

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

О механических прообразах фундаментальных гидродинамических инвариантов и медленных многообразий

Ф.В. Должанский

Введенное Арнольдом теоретико-групповое понятие обобщенного твердого тела (ОТТ) включает в себя уравнения Эйлера движения классического гироскопа и движения идеальной несжимаемой жидкости как частные случаи. Здесь рассматривается расширенное понятие ОТТ, распространенное на случай движения во внешнем силовом поле со скалярным или векторным потенциалом, а также в поле сил Кориолиса. Вводятся понятия обобщенного тяжелого волчка и обобщенной магнитогидродинамической (МГД) системы, включающие в себя, с одной стороны, уравнения Эйлера – Пуассона движения обычного тяжелого волчка и уравнения Кирхгофа движения твердого тела в потенциальном течении идеальной несжимаемой жидкости и, с другой стороны, уравнения Обербека – Буссинеска движения тяжелой жидкости и МГД-уравнения как частные случаи. На этой основе строятся механические прототипы всех известных фундаментальных гидродинамических инвариантов, а также глобальных геофизических течений, в том числе прототип общей циркуляции атмосферы.

PACS numbers: 02.40. – k, 45.40. – f, 92.10. – c, 92.60. – e

Содержание

1. Введение (1257).
2. Конструкция Арнольда обобщенного твердого тела (1259).
3. Что такое циркуляционная теорема Кельвина и инвариант спирали? (1262).
4. Конструкция обобщенного тяжелого волчка (1266).
5. Применение понятия обобщенного тяжелого волчка в случае групп $SO(n)$ и $SDiffD$ (1267).
 - 5.1. Многомерный тяжелый волчок. 5.2. Обобщенный тяжелый волчок с конфигурационным пространством — группой $SDiffD$.
6. Фундаментальные инварианты обобщенного тяжелого волчка (1269).
 - 6.1. Первые интегралы движения многомерного тяжелого волчка. 6.2. Что такое потенциальный вихрь? 6.3. Прямая гидродинамическая интерпретация уравнений Эйлера – Пуассона и их инвариантов.
7. Обобщенная магнитогидродинамическая система. Что такое инварианты Вольтера? (1271).
 - 7.1. Уравнения движения и их инварианты. 7.2. Применение к $SDiffD$ и $SO(3)$.
8. Обобщенное твердое тело в поле сил Кориолиса: механическая и гидродинамическая трактовки (1273).

9. Движения волчков Эйлера и Эйлера – Пуассона в поле сил Кориолиса как механические прототипы глобальных геофизических течений (1274).
 - 9.1. Движение баротропного волчка. 9.2. Квазигеострофическое приближение уравнений движения бароклинного волчка. 9.3. Сравнение квазигеострофических и точных движений бароклинного волчка в зависимости от параметра стратификации при малых начальных числах Россби.
10. Движение бароклинного волчка под влиянием внешнего нагрева, трения и бета-эффекта (1281).
 - 10.1. Учет трения и внешнего нагрева. 10.2. "Игрушечные" циркуляции Хэдли и Россби. 10.3. Влияние угла наклона оси общего вращения относительно силы тяжести.
11. Заключение (1286).

Список литературы (1287).

1. Введение

Еще в 1879 г. английский гидродинамик Гринхилл [1] обратил внимание на то, что уравнения Эйлера движения твердого тела с неподвижной точкой строго описывают течение идеальной однородной несжимаемой жидкости внутри эллипсоида в классе пространственно линейных полей скорости. Это впоследствии широко использовалось при изучении движения твердых тел с полостями, заполненными жидкостью (см., например, [2 – 5]). Оставим, однако, в стороне утилитарное значение работы Гринхилла. Для нас важно другое: она наводит на мысль, что механические и гидродинамические уравнения Эйлера обладают общими фундаментальными симметриями, которые должны проявиться в общности свойств их решений.

Ф.В. Должанский. Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН,
119017 Москва, пер. Пыжевский 3, Российская Федерация
Тел. (495) 951-84-80
E-mail: dolzhan@ifaran.ru

Статья поступила 22 декабря 2004 г.,
после доработки 25 августа 2005 г.

Почти столетие спустя эта идея была реализована В.И. Арнольдом [6] (см. также более доступные публикации [7, 8]), который сконструировал уравнения движения твердого тела для произвольной группы Ли, включающие в себя механические и гидродинамические уравнения Эйлера как частные случаи. Эта конструкция, названная Арнольдом обобщенным твердым телом (ОТТ), позволила ему дать механические трактовки циркуляционной теоремы Кельвина и теоремы Рэлея об устойчивости двумерного течения идеальной однородной несжимаемой жидкости, профиль скорости которого не имеет точки перегиба. Оказывается, что закон сохранения момента импульса в определенном смысле является механическим прообразом циркуляционной теоремы Кельвина, а теоремам Эйлера об устойчивости вращений твердого тела вокруг его длинной и короткой главных осей инерции соответствует в гидродинамике упомянутая теорема Рэлея. Эти результаты, слегка приоткрывающие тайны мироздания и доставляющие, кроме того, эстетическое удовольствие, в свою очередь наводят на мысль, что существуют другие нетривиальные свойства механических систем, которые могут быть перенесены на гидродинамические объекты, по крайней мере, если речь идет о течениях глобального масштаба.

Настоящий обзор целиком посвящен затронутой проблеме. При изложении материала приходится привлекать основные понятия теории групп Ли и их представлений, без применения которых строгое доказательство аналогий между гидродинамическими и механическими системами становится практически невозможным. К сожалению, это, по-видимому, может затруднить восприятие материала некоторыми читателями. Поэтому в разделе 2 инвариантной форме записи уравнений Эйлера движения классического гироскопа предшествует описание этого движения и вывод соответствующих уравнений в терминах хорошо известной физикам группы собственных вращений трехмерного евклидова пространства, что затем легко обобщается — распространяется на случай произвольной группы Ли. Уместно также заметить, что математики уже довольно давно используют теоретико-групповой подход для исследования фундаментальных гидродинамических проблем (см., в частности, упомянутую выше книгу [8], в которой такой подход применяется для изучения структурных свойств решений гидродинамических уравнений). Поэтому, быть может, настало время более настойчиво внедрять теоретико-групповые понятия и подходы в теоретическую гидродинамику, которая по сути является частью теории поля, именно на них и основанной.

Понятие ОТТ расширяется для описания движения во внешних силовых полях со скалярным и векторным потенциалами, а также в поле сил Кориолиса. В итоге формулируются понятия обобщенного тяжелого волчка (ОТВ) и обобщенной магнитогиродинамической системы (ОМГДС), включающие в себя, с одной стороны, механические уравнения Эйлера — Пуассона движения тяжелого волчка и уравнения Кирхгофа движения твердого тела в потенциальном течении идеальной однородной несжимаемой жидкости [9] и, с другой стороны, уравнения Обербека — Буссинеска движения тяжелой жидкости и магнитной гидродинамики как частные случаи. Подчеркнем, что уравнения Эйлера — Пуассона и

уравнения Кирхгофа, подобно механическим уравнениям Эйлера, допускают прямую гидродинамическую трактовку: они строго описывают движения идеальной тяжелой жидкости и идеального жидкого проводника внутри эллипсоида в классе пространственно линейных полей скорости и соответственно температуры и магнитной напряженности.

На основе введенных ранее понятий показано [10], что механическими "прародителями" потенциального вихря (ПВ) [11–13] (в курсе Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица [14] эту величину называют инвариантом Эртеля), гидродинамической и магнитогиродинамической (МГД) спиральностей [15–17] являются соответственно проекция момента количества движения тяжелого волчка на направление силы тяжести, квадрат момента количества движения классического гироскопа и проекция суммарного момента импульса на направление суммарного импульса в системе твердое тело — жидкость.

Теорема Кельвина для векторного потенциала магнитного поля и инвариантность магнитной спиральности [17] следуют из неподвижности магнитного поля относительно жидкости, подобно тому, как из постоянства кинетического момента классического гироскопа в пространстве следует сохранение квадрата этой величины в системе координат, "вмороженной" в тело.

Следующий шаг связан с построением механических прототипов медленных многообразий вращающейся жидкости. Выбор именно вращающейся жидкости для сопоставления свойств гидродинамических и механических систем не случаен, поскольку квазигеострофическое приближение ее уравнений движения естественно выделяет течения глобального масштаба, которые, как и следовало ожидать, имеют наибольшее сходство с соответствующими движениями твердого тела с неподвижной точкой. Проблема существования и устойчивости квазигеострофических многообразий, впервые затронутая Обуховым [13], активно обсуждается в современной гидродинамической литературе (см., например, [18–21] и цитируемые там работы). В разделах 9 и 10 квазигеострофические траектории модельных уравнений сравниваются с их точными решениями, которые совпадают с точными частными решениями исходных гидродинамических уравнений.

Уравнения движения обычного гироскопа при отсутствии гравитации в поле сил Кориолиса интерпретируются как модель баротропных течений вращающейся жидкости. При малых числах Россби модель описывает медленные прецессии волчка в направлении, противоположном общему вращению, причем проекция кинетического момента на направление общего вращения сохраняется с точностью до квадрата числа Россби. Эти особенности движения волчка напоминают поведение атмосферных планетарных волн, переносящих момент импульса на запад, и приближенную инвариантность квазигеострофического ПВ баротропных геофизических течений, выражаемую уравнением Чарни — Обухова, которое также справедливо с точностью до квадрата числа Россби.

Устойчивость медленных бароклиных многообразий относительно глобальных возмущений квазигеострофического равновесия иллюстрируется сравнением точных и квазигеострофических решений модельных уравнений. В разделе 9 показано, что квазигеострофическое приближение уравнений движения тяжелого волчка

в поле сил Кориолиса совпадает с механическими уравнениями Эйлера, записанными в терминах вертикальной завихренности и компонент термического ветра, т.е. главных характеристик глобальных бароклинных геофизических течений, а параметр стратификации входит в уравнения как заданный (аналогично обстоит дело для квазигеострофического приближения уравнений движения бароклинной атмосферы). Принципиальный результат состоит в том, что точные фазовые траектории "знают" о существовании медленного многообразия, даже когда движение становится сильно агеострофическим под влиянием инерционно-гравитационных колебаний большой амплитуды. Подобная ситуация имеет место при взаимодействии планетарных и инерционно-гравитационных волн, описываемых редуцированными уравнениями теории вращающейся мелкой воды [19]. Медленное многообразие представляет собой своеобразное двустороннее кривое зеркало, от которого траектории отражаются, пока параметр стратификации не превышает некоторого критического значения. Когда параметр стратификации достигает критического значения, траектории пробивают и полностью разрушают зеркало, и движение становится хаотическим.

Раздел 10 посвящен изучению "игрушечной" общей циркуляции атмосферы (ОЦА), которая описывается уравнениями движения гидродинамического тяжелого волчка в поле сил Кориолиса с учетом диссипации, внешнего горизонтально неоднородного термического привода (имитирующего разность температур экватор–полюс) и наклона оси общего вращения относительно силы тяжести. Трение учитывается включением в уравнения движения линейных по скорости членов, имитирующих влияние пограничного слоя Экмана, а внешний привод рассчитывается по формуле Ньютона, согласно которой притоки тепла пропорциональны отклонениям температуры от ее некоторого фонового распределения.

Обнаружено, что стационарные квазигеострофические решения модельных уравнений воспроизводят энергетический цикл и свойства устойчивости (включая асимптотику нижней ветви диаграммы устойчивости) фундаментальных геофизических режимов Хэдли и Россби, наблюдаемых в естественных условиях и лабораторных аналогах ОЦА. Квазигеострофическое приближение модели с учетом наклона оси вращения относительно силы тяжести совпадает со слегка обобщенной широко известной стохастической системой Э.Н. Лоренца [22] (см. также работу [18], в которой показано, что квазигеострофическим приближением редуцированных уравнений теории вязкой мелкой воды является упомянутая стохастическая модель Э.Н. Лоренца). Поэтому особое внимание в разделе 10 уделяется сопоставлению квазигеострофических странных аттракторов с соответствующими точными модельными решениями. Сравнение показало, что наклон оси вращения, действительно, при определенных условиях способствует стохастизации, а следовательно, и непредсказуемости фазовых траекторий. Необходимо, однако, отметить, что при изменении знака угла наклона оси вращения изменяется и механизм стохастизации (система не инвариантна относительно знака угла наклона оси вращения), который может иметь другое, отличное от аттрактора Э. Лоренца, происхождение. Подчеркнем, что перечисленные свойства глобальных геофизических течений

получены исходя исключительно из соображений симметрии на основе одной-единственной игрушечной модели движения вращающейся тяжелой жидкости без конкретизации граничных условий, геометрии и других особенностей системы.

2. Конструкция Арнольда обобщенного твердого тела

Движение твердого тела с неподвижной точкой можно трактовать в терминах вращений системы координат (СК), "замороженной" в тело, относительно СК, неподвижной в пространстве. Начала обеих СК совпадают с неподвижной точкой. Совокупность таких вращений образует группу $SO(3)$, которую можно рассматривать в качестве пространства обобщенных координат. В таких случаях говорят, что конфигурационным пространством твердого тела является группа собственных вращений евклидова пространства. В терминах эйлеровых углов θ, φ, ψ (рис. 1) любое вращение $g \in SO(3)$ задается ортогональной матрицей

$$g(\theta, \varphi, \psi) = B_\varphi C_\theta B_\psi,$$

где B_φ, C_θ — матрицы, описывающие вращения вокруг неподвижных осей Z и X соответственно на углы φ и θ , $B_\psi = B_{\varphi=\psi}$,

$$B_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Напомним, что уравнения Эйлера движения классического гироскопа записываются через угловые скорости в теле (измеренные в подвижной СК), которые в терминах эйлеровых углов задаются равенствами [23] (спроектируйте угловые скорости $\dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}$ на подвижные оси $x_1,$

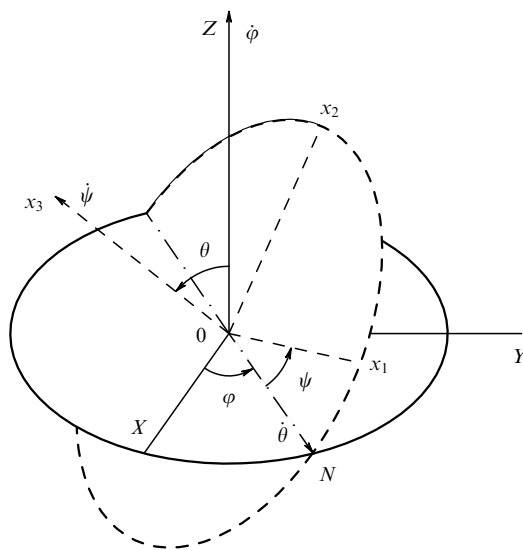


Рис. 1. Эйлеровы углы θ, φ, ψ , определяющие ориентацию осей x_1, x_2, x_3 системы координат, движущейся относительно неподвижной системы (X, Y, Z) . $0N$ — линия узлов [23].

x_2, x_3 , см. рис. 1):

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \omega_3 \mathbf{e}_3, \\ \omega_1 &= \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \\ \omega_2 &= \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi, \\ \omega_3 &= \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}.\end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — направляющие орты подвижной СК.

Проектируя $\dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}$ на неподвижные оси X, Y, Z , получаем компоненты угловой скорости в пространстве

$$\begin{aligned}\Omega &= \Omega_1 \mathbf{e}_x + \Omega_2 \mathbf{e}_y + \Omega_3 \mathbf{e}_z, \\ \Omega_1 &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ \Omega_2 &= -\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi + \dot{\theta} \sin \varphi, \\ \Omega_3 &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi},\end{aligned}$$

где $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ — направляющие орты неподвижной СК.

Пространство векторов трехмерного ориентированного евклидова пространства изоморфно пространству кососимметрических матриц третьего ранга. Изоморфизм в тензорных обозначениях устанавливается формулами $a_{ij} = -\varepsilon_{ijk} a_k$, $a_i = -\varepsilon_{ijk} a_{jk}/2$ ($i, j, k = 1, 2, 3$), согласно которым имеем взаимно однозначное соответствие

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{a},$$

при этом

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \Leftrightarrow [a, b], \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(\mathbf{a} * \mathbf{b}),$$

где $[,]$ означает операцию коммутирования, точка и знак умножения $\times$ — операторы обычного скалярного и векторного произведения векторов трехмерного евклидова пространства соответственно, а звездочка обозначает обычное произведение матриц.

Таким образом, под угловыми скоростями вращения твердого тела можно подразумевать как векторы трехмерного пространства, так и кососимметрические матрицы третьего ранга. Теперь непосредственным вычислением нетрудно убедиться в том, что если $g = g(t)$ — траектория твердого тела в конфигурационном пространстве, то

$$g^{-1} \dot{g} \doteq L_{g^{-1}} \dot{g} = \omega \Leftrightarrow \omega, \quad \dot{g} g^{-1} \doteq R_{g^{-1}} \dot{g} = \Omega \Leftrightarrow \Omega,$$

т.е. угловые скорости в теле и пространстве задаются линейными отображениями вектора $\dot{g}$ касательного пространства TG_g группы $SO(3)$ в точке g в алгебру Ли группы $SO(3)$ — касательное пространство $TG_e \doteq \hat{g}$ в единице группы — соответственно левым $L_{g^{-1}}$ и правым $R_{g^{-1}}$ сдвигами. Сами же угловые скорости, как легко проверить, связаны соотношением

$$\Omega = R_{g^{-1}} L_g \omega \doteq \operatorname{Ad}_g \omega,$$

где Ad_g называется присоединенным представлением группы $SO(3)$, $\operatorname{Ad}_{gh} = \operatorname{Ad}_g \operatorname{Ad}_h$ для любых $g, h \in SO(3)$.

Предпоследние равенства можно принять за определения угловых скоростей в теле и пространстве для классического гироскопа. Для построения динамической

системы, аналогичной волчку Эйлера, на произвольной группе Ли G приведенные выше соотношения следует представить в инвариантной форме, справедливой для группы Ли, элементами которой не обязательно служат линейные операторы. В этом случае

$$\omega = L_{g^{-1}*} \dot{g} \in \hat{g}, \quad \Omega = R_{g^{-1}*} \dot{g} \in \hat{g}, \quad (2.1)$$

где L_{g*} и R_{g*} — линейные отображения касательных пространств, индуцированные левыми L_g и правыми R_g сдвигами, $\hat{g}$ — алгебра Ли группы Ли G (касательное пространство в единице группы). Присоединенное представление, отображающее алгебру Ли в себя, записывается теперь в виде

$$\begin{aligned}\operatorname{Ad}_g &= (R_{g^{-1}} L_g)_{*e} : \hat{g} \rightarrow \hat{g}, \\ \Omega &= \operatorname{Ad}_g \omega.\end{aligned} \quad (2.2)$$

Дальнейшее рассмотрение характеристик движения классического гироскопа проводится в инвариантной форме, справедливой для произвольной группы Ли.

Кинетическая энергия твердого тела не зависит от его положения в пространстве и задается положительно определенной формой от угловых скоростей в теле:

$$E = \frac{1}{2} I_{ij} \omega_i \omega_j \doteq \frac{1}{2} (I\omega, \omega),$$

где I — не зависящая от времени симметрическая матрица, называемая тензором моментов инерции относительно подвижной СК. Эта форма задает на всей группе Ли левоинвариантную метрику согласно равенствам

$$E = \frac{1}{2} \langle \omega, \omega \rangle_e \doteq \frac{1}{2} (I\omega, \omega) \doteq \frac{1}{2} \langle \dot{g}, \dot{g} \rangle_g, \quad (2.3)$$

где $\langle, \rangle$ означает скалярное произведение на соответствующих касательных пространствах. Задание скалярного произведения на алгебре Ли эквивалентно заданию изоморфного отображения алгебры Ли $\hat{g}$ в коалгебру Ли $\hat{g}^*$ (пространство линейных форм от элементов алгебры Ли). Это отображение осуществляет оператор $I : \hat{g} \rightarrow \hat{g}^*$. Поэтому кинетический момент, или момент количества движения твердого тела, $m = I\omega$ следует рассматривать как элемент коалгебры Ли, а величину $(I\omega, \omega) = (m, \omega)$ — как значение линейной формы m на ω .

Поскольку значение кинетической энергии не зависит от выбора СК, то должны выполняться равенства

$$(m, \omega) = (M, \Omega) = (M, \operatorname{Ad}_g \omega) \doteq (\operatorname{Ad}_g^* M, \omega).$$

Здесь $\operatorname{Ad}_g^* : \hat{g}^* \rightarrow \hat{g}^*$ — оператор, дуальный оператору Ad_g и осуществляющий встречное отображение, индуцированное присоединенным представлением (ср. с (2.2)):

$$m = \operatorname{Ad}_g^* M, \quad \text{или} \quad M = \operatorname{Ad}_{g^{-1}}^* m. \quad (2.4)$$

Оператор Ad_g^* называется коприсоединенным представлением группы Ли, $\operatorname{Ad}_{gh}^* = \operatorname{Ad}_h^* \operatorname{Ad}_g^*$ для любых $g, h \in G$. Диаграмма операторов [8], действующих в касательных и кокасательных пространствах, приведена на рис. 2.

