examples such as the Kapitza pendulum, controlled overcoming of a potential barrier, and controlling coupled oscillators and molecular systems are presented. A speed-gradient modeling approach to the dynamics of physical systems is discussed.

PACS numbers: 02.30.Yy, 05.45.Gg, 05.45.Xt, 32.80.Qk, **45.80.+r**

Bibliography — 130 references

Received 20 August 2004, revised 30 November 2004

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **175** (2) 113–138 (2005)

Physics – Uspekhi **48** (2) (2005)