Оператор производной присоединенного представления в единице группы в направлении вектора $\xi \in \hat{g}$

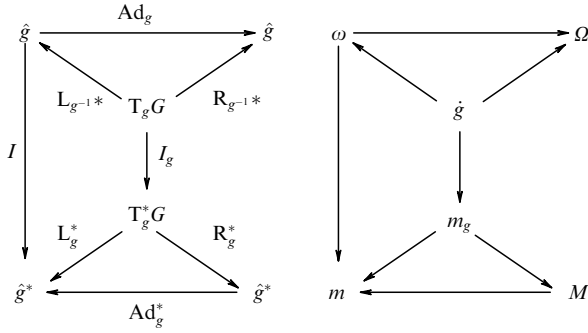


Рис. 2. Диаграмма отображений, действующих в касательных и кокасательных пространствах произвольной группы Ли G [8]. $T_g G$ и $T_g^* G$ — касательное и кокасательное пространства в точке g группы Ли G . Остальные обозначения даны в тексте.

обозначается через ad_ξ :

$$\text{ad}_\xi = \frac{d}{dt} \text{Ad}_{\exp(t\xi)} \Big|_{t=0}, \quad (2.5)$$

где $\exp(t\xi)$ — однопараметрическая подгруппа конфигурационного пространства, задаваемая вектором $\xi \in \hat{g}$. Отсюда следует, что для любых $\xi, \eta \in \hat{g}$

$$\text{ad}_\xi \eta = [\xi, \eta], \quad (2.6)$$

где $[\cdot, \cdot]$ — операция коммутирования в алгебре Ли.

Доказательство:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \text{Ad}_{\exp(t\xi)} \eta \Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt} \exp(t\xi) \eta \exp(-t\xi) \Big|_{t=0} = \\ &= \xi \eta - \eta \xi = [\xi, \eta]. \end{aligned}$$

Оператор производной коприсоединенного представления в единице группы в направлении вектора ξ

$$\text{ad}_\xi^* = \frac{d}{dt} \text{Ad}_{\exp(t\xi)}^* \Big|_{t=0} \quad (2.7)$$

есть оператор, дуальный ad_ξ , т.е.

$$(\text{ad}_\xi^* a, \eta) = (a, \text{ad}_\xi \eta) \quad (2.8)$$

для любых $a \in \hat{g}^*$ и $\xi, \eta \in \hat{g}$. Вводя обозначение $\text{ad}_\xi^* a \doteq \{\xi, a\}$, формулу (2.8) можно переписать в виде

$$(\{\xi, a\}, \eta) = (a, [\xi, \eta]). \quad (2.8a)$$

Уравнения движения твердого тела с конфигурационным пространством — произвольной группой Ли — теперь можно получить, используя выражение (2.3) для кинетической энергии в качестве функции Лагранжа и применяя принцип наименьшего действия. Согласно этому принципу движение ОТТ происходит по геодезическим конфигурационного пространства, в чем нет ничего удивительного, поскольку это есть движение по инерции. Однако для вывода уравнений движения мы поступим немного иначе. Принцип наименьшего действия, примененный в неподвижной СК, означает, что кинетический момент M неподвижен относительно пространства (см.,

например, [23]):

$$\dot{M} = 0. \quad (2.9)$$

Отсюда немедленно следуют уравнения движения ОТТ в подвижной СК. В самом деле, дифференцируя (2.4) по времени в направлении траектории тела с учетом (2.9), получаем

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \text{Ad}_{g^{-1}(t)} m \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \text{Ad}_{\exp(-t\omega)} \Big|_{t=0} m + \\ &+ \text{Ad}_{\exp(-t\omega)}^* \Big|_{t=0} \dot{m}. \end{aligned}$$

Тогда согласно (2.7)–(2.8a)

$$\dot{m} = -\text{ad}_{-\omega}^* m = \text{ad}_{\omega}^* m = \{\omega, m\}. \quad (2.10)$$

Уравнения движения в теле в терминах угловых скоростей принимают вид

$$\dot{\omega} = B(\omega, \omega), \quad (2.11)$$

где билинейная форма $B(\zeta, \eta)$ для любых $\zeta, \eta, \xi \in \hat{g}$ задается формулой [7, 8]

$$\langle [\zeta, \eta], \xi \rangle = \langle B(\xi, \zeta), \eta \rangle. \quad (2.12)$$

Доказательство (2.11). Для любого $\xi \in \hat{g}$

$$\begin{aligned} \langle \dot{\omega}, \xi \rangle &= \langle \dot{m}, \xi \rangle = \langle \{\omega, m\}, \xi \rangle = \langle m, [\omega, \xi] \rangle = \\ &= \langle \omega, [\omega, \xi] \rangle = \langle B(\omega, \omega), \xi \rangle. \end{aligned}$$

Применительно к $\text{SO}(3)$ уравнения (2.10) совпадают с уравнениями Эйлера движения классического гироскопа. В самом деле, в этом случае нетрудно показать, используя упомянутый изоморфизм пространств кососимметрических матриц третьего ранга и векторов трехмерного ориентированного евклидова пространства, что для любых $a \in \hat{g}^*$, $\zeta \in \hat{g}$

$$(a, \zeta) = \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\zeta}.$$

Пусть ζ — произвольная кососимметрическая матрица третьего ранга (элемент алгебры Ли группы $\text{SO}(3)$). Тогда согласно (2.10)

$$(\dot{m}, \zeta) = \{\omega, m\}, \zeta = (m, [\omega, \zeta]).$$

В терминах векторов трехмерного евклидова пространства последнее равенство записывается в виде

$$\dot{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\zeta} = \mathbf{m} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\zeta}) = (\mathbf{m} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \boldsymbol{\zeta}.$$

Отсюда в силу произвольности $\boldsymbol{\zeta}$

$$\dot{\mathbf{m}} = \mathbf{m} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{m} = I\boldsymbol{\omega}. \quad (2.13)$$

Важное замечание. В случае правоинвариантной метрики коммутатор и все линейные операции, связанные с ним, меняют знак. С физической точки зрения переход от левоинвариантной к правоинвариантной метрике означает, что подвижная и неподвижная сис-

темы координат меняются ролями, т.е. уравнения движения ОТТ записываются теперь относительно пространства, а не тела:

$$\dot{M} = -\{\Omega, M\}, \quad (2.14)$$

$$\dot{\Omega} = -B(\Omega, \Omega). \quad (2.15)$$

3. Что такое циркуляционная теорема Кельвина и инвариант спиральности?

Энергия (2.3) по построению есть первый интеграл движения уравнений (2.11) или (2.10). Неподвижность кинетического момента в пространстве (см. (2.9)) означает, что каждая компонента этого вектора в коалгебре Ли $\hat{g}^*$ сохраняется, что дает еще n независимых первых интегралов движения ОТТ (n — размерность пространства $\hat{g}^*$). С целью применения ОТТ к описанию бесконечномерных динамических систем В.И. Арнольд формулирует утверждение (2.9) в инвариантной форме в виде теоремы.

Теорема 1. *Орбиты коприсоединенного представления группы в дуальном к алгебре пространстве являются инвариантными многообразиями для потока в этом пространстве, заданного уравнениями Эйлера [7, 8].*

Доказательство. Момент $m(t)$ получается из $M(t)$ действием коприсоединенного представления, а M неподвижен в пространстве ($\dot{M} = 0$), что и требовалось доказать.

Сформулируем еще один важный для нас вывод, следующий из утверждения (2.9), который также можно представить в виде теоремы. Заметим предварительно, что если элемент $\xi \in \hat{g}$ неподвижен в пространстве, т.е.

$$\dot{\xi}_s = 0, \quad (3.1)$$

то в системе отсчета, жестко связанной с телом (индексы s и c происходят от англ. space и corpus соответственно),

$$\dot{\xi}_c = [\xi_c, \omega]. \quad (3.2)$$

Доказательство. Элементы алгебры Ли ξ_s и ξ_c связаны соотношением $\xi_s = \text{Ad}_{g(t)} \xi_c$, отсюда

$$0 = \dot{\xi}_s = \frac{d}{dt} \text{Ad}_{\exp(t\omega)} \xi_c \Big|_{t=0} = \text{ad}_\omega \xi_c + \dot{\xi}_c = [\omega, \xi_c] + \dot{\xi}_c.$$

Теорема 2. *При любом неподвижном в пространстве $\xi \in \hat{g}$ величина*

$$H_\xi = (m, \xi_c) \quad (3.3)$$

есть первый интеграл движения для потока, задаваемого системой (2.10), (3.2) на $\hat{g}^ \times \hat{g}$.*

Доказательство. Согласно (2.10) и (3.2)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (m, \xi_c) &= (\dot{m}, \xi_c) + (m, \dot{\xi}_c) = (\{\omega, m\}, \xi_c) + (m, [\xi_c, \omega]) = \\ &= (m, [\omega, \xi_c]) + (m, [\xi_c, \omega]) = 0. \end{aligned}$$

Теоремы 1 и 2 для ОТТ с конечномерным конфигурационным пространством эквивалентны и приводят к одинаковым следствиям. Это, однако, не относится к случаю бесконечномерных групп Ли. Рассмотрим для сравнения два "предельных" случая групп Ли, действующих

в трехмерном евклидовом пространстве: $\text{SO}(3)$ и $\text{SDiff}D$ — группу диффеоморфизмов ограниченной трехмерной области D с границей ∂D , сохраняющих элемент объема $\delta\mu(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in D$).

В первом случае (конфигурационное пространство обычного гироскопа) алгебру Ли и дуальное ей пространство можно отождествить с физическим пространством, в котором движется тело. (В действительности отождествляются шесть пространств, вообще говоря, с различной размерностью: R^3 , R^{3*} , $\hat{g}$, $\hat{g}^*$, а также TG_g и TG_g^* — касательное и кокасательное пространства в точке $g \in \text{SO}(3)$). В случае $\text{SO}(n)$ указанные касательное и кокасательное пространства имеют размерность $n(n-1)/2 \neq n$ при $n > 3$.)

В пространстве кинетических моментов орбитами коприсоединенного представления для механического волчка служат сферы с центром в начале координат:

$$m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = \text{const}, \quad (3.4)$$

т.е. из теоремы 1 следует сохранение квадрата кинетического момента для уравнений (2.13). То же вытекает из теоремы 2, поскольку ввиду отождествления пространств $(m, \xi) = \mathbf{m} \cdot \xi$ (точкой обозначено обычное скалярное произведение векторов трехмерного евклидова пространства) в качестве ξ можно взять неподвижный в пространстве кинетический момент. Поэтому $H_m = \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = \text{const}$, что совпадает с (3.4).

Алгебра Ли $\hat{g}(D)$ группы $\text{SDiff}D$ состоит из бездивергентных векторных полей в D , касающихся границы ∂D , со скалярным произведением

$$\langle \xi, \eta \rangle = \int_D \xi \cdot \eta \delta\mu(\mathbf{x}), \quad (3.5)$$

где точкой обозначено локальное скалярное произведение векторных полей $\xi = \xi(\mathbf{x})$ и $\eta = \eta(\mathbf{x})$ (см. [7, 8]). Роль коммутатора играют взятые с обратным знаком скобки Пуассона $-\{, \}_P$:

$$[\xi, \eta] = -\{\xi, \eta\}_P = (\eta \nabla) \xi - (\xi \nabla) \eta. \quad (3.6)$$

Энергия жидкости единичной плотности

$$E = \frac{1}{2} \int_D \mathbf{u}^2 \delta\mu, \quad (3.7)$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ — эйлерово поле скорости, измеренное относительно пространства, играет роль *обобщенной угловой скорости в пространстве* [7, 8]. Действительно (здесь я почти дословно воспроизвожу рассуждение Арнольда), пусть за время t течение жидкости осуществило диффеоморфизм $g(t)$, а скорость в данный момент задается векторным полем $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Тогда при условии, что τ мало, диффеоморфизм

$$g(t + \tau) = \exp(\mathbf{u}\tau) g(t) + o(\tau),$$

где $\exp(\mathbf{u}\tau)$ — однопараметрическая подгруппа, задаваемая полем $\mathbf{u}$. Дифференцируя по τ , находим $\mathbf{u} = \dot{g}g^{-1}$, т.е. поле скорости $\mathbf{u}$ получается из касательного к группе в точке g вектора $\dot{g}$ *правым сдвигом*.

Поэтому E задает на всей группе правоинвариантную метрику, а уравнения движения ОТТ с конфигурацион-

ным пространством $S\text{Diff}D$, т.е. уравнения идеальной несжимаемой однородной жидкости, записываются в виде:

$$\dot{\mathbf{u}} = -B(\mathbf{u}, \mathbf{u}), \quad \text{div } \mathbf{u} = 0. \quad (3.8)$$

Формула для $B(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ приводится в учебнике Арнольда [7] (см. также [8]). Поскольку ее вывод не совсем очевиден, проведем конкретные вычисления. Воспользуемся для этого определением билинейной формы B (см. (2.12)), которое применительно к данному случаю записывается как

$$\langle [\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c} \rangle = -\langle \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}_P, \mathbf{c} \rangle = \langle B(\mathbf{c}, \mathbf{a}), \mathbf{b} \rangle \quad (3.9)$$

для любых $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \hat{g}(D)$. Кроме того, нам понадобятся две формулы векторного анализа, справедливые для бездивергентных векторных полей:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b} = \text{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \quad (3.10)$$

$$\text{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \text{ rot } \mathbf{a} - \mathbf{a} \text{ rot } \mathbf{b}. \quad (3.11)$$

Тогда согласно (3.9)–(3.11)

$$\begin{aligned} \langle [\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c} \rangle &= \langle \text{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \mathbf{c} \rangle = \int_D \text{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \, \delta\mu = \\ &= \int_D (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \text{rot } \mathbf{c} \, \delta\mu + \int_D \text{div}[(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}] \, \delta\mu = \\ &= \int_D (\mathbf{b} \times \text{rot } \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} \, \delta\mu + \int_{\partial D} [(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}] \cdot \delta\sigma = \\ &= \int_D (\text{rot } \mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} \, \delta\mu + \int_{\partial D} [(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}] \cdot \delta\sigma = \\ &= \langle B(\mathbf{c}, \mathbf{a}), \mathbf{b} \rangle. \end{aligned}$$

Последний интеграл равен нулю из-за касания $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ границы ∂D . Отсюда следует, что для любых $\mathbf{c}, \mathbf{a} \in \hat{g}(D)$

$$B(\mathbf{c}, \mathbf{a}) = \text{rot } \mathbf{c} \times \mathbf{a} + \text{grad } \varphi, \quad (3.12)$$

поскольку для бездивергентного векторного поля $\mathbf{b}$, касающегося границы ∂D :

$$\int_D \mathbf{b} \cdot \text{grad } \varphi \, \delta\mu = \int_D \text{div}(\varphi \mathbf{b}) \, \delta\mu = \int_{\partial D} \varphi \mathbf{b} \cdot \delta\sigma = 0,$$

где φ — калибровочная функция, определяемая условием $B(\mathbf{c}, \mathbf{a}) \in \hat{g}(D)$, т.е. $B(\mathbf{c}, \mathbf{a})$ бездивергентно и касается границы.

Таким образом, первое из уравнений (3.8) совпадает с гидродинамическим уравнением Эйлера в форме Бернулли:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{u} \times \text{rot } \mathbf{u} - \text{grad } \varphi, \quad (3.13)$$

причем φ обычно представляют в виде функции Бернулли $\varphi = p + \mathbf{u}^2/2$, где p — давление.

Теперь возникает вопрос: что в гидродинамике играет роль кинетического момента в пространстве? Чтобы ответить на этот вопрос, строго говоря, надо предварительно выяснить, что такое гидродинамический оператор моментов инерции, а также, если мы хотим осуществить переход от описания в пространстве к описанию

в теле, т.е. от эйлера к лагранжеву описанию, то и что такое кинетический момент в теле $m = \text{Ad}_g^* M$. Ответы на последние два вопроса содержатся в книге [8] и требуют привлечения дополнительных теоретико-групповых сведений, рассмотрение которых в настоящем обзоре, на мой взгляд, не оправдано, во-первых, потому что обзор адресован широкому кругу физиков и гидродинамиков, а во-вторых, нас интересует лишь аналогия между механическими и гидродинамическими инвариантами.

Однако на первый вопрос можно ответить, обойдя возникшее затруднение. Достаточно вспомнить, что, согласно теории ОТТ с правоинвариантной метрикой, кинетический момент ОТТ неподвижен не в пространстве, а в теле, т.е. в данном случае неподвижен относительно жидкости. Это означает, что "силовые" линии кинетического момента, которых касается его векторное поле, движутся вместе с жидкостью или, что то же самое, они сами являются жидкими.

Для того чтобы силовые линии бездивергентного векторного поля являлись жидкими, необходимо и достаточно, чтобы само векторное поле подчинялось уравнению Гельмгольца (см. [24]):

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = (\mathbf{M}\nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{M} = \{\mathbf{M}, \mathbf{u}\}_P = -[\mathbf{M}, \mathbf{u}]. \quad (3.14)$$

Необходимость легко доказывается. Пусть $\delta \mathbf{l}$ — инфинитезимальный элемент жидкой линии (элемент, касательный ей). Тогда скорость изменения длины этого элемента равна разности скоростей на его концах:

$$\frac{d\delta \mathbf{l}}{dt} = (\delta \mathbf{V})\mathbf{u}, \quad \text{или} \quad \frac{\partial \delta \mathbf{l}}{\partial t} = (\delta \mathbf{V})\mathbf{u} - (\mathbf{u}\nabla)\delta \mathbf{l} = \{\delta \mathbf{l}, \mathbf{u}\}_P, \quad (3.14a)$$

что эквивалентно (3.14). Доказательство достаточности будет воспроизведено ниже.

Единственное векторное поле, удовлетворяющее уравнению Гельмгольца и согласующееся с уравнением Эйлера (3.13), есть завихренность $\mathbf{\Omega} = \text{rot } \mathbf{u}$, уравнение движения которой получается применением к (3.13) операции rot :

$$\frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial t} = \{\mathbf{\Omega}, \mathbf{u}\}_P. \quad (3.15)$$

Таким образом, в гидродинамике роль кинетического момента играет завихренность, силовые линии которой, задаваемые уравнениями

$$\frac{dx}{\Omega_x} = \frac{dy}{\Omega_y} = \frac{dz}{\Omega_z}, \quad (3.16)$$

неподвижны относительно жидкости.

Несжимаемость жидкости означает лагранжеву инвариантность элемента объема $\delta\mu = \delta \mathbf{l} \cdot \delta\sigma$, где $\delta \mathbf{l}$ — линейный жидкий элемент, $\delta\sigma$ — площадь ориентированного элемента поверхности, трансверсальной $\delta \mathbf{l}$:

$$\frac{d\delta\mu}{dt} = \frac{d}{dt}(\delta \mathbf{l} \cdot \delta\sigma) = 0. \quad (3.17)$$

Поскольку обе величины $\delta \mathbf{l}$ и $\mathbf{\Omega}$ удовлетворяют уравнению Гельмгольца, то величина

$$K = \mathbf{\Omega} \cdot \delta\sigma = \oint_C \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{l} \quad (3.18)$$

есть лагранжевы инвариант (C — граница $\delta\sigma$). Выражение (3.18) можно назвать инфинитезимальной формулировкой циркуляционной теоремы Кельвина. Очевидно, что для произвольного стягиваемого замкнутого жидкого контура C , на который натянута поверхность S , в силу теоремы Стокса величина

$$K = \int_S \Omega \cdot \delta\sigma = \oint_C \mathbf{u} \cdot \delta\mathbf{l} \quad (3.19)$$

также является лагранжевым инвариантом. Однако из уравнений движения следует, что циркуляция скорости сохраняется вдоль любого замкнутого жидкого контура, в том числе и нестягиваемого, например, охватывающего дырку в многосвязной области. Поэтому циркуляция скорости — понятие более широкое, чем завихренность, что является существенным для определения гидродинамического оператора инерции, которое и обсуждается в книге [8].

Важно следующее. Сохранение завихренности в терминах теоремы 1 означает, что образ орбиты коприсоединенного представления в алгебре Ли группы $\text{SDiff}D$ состоит из векторных полей скорости, изовихренных данному, и является инвариантным многообразием для потока, задаваемого уравнениями Эйлера движения идеальной жидкости с постоянной плотностью. Таким образом, в гидродинамике теорема 1 выражается в виде циркуляционной теоремы Кельвина, которая есть прямое следствие неподвижности кинетического момента $\text{rot} \mathbf{u}$ относительно жидкости и сохранения элемента объема.

Заметим, что из (3.14а) и (3.17) следует, что $\delta\sigma$ управляется уравнением

$$\frac{d\delta\sigma}{dt} = -\delta\sigma \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}}. \quad (3.20)$$

В самом деле, подставляя (3.14а) в (3.17) и переходя к тензорным обозначениям, получаем равенство (по одинаковым индексам проводится суммирование), эквивалентное (3.20):

$$\delta l_i \left(\delta \sigma_k \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{d\delta \sigma_i}{dt} \right) = 0.$$

Теперь нетрудно доказать, что, для того чтобы силовые линии бездивергентного векторного поля были жидкими, достаточно, чтобы само векторное поле удовлетворяло уравнению Гельмгольца. В самом деле, по определению силовых линий (см. (3.16)) элемент длины $\delta\mathbf{l}$ силовой линии также управляется уравнением Гельмгольца. Рассмотрим в некоторый начальный момент элемент объема $\delta\mu = \delta\mathbf{l} \cdot \delta\sigma$, где $\delta\sigma$ — элемент жидкой поверхности, трансверсальной элементу $\delta\mathbf{l}$ с центром в точке их пересечения. Тогда в силу того, что $\delta\mathbf{l}$ и $\delta\sigma$ удовлетворяют соответственно (3.14а) и (3.20), $\delta\mu$ — лагранжевы инвариант, т.е. жидкий элемент объема, следовательно, $\delta\mathbf{l}$ — жидкий элемент длины.

Кстати, отметим, что необходимым и достаточным условием неподвижности выделенной поверхности относительно жидкости (т.е. того, что поверхность тоже жидкая), является условие, что любой элемент поверхности $\delta\sigma$ удовлетворяет уравнению (3.20).

Обратимся теперь к теореме 2, которая применительно к рассматриваемому случаю с учетом правоинвариантности метрики и замечания, сделанного в разделе 2, формулируется следующим образом.

Теорема 2а (теорема 2 применительно к $\text{SDiff}D$). При любом неподвижном относительно жидкости эйлеровом векторном поле $\xi = \xi(\mathbf{x}, t) \in \hat{g}(D)$ величина

$$H_\xi = (\Omega, \xi) \doteq (\text{rot} \mathbf{u}, \xi) \quad (3.21)$$

есть первый интеграл движения для потока, задаваемого уравнениями (3.15) и

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -[\xi, \mathbf{u}] = \{\xi, \mathbf{u}\}_P. \quad (3.22)$$

Пусть поле $\Omega \doteq \text{rot} \mathbf{u}$ касается границы ∂D . В этом частном случае Ω можно рассматривать не только как элемент коалгебры Ли, но и как элемент алгебры Ли группы $\text{SDiff}D$, который мы и берем в качестве ξ . Тогда согласно (3.21) и (3.5)

$$H_\Omega = (\text{rot} \mathbf{u}, \text{rot} \mathbf{u}) = \langle \mathbf{u}, \text{rot} \mathbf{u} \rangle = \int_D \mathbf{u} \cdot \text{rot} \mathbf{u} \delta\mu(\mathbf{x}). \quad (3.23)$$

Замечание. Напомним, что для произвольной алгебры Ли, на которой задано скалярное произведение, значение кокасательного вектора $a \in \hat{g}^*$ на касательном векторе $\xi \in \hat{g}$ равно скалярному произведению векторов η и ξ , где $\eta = I^{-1}a$ — элемент алгебры Ли, соответствующий a , т.е.

$$(a, \xi) = \langle I^{-1}a, \xi \rangle = \langle \eta, \xi \rangle \quad (3.24)$$

для любых $a \in \hat{g}^*$ и $\xi \in \hat{g}$. И хотя в данном случае определение оператора инерции I не было дано, зато нам известно, что кокасательному вектору $\text{rot} \mathbf{u} \in \hat{g}^*(D)$ в $\hat{g}(D)$ соответствует эйлерово поле скорости $\mathbf{u}$, на основании чего и применяется формула (3.24).

Первый интеграл движения (3.23) — это хорошо известный топологический инвариант спиральности [15, 16], характеризующий степень заузленности, или зацепления линий завихренности. Например, в случае всего двух однократно зацепленных вихревых колец с интенсивностями χ_1 и χ_2 значение $H_\Omega = \pm \chi_1 \chi_2$, где выбор знака зависит от того, движется ли каждое из вихревых колец в направлении завихренности своего "партнера" (+) или в противоположном направлении (−).

Таким образом, в отличие от случая конечномерных ОТТ в рассматриваемом случае теоремы 1 и 2а соответствуют различным первым интегралам движения: первая из них выделяет лагранжевы инвариант — циркуляцию скорости по замкнутому жидкому контуру, тогда как вторая — интегральный инвариант спиральности. Отсюда следует утверждение, которое можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 3. Пусть G_N — конечномерная подгруппа Ли группы $\text{SDiff}D$, которая снабжена правоинвариантной римановой метрикой, индуцированной правоинвариантной метрикой, заданной на $\text{SDiff}D$. Тогда интегральная спиральность H_Ω течения однородной несжимаемой жидкости, описываемого уравнениями движения ОТТ с конфигурационным пространством — группой G_N , либо равна нулю, либо не сохраняется в процессе движения.

Доказательство. Отрицание сделанного утверждения означало бы, что теоремы 1 и 2а не эквивалентны для ОТТ с конечномерным конфигурационным пространством. Теорема 3 не противоречит существованию инварианта (3.23), поскольку интегральная спиральность может не сохраняться, если поле завихренности не касается границы ∂D .

Проиллюстрируем сказанное с помощью хорошо известной трактовки механических уравнений Эйлера (см., например, [25, 26]). Группа $SO(3)$ изоморфна $P(3)$ — группе аффинных преобразований, отображающих поверхность разноосного эллипсоида в себя. Эта группа входит в $SDiffD$, если трехмерная область D ограничена поверхностью эллипсоида с главными полуосями a_1, a_2, a_3 :

$$S \doteq \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} - 1 = 0. \quad (3.25)$$

Поэтому группе $P(3)$ соответствуют точные частные решения гидродинамических уравнений Эйлера, которые строятся на классе линейных полей скорости

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_1 &= -\frac{a_2}{a_3} x_3 \mathbf{j} + \frac{a_3}{a_2} x_2 \mathbf{k}, \\ \mathbf{W}_2 &= -\frac{a_3}{a_1} x_1 \mathbf{k} + \frac{a_1}{a_3} x_3 \mathbf{i}, \\ \mathbf{W}_3 &= -\frac{a_1}{a_2} x_2 \mathbf{i} + \frac{a_2}{a_1} x_1 \mathbf{j}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

удовлетворяющих условиям ортогональности

$$\int_D \mathbf{W}_i \mathbf{W}_j \delta \mu = 0 \quad (i \neq j)$$

и касания границы $(\mathbf{W}_i \nabla)S = 0$, где $i, j = 1, 2, 3$. Само поле скорости представляется в виде

$$\mathbf{u}(x, t) = \sum_{k=1}^3 \omega_k(t) \mathbf{W}_k(\mathbf{x}), \quad (3.27)$$

где зависящие только от времени величины $\omega_k(t)$, называемые параметрами Пуанкаре, связаны с $\boldsymbol{\Omega} = \text{rot } \mathbf{u}$ соотношениями

$$\omega_k = \frac{a_1 a_2 a_3}{a_k I_k} \Omega_k, \quad (3.28)$$

$I_k = \sum_{s=1}^3 a_s^2 - a_k^2$ — ненулевые элементы диагональной матрицы $I, k = 1, 2, 3$.

После подстановки (3.27), (3.28) в уравнение Гельмгольца (3.15) обнаруживается, что параметры Пуанкаре удовлетворяют уравнениям

$$\dot{\mathbf{m}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{m}, \quad \mathbf{m} = I \boldsymbol{\omega}, \quad (3.29)$$

которые с точностью до замены $\boldsymbol{\omega} \rightarrow -\boldsymbol{\omega}$ совпадают с механическими уравнениями Эйлера (2.13). Необходимость указанной замены объясняется тем, что кинетические энергии твердого тела и жидкости задают на соответствующих им конфигурационных пространствах лево- и правоинвариантную метрики.

Вычислим теперь, чему соответствуют гидродинамические инварианты энергии

$$E = \frac{1}{2} \int_D \mathbf{u}^2 \delta \mu,$$

Кельвина (3.18) и спиральности (3.23) для рассматриваемого класса решений. После подстановки (3.27), (3.28) в выражение для энергии находим, что

$$E = \frac{1}{5} \mu E_m, \quad \mu = \frac{4}{3} \pi a_1 a_2 a_3, \quad E_m = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{m},$$

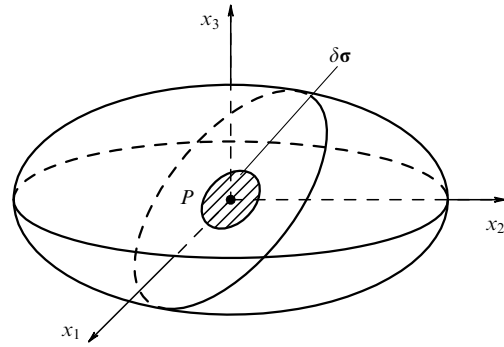


Рис. 3. Жидкий элемент $\delta \sigma$ плоскости P , проходящей через начало координат — центр эллипсоида, в процессе движения не меняет местоположения своего центра.

где μ — масса всей жидкости с единичной плотностью внутри эллипсоида, а E_m по форме совпадает с кинетической энергией механического волчка.

Для вычисления левой части равенства

$$\frac{dK}{dt} \equiv \frac{d \text{rot } \mathbf{u}}{dt} \cdot \delta \sigma + \text{rot } \mathbf{u} \cdot \frac{d \delta \sigma}{dt} = 0, \quad (3.30)$$

где

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla),$$

возьмем применительно к рассматриваемому течению в качестве $\delta \sigma$ элемент плоскости P , проходящей через начало координат — центр эллипсоида, как показано на рис. 3. Поскольку мы рассматриваем течение с пространственно постоянной завихренностью, которое сохраняет неподвижной жидкую частицу в начале координат, то выделенный элемент, рассматриваемый как принадлежащий жидкой поверхности, будет лишь деформироваться и поворачиваться в пространстве, не меняя местоположения своего центра. Это означает, что $\delta \sigma = \delta \sigma(t)$ зависит только от времени и не зависит от пространственных координат. Тогда результат подстановки (3.27), (3.28) в (3.20) и (3.30) записывается в виде

$$\dot{\mathbf{l}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{l}, \quad l_i = \frac{a_i \delta \sigma_i}{a_1 a_2 a_3} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (3.31)$$

$$\frac{d(\mathbf{m} \cdot \mathbf{l})}{dt} = 0. \quad (3.32)$$

Таким образом, для рассматриваемого класса течений инвариант Кельвина задается формулой:

$$K_m = \mathbf{m} \cdot \mathbf{l}, \quad (3.33)$$

где $\mathbf{l}$ удовлетворяет уравнению Пуассона (3.31), отражающему неподвижность $\delta \sigma$ относительно жидкости. Поскольку неподвижность $\boldsymbol{\Omega} = \text{rot } \mathbf{u}$ относительно жидкости выражается уравнением (3.29), формально тождественным (3.31), то заменяя $\mathbf{l}$ в (3.32) на $\mathbf{m}$, получаем, что инвариант $\mathbf{m}^2$ для гидродинамического волчка есть прямое следствие теоремы Кельвина, т.е. в конечном итоге теоремы 1 для ОТТ. Заметим, что в этом случае

$$\mathbf{m}^2 = \pi^{-2} (\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 + \Gamma_3^2),$$

где Γ_i — циркуляции скорости по границе i -го главного сечения эллипсоида, $i = 1, 2, 3$.

Инвариант спиральности, выделяемый теоремой 2а, в рассматриваемом случае равен нулю (иначе интегральная спиральность не сохранялась бы из-за несоблюдения граничных условий), что согласуется с теоремой 3. Важно подчеркнуть, что для механического волчка в отличие от гидродинамического инвариант m^2 следует из обеих теорем.

Отметим, что впервые гидродинамический волчок был реализован в лабораторных экспериментах с телами, имеющими эллипсоидальную полость, которая была заполнена ртутью, приводящейся в движение вращающимся магнитным полем [27].

4. Конструкция обобщенного тяжелого волчка

Понятие обобщенного тяжелого волчка (ОТВ), введенное в [28] (см. также [29]), есть естественное расширение понятия ОТТ на случай движения в потенциальном силовом поле. Указанное понятие вводится в полном соответствии с представлениями о движении обычного тяжелого волчка с учетом расслоений на произвольной группе Ли. Ниже дается определение ОТВ и приводится подробный вывод уравнений его движения применительно к группам $SO(n)$ и $SDiffD$.

Пусть G — группа Ли, действующая на многообразии N (например, $SO(3)$ действует на трехмерном евклидовом пространстве $\mathcal{R}^3$), т.е. задано отображение $f: G \times N \rightarrow N$ такое, что $f_{g_1 g_2}(x) = f_{g_1} f_{g_2}(x)$ для любых $g_1, g_2 \in G$ и любого $x \in N$. Скалярную функцию $\Phi(x)$ и неотрицательную функцию $\rho(x)$, заданные на многообразии N , будем называть соответственно *потенциалом в пространстве* и *плотностью в теле*, а относительно отображения f предполагается, что оно сохраняет плотность $\rho(x)$ и, следовательно, элемент объема $\delta\mu \subset N$.

Пусть, кроме того, на алгебре Ли $\hat{g}$ группы G задана положительно определенная квадратичная форма $E(\xi)$, $\xi \in \hat{g}$. Теперь поступим так, как если бы мы имели дело с реальным твердым телом с неподвижной точкой. Поместим ОТТ плотностью $\rho(x)$ с конфигурационным пространством — группой G — и кинетической энергией

$$E(g, \dot{g}) = E(L_{g^{-1}*} \dot{g}) = E(\omega) = \frac{1}{2} (I\omega, \omega) \quad (4.1)$$

во внешнее поле со скалярным потенциалом $\Phi(x)$. Функция $\varphi_g(x) = \Phi(f_g(x))$ является потенциалом в теле, поскольку точка с координатой x в теле имеет координату $f_g(x)$ в пространстве. Поэтому потенциальная энергия рассматриваемой динамической системы

$$U(g) = \int_V \rho(x) \varphi_g(x) d\mu(x) = \int_V \rho(x) \Phi(f_g(x)) d\mu(x) \quad (4.2)$$

есть функция, заданная на группе. Отсюда напрашивается следующее определение.

Определение ОТВ. Обобщенным тяжелым волчком называется динамическая система, конфигурационным пространством которой является произвольная группа Ли G , действующая на многообразии N , а лагранжиан задается в виде

$$L(g, \dot{g}) = E(g, \dot{g}) - U(g), \quad (4.3)$$

где первый и второй члены правой части определяются функциями (4.1) и (4.2) соответственно.

Уравнения ОТВ выводятся из принципа наименьшего действия и совпадают с уравнениями Эйлера – Лагранжа для экстремалей функционала $L(g, \dot{g})$. Сформулируем теперь функционал $L(g, \dot{g})$ только в терминах алгебры Ли $\hat{g}$. Траектория ОТВ $g(t)$ на G и ее образ $a(t)$ в алгебре Ли $\hat{g}$ связаны соотношением $g(t) = \exp a(t)$, где в случае матричных групп экспоненциальное отображение $\exp: \hat{g} \rightarrow G$ задается обычным рядом для экспоненты: $\exp a = e + a/1! + a^2/2! + \dots$, e — единичная матрица. В окрестности нуля алгебры Ли справедливо разложение [6]

$$\omega = \dot{a} + \frac{1}{2} [\dot{a}, a] + O(a^2), \quad (4.4)$$

поскольку

$$\begin{aligned} \omega &= g^{-1} \dot{g} = \exp\{-a(t)\} \left(\dot{a} + \frac{1}{2} \dot{a}a + \frac{1}{2} a\dot{a} + O(a^2) \right) = \\ &= (1 - a + O(a^2)) \left(\dot{a} + \frac{1}{2} \dot{a}a + \frac{1}{2} a\dot{a} + O(a^2) \right) = \\ &= \dot{a} + \frac{1}{2} \dot{a}a + \frac{1}{2} a\dot{a} - a\dot{a} + O(a^2) = \dot{a} + \frac{1}{2} [\dot{a}, a] + O(a^2). \end{aligned}$$

Подставляя $g(t) = \exp a(t)$ в (4.3) и учитывая (4.4), получаем следующее выражение для функции Лагранжа в терминах a и $\dot{a} \in \hat{g}$, справедливое в окрестности нуля алгебры Ли:

$$L(a, \dot{a}) = E(a, \dot{a}) - U(a). \quad (4.5)$$

Уравнение Эйлера – Лагранжа записывается в виде

$$\frac{d(\partial L / \partial \dot{a})}{dt} - \frac{\partial L}{\partial a} \equiv \frac{d(\partial E / \partial \dot{a})}{dt} - \frac{\partial E}{\partial a} + \frac{\partial U}{\partial a} = 0. \quad (4.6)$$

Вычисление левой части (4.6) выполняется при $t = 0$ в предположении, что $g(0) = e$. Это означает, что в выбранный момент времени подвижная СК совпадает с мгновенно неподвижной. Поэтому результат вычисления будет справедливым для любого момента времени:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{a}} &= \frac{\partial E}{\partial \dot{a}} = m - \frac{1}{2} \text{ad}_a^* m + O(a^2), \\ \frac{d(\partial L / \partial \dot{a})}{dt} \Big|_{t=0} &= \frac{d(\partial E / \partial \dot{a})}{dt} \Big|_{t=0} = \\ &= \dot{m} - \frac{1}{2} \text{ad}_a^* \dot{m} \Big|_{a=0} = \dot{m} - \frac{1}{2} \text{ad}_\omega^* m, \end{aligned}$$

так как $\dot{a} = \omega$ при $t = 0$. Отсюда

$$\frac{\partial E}{\partial a} \Big|_{t=0} = \frac{1}{2} \text{ad}_a^* m \Big|_{a=0} = \frac{1}{2} \text{ad}_\omega^* m.$$

Перед вычислением момента внешних сил $k_\varphi = -\partial U / \partial a$ напомним, что функция

$$\varphi(x, t) \doteq \varphi_{g(t)}(x) = \Phi(f_{g(t)}(x)) = \Phi(f_{\exp a(t)}(x)) \quad (4.7)$$

есть потенциал в теле. Поэтому согласно (4.7) производная функции Φ по направлению вектора $\xi \in \hat{g}$ при $a = 0$ равна

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial a}, \xi \right)_{a=0} = (d_x \varphi, f_* \xi) \doteq (d_x \varphi, \xi(x)), \quad (4.8)$$

где $d_x \varphi$ — градиент φ в точке $x \in N$, а

$$f_* \dot{\xi} \doteq \xi(x) = \left. \frac{df_{\text{exp} \xi}(x)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \quad (4.9)$$

является инфинитезимальной частью действия f , т.е. векторным полем на многообразии N .

Теперь нетрудно вычислить момент внешних сил:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial U}{\partial a}, \xi \right)_{a=0} &= \int_V \rho(x) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial a}, \xi \right)_{a=0} d\mu = \\ &= \int_V \rho(x) (d_x \varphi, \xi(x)) d\mu = -(k_\varphi, \xi). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Таким образом, уравнения Эйлера–Лагранжа, описывающие движение ОТВ в подвижной системе координат, представляются в виде

$$\dot{m} = \text{ad}_\omega^* m + k_\varphi, \quad m = I\omega, \quad (4.11)$$

где момент внешних сил задается формулой

$$(k_\varphi, \xi) = - \int_V \rho(x) (d_x \varphi, \xi(x)) d\mu, \quad (4.12)$$

справедливой для любого $\xi \in \hat{g}$. Система (4.11), (4.12) замыкается эволюционным уравнением для потенциала $\varphi(x, t)$:

$$\dot{\varphi} = (d_x \varphi, \omega(x)), \quad (4.13)$$

которое следует из определения (4.7) после дифференцирования его по времени при $t = 0$.

Движение ОТВ в неподвижной системе координат описывается уравнениями:

$$\dot{M} = K_\Phi, \quad K_\Phi = \text{Ad}_{g^{-1}}^* k_\varphi, \quad (4.14)$$

где K_Φ определяется формулой

$$(K_\Phi, \xi) = (\text{Ad}_{g^{-1}}^* k_\varphi, \xi) = - \int_V R(x, t) (d_x \Phi, \xi(x)) d\mu. \quad (4.15)$$

Здесь ξ — произвольный элемент алгебры Ли $\hat{g}$, неподвижный в пространстве, $\xi(x)$ — соответствующее ему векторное поле на многообразии N , а плотность тела в пространстве $R(x, t) = \rho(f_{g^{-1}}(x))$ по определению удовлетворяет уравнению

$$\dot{R}(x, t) = -(d_x R, \Omega(t)). \quad (4.16)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} (\dot{M}, \xi)_{t=0} &= \left. \frac{d(M, \xi)}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d(\text{Ad}_{g^{-1}(t)}^* m, \xi)}{dt} \right|_{t=0} = \\ &= \left. \frac{d(m, \text{Ad}_{g^{-1}(t)} \xi)}{dt} \right|_{t=0} = \\ &= (\dot{m}, \text{Ad}_{g^{-1}(t)} \xi)_{t=0} + \left(m, \frac{d(\text{Ad}_{g^{-1}(t)} \xi)}{dt} \right)_{t=0}. \end{aligned}$$

Далее,

$$\left. \frac{d(\text{Ad}_{g^{-1}(t)} \xi)}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d(\text{Ad}_{\text{exp}(-t\omega)} \xi)}{dt} \right|_{t=0} \xi + \dot{\xi} = -\text{ad}_\omega \xi,$$

так как $\dot{\xi} = 0$. Поэтому

$$(\dot{M}, \xi) = (\dot{m}, \xi) - (m, \text{ad}_\omega \xi),$$

и после подстановки (4.11) имеем

$$(\dot{M}, \xi) = (\text{Ad}_{g^{-1}(t)}^* k_\varphi, \xi).$$

Отсюда следуют уравнения (4.14). Поскольку ξ — вектор в пространстве, то плотность и потенциал в теле, входящие в (4.12), должны быть заменены соответствующими величинами, измеренными в пространстве:

$$\begin{aligned} \rho(x) &\rightarrow R(x, t) = \rho(f_{g^{-1}(t)} x), \\ \varphi(x, t) &= \Phi(f_{g(t)} x) \rightarrow \Phi(f_{g^{-1}} f_g x) = \Phi(x), \end{aligned}$$

что дает (4.15).

Для перехода от левоинвариантной к правоинвариантной метрике достаточно, как упоминалось в разделе 2, поменять местами подвижную и неподвижную системы координат и изменить знак коммутатора у всех операторов, линейно зависящих от него.

Тогда движение ОТВ с конфигурационным пространством — произвольной группой Ли, снабженной правоинвариантной метрикой, — описывается уравнениями:

$$\dot{M} = -\text{ad}_\Omega^* M + K_\Phi, \quad M = I\Omega, \quad (4.17)$$

где K_Φ и $R(x, t)$ задаются формулами (4.15) и (4.16) соответственно. В терминах угловых скоростей Ω в пространстве (4.17) записывается в виде

$$\dot{\Omega} = -B(\Omega, \Omega) + K(\Phi), \quad (4.17a)$$

где $B(\Omega, \Omega)$ вычисляется из (2.12), и по определению

$$\langle K(\Phi), \xi \rangle = (K_\Phi, \xi) \quad (4.18)$$

для любого $\xi \in \hat{g}$. Система (4.17)–(4.18) замыкается уравнением (4.16);

в теле

$$\dot{m} = k_\varphi, \quad (4.19)$$

где k_φ и $\varphi(x, t)$ определяются согласно (4.12) и (4.13).

5. Применение понятия обобщенного тяжелого волчка в случае групп $SO(n)$ и $S\text{Diff}D$

5.1. Многомерный тяжелый волчок

Пусть $\Phi(x)$ — потенциал однородного силового поля $g = -\nabla \Phi = \text{const}$, в котором находится n -мерное (nD) евклидово пространство $\mathcal{R}^n$. Обобщенный тяжелый волчок с конфигурационным пространством $SO(n)$ — группой собственных вращений пространства $\mathcal{R}^n$, — движение которого происходит под влиянием упомянутого силового поля, будем называть n -мерным тяжелым волчком ($n\text{DTV}$). Сила тяжести в теле зависит от времени и не зависит от пространственной координаты x : $-\nabla \varphi = \gamma(t)$, где $\varphi = \varphi(x, t)$ — потенциал в теле. Начало координат находится в неподвижной точке волчка.

Алгебра Ли группы $SO(n)$ состоит из кососимметрических матриц n -го ранга. Поэтому в рассматриваемом случае $\xi(\mathbf{x}) = \xi \mathbf{x}$, где правая часть содержит обычную свертку матрицы $\xi \in \hat{g}$ с вектором $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$. Таким образом, (4.12) можно записать в виде

$$(k_\varphi, \xi) = \int_V \rho(\mathbf{x}) \gamma \cdot \xi \mathbf{x} d\mu = \gamma \cdot \xi \mathbf{l}_0, \quad (5.1)$$

$$\mathbf{l}_0 = \int_V \rho(\mathbf{x}) \mathbf{x} d\mu, \quad (5.2)$$

где $\mathbf{l}_0$ — радиус-вектор центра инерции волчка (масса волчка предполагается равной единице), а точкой обозначено обычное скалярное произведение в $\mathcal{R}^n$, определяемое в любом ортонормированном базисе равенством

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

Скалярное произведение в алгебре Ли $\hat{g}$ группы $SO(n)$ для любых $\xi, \eta \in \hat{g}$ выражается формулой

$$\langle \xi, \eta \rangle = -\frac{1}{2} \text{tr} (\xi * \eta) \quad (5.3)$$

и отождествляет $\hat{g}$ и $\hat{g}^*$. Звездочка в (5.3) — обычное произведение матриц. Поэтому (5.1) можно переписать в виде

$$(k_\varphi, \xi) = \gamma \cdot \xi \mathbf{l}_0 = \langle \gamma \wedge \mathbf{l}_0, \xi \rangle. \quad (5.4)$$

Отсюда

$$k_\varphi = \gamma \wedge \mathbf{l}_0, \quad (5.5)$$

где $\gamma \wedge \mathbf{l}_0 \in \hat{g}$; символ $\wedge$ обозначает кронекеровское произведение векторов γ и $\mathbf{l}_0 \in \mathcal{R}^n$. В ортонормированной СК кронекеровское произведение задается равенством

$$(\gamma \wedge \mathbf{l}_0)_{ij} = \gamma_i l_{0j} - \gamma_j l_{0i}. \quad (5.6)$$

Вследствие отождествления $\hat{g}$ и $\hat{g}^*$ величина $\text{ad}_\xi^* a = -[\xi, a]$. В итоге уравнения движения n ДТВ принимают вид

$$\dot{m} = [m, \omega] + \gamma \wedge \mathbf{l}_0, \quad (5.7)$$

$$\dot{\gamma} = -\omega \gamma, \quad m = I\omega. \quad (5.8)$$

В случае $SO(3)$ любую кососимметрическую матрицу 3-го ранга можно отождествить с вектором трехмерного евклидова пространства, и наоборот, согласно формулам $\xi_i = -\varepsilon_{ijk} \xi_{jk}/2$, $\xi_{ij} = -\varepsilon_{ijk} \xi_k$. Тогда (5.7), (5.8) можно переписать как

$$\dot{\mathbf{m}} = \mathbf{m} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{l}_0 \times \gamma, \quad (5.9)$$

$$\dot{\gamma} = \gamma \times \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{m} = I\boldsymbol{\omega}, \quad (5.10)$$

что совпадает с классическими уравнениями Эйлера — Пуассона движения обычного тяжелого волчка.

5.2. Обобщенный тяжелый волчок с конфигурационным пространством — группой $SDiff D$
Применим теперь систему (4.17а), (4.18) и (4.16) к $SDiff D$, где D — ограниченная область трехмерного евклидова пространства. Пусть $R(\mathbf{x}, t)$ — плотность идеальной

несжимаемой стратифицированной жидкости, заполняющей область D . По определению несжимаемой жидкости $R(\mathbf{x}, t)$ является пассивным скаляром, т.е. сохраняется в процессе движения. В рассматриваемом случае роль обобщенной угловой скорости в пространстве играет бездивергентное эйлерово поле скорости $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ ($\Omega(t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$). Кинетическую энергию такого ОТВ определим равенством

$$E(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) = \frac{1}{2} \rho_0 \int_D \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) d\mu, \quad (5.11)$$

задающим правоинвариантную метрику на всей группе $SDiff D$. Средняя плотность

$$\rho_0 = \frac{\int_D R(\mathbf{x}, t) d\mu}{\int_D d\mu}$$

не зависит от времени вследствие сохранения суммарной массы жидкости. Соответствующее (5.11) скалярное произведение на алгебре Ли $\hat{g}(D)$ определяется равенством

$$\langle \xi(\mathbf{x}), \eta(\mathbf{x}) \rangle = \rho_0 \int_D \xi(\mathbf{x}) \cdot \eta(\mathbf{x}) d\mu$$

для любых $\xi(\mathbf{x}), \eta(\mathbf{x}) \in \hat{g}(D)$, т.е. бездивергентных векторных полей, касающихся границы ∂D .

Согласно (4.15) и (4.18)

$$\begin{aligned} (K_\Phi, \xi(\mathbf{x})) &= - \int_V R(\mathbf{x}, t) (d_x \Phi, \xi(\mathbf{x})) d\mu = \\ &= - \int_V R(\mathbf{x}, t) d_x \Phi \cdot \xi(\mathbf{x}) d\mu = \\ &= -\rho_0^{-1} \langle R(\mathbf{x}, t) d_x \Phi, \xi(\mathbf{x}) \rangle = \langle K(\Phi), \xi(\mathbf{x}) \rangle, \end{aligned}$$

кроме того, $(d_x \Phi, \xi(\mathbf{x})) = d_x \Phi \cdot \xi(\mathbf{x})$, поскольку на многообразии $N = \mathcal{R}^3$ задано обычное локальное скалярное произведение векторов, обозначенное здесь точкой. Отсюда

$$K(\Phi) = -\rho_0^{-1} R(\mathbf{x}, t) \nabla \Phi,$$

где обозначение градиента d_x заменено традиционным. Тогда уравнение (4.17а) для обобщенной угловой скорости с учетом (3.12) записывается в виде

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{u} \times \text{rot } \mathbf{u} - \nabla \varphi - \rho_0^{-1} R \nabla \Phi, \quad (5.12)$$

где φ — калибровочная функция, обеспечивающая бездивергентность правой части (5.12). Уравнение (5.12) замыкается условиями бездивергентности $\mathbf{u}$ и лагранжевой инвариантности $R(\mathbf{x}, t)$ (см. (4.16)):

$$\frac{\partial R}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) R = 0. \quad (5.13)$$

Принимая во внимание, что

$$\mathbf{u} \times \text{rot } \mathbf{u} = -(\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{2} \nabla u^2,$$

и делая формальную замену $-\nabla \Phi = \mathbf{g}$, $p/\rho_0 = \varphi - \nabla u^2/2$ и $R/\rho_0 = 1 - \beta T$, получаем хорошо известные уравнения Обербека — Буссинеска адиабатической конвекции несжи-

маемой жидкости (см., например, [14]):

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho_0} - \beta T \mathbf{g}, \quad (5.14)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) T = 0, \quad (5.15)$$

где p и β следует интерпретировать соответственно как давление и температурный коэффициент расширения жидкости, а E — как отклонение температуры от среднего значения $T_0 = \beta^{-1} = \text{const}$.

Уравнением для кинетического момента $M = \text{rot } \mathbf{u} \doteq \boldsymbol{\Omega}$ служит уравнение Фридмана (см., например, [24]):

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \boldsymbol{\Omega} - (\boldsymbol{\Omega} \nabla) \mathbf{u} = \beta \mathbf{g} \times \nabla T, \quad (5.16)$$

которое получается при применении операции rot к (5.14).

6. Фундаментальные инварианты обобщенного тяжелого волчка

6.1. Первые интегралы движения многомерного тяжелого волчка

Рассмотрим сначала первые интегралы движения n ДТВ, связанные с инвариантностью функции Лагранжа по отношению к преобразованиям $\mathcal{R}^n$, сохраняющим гравитационное поле $\mathbf{g} = -\nabla \Phi$ (см. раздел 5.1). Первые интегралы, которые по теореме Э. Нётер соответствуют однопараметрическим подгруппам $p(s) \subset \text{SO}(n)$ ($p(s)\mathbf{g} = \mathbf{g}$), сохраняющим лагранжиан, можно записать в явном виде.

Уравнения движения n ДТВ в пространстве записываются как

$$\dot{M} = \mathbf{g} \wedge \mathbf{L}(t), \quad \dot{\mathbf{L}}(t) = \boldsymbol{\Omega}(t) \mathbf{L}(t), \quad (6.1)$$

где $\mathbf{L}(t) = g(t)\mathbf{l}_0$ — радиус-вектор центра инерции n ДТВ в пространстве, $\boldsymbol{\Omega}(t) = \text{Ad}_{g(t)} \omega(t) = g \boldsymbol{\Omega} g^{-1}$ ($g = g(t)$ — траектория n ДТВ на $\text{SO}(n)$).

Пусть $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B} \in \mathcal{R}^n$ — векторы, неподвижные в пространстве и ортогональные $\mathbf{g}$. Тогда

$$P_m = \langle M, \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \rangle \quad (6.2)$$

есть первый интеграл движения n ДТВ, соответствующий подгруппе вращений пространства $\mathcal{R}^n$, которые оставляют нетронутыми подпространства, ортогональные $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$. В самом деле, согласно формуле (см. раздел 5.1) $\mathbf{A} \cdot \zeta \mathbf{B} = \langle \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}, \zeta \rangle$, справедливой для любой кососимметрической матрицы $\zeta \in \hat{g}$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{dP_m}{dt} &= \langle \dot{M}, \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \rangle = \langle \mathbf{g} \wedge \mathbf{L}(t), \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \rangle = \\ &= -\langle \mathbf{L}(t) \wedge \mathbf{g}, \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \rangle = -\mathbf{L}(t) \cdot (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \mathbf{g} = 0, \end{aligned}$$

поскольку из $\mathbf{A} \cdot \mathbf{g} = 0$ и $\mathbf{B} \cdot \mathbf{g} = 0$ вытекает $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \mathbf{g} = 0$.

Ясно, что число таких независимых инвариантов равно $C_{n-1}^2 = (n-1)(n-2)/2$, тогда как размерность конфигурационного пространства n ДТВ равна размерности $\text{SO}(n)$ плюс n , т.е. $n(n-1)/2 + n = (n+1)n/2$. В

системе координат, "вмороженной" в тело, $P_m = \langle m, \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \rangle$ при условии, что $\dot{\mathbf{a}} = -\omega \mathbf{a}$ и $\dot{\mathbf{b}} = -\omega \mathbf{b}$. Кроме того, уравнения движения (5.7) и (5.8) в теле имеют интеграл энергии $E = \langle m, \omega \rangle / 2 - \mathbf{l}_0 \cdot \boldsymbol{\gamma}$ (по построению) и $\gamma^2 = \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}$ вследствие неподвижности гравитационного поля в пространстве. При $n = 3$ существует единственный инвариант типа (6.2), означающий сохранение проекции момента количества движения классического тяжелого волчка на направление гравитации.

6.2. Что такое потенциальный вихрь?

Сопоставим теперь первые интегралы движения

$$E_m = \frac{1}{2} \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{l}_0, \quad P_m = \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\gamma}, \quad \gamma^2 = \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma} \quad (6.3)$$

уравнений Эйлера–Пуассона (5.9), (5.10) с инвариантами гидродинамических уравнений (5.12), (5.13)

$$E_h = \frac{1}{2} \rho_0 \int_D \mathbf{u}^2 \delta \mu - \int_D \mathbf{g} \cdot \mathbf{x} R \delta \mu, \quad P_h = \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla R, \quad (6.4)$$

где $R = R(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{g} = -\nabla \Phi$, $\boldsymbol{\Omega} \doteq \text{rot } \mathbf{u}$, $dP_h/dt = 0$, $dR/dt = 0$, $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{u} \nabla$.

Полная энергия, равная сумме кинетической и потенциальной энергий, сохраняется как функция Гамильтона ОТВ, не зависящая явно от времени. Поэтому E_m — механический прототип E_h по построению ОТВ. Инвариантность γ^2 есть следствие неподвижности гравитации в пространстве, тогда как лагранжева инвариантность $R(\mathbf{x}, t)$ означает неподвижность плотности в "теле" (жидкости). Принимая во внимание, что переход от левоинвариантной к правоинвариантной метрике означает обмен ролями между подвижной и неподвижной системами координат, γ^2 можно рассматривать как механический аналог лагранжева инварианта $R(\mathbf{x}, t)$.

Известно, что с точки зрения гидродинамики лагранжева инвариантность величины $P_h = \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla R$, называемой потенциальным вихрем, означает применимость циркуляционной теоремы Кельвина к замкнутым жидким контурам, целиком лежащим на поверхностях постоянной плотности, и наоборот. Действительно, эволюция элемента площади $\delta \boldsymbol{\sigma}_0$ ориентированной жидкой поверхности описывается уравнением (3.20), которое следует из сохранения элемента объема $\delta \mu = \delta \mathbf{l} \cdot \delta \boldsymbol{\sigma}_0$ (см. раздел 3). Дифференцируя (5.13), нетрудно показать, что $\nabla R(\mathbf{x}, t)$ также удовлетворяет уравнению (3.20). Поэтому лагранжева инвариантность $P_h = \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla R$ влечет за собой лагранжеву инвариантность

$$K_0 = \boldsymbol{\Omega} \cdot \delta \boldsymbol{\sigma}_0 = \oint_{C_0} \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{l} \quad (6.5)$$

(и наоборот), где C_0 — замкнутый жидкий контур, ограничивающий $\delta \boldsymbol{\sigma}_0$. Вообще говоря, без всякой связи с ПВ инвариантность K_0 следует из того, что течение по поверхности постоянной плотности является движением несжимаемой однородной жидкости, для которого и справедлива теорема Кельвина.

Инвариантность ПВ связана с инвариантностью потенциальной и кинетической энергий жидкости при следующих преобразованиях конфигурационного пространства $\text{SDiff} D$ [30]. Преобразования правого сдвига R_h : $g \rightarrow gh$, $g, h \in \text{SDiff} D$ есть преобразование лагранжевых переменных, т.е. приписанных жидким частицам.

Плотность $R(\mathbf{x}, t)$ — лагранжев инвариант, т.е. тоже движется вместе с жидкостью. Если $h \in \text{SDiff}D$ сохраняет распределение плотности: $R(\mathbf{x}, t) = R(h\mathbf{x}, t)$, то преобразование правого сдвига R_h не изменяет ни кинетическую энергию (в силу ее правоинвариантности), ни потенциальную энергию жидкости:

$$\begin{aligned} U(g) &= \int_D R(\mathbf{x}) \Phi(g\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x}) = \int_D R(h\mathbf{x}) \Phi(g h\mathbf{x}) d\mu(h\mathbf{x}) = \\ &= \int_D R(\mathbf{x}) \Phi(g h\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x}) = U(g h). \end{aligned}$$

Указанной группе симметрий лагранжиана $L(\mathbf{u}, g) = E(\mathbf{u}, g) - U(g)$ и соответствует ПВ. Поверхность постоянной плотности в динамике расслоенной несжимаемой жидкости играет роль эквипотенциальной поверхности. Поэтому $P_h = \Omega \cdot \nabla R$ — проекция гидродинамического кинетического момента $\mathbf{M} = \Omega \cdot \text{rot } \mathbf{u}$ на направление градиента плотности — сохраняется, как сохраняется $P_m = \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\gamma} = -\mathbf{m} \cdot \nabla \varphi$ — проекция механического кинетического момента на направление гравитации, т.е. градиента потенциала. Следовательно, с точки зрения теории ОТВ оба инварианта, P_h и P_m , имеют одинаковое происхождение.

Уместно особо отметить, что найденная аналогия в определенном смысле распространяется и на уравнения газовой динамики. Подобно тому, как идеальная неоднородная несжимаемая жидкость расслаивается на поверхности постоянной плотности, идеальная сжимаемая жидкость расслаивается на непересекающиеся изэнтропические поверхности, потому что жидкая частица, принадлежащая в начальный момент какой-либо из таких поверхностей, будет всегда оставаться на ней из-за лагранжевой инвариантности удельной энтропии $S = S(\mathbf{x}, t)$ (по определению идеальной сжимаемой жидкости). Поскольку теорема Кельвина выполняется для изэнтропических течений, справедливо следующее утверждение.

Применительно к замкнутому инфинитезимальному жидкому контуру C_0 , целиком принадлежащему изэнтропической поверхности $S(p, \rho) = S_0 = \text{const}$, где $p = p(\mathbf{x}, t)$ — давление, $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ — плотность жидкости, величина K_0 , задаваемая формулой (6.5), есть лагранжев инвариант.

Рассмотрим теперь вместе с поверхностью $S(\mathbf{x}, t) = S_0$ инфинитезимально близкую ей изэнтропическую поверхность $S(\mathbf{x}, t) = S_0 + \delta S$ и проведем через контур C_0 цилиндрическую поверхность, пересечение которой с дополнительной изэнтропической поверхностью также является замкнутым контуром (рис. 4). Торцы построенного таким образом жидкого элемента в процессе движения будут оставаться на соответствующих изэнтропических поверхностях. Тогда масса рассматриваемой жидкой частицы будет равна

$$\delta \mu = \rho h \mathbf{n} \cdot \delta \boldsymbol{\sigma}_0, \quad (6.6)$$

где $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности $S(\mathbf{x}, t) = S_0$, совпадающая по направлению с $\text{grad } S$, h — высота цилиндра.

В силу инфинитезимальной близости изэнтропических поверхностей

$$\delta S = \text{grad } S \cdot \mathbf{n} h. \quad (6.7)$$

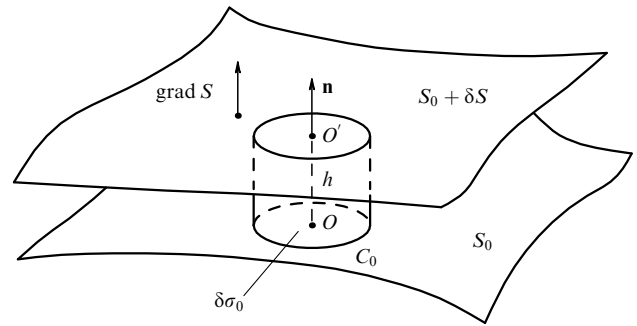


Рис. 4. Торцы жидкого цилиндра, расположенные на изэнтропических поверхностях $S(\mathbf{x}, t) = S_0$ и $S(\mathbf{x}, t) = S_0 + \delta S$ в начальный момент, будут оставаться на них в процессе всего движения.

Из соотношений (6.6) и (6.7) следует, что

$$\delta \boldsymbol{\sigma}_0 = \frac{\delta \mu}{\delta S} \frac{\text{grad } S}{\rho}. \quad (6.8)$$

После подстановки (6.8) в (6.5), учитывая сохранение в процессе движения δS и массы выделенного объема, состоящего из одних и тех же жидких частиц, находим, что инвариантность K_0 влечет за собой инвариантность газодинамического потенциального вихря

$$P_E = \frac{\text{rot } \mathbf{u} \cdot \text{grad } S}{\rho}, \quad (6.9)$$

носящего имя Эртеля [12], в 1942 г. впервые доказавшего сохранение этой величины непосредственно из уравнений движения.

Приведенное здесь исключительно изящное и физически прозрачное доказательство инвариантности газодинамического ПВ, вошедшее в учебники по геофизической гидродинамике (см., например, [31]), впервые было предложено Мораном [32] также в 1942 г., а затем, по видимому независимо, воспроизведено Чарни [33] в его знаменитой работе 1948 г., посвященной динамике крупномасштабных атмосферных движений. Это доказательство можно найти и в более поздних работах, например в [34, 35]. Гамильтонова трактовка инварианта Эртеля предложена Сэлманом [36–38].

Концепция ПВ и его трактовка на основе теоремы Кельвина применяются для обработки атмосферных наблюдательных данных и описания атмосферных движений в естественной системе координат, задаваемой поверхностями постоянной потенциальной завихренности и энтропии [39–43].

6.3. Прямая гидродинамическая интерпретация уравнений Эйлера–Пуассона и их инвариантов

Напомним, что группа $P(3)$ аффинных отображений эллипсоида в себя изоморфна $SO(3)$ и является подгруппой $\text{SDiff}D$, если D — область, ограниченная эллипсоидом (3.25). Поэтому уравнения Эйлера–Пуассона описывают точные частные решения уравнений Обербека–Буссинеска [26, 28]. Действительно, рассмотрим движение идеальной слабостратифицированной жидкости внутри эллипсоида (3.25) с главными полуосями $a_1 \neq a_2 \neq a_3 \neq a_1$ в классе пространственно линейных полей скорости (3.27) и тем-

пературы

$$T(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} \cdot \nabla T = \frac{\partial T}{\partial x_1} x_1 \mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial x_2} x_2 \mathbf{j} + \frac{\partial T}{\partial x_3} x_3 \mathbf{k}, \quad (6.10)$$

где ∇T не зависит от $\mathbf{x}$.

В терминах $\boldsymbol{\Omega} \doteq \text{rot } \mathbf{u}$ и $\mathbf{q} = \beta \nabla T$ уравнения (5.16) и (5.15) принимают вид

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + \{\mathbf{u}, \boldsymbol{\Omega}\}_{\mathbf{P}} = \mathbf{g} \times \mathbf{q}, \quad (6.11)$$

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{q} = -\mathbf{q} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}}, \quad (6.12)$$

где $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}_{\mathbf{P}} = (\mathbf{A} \nabla) \mathbf{B} - (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{A}$ — скобки Пуассона векторных полей $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, а правая часть (6.12) в тензорных обозначениях представляется в виде $-q_s \partial u_s / \partial x_i$.

Подставляя (3.27) и (6.10) при учете (3.26) в (6.11) и (6.12), легко показать, что вектор $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, задаваемый параметрами Пуанкаре, и вектор

$$\boldsymbol{\sigma} = \beta \left(a_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} \mathbf{i} + a_2 \frac{\partial T}{\partial x_2} \mathbf{j} + a_3 \frac{\partial T}{\partial x_3} \mathbf{k} \right) \quad (6.13)$$

удовлетворяют уравнениям

$$\dot{\mathbf{M}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M} + \mathbf{g} \mathbf{l}_0 \times \boldsymbol{\sigma}, \quad (6.14)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\sigma}. \quad (6.15)$$

Здесь $\mathbf{M} = I \boldsymbol{\omega}$, I — диагональная матрица с ненулевыми элементами $I_1 = a_2^2 + a_3^2$, $I_2 = a_3^2 + a_1^2$, $I_3 = a_1^2 + a_2^2$,

$$\mathbf{l}_0 = a_1 \cos \alpha_1 \mathbf{i} + a_2 \cos \alpha_2 \mathbf{j} + a_3 \cos \alpha_3 \mathbf{k},$$

где $\cos \alpha_i$ — направляющие косинусы ускорения силы тяжести относительно главных осей эллипсоида, $i = 1, 2, 3$.

Уравнения (6.14), (6.15) с точностью до формальной замены $\boldsymbol{\omega} \rightarrow -\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{M} \rightarrow -\mathbf{m}$, $\mathbf{g} \boldsymbol{\sigma} \rightarrow -\boldsymbol{\gamma}$ совпадают с уравнениями Эйлера–Пуассона (5.9), (5.10). Как уже упоминалось, необходимость такой замены объясняется "разноименностью" механической и гидродинамической метрик, задаваемых на соответствующих конфигурационных пространствах.

Первые интегралы системы (6.14), (6.15)

$$E = \frac{1}{2} \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{g} \mathbf{l}_0 \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad \Pi = \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad \Theta = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

выражают сохранение полной гидродинамической энергии E_h , лагранжеву инвариантность Π_h — ПВ — и лагранжеву инвариантность температуры (плотности, см. (6.4)) для рассматриваемого класса решений.

Интересно и важно отметить, что гидродинамический тяжелый волчок был физически реализован в исключительно тонких лабораторных экспериментах с конвекцией в эллипсоидальной полости [44].

Замечание. Первые интегралы движения n DTV (при $n > 3$) следует сравнивать с инвариантами уравнений движения n -мерной стратифицированной жидкости, т.е. ОТВ с конфигурационным пространством $\text{SDiff} D$, где D — ограниченная область n -мерного евклидова пространства $\mathcal{R}^n$. Динамика n -мерной идеальной однородной несжимаемой жидкости обсуждается в [8] и представляет, скорее, математический интерес.

7. Обобщенная магнитогидродинамическая система. Что такое инварианты Вольтера?

7.1. Уравнения движения и их инварианты

Рассмотрим обобщенное твердое тело, кинетическая энергия которого

$$E(\Omega) = \frac{1}{2} (M, \Omega) = \frac{1}{2} (I\Omega, \Omega) = \frac{1}{2} \langle \Omega, \Omega \rangle \quad (7.1)$$

есть положительно определенная квадратичная функция угловой скорости $\Omega = R_{g^{-1}*} \dot{g}$ в пространстве. Кинетическая энергия $E(\Omega)$ определяет правоинвариантную метрику на всем конфигурационном пространстве G ОТГ, а симметрический оператор инерции I отождествляет $\hat{g}$ и $\hat{g}^*$. Элемент $h \in \hat{g}$, неподвижный в теле, будем называть *напряженностью магнитного поля в теле*. Тогда $H = \text{Ad}_g h$ — *напряженность магнитного поля в пространстве*. По определению величина $J = IH$ — *плотность электрического тока в пространстве* и $j = \text{Ad}_g^* J$ — *плотность электрического тока в теле*.

Определение ОМГДС. Динамическая система с конфигурационным пространством — произвольной группой Ли G — и функцией Лагранжа

$$L(g, \dot{g}) = E(\Omega) - \frac{1}{2} (J, H) = \frac{1}{2} (M, \Omega) - \frac{1}{2} (J, H) \quad (7.2)$$

называется обобщенной магнитогидродинамической системой.

Согласно принципу наименьшего действия ОМГДС описывается следующими уравнениями движения [29]:

в пространстве

$$\dot{M} = -\text{ad}_\Omega^* M + \text{ad}_H^* J, \quad (7.3)$$

$$\dot{H} = [\Omega, H]; \quad (7.4)$$

в теле

$$\dot{m} = \text{ad}_h^* j, \quad \dot{h} = 0. \quad (7.5)$$

В терминах угловой скорости уравнение (7.3) записывается в виде

$$\dot{\Omega} = -B(\Omega, \Omega) + B(H, H), \quad (7.6)$$

где билинейный оператор $B(\xi, \eta)$ задается формулой (2.12).

Эти уравнения движения выводятся тем же способом, что и уравнения движения ОТВ в разделе 4. Подробное обсуждение ОМГДС и ее применений содержится в [8]. Вследствие неподвижности магнитного поля в теле почти в полном соответствии с разделом 3 справедливы следующие утверждения, аналогичные теоремам 1 и 2а.

Теорема 4. Орбиты присоединенного представления группы Ли G в ее алгебре Ли $\hat{g}$ являются инвариантными многообразиями для потока в этой алгебре, задаваемого уравнением (7.4).

Доказательство. Напряженность магнитного поля в пространстве $H(t)$ получается из напряженности в теле h действием присоединенного представления, а элемент h неподвижен в теле, что и требовалось доказать.

Теорема 5. Для любого неподвижного в теле элемента $a \in \hat{g}^*$ ($\dot{a} = 0$) величина

$$H_A = (A, H) \quad (7.7)$$

при $A = \text{Ad}_{g^{-1}}^* a$ есть первый интеграл движения системы, задаваемой (7.3), (7.4) и уравнением

$$\dot{A} = -\text{ad}_Q^* A. \quad (7.8)$$

Последнее утверждение следует из неподвижности a в теле (ср. с теоремой 2а).

Теорема 6. Величина

$$H_c = (M, H) \quad (7.9)$$

есть первый интеграл движения для потока, задаваемого уравнениями (7.3) и (7.4) на $\hat{g}^* \times \hat{g}$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \frac{d(M, H)}{dt} &= (\dot{M}, H) + (M, \dot{H}) = \\ &= -(\text{ad}_Q^* M, H) + (\text{ad}_H^* J, H) + (M, [\Omega, H]) = \\ &= -(M, [\Omega, H]) + (J, [H, H]) + (M, [\Omega, H]) = 0. \end{aligned}$$

Помимо упомянутых первых интегралов система (7.3), (7.4) по построению сохраняет полную энергию

$$E = \frac{1}{2} (M, \Omega) + \frac{1}{2} (J, H). \quad (7.10)$$

7.2. Применение к $\text{SDiff}D$ и $\text{SO}(3)$

Уравнения движения (7.6), (7.4) для ОМГДС с конфигурационным пространством $\text{SDiff}D$ с помощью формулы (3.12) записываются в виде уравнений магнитной гидродинамики для идеально проводящей невязкой несжимаемой жидкости с единичной плотностью:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \text{rot } \mathbf{u} \times \mathbf{u} = \text{rot } \mathbf{H} \times \mathbf{H} - \nabla \varphi, \quad (7.11)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\{\mathbf{u}, \mathbf{H}\}_P, \quad (7.12)$$

которые замыкаются условиями бездивергентности эйлеровых полей скорости $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ и напряженности магнитного поля $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{x}, t)$:

$$\text{div } \mathbf{u} = 0, \quad \text{div } \mathbf{H} = 0. \quad (7.13)$$

Здесь φ — уже упоминавшаяся функция Бернулли $\varphi = p + \mathbf{u}^2/2$ (см. раздел 3), p — давление, а $\{\cdot, \cdot\}_P$ — скобки Пуассона векторных полей (см. (3.6)).

Уравнение (7.12) есть не что иное, как уравнение Гельмгольца для $\mathbf{H}$, и означает неподвижность магнитного поля в теле ("вмороженность" в жидкость). Первые интегралы движения (7.10) и (7.9) (теорема 6) соответствуют полной МГД-энергии

$$E_h = \frac{1}{2} \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle = \frac{1}{2} \int_D (\mathbf{u}^2 + \mathbf{H}^2) \delta \mu \quad (7.14)$$

и инварианту кросспиральности [17]

$$H_c = \langle \mathbf{u}, \mathbf{H} \rangle = \int_D \mathbf{u} \cdot \mathbf{H} \delta \mu = \int_D \mathbf{u} \cdot \text{rot } \mathbf{A} \delta \mu, \quad (7.15)$$

$\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ — векторный потенциал магнитного поля.

Из теоремы 4, т.е. из неподвижности $\mathbf{H}$ относительно жидкости и сохранения элемента объема, следует, что орбитами присоединенного представления потока (7.12) служат изозавихренны поля векторного потенциала магнитного поля. Другими словами, величина

$$K_H = \mathbf{H} \cdot \delta \sigma = \oint_C \text{rot}^{-1} \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{l}, \quad (7.16)$$

где $\delta \sigma$ — площадь элемента ориентированной поверхности, ограниченного жидким контуром C , есть лагранжевы инвариант (теорема Кельвина для магнитного поля).

Если векторный потенциал $\mathbf{A} = \text{rot}^{-1} \mathbf{H}$ магнитного поля принадлежит алгебре Ли группы $\text{SDiff}D$ (этого можно достичь, используя калибровочную инвариантность), то напряженность $\mathbf{H}$ можно рассматривать как неподвижный относительно жидкости элемент коалгебры Ли, к которому применима теорема 5. В результате получаем инвариант спиральности магнитного поля

$$H_W = (\mathbf{H}, \mathbf{H}) = \langle \text{rot}^{-1} \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle = \int_D \text{rot}^{-1} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} \delta \mu, \quad (7.17)$$

который также связывают с именем Вольтера [17].

Замечание. Вообще говоря, сказанное в отношении инварианта (7.16) является, скорее, эвристическим соображением, чем строгим доказательством, поскольку определение тензора моментов инерции не было дано. Поэтому из того, что $\mathbf{A}$ есть элемент алгебры Ли группы $\text{SDiff}D$, т.е. бездивергентное векторное поле, касательное границе, строго говоря, еще не следует, что $\text{rot } \mathbf{A}$ есть элемент коалгебры $g^*(D)$. Строгий подход, изложенный в [8], основан на построении ОМГДС на полупрямом произведении $G \times \hat{g}^*$, а не просто на произвольной группе Ли G .

Применительно к группе $\text{SO}(3)$ уравнения (7.3), (7.4) записываются в виде

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{M} - \mathbf{H} \times \mathbf{J}, \quad \mathbf{M} = I \mathbf{\Omega}, \quad (7.18)$$

$$\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{H}, \quad \mathbf{J} = I \mathbf{H}, \quad (7.19)$$

а их первые интегралы движения, отвечающие гидродинамическим инвариантам (7.14)–(7.16), выражаются формулами:

$$E_m = \frac{1}{2} \mathbf{M} \cdot \mathbf{\Omega} + \frac{1}{2} \mathbf{J} \cdot \mathbf{H}, \quad (7.20)$$

$$H_{cm} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{H}, \quad H_{Wm} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}. \quad (7.21)$$

Уравнения (7.18), (7.19) с точностью до замены $\mathbf{\Omega} \rightarrow -\mathbf{\Omega}$ совпадают с уравнениями Кирхгофа [9] (см. также [8]) движения твердого тела, обтекаемого потенциальным потоком идеальной несжимаемой жидкости, неподвижной на бесконечности. Уравнения записаны в СК, неподвижной относительно тела. В такой механической трактовке $\mathbf{M}$ и $\mathbf{H}$ означают соответственно суммарные момент количества движения и импульс системы тело–жидкость, а первые интегралы движения — суммарную энергию, проекцию суммарного момента импульса на направление суммарного импульса и неподвижность суммарного импульса в пространстве. Соответствие второго из инвариантов (7.21) инварианту (7.16) становится очевидным, если вспомнить, что последний является прямым следствием неподвижности магнитного поля в жидкости.

Уместно также отметить, что подобно тому, как механические уравнения Эйлера и Эйлера–Пуассона описывают точные частные решения уравнений движения однородной и расслоенной жидкости соответственно, уравнения Кирхгофа описывают точные частные решения МГД-уравнений (см. [10, 26]). Система уравнений

$$\dot{\mathbf{M}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{M} + \mathbf{gl}_0 \times \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{H} \times \mathbf{J}, \quad \mathbf{M} = I\boldsymbol{\Omega}, \quad (7.22)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\sigma}, \quad (7.23)$$

$$\dot{\mathbf{H}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H}, \quad \mathbf{J} = I\mathbf{H} \quad (7.24)$$

описывает точные частные решения уравнений конвекции идеальной несжимаемой расслоенной и электропроводящей жидкости в магнитном поле.

8. Обобщенное твердое тело в поле сил Кориолиса: механическая и гидродинамическая трактовки

Сформулируем сначала уравнения движения обычного твердого тела с неподвижной точкой в СК, вращающейся с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_0$. Нужно только уточнить, о какой именно вращающейся системе отсчета идет речь. С теоретико-групповой точки зрения, как было показано в разделе 2, механические и гидродинамические системы различаются тем, что их кинетические энергии определяют на соответствующих конфигурационных пространствах "разноименные" метрики. Практически это означает, в частности, следующее. Давая гидродинамическую трактовку решениям механических уравнений, и наоборот, нужно учитывать, что отвечающие им подвижные и неподвижные системы отсчета меняются ролями. Например, лагранжеву описанию движения жидкости в механике соответствует описание в СК, неподвижной относительно пространства, а эйлерову — в системе отсчета, "вмороженной" в тело. Поэтому ввиду применения механических уравнений для эйлерова описания движения жидкости в поле сил Кориолиса нас интересует движение твердого тела в системе отсчета, которая вращается с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_0$ вокруг оси, неподвижной относительно тела, а не пространства. В противном случае уравнения движения механического и жидкого гироскопов окажутся неэквивалентными, хотя бы потому, что в теле угловая скорость вращения СК будет зависеть от времени и описываться уравнением Пуассона.

Воспользуемся известной формулой преобразования производных по времени для произвольного вектора $\mathbf{A}$ относительно неподвижной и вращающейся систем отсчета:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt} \right)_r + \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{A}, \quad (8.1)$$

где индексом r обозначена производная по времени во вращающейся системе отсчета.

Пусть $\boldsymbol{\Omega}$ и $\mathbf{M}$ — угловая скорость и кинетический момент тела относительно пространства, а $\boldsymbol{\omega}_r$ и $\mathbf{m}_r$ — угловая скорость и кинетический момент относительно новой системы отсчета, причем $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_r + \boldsymbol{\omega}_0$, $\mathbf{M} = \mathbf{m}_r + \mathbf{m}_0$ ($\mathbf{m}_0 = I\boldsymbol{\omega}_0$). Применяя формулу (8.1) и учитывая, что $d\mathbf{M}/dt = 0$ (закон сохранения момента коли-

чества движения), имеем

$$\left(\frac{d(\mathbf{m}_r + \mathbf{m}_0)}{dt} \right)_r + (\boldsymbol{\omega}_r + \boldsymbol{\omega}_0) \times (\mathbf{m}_r + \mathbf{m}_0) = 0. \quad (8.2)$$

Перейдем теперь в неподвижную относительно тела систему отсчета, которая вращается относительно первоначально выбранной с угловой скоростью $-\boldsymbol{\omega}_0$. Тогда, согласно (8.1)

$$\left(\frac{d(\mathbf{m}_r + \mathbf{m}_0)}{dt} \right)_r = \left(\frac{d(\mathbf{m}_r + \mathbf{m}_0)}{dt} \right)_c - \boldsymbol{\omega}_0 \times (\mathbf{m}_r + \mathbf{m}_0),$$

где индексом c обозначена производная по времени в неподвижной относительно тела системе координат. После подстановки последней формулы в (8.2) с учетом того, что в выбранной системе отсчета $\dot{\mathbf{m}}_0 = 0$, уравнения движения твердого тела с неподвижной точкой в поле сил Кориолиса записываются в виде (индексы r и c опущены):

$$\dot{\mathbf{m}} = (\mathbf{m} + \mathbf{m}_0) \times \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{m} = I\boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{m}_0 = I\boldsymbol{\omega}_0, \quad (8.3)$$

причем тензор моментов инерции I не зависит от времени.

Очевидно, что в инвариантной форме, т.е. применимой для произвольной группы Ли, снабженной лево- или правоинвариантной метрикой, уравнения (8.3), а также уравнение для обобщенной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ в обозначениях раздела 2 имеют вид

$$\dot{m} = \pm\{\omega, m + m_0\}, \quad m = I\omega, \quad m_0 = I\omega_0, \quad (8.4)$$

$$\dot{\omega} = \pm B(\omega, \omega + \omega_0), \quad (8.5)$$

где знаки $+$ и $-$ относятся соответственно к лево- и правоинвариантной метрикам.

Применим теперь понятие ОТТ в поле сил Кориолиса к группе $\text{SDiff}D$ с правоинвариантной метрикой. В этом случае $\omega = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ — эйлерово поле скорости, $m = \text{rot } \mathbf{u} = \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}, t)$ — завихренность, $\omega_0 = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t)$ — эйлерово поле скорости, соответствующее вращению жидкости с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}_0$, а $\{, \}_P = \{, \}_P$ — скобки Пуассона векторных полей, т.е. $\{\mathbf{a}(\mathbf{x}), \mathbf{b}(\mathbf{x})\}_P = (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b} - (\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a}$. Тогда

$$m_0 = \text{rot } \mathbf{u}_0 = \text{rot}(\boldsymbol{\Omega}_0 \times \mathbf{x}) = 2\boldsymbol{\Omega}_0,$$

и с учетом (3.12) уравнения (8.4) и (8.5), правая часть которых берется со знаком минус, записываются в виде уравнений движения вращающейся идеальной несжимаемой однородной жидкости:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + \{\boldsymbol{\Omega} + 2\boldsymbol{\Omega}_0, \mathbf{u}\}_P \equiv \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\boldsymbol{\Omega} - [(\boldsymbol{\Omega} + 2\boldsymbol{\Omega}_0)\nabla]\mathbf{u} = 0, \quad (8.6)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + 2\boldsymbol{\Omega}_0 \times \mathbf{u} = \mathbf{u} \times \text{rot } \mathbf{u} - \text{grad } \varphi, \quad (8.7)$$

где φ — функция Бернулли, включающая в себя потенциал центробежных сил.

Таким образом, коэффициент 2 при кориолисовом члене гидродинамических уравнений появляется из-за того, что завихренность, в терминах которой и записывается уравнение для обобщенного кинетического момента, равна удвоенной угловой скорости локального жидкого вращения.

9. Движения волчков Эйлера и Эйлера – Пуассона в поле сил Кориолиса как механические прототипы глобальных геофизических течений

Существование механических прототипов фундаментальных гидродинамических инвариантов наводит на мысль о существовании других характеристик механических движений, отражающих менее очевидные, но важные свойства движения жидкости. Наибольший интерес представляет предсказание на основе механических уравнений таких качественных особенностей поведения жидкости, которые трудно (если вообще возможно) обнаружить в результате численного интегрирования гидродинамических уравнений. Начинать, очевидно, следует с сопоставления механических движений с течениями глобального масштаба, поскольку в этом случае можно ожидать наибольшего сходства. Естественным фильтром, отсеивающим мелкомасштабные компоненты, является квазигеострофическое приближение уравнений движения вращающейся жидкости. Рассмотрим в связи с этим поведение классического гироскопа и тяжелого волчка в поле сил Кориолиса при различных числах Россби и, сопоставляя квазигеострофические и точные решения их уравнений движения, попытаемся понять, можно ли извлечь из такого сопоставления определенные выводы относительно глобальных геофизических течений [45].

Движение идеальной слабостратифицированной несжимаемой вращающейся жидкости описываются уравнениями (ср. с (5.14), (5.15))

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} + 2\mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho_0} - \mathbf{g} \beta T, \quad (9.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) T = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (9.2)$$

Соответствующие (9.1) и (9.2) уравнение Фридмана для $\mathbf{\Omega} = \operatorname{rot} \mathbf{u}$ и уравнение для $\mathbf{q} = \beta \nabla T$ записываются в виде (ср. (6.11), (6.12) и (8.6)):

$$\frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial t} + \{\mathbf{\Omega} + 2\mathbf{\Omega}_0, \mathbf{u}\}_P = \mathbf{g} \times \mathbf{q}, \quad (9.3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{q} = -\mathbf{q} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}}. \quad (9.4)$$

После подстановки (3.27) и (6.10) с учетом (3.26) в (9.3) и (9.4) получаем уравнения (ср. с (6.14), (6.15)):

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{\omega} \times (\mathbf{M} + 2\mathbf{M}_0) + \mathbf{g} \mathbf{l}_0 \times \boldsymbol{\sigma}, \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{\omega} \times \boldsymbol{\sigma}, \quad (9.5)$$

которые описывают движение жидкости внутри эллипсоида (3.25), вращающегося с постоянной угловой скоростью $\mathbf{\Omega}_0$ вокруг оси, проходящей через его центр. Здесь $\mathbf{M} = I\mathbf{\omega}$, $\mathbf{M}_0 = I\mathbf{\omega}_0$, причем компоненты $\mathbf{\omega}_0$ выражаются через компоненты $\mathbf{\Omega}_0$ из соотношений, аналогичных (3.28). Остальные обозначения такие же, как в разделе 6.3. В дальнейшем воспользуемся также соотношениями

$$\omega_1 = -\frac{a_3}{a_2} \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \omega_2 = \frac{a_3}{a_1} \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (9.6)$$

которые следуют из (3.26), (3.27).

С точностью до замены $\mathbf{\omega} \rightarrow -\mathbf{\omega}$, $2\mathbf{\omega}_0 \rightarrow -\mathbf{\omega}_0$ и $\boldsymbol{\sigma} \rightarrow -\boldsymbol{\gamma}$ система (9.5) совпадает с уравнениями движения тяжелого волчка в поле сил Кориолиса (ср. с (5.9), (5.10) с учетом (8.3)):

$$\dot{\mathbf{m}} = (\mathbf{m} + \mathbf{m}_0) \times \mathbf{\omega} + \mathbf{g} \mathbf{l}_0 \times \boldsymbol{\gamma},$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{\omega}, \quad \mathbf{m} = I\mathbf{\omega}, \quad \mathbf{m}_0 = I\mathbf{\omega}_0.$$

В отсутствие стратификации ($\mathbf{q} = \beta \nabla T = 0$) движение описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{\omega} \times (\mathbf{M} + 2\mathbf{M}_0), \quad (9.7)$$

которое будем называть *уравнением движения баротропного волчка*, а систему (9.5) — *уравнениями движения бароклинного волчка*.

9.1. Движение баротропного волчка

В терминах $\mathbf{M}_a = \mathbf{M} + 2\mathbf{M}_0$ уравнение (9.7) записывается в виде

$$\dot{\mathbf{M}}_a = \mathbf{\omega} \times \mathbf{M}_a. \quad (9.7a)$$

Умножая скалярно (9.7) на $\mathbf{\omega}$, а (9.7a) на $\mathbf{M}_a$, получаем два первых интеграла движения

$$2E = \mathbf{\omega} \cdot \mathbf{M} = I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2, \quad (9.8)$$

$$\mathbf{M}_a^2 = (M_1 + 2M_{01})^2 + (M_2 + 2M_{02})^2 + (M_3 + 2M_{03})^2, \quad (9.9)$$

существование которых для рассматриваемого класса решений означает сохранение кинетической энергии и выполнение циркуляционной теоремы Кельвина соответственно (см. раздел 3).

Используя инварианты (9.8) и (9.9), как в случае $\mathbf{\Omega}_0 = 0$ (см., например, [23]), можно получить представление о поведении баротропного волчка, не интегрируя его уравнений движения. В пространстве кинетических моментов траектории волчка образуются пересечениями "энергетических" эллипсоидов

$$\frac{M_1}{2EI_1} + \frac{M_2}{2EI_2} + \frac{M_3}{2EI_3} = 1$$

с "циркуляционными" сферами

$$\frac{(M_1 + 2M_{01})^2}{M_a^2} + \frac{(M_2 + 2M_{02})^2}{M_a^2} + \frac{(M_3 + 2M_{03})^2}{M_a^2} = 1$$

радиусом $M_a = |\mathbf{M} + 2\mathbf{M}_0|$ с центром в точке $-2\mathbf{M}_0$.

На рисунке 5 изображены типичные фазовые портреты динамической системы (9.7) для различных значений параметра Россби $\varepsilon = |\mathbf{M}|/|2\mathbf{M}_0|$, что представляет определенный интерес с гидродинамической точки зрения, поскольку на рис. 5 показан процесс постепенного исчезновения сложных элементов движения по мере усиления влияния сил Кориолиса. Видно, что с уменьшением ε , начиная с $\varepsilon = \infty$, происходит последовательное исчезновение сначала одной, а затем и другой гиперболической точки. Глобальным геофизическим течениям соответствуют малые числа Россби, при которых траектории баротропного волчка образуются практически пересечениями энергетического эллипсоида с семейством плоскостей, ортогональных вектору $\mathbf{M}_0$. Отсюда

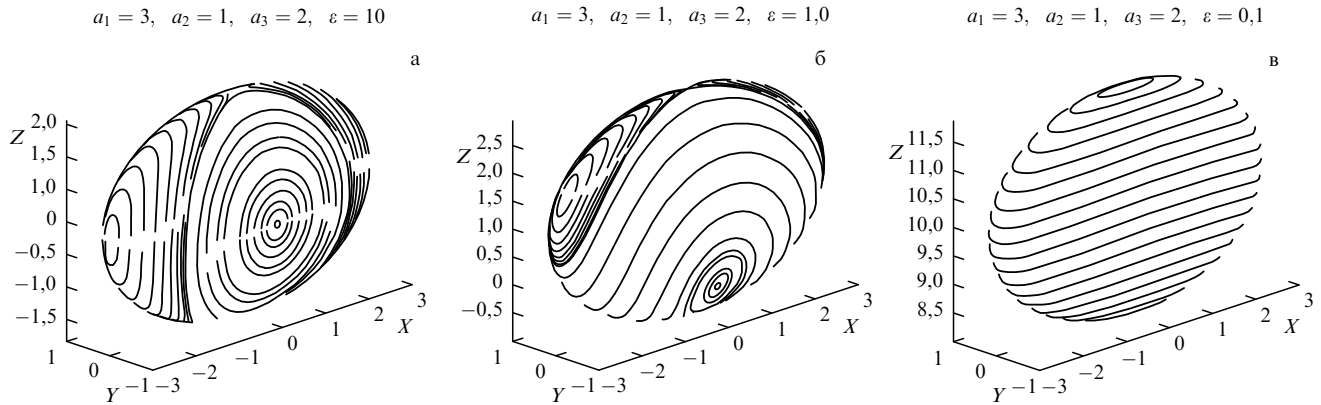


Рис. 5. Фазовые портреты баротропного волчка в пространстве кинетических моментов при различных значениях числа Россби.

следуют два вывода: а) фазовый портрет геофизических движений баротропного волчка состоит из замкнутых эллиптических траекторий и не содержит гиперболических точек; б) при малых числах Россби проекция кинетического момента баротропного волчка на направление $\mathbf{M}_0$ практически сохраняется (с точностью до $O(\varepsilon^2)$).

Движение по замкнутым траекториям проще всего описать в предположении, что направление $\mathbf{M}_0$ совпадает с направлением одной из главных осей эллипсоида, например, оси z или, что то же самое, x_3 . В этом случае (9.7) в координатной форме имеет вид:

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 &= (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 + 2I_3 \omega_0 \omega_2, \\ I_2 \dot{\omega}_2 &= (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 - 2I_3 \omega_0 \omega_1, \\ I_3 \dot{\omega}_3 &= (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2. \end{aligned} \quad (9.10)$$

При значении числа Россби $\varepsilon \ll 1$ величины $\dot{M}_3 = O(\varepsilon^2)$, $M_3 = M_{30} + O(\varepsilon^2)$, $M_{30} = \text{const} = O(\varepsilon)$, и уравнения движения в переменных $X = \sqrt{I_2} M_1$ и $Y = \sqrt{I_1} M_2$ с точностью до членов порядка ε^2 записываются в виде:

$$\dot{X} = 2 \frac{I_3}{\sqrt{I_1 I_2}} \omega_0 Y, \quad \dot{Y} = -2 \frac{I_3}{\sqrt{I_1 I_2}} \omega_0 X. \quad (9.11)$$

Отсюда следует, что конец вектора $\mathbf{M}$ или, что то же самое, $\mathbf{M}_a$ вращается по эллиптической траектории $M_1^2/I_1 + M_2^2/I_2 = \text{const}$ с угловой скоростью

$$\sigma = -2 \frac{I_3}{\sqrt{I_1 I_2}} \omega_0 = -2 \frac{a_1 a_2}{\sqrt{I_1 I_2}} \Omega_0, \quad (9.12)$$

т.е. в направлении, противоположном вращению системы отсчета.

Учитывая дуальную трактовку уравнений движения твердого тела с неподвижной точкой, эти прецессии баротропного волчка, а также приближенную инвариантность проекции его кинетического момента на направление $\mathbf{M}_0$ с известной долей скептицизма можно рассматривать в качестве механических прообразов соответственно процесса распространения планетарных волн, уносящих кинетический момент атмосферы в направлении, противоположном вращению Земли, и приближенной лагранжевой инвариантности вертикальной завихренности глобальных атмосферных движений, описываемой уравнением Чарни – Обухова [13, 33].

9.2. Квазигеострофическое приближение уравнений движения бароклинного волчка

Три первых интеграла движения системы (9.5)

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M} + g \mathbf{l}_0 \cdot \boldsymbol{\sigma}, \\ \Pi &= (\mathbf{M} + 2\mathbf{M}_0) \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad \Theta = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} \end{aligned} \quad (9.13)$$

выражают сохранение полной энергии

$$E_h = \frac{1}{2} \rho_0 \int_D \mathbf{u}^2 \delta \mu + \rho_0 \beta \int_D \mathbf{g} \cdot \mathbf{x} T \delta \mu,$$

лагранжеву инвариантность ПВ

$$\Pi_h = (\boldsymbol{\Omega} + 2\boldsymbol{\Omega}_0) \cdot \nabla T$$

и температуры T для рассматриваемого класса решений исходных гидродинамических уравнений (9.1), (9.2) (ср. с (6.3), (6.4)). Таким образом, мы имеем полный набор необходимых "инструментов", чтобы приступить к построению искомого приближения. Напомним в связи с этим общую схему, которая используется в геофизической гидродинамике для вывода квазигеострофического приближения уравнений движения бароклинной атмосферы. Схема состоит (см., например, [31]) в следующем.

I. Число Россби $\varepsilon = U/f_0 L = O(\omega/f_0)$ и безразмерные параметры

$$\xi = \frac{f_0^2 L^2}{g H_0} = O(\varepsilon), \quad \eta = \frac{N^2 H_0}{g} = O(\varepsilon) \quad (9.14)$$

предполагаются малыми, причем одинаковый порядок малости не является жестким условием, а принимается здесь только для упрощения выкладок, f_0 — параметр Кориолиса (удвоенная средняя по широте вертикальная компонента угловой скорости вращения Земли), L и H_0 — характерные горизонтальный и вертикальный масштабы глобальных течений, U и ω — типичные скорость и завихренность, N — частота Брента – Вайсяля, квадрат которой применительно к уравнениям (9.1), (9.2) равен $N^2 = g\beta \partial T/\partial z$ при $\partial T/\partial z > 0$.

II. Движение предполагается квазигидростатическим и квазигеострофическим. Последнее означает, что с точностью до $O(\varepsilon)$ выполняются соотношения термического ветра (с механической точки зрения они означают

приближенное равновесие между силами Кориолиса и давления, выраженное в терминах завихренности, см. ниже).

III. В основу вывода кладутся уравнения сохранения ПВ и потенциальной температуры (в рассматриваемом случае ее роль принадлежит T), которые раскладываются по малому параметру ε с точностью до членов $O(\varepsilon^2)$.

Будем предполагать, что ускорение $\mathbf{g}$ параллельно главной оси эллипсоида Oz (полуось a_3), вокруг которой происходит вращение с угловой скоростью Ω_0 системы как целого, и применим описанную схему для вывода квазигеострофического приближения уравнений (9.5).

В качестве параметров ε , L^2 и H_0 естественно взять величины

$$\varepsilon = \frac{\omega}{2\omega_0} \left(\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2} \right), \quad (9.15)$$

$$2L^2 = I_3 = a_1^2 + a_2^2, \quad H_0 = a_3.$$

Тогда

$$\xi = \frac{4\omega_0^2(a_1^2 + a_2^2)}{2ga_3} = \frac{2\omega_0^2 I_3}{ga_3} = O(\varepsilon), \quad (9.16)$$

$$N^2 = g\beta \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{g\sigma_3}{a_3}, \quad \eta = \frac{N^2 a_3}{g} = \sigma_3 = O(\varepsilon). \quad (9.17)$$

Для исходных уравнений (9.1), (9.2) соотношение термического ветра записывается в виде

$$-2(\mathbf{\Omega}_0 \nabla) \mathbf{u} = \beta \mathbf{g} \times \nabla T + O(\varepsilon). \quad (9.18)$$

Такая запись означает, что отношение отброшенных членов к оставленным порядка ε . В координатной форме (9.18) представляется как

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{g\beta}{2\Omega_0} \frac{\partial T}{\partial y} + O(\varepsilon), \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{g\beta}{2\Omega_0} \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (9.18a)$$

Для модельных уравнений (9.5) соотношение термического ветра имеет вид

$$\boldsymbol{\omega} \times 2\mathbf{M}_0 + g\mathbf{l}_0 \times \boldsymbol{\sigma} = O(\varepsilon), \quad (9.19)$$

или в координатной форме ($\mathbf{l}_0 = (0, 0, -a_3)$):

$$\omega_2 = -\frac{a_3 g \sigma_2}{2I_3 \omega_0} + O(\varepsilon), \quad \omega_1 = -\frac{a_3 g \sigma_1}{2I_3 \omega_0} + O(\varepsilon). \quad (9.19a)$$

Принимая во внимание (9.6) и (9.19a), находим, что $-\omega_1$ и $-\omega_2$ с точностью до преобразования сжатие – растяжение можно рассматривать в качестве компонент термического ветра:

$$-\omega_1 \propto \frac{\partial v}{\partial z} \propto \frac{\partial T}{\partial x}, \quad -\omega_2 \propto -\frac{\partial u}{\partial z} \propto \frac{\partial T}{\partial y}.$$

В дальнейшем компонентами термического ветра ради удобства мы будем называть величины ω_1 и ω_2 , имея в виду, что это справедливо с точностью до знака.

Согласно (9.19a) и (9.16)

$$\frac{\omega_2}{\omega_0} \propto \frac{\omega_1}{\omega_0} \propto O(\varepsilon) \propto \frac{\sigma_2}{O(\varepsilon)} \propto \frac{\sigma_1}{O(\varepsilon)},$$

отсюда

$$\sigma_1 \propto \sigma_2 = O(\varepsilon^2). \quad (9.20)$$

Запишем модельные уравнения (9.5) в координатной форме

$$I_1 \dot{\omega}_1 = (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 + 2I_3 \omega_0 \omega_2 + ga_3 \sigma_2, \quad (9.21)$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 = (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 - 2I_3 \omega_0 \omega_1 - ga_3 \sigma_1,$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 = (I_2 - I_1) \omega_2 \omega_3,$$

$$\dot{\sigma}_1 = \omega_2 \sigma_3 - \omega_3 \sigma_2, \quad (9.22)$$

$$\dot{\sigma}_2 = \omega_3 \sigma_1 - \omega_1 \sigma_3,$$

$$\dot{\sigma}_3 = \omega_1 \sigma_2 - \omega_2 \sigma_1. \quad (9.23)$$

Система (9.21)–(9.23) обладает, в частности, следующими семействами неподвижных точек, описывающих стационарные режимы вращений вокруг главных осей:

$$(A) \quad \omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \sigma_1 = \sigma_2 = 0, \quad \omega_3 = \omega_{30}, \quad \sigma_3 = \sigma_{30};$$

$$(B) \quad \omega_1 = \omega_3 = 0, \quad \sigma_1 = \sigma_3 = 0, \quad \omega_2 = \omega_{20}, \quad \sigma_2 = \sigma_{20}, \\ 2I_3 \omega_0 \omega_{20} + ga_3 \sigma_{20} = 0;$$

$$(B) \quad \omega_2 = \omega_3 = 0, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0, \quad \omega_1 = \omega_{10}, \quad \sigma_1 = \sigma_{10}, \\ 2I_3 \omega_0 \omega_{10} + ga_3 \sigma_{10} = 0.$$

Переменные, помеченные индексом 0, могут принимать произвольные действительные значения (не путать переменные с внешним параметром ω_0). Нетрудно видеть, что любой представитель семейства (Б) или (В) является *нетривиальным строго геоострофическим стационарным режимом* движения при любом $\omega_0 \neq 0$. Из уравнения (9.23), согласно сделанным оценкам (9.20) и соотношениям термического ветра (9.19a) с учетом (9.16), вытекает, что $\dot{\sigma}_3 = o(\varepsilon^3)$. Следовательно, $\sigma_3 = \sigma_{30}$ является константой с высокой точностью, и последние два уравнения системы (9.22) можно переписать в виде:

$$\dot{\sigma}_1 = \omega_2 \sigma_{30} - \omega_3 \sigma_2, \quad \dot{\sigma}_2 = \omega_3 \sigma_1 - \omega_1 \sigma_{30}. \quad (9.24)$$

Исключая теперь из (9.24) с помощью (9.19a) величины σ_1 и σ_2 , получаем систему

$$\dot{\omega}_1 = -\left(\frac{ga_3 \sigma_{30}}{2I_3 \omega_0} + \omega_3 \right) \omega_2, \quad (9.25)$$

$$\dot{\omega}_2 = \left(\frac{ga_3 \sigma_{30}}{2I_3 \omega_0} + \omega_3 \right) \omega_1,$$

которую можно трактовать как аналог редуцированного разложения по параметру ε уравнения "потенциальной" температуры (точнее, уравнения для градиента температуры), записанного в терминах компонент термического ветра.

Теперь остается выяснить, что такое ПВ в квазигеострофическом приближении. В силу сделанных выше оценок выражение для

$$P = (\mathbf{M} + 2\mathbf{M}_0) \cdot \boldsymbol{\sigma} = I_1 \omega_1 \sigma_1 + I_2 \omega_2 \sigma_2 + I_3 \omega_3 \sigma_3 + 2I_3 \omega_0 \sigma_3$$

(см. (9.13)) можно переписать в виде

$$P = I_3 (2\omega_0 + \omega_3) \sigma_{30} + O(\varepsilon^3).$$

Поэтому квазигеострофический ПВ равен

$$P_G = I_3(2\omega_0 + \omega_3)\sigma_{30}, \quad \dot{P}_G = 2I_3\sigma_{30}\dot{\omega}_3, \quad (9.26)$$

и его эволюция описывается первым уравнением системы (9.22).

Таким образом, квазигеострофическое приближение системы уравнений (9.21)–(9.23) шестого порядка, описывающей движение бароклинного волчка, сводится к динамической системе третьего порядка:

$$\begin{aligned} I_3\dot{\omega}_3 &= (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2, \\ \dot{\omega}_1 &= -\left(\frac{ga_3\sigma_{30}}{2I_3\omega_0} + \omega_3\right)\omega_2, \\ \dot{\omega}_2 &= \left(\frac{ga_3\sigma_{30}}{2I_3\omega_0} + \omega_3\right)\omega_1. \end{aligned} \quad (9.27)$$

Система (9.27) соответствует уравнениям для медленных переменных из теории релаксационных колебаний (см., например, [46]) и в данном случае описывает медленную эволюцию главных компонент глобальных геофизических течений — вертикальную завихренность и термический ветер.

Поделим левые и правые части уравнений (9.27) на ω_0^2 . Тогда аддитивную константу, входящую в скобки правых частей последних двух уравнений, с учетом (9.15), (9.17) и $4\omega_0^2 = f_0^2$ можно записать в виде:

$$S = \frac{ga_3\sigma_{30}}{2I_3\omega_0^2} = \frac{N^2 H_0^2}{f_0^2 L^2}, \quad (9.28)$$

где S — это хорошо известный в геофизической гидродинамике критерий подобия, входящий в квазигеострофическое уравнение ПВ бароклинной атмосферы как заданный параметр, называемый параметром стратификации (см., например, [31]).

В безразмерных переменных $X = \omega_1/\omega_0$, $Y = \omega_2/\omega_0$, $Z = S + \omega_3/\omega_0$, $\tau = \omega_0 t$ (медленное время) система (9.27) записывается в исключительно простой форме:

$$\dot{X} = -YZ, \quad \dot{Y} = ZX, \quad \dot{Z} = \Gamma XY, \quad (9.29)$$

где $\Gamma = (I_2 - I_1)/I_3 = (a_1^2 - a_2^2)/(a_1^2 + a_2^2)$.

Не умаляя общности, можно положить $a_1 > a_2$, так что $0 < \Gamma < 1$. Система (9.29) имеет два положительно определенных первых интеграла движения:

$$2E_G = \Gamma X^2 + Z^2, \quad \Theta_G = X^2 + Y^2. \quad (9.30)$$

Согласно теореме Обухова (см. [26]) это означает, что квазигеострофическое приближение уравнений движения бароклинного волчка эквивалентно уравнениям Эйлера движения классического гироскопа, в качестве зависимых переменных которых выступают вертикальная завихренность и компоненты термического ветра. В связи с этим отметим, что квазигеострофическое приближение редуцированных уравнений движения вращающейся мелкой воды также совпадает с механическими уравнениями Эйлера и описывает медленную эволюцию волн Россби [19].

Семейства (А)–(В) стационарных решений полной системы уравнений (9.21)–(9.23) исчерпывают совокупность неподвижных точек редуцированной системы

(9.29) и в новых переменных записываются в виде:

$$(A) \quad X = Y = 0, \quad Z = Z_0,$$

$$(B) \quad X = Z = 0, \quad Y = Y_0,$$

$$(B) \quad Y = Z = 0, \quad X = X_0.$$

Здесь величины с нулевым индексом могут принимать произвольные вещественные значения, причем нулевое решение $X = Y = Z = 0$ при $S \neq 0$ описывает циркуляцию вокруг вертикальной оси и по существу также является нетривиальным представителем семейства (А).

Упомянутые первые интегралы движения следует трактовать как полную энергию и аналог лагранжовой инвариантности потенциальной температуры. Второе слагаемое в выражении для энергии при $S = 0$ есть кинетическая энергия вертикальной завихренности, тогда как первое слагаемое, определяемое одной из компонент термического ветра, по сути следует интерпретировать как меру доступной потенциальной энергии системы. И вот почему. Не учитываемая в квазигеострофическом приближении кинетическая энергия горизонтальной завихренности порождается горизонтальной неоднородностью потенциальной температуры и потому приписывается к потенциальной энергии квазигеострофической системы. (Это утверждение общего положения, относящееся к любым глобальным геофизическим течениям.) Стационарному состоянию системы (9.29)

$$X = X_0 \neq 0, \quad Y = Z = 0 \quad (9.31)$$

с отличной от нуля X -компонентой термического ветра соответствует в размерных переменных горизонтальная завихренность $\omega_{10} \propto -\partial T/\partial x$. Тогда кинетическая энергия этой завихренности равна

$$E_X = \frac{1}{2} I_1 \omega_{10}^2 = \frac{1}{2} (a_2^2 + a_3^2) \omega_{10}^2.$$

Такой же завихренности в Y -направлении соответствует стационарное решение

$$X = 0, \quad Y = Y_0 \neq 0, \quad Z = 0, \quad (9.32)$$

но с кинетической энергией

$$E_Y = \frac{1}{2} I_2 \omega_{10}^2 = \frac{1}{2} (a_1^2 + a_3^2) \omega_{10}^2.$$

Теперь заметим, что интегралы движения не запрещают перехода от состояния (9.31) к нестационарному состоянию

$$X = 0, \quad Y = X_0 \neq 0, \quad Z = \sqrt{\Gamma} X_0,$$

в котором компоненты X и Y меняются ролями, но запрещают обратный переход из-за нарушения закона сохранения энергии. Разность кинетических энергий горизонтальных завихренностей состояний (9.31) и (9.32)

$$\Delta E = E_Y - E_X = \frac{1}{2} (a_1^2 - a_2^2) \omega_{10}^2$$

и есть мера избытка потенциальной энергии, которым обладает состояние (9.31) по отношению к состоянию (9.32), т.е. доступная потенциальная энергия, которая может порождать вертикальную завихренность.

Из фазового портрета системы (9.29), изображенного на рис. 6, следует, что неподвижная точка (Б) устойчива, а

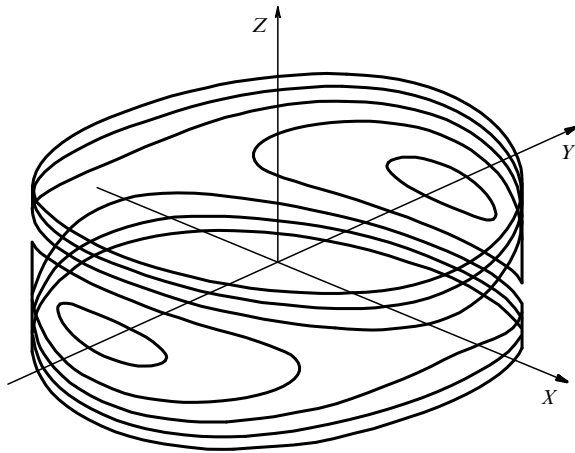


Рис. 6. Фазовый портрет квазигеострофического движения бароклинного волчка в пространстве безразмерных компонент X , Y термического ветра и вертикальной завихренности Z , иллюстрирующий механизм бароклинной неустойчивости.

(В) как гиперболическая точка неустойчива. По сути, рис. 6 иллюстрирует результат Иди [47], впервые обнаружившего бароклинную неустойчивость в случае горизонтально однородного зонального течения с постоянным вертикальным сдвигом скорости, обусловленного разностью температур полюс–экватор. Другими словами, Иди обнаружил, что течение с нулевой вертикальной завихренностью и отличным от нуля термическим ветром $\partial u/\partial z = -(g\beta/2\Omega_0)\partial T/\partial y$ оказывается неустойчивым из-за избытка доступной потенциальной энергии, которая, превращаясь в кинетическую энергию вертикальной завихренности, порождает атмосферный циклогенез. Именно такой механизм описывает модель (9.29).

В случае $S \neq 0$ величину Z^2 уже нельзя трактовать как меру кинетической энергии системы. Поэтому неслучайно точные и квазигеострофические решения, как мы увидим в разделе 9.3, достигают наибольшего согласия при $S = 0$: чем больше S отличается от нуля, тем больше расхождение между точными и квазигеострофическими траекториями. Поэтому параметр стратификации в определенном смысле можно рассматривать в качестве меры отклонения траекторий исходной модели от медленного многообразия, описываемого системой (9.29).

Замечание. Может возникнуть вопрос: почему для атмосферы наилучшее значение $S = O(1)$, а не $S = 0$? Дело в том, что атмосферные уравнения движения формулируются для отклонений от состояния статического равновесия с устойчивым вертикальным профилем потенциальной температуры, чему соответствует положительное значение N^2 . Однако в нашем случае мы отталкивались от равновесного состояния с $N^2 = 0$, что объясняется выбором приближения Обербека–Буссинеска для отклонений от состояния статического равновесия с однородным профилем средней температуры $T_0 = \beta^{-1} = \text{const}$.

9.3. Сравнение квазигеострофических и точных движений бароклинного волчка в зависимости от параметра стратификации при малых начальных числах Россби

В случае сферической ($a_1 = a_2 = a_3$) или цилиндрической (волчок Лагранжа) симметрий аналитические решения

квазигеострофического триплета можно сопоставить с известными аналитическими решениями исходных модельных уравнений. Такое сопоставление для сферически симметричного волчка было сделано в [48]. Это, однако, наименее интересные примеры, в которых полностью или частично исключен гидродинамический механизм нелинейного взаимодействия ω -компонент, ответственный за генерацию агеострофической компоненты движения (см. (9.21)). Чтобы избежать такого упрощения, мы предпочли интегрировать приближенные и исходные модельные уравнения численно, используя методы, позволяющие с высокой точностью контролировать погрешность вычислений. (Неинтегрируемость асимметричного тяжелого волчка была доказана еще С. Ковалевской; современное доказательство изложено в [49].) Конкретно речь идет об использовании следующих двух критериев точности интегрирования: а) степени выполнения законов сохранения (9.13) и (9.30) и б) точности возвращения в начальную точку при интегрировании назад.

Во всех приведенных ниже примерах погрешности выполнения упомянутых законов сохранения и возвращения в исходную точку не превышали соответственно 10^{-6} и $10^{-4}\%$. Все численные эксперименты по сопоставлению решений квазигеострофических и исходных модельных уравнений проводились для эллипсоида с полуосями $a_1 = 3$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$. В качестве начальных данных использовалось неустойчивое стационарное состояние квазигеострофического триплета $\omega/\omega_0 = (0, 1, 0, 0)$ с начальным возмущением $\omega'/\omega_0 = (0, 0, 10^{-5})$, а соответствующие значения компонент σ_1 и σ_2 вычислялись по формулам термического ветра (9.19а). От варианта к варианту изменялся лишь параметр стратификации S .

Результаты расчетов представлены на рис. 7 и 8 в виде проекций фазовых траекторий приближенной и исходной моделей на двумерное (X, Y) и трехмерное (X, Y, Z) подпространства для различных положительных и отрицательных начальных значений S (напомним, что S — инвариант только для квазигеострофической модели). Параметр S изменялся в пределах $0 \leq |S| \leq 1$.

Отметим прежде всего, что при $|S| \ll 1$ фазовые портреты приближенной и исходной моделей практически совпадают. Это указывает на само существование медленного многообразия. При малых и умеренных значениях $|S|$ "точные" траектории отражаются от медленного многообразия внутрь или наружу в зависимости от знака S , как от своеобразного кривого зеркала. Чем больше значение $|S|$, тем больше амплитуда отклонения. Подчеркнем, что указанная особенность наблюдается даже тогда, когда агеострофическая амплитуда становится сравнимой по величине с геострофической компонентой (или даже превышает ее) при положительных изменениях параметра стратификации вплоть до $S = 1$ и до $|S| \approx 0,64$ при отрицательных его изменениях. Пробой "зеркала" происходит с внешней стороны при $S \approx -0,65$, и траектория заполняет ранее недоступное пространство в течение конечного интервала времени $\Delta t \sim 10^2$, что, по-видимому, сопровождается возникновением хаоса. Это проиллюстрировано на рис. 9 и 10, на которых представлены отображения Пуанкаре и частотные спектры для докритических и закритических значений S . Иерархия моделей, занимающих промежуточное положение между моделями, которые соответствуют квазигеострофиче-

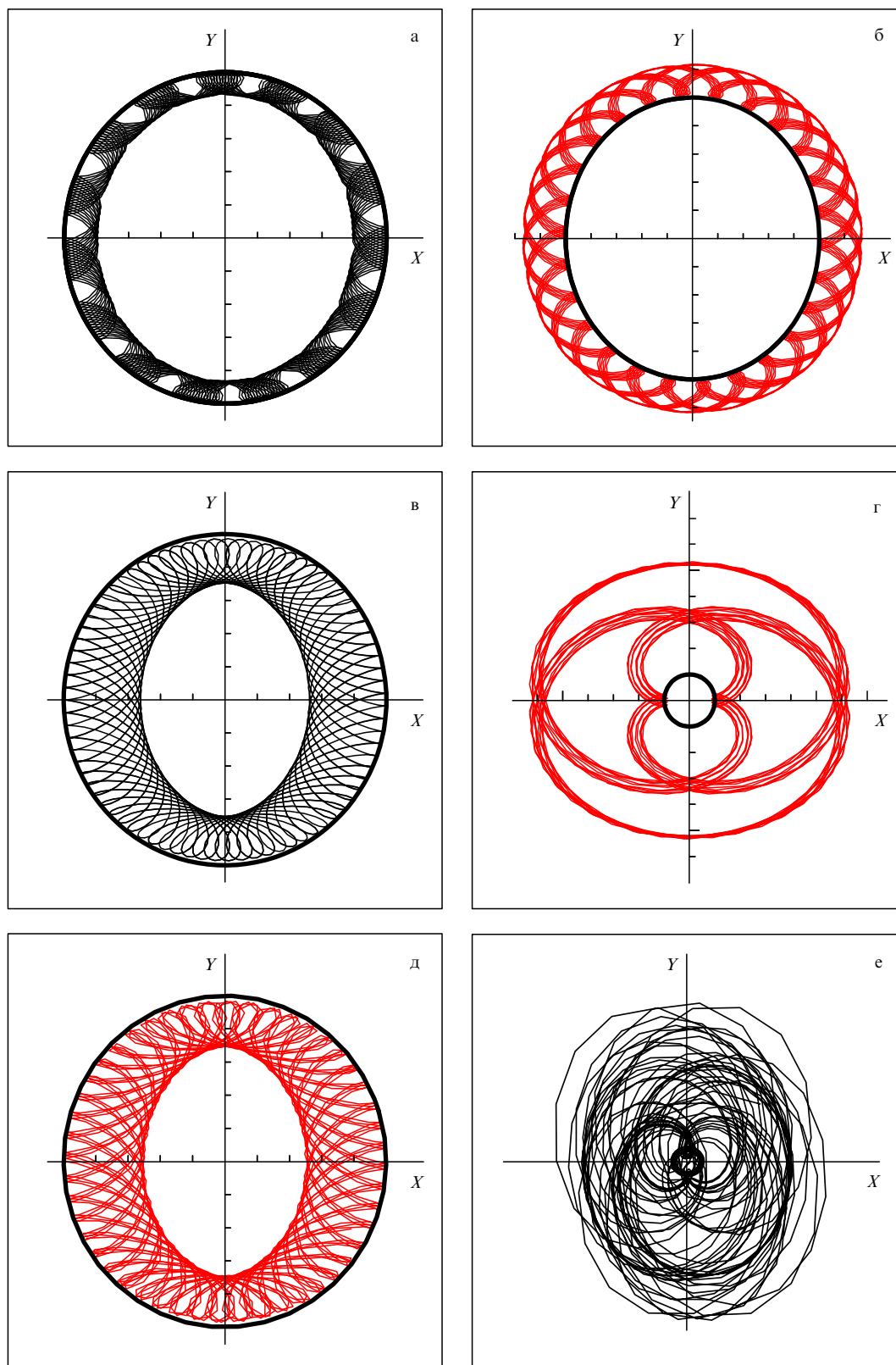


Рис. 7. Фазовые портреты квазигеострофических и "точных" движений бароклинного волчка в плоскости (X, Y) при различных значениях параметра S : (а) $S = 0,2$, (б) $S = -0,2$, (в) $S = 0,6$, (г) $S = -0,6$, (д) $S = 0,65$, (е) $S = -0,65$. Жирные линии соответствуют квазигеострофическим траекториям, тонкие — точным траекториям. При $S = 0$ приближенные и точные траектории практически совпадают.

ским и исходным уравнениям движения бароклинного волчка, и позволяющих аналитически описать его поведение при умеренных значениях S , построена в [50].

Интересно отметить, что описанные результаты весьма схожи с результатами Э. Лоренца [19], который сравнивал точные решения обрезанных по Галеркину

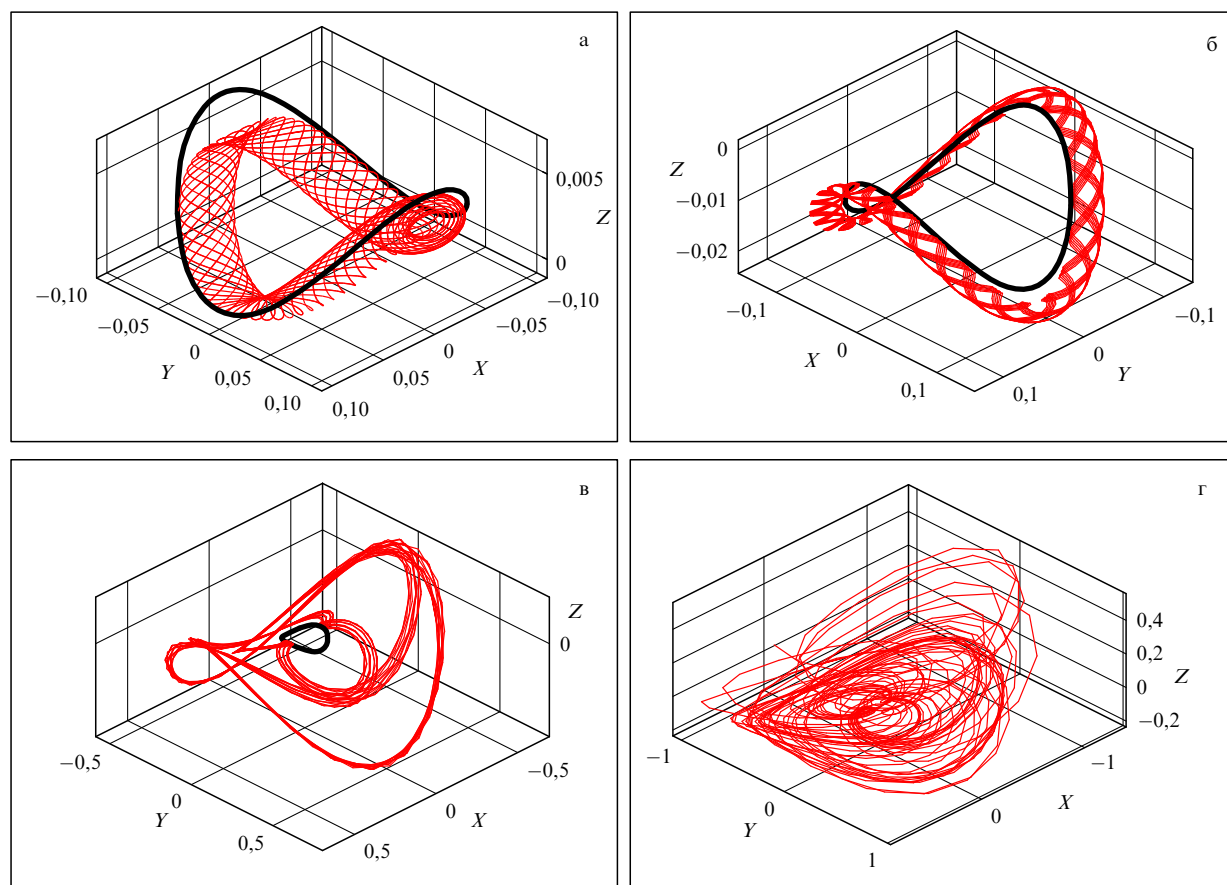


Рис. 8. Фазовые портреты квазигеострофических и "точных" движений бароклинного волчка в пространстве (X, Y, Z) при докритических значениях параметра S : (а) $S = 0,6$, (б) $S = -0,2$, (в) $S = -0,6$ и закритическом значении (г) $S = -0,65$. Жирные линии соответствуют квазигеострофическим траекториям, тонкие — точным траекториям.

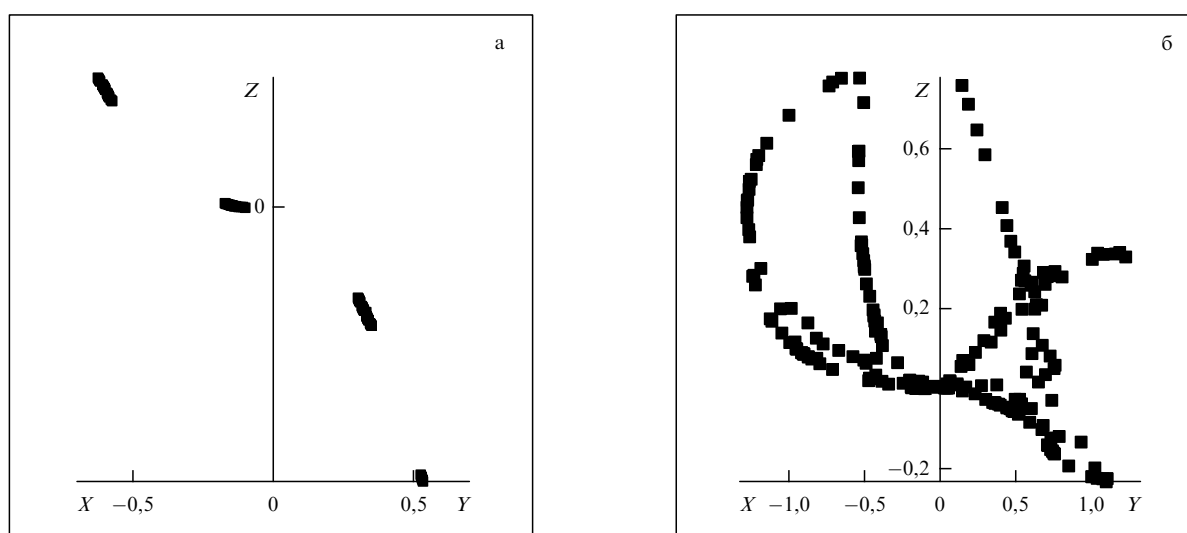


Рис. 9. Отображение Пуанкаре в плоскостях (X, Z) и (Y, Z) при (а) докритическом значении $S = -0,6$ и (б) закритическом значении $S = -0,65$.

атмосферных уравнений движения с решениями их квазигеострофического приближения. В модели Э. Лоренца роли медленных и быстрых движений играют соответственно планетарные и *инерционно-гироскопические волны*. В нашем случае при $S \neq 0$ медленные

эволюции вертикальной завихренности и термического ветра сопровождаются высокочастотными *инерционно-гравитационными колебаниями*, которые периодически отдалают фазовые траектории от медленного многообразия (см. рис. 7 и 8).

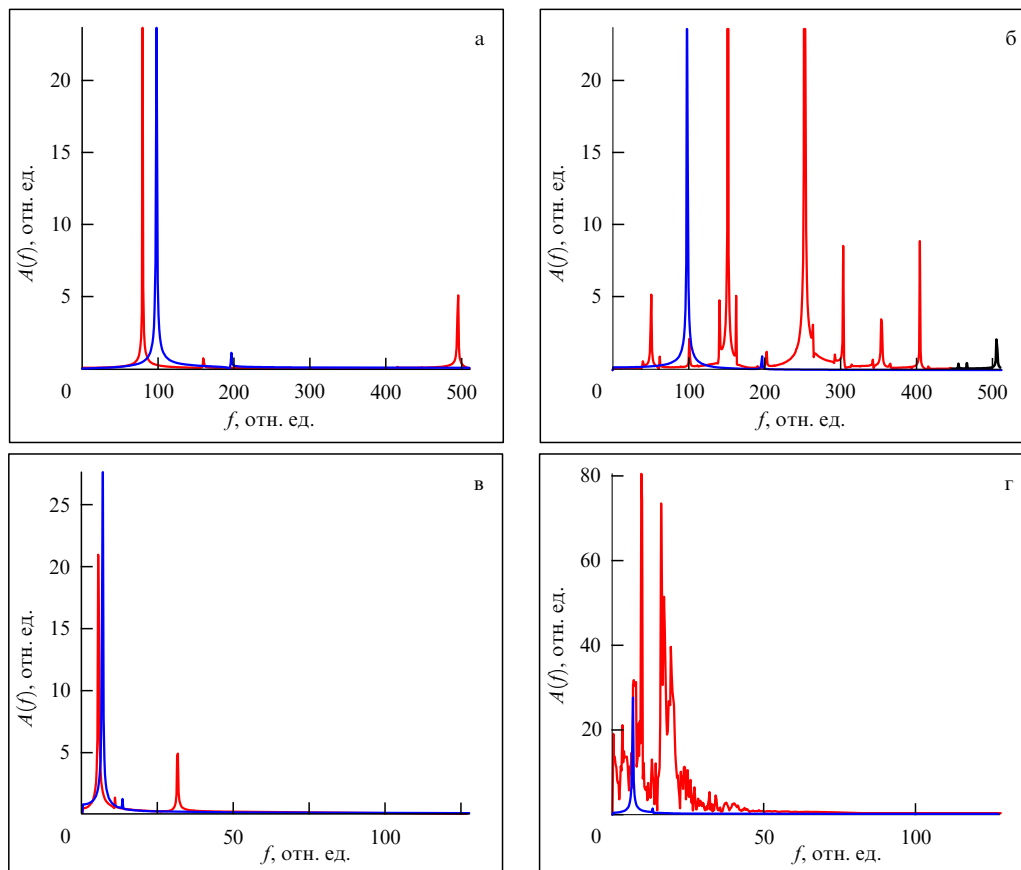


Рис. 10. Частотные спектры: (а) относится к случаю, представленному на рис. 7в, (б) — на рис. 7г, (в) — на рис. 7д, (г) — на рис. 7е.

10. Движение бароклининого волчка под влиянием внешнего нагрева, трения и бета-эффекта

10.1. Учет трения и внешнего нагрева

Хорошо известно, что в геофизических гидродинамических системах диссипация кинетической энергии происходит в основном в планетарном пограничном слое, который затормаживает движение свободной атмосферы приблизительно по линейному закону трения. Внешнее нагревание можно учесть, как это нередко делается в теоретических исследованиях, по формуле Ньютона, согласно которой удельные притоки тепла прямо пропорциональны отклонениям температуры от ее фонового значения. За фоновое распределение температуры принимается температурное поле, которое устанавливается в неподвижной жидкости из-за неоднородного внешнего нагрева и теплопроводности среды. Тогда, следуя указанным предположениям, вязкое движение бароклининого волчка описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}} &= \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{M} + 2\mathbf{M}_0) + g\mathbf{l}_0 \times \boldsymbol{\sigma} - \lambda\mathbf{M}, \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\sigma} + \mu(\boldsymbol{\sigma}_B - \boldsymbol{\sigma}). \end{aligned} \quad (10.1)$$

Здесь величины λ и μ можно трактовать как эффективные коэффициенты вязкости и теплопроводности с размерностью обратного времени, а $\boldsymbol{\sigma}_B$ соответствует прост-

ранственно линейному распределению фоновой температуры. Остальные обозначения прежние.

10.2. "Игрушечные" циркуляции Хэдли и Россби

Рассмотрим типичную геофизическую ситуацию, в которой движение вязкого бароклининого волчка происходит под влиянием неоднородного по горизонтали нагрева. Положим по-прежнему, что $a_1 > a_2$, а векторы $\mathbf{g}$ и $\boldsymbol{\Omega}_0$ противоположны по направлению и параллельны оси x_3 . Чтобы включить механизм бароклининой неустойчивости, направим градиент фоновой температуры вдоль оси x_1 . В этом случае $\boldsymbol{\sigma}_B = (\sigma_B, 0, 0)$.

Применяя процедуру, описанную в разделе 9.2, получаем квазигеострофическое приближение системы (10.1):

$$\begin{aligned} I_3 \dot{\omega}_3 &= (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 - \lambda I_3 \omega_3, \\ \dot{\omega}_1 &= -\omega_2\omega_3 - \mu\omega_1 - \frac{\mu g a_3 \sigma_B}{2I_3 \omega_0}, \\ \dot{\omega}_2 &= \omega_3\omega_1 - \mu\omega_2. \end{aligned} \quad (10.2)$$

Заметим, что величина σ_3 не входит в систему (10.2) ни как параметр (ср. с (9.27)), ни как переменная с собственным уравнением, поскольку σ_3 в конечном итоге затухает из-за однородности вертикального распределения фоновой температуры (результат численного интегрирования).

В безразмерных переменных

$$X = \frac{\omega_1}{\mu}, \quad Y = \frac{\omega_2}{\mu}, \quad Z = \frac{\omega_3}{\mu}, \quad \tau = \mu t$$

система (10.2) принимает вид

$$\dot{X} = -YZ - X - D, \quad \dot{Y} = ZX - Y, \quad \dot{Z} = \Gamma XY - \zeta Z. \quad (10.3)$$

Такой выбор медленного времени продиктован тем, что для геофизических систем, как правило, $\mu^{-1} \gtrsim \lambda^{-1} \gg \Omega_0^{-1}$ (например характерное время радиационного охлаждения земной атмосферы около 10 сут). Величину $\zeta = \lambda/\mu$ можно интерпретировать как эффективное число Прандтля, а $D = ga_3\sigma_{B1}/2I_3\omega_0\mu$ — как безразмерный термический привод.

Пусть вектор σ_B направлен в отрицательную сторону оси x_1 , так что $D = -|D|$. В этом случае естественной конвекции, возбуждаемой внешними источниками тепла, соответствуют положительные значения ω_2 . Система (10.3) имеет два типа стационарных решений, один из которых соответствует режиму Хэдли (Hadley) H, а другой — режимам Россби (Rossby) $R_{\pm}$:

$$(H) \quad X = |D|, \quad Y = Z = 0; \quad (10.4)$$

$$(R_{\pm}) \quad X = D_0 \equiv \left(\frac{\zeta}{\Gamma}\right)^{1/2}, \quad (10.5)$$

$$Y = \pm D_0^{1/2}(|D| - D_0)^{1/2},$$

$$Z = \pm D_0^{-1/2}(|D| - D_0)^{1/2}.$$

Смысл этих решений становится понятным, если сопоставить их энергетические характеристики с энергетическими характеристиками реальных глобальных геофизических течений. Начнем с того, что согласно анализу решений исходной модели (см. [26, 51, 52]) в режиме H обе величины Y и Z пренебрежимо малы, но строго положительны при любом $D \neq 0$, не нарушающем квазигеострофического равновесия. Малость и положительность Y означает, что естественная конвекция, возникающая в поперечных сечениях, ортогональных оси x_2 , крайне не эффективна в отношении передачи тепла от нагревателя к холодильнику. Интенсивная циркуляция вокруг оси x_1 не увеличивает эффективность этого режима. В итоге в жидкости устанавливается распределение температуры, практически совпадающее с фоновым (согласно соотношениям термического ветра $X = -D$, $Y = 0$ означают, что $\nabla T = \nabla T_B$). С энергетической точки зрения режим Хэдли, наблюдаемый в лабораторных и численных экспериментах по моделированию общей циркуляции атмосферы (ОЦА), характеризуется аналогичными свойствами — мощным, но не эффективным зональным течением, ортогональным направлению полюс–экватор, и очень слабой естественной конвекцией в меридиональной (радиальной) плоскости (рис. 11а). Интенсивность меридиональной циркуляции на два порядка меньше интенсивности зонального потока [53].

В режимах $R_{\pm}$ ситуация кардинально меняется. Интенсивность циркуляции вокруг оси x_1 , а по соотношениям термического ветра и разность температур на этой оси уже не зависят от D , т.е. от мощности внешнего теплового источника. Если ΔT — указанная разность температур, то $\Delta T/\Delta T_B = |D_0/D| < 1$, и, следовательно, в режимах $R_{\pm}$ рассматриваемая тепловая машина становится существенно эффективнее. Интенсивности вращений жидкости вокруг осей, ортогональных ∇T_B , с увеличением D возрастают по закону $\sqrt{|D| - D_0}$. Но, если в

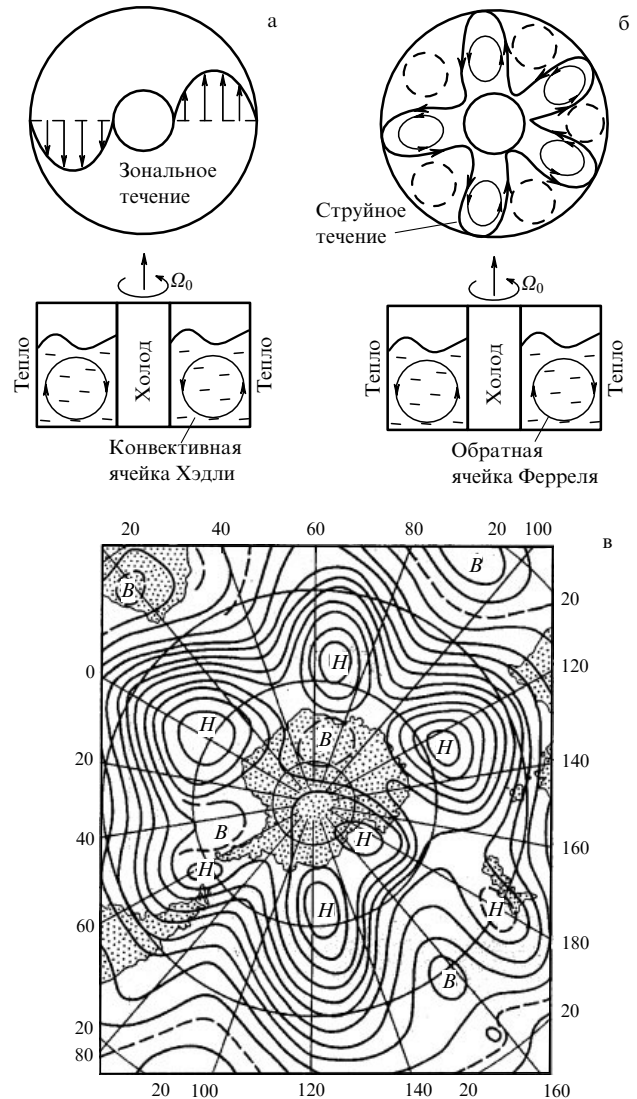


Рис. 11. Схематическое изображение режимов Хэдли (а) и Россби (б), наблюдаемых в экспериментах с вращающимися кольцевыми каналами, заполненными жидкостью, которая нагревается на периферии и охлаждается в центре. Представлены виды сверху и сбоку. В радиальных сечениях не показаны компенсационные ячейки, обеспечивающие встречное "приземное" зональное течение для соблюдения закона сохранения момента количества движения. (в) Циркуляция над Антарктидой [57].

режиме R_{+} оба этих вращения способствуют передаче тепла от нагревателя к холодильнику, то в режиме R_{-} циркуляция вокруг оси x_2 происходит в направлении, противоположном естественной конвекции. С этим явлением, которое наблюдается в естественных и лабораторных условиях, в свое время связывали так называемый эффект отрицательной вязкости [54]. И вновь с энергетической точки зрения описанная ситуация схожа с атмосферными и лабораторными режимами Россби. Действительно, из рис. 11б, на котором схематически представлены результаты лабораторных экспериментов по моделированию ОЦА (см., например, монографию [53] и обзоры [55, 56]), видно, что отрицательное влияние "противоестественной" конвекции в радиальной (меридиональной) плоскости компенсируется интенсивным горизонтальным струйным течением, которое, поочередно приходя в соприкосновение с нагревателем и

холодильником, осуществляет перенос тепла в нужном направлении. Этому также способствуют крупномасштабные вихри, огибаемые струйным течением, аналогом которых в "игрушечных" режимах Россби служит вертикальная завихренность ω_3 . Схожая картина наблюдается и в атмосфере (рис. 11в из [57], сделанный по материалам Гидрометцентра СССР).

В связи с перечисленными свойствами режимов Н и $R_{\pm}$ представляется интересным исследовать их области существования и устойчивости для сопоставления с такими же областями соответствующих режимов натуральных или лабораторных глобальных геофизических течений. Согласно (10.5) значение $|D| = D_0$ есть нижняя граница области существования режимов $R_{\pm}$. В геофизической гидродинамике конвекцию вращающейся жидкости принято описывать в терминах термического числа Россби Ro_T и числа Тейлора Ta , которые применительно к рассматриваемой модели определяются формулами

$$Ro_T = \frac{ga_3|\sigma_{B1}|}{2I_3\omega_0^2}, \quad Ta = \frac{\omega_0^2}{\lambda^2}. \quad (10.6)$$

В терминах этих параметров

$$D = \text{sign}(\sigma_{B1}) Ro_T Ta^{1/2} \zeta. \quad (10.7)$$

Тогда в плоскости внешних критериев подобия (Ta, Ro_T) упомянутая нижняя граница задается кривой

$$Ro_T = (\zeta \Gamma Ta)^{-1/2}, \quad (10.8)$$

которая в рамках квазигеострофического приближения совпадает с нижней границей устойчивости режимов $R_{\pm}$, что не удивительно. Удивительно другое: эта кривая совпадает с асимптотикой нижней границы существования и устойчивости режимов Россби в кольцевых каналах, найденной Э. Лоренцем [58] теоретически в случае обрезанной двуслойной модели бароклинного течения.

Детальное исследование, выполненное в [26, 52] на основе нередуцированных уравнений (10.1) и откорректированное нами дополнительными расчетами, показывает, что области существования и устойчивости режимов Россби имеют форму, аналогичную представленной на рис. 12, причем верхняя ветвь асимптотически ведет себя как $Ro_T \sim Ta^{1/2}$. Это не означает, что области существования и устойчивости режимов R_{+} и R_{-} совпа-

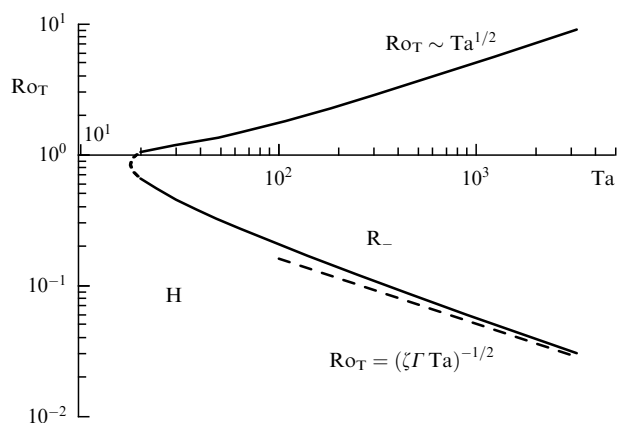


Рис. 12. Критическая кривая режима R_- в плоскости внешних критериев подобия (Ta, Ro_T) ; поведение нижней ветви согласуется с квазигеострофической теорией бароклинного волчка.

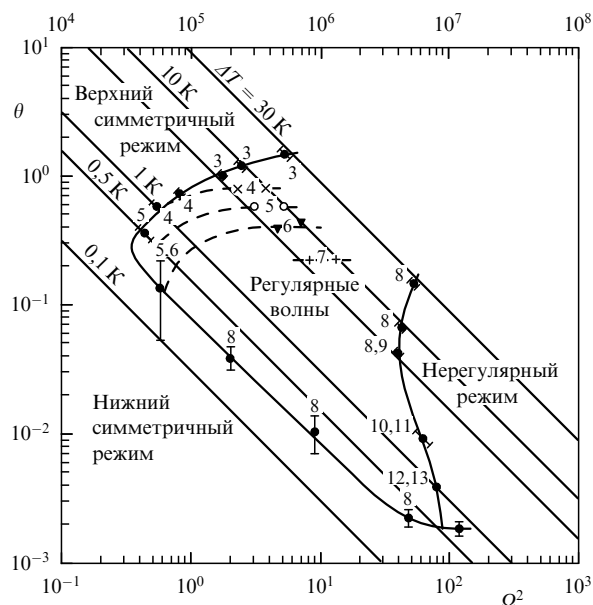


Рис. 13. Экспериментальная диаграмма устойчивости различных режимов конвекции жидкости, неоднородно разогреваемой по горизонтали, которые наблюдаются во вращающихся кольцевых каналах [55]. Квадрат угловой скорости Ω^2 общего вращения пропорционален числу Тейлора, а параметр θ , равный отношению горизонтальной разности плотностей к Ω^2 , пропорционален термическому числу Россби.

дают. В частности, сплошная кривая на рис. 12 воспроизводит границу устойчивости режима R_- , тогда как режим R_+ устойчив не только внутри, но и во внешней окрестности области, очерченной этой кривой.

Кривая устойчивости режимов Россби в кольцевых каналах, найденная в упомянутой работе Э. Лоренца, отличается от представленной на рис. 12 поведением верхней ветви, которая согласно работе Э. Лоренца асимптотически стремится к константе. Было бы слишком смело давать этому различию строгое объяснение, поскольку модели разные. Отметим только, что в отличие от Лоренца мы при построении верхней ветви не использовали квазигеострофическое приближение.

Если теперь сопоставить теоретические границы устойчивости режимов Россби с экспериментальной критической кривой, представленной на рис. 13, то можно увидеть, что, хотя все кривые имеют форму наковальни, нижняя ветвь экспериментальной кривой ведет себя как $Ro_T \sim Ta^{-1}$, а не как $Ro_T \sim Ta^{-1/2}$. Для верхней ветви экспериментальных данных недостаточно. Причина такого расхождения до недавнего времени оставалась неясной. Мы вернемся к этому вопросу в разделе 10.3.

В заключение этого раздела отметим два момента. Во-первых, критическая кривая режима R_+ не строилась ввиду слабого отличия этого режима от режима Н в окрестности верхней ветви. Во-вторых, хотя в квазигеострофическом приближении режимы $R_{\pm}$ с точки зрения устойчивости равноправны, в рамках исходной модели переход $H \rightarrow R_+$ преобладает над $H \rightarrow R_-$.

10.3. Влияние угла наклона оси общего вращения относительно силы тяжести

Из приведенной на рис. 13 экспериментальной диаграммы, видно, что в области, ограниченной критиче-

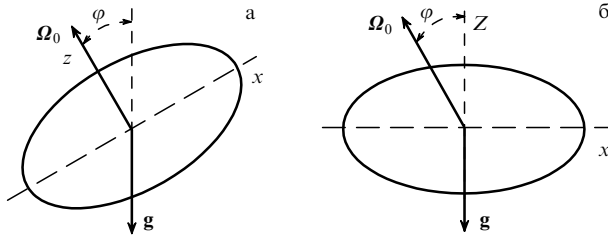


Рис. 14. Две ориентации эллипсоида относительно непараллельных направлений гравитации и общего вращения, создающие при малых φ одинаковый в квазигеострофическом приближении бета-эффект.

ской кривой режимов Россби, наряду со стационарными режимами наблюдаются также строго периодические и нерегулярные автоколебания. Однако в рамках рассмотренной в разделе 9 постановки задачи никаких автоколебаний в системе (10.1) обнаружить не удастся. Нами был упущен важный фактор, который состоит в том, что глобальные бароклинные геофизические течения есть не что иное, как наклонная конвекция вращающейся жидкости, формирующаяся в условиях, в которых ось общего вращения не параллельна силе тяжести.

Пусть ω_0 и $-g$ образуют угол φ , как показано на рис. 14, для двух ориентаций эллипсоида по отношению к гравитации и общему вращению. Угол φ предполагается достаточно малым, чтобы не повлиять на соотношения термического ветра (9.19а). Тем самым до некоторой степени имитируется земная ситуация, связанная с наличием так называемого бета-эффекта — зависимости вертикальной проекции угловой скорости вращения Земли от широты. Дело в том, что атмосферные уравнения движения формулируются именно в терминах упомянутой проекции, но при выводе квазигеострофического приближения зависимость проекции от широты в уравнениях термического ветра не учитывается — берется среднее по широте значение.

С учетом малости φ квазигеострофическое приближение системы (10.1) для обеих ориентаций в терминах X , Y и Z записывается в виде:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= -YZ - X - D, \\ \dot{Y} &= XZ - Y, \\ \dot{Z} &= \Gamma XY - \beta Y - \zeta Z,\end{aligned}\quad (10.9)$$

где $\beta = \beta_0 \text{Ta}^{1/2} \zeta$ и $\beta_0 = 2(a_1/a_3)\varphi$ или $\beta_0 = 2(I_1/I_3)\varphi$ в зависимости от ориентаций, соответствующих рис. 14а и 14б.

Система (10.9) при $\Gamma = 0$ ($a_1 = a_2$) заменой переменных

$$X = \frac{\zeta}{\beta} z - D, \quad Y = -\frac{\zeta}{\beta} y, \quad Z = x$$

сводится к детерминированным стохастическим уравнениям Э. Лоренца [22]:

$$\dot{x} = \zeta(y - x), \quad \dot{y} = -xz - y + rx, \quad \dot{z} = yx - bz, \quad (10.10)$$

где $b = 1$ и $r = (\beta/\zeta)D = \text{sign}(\sigma_{\text{В1}})\beta_0\zeta \text{Ro}_T \text{Ta}$.

Поэтому при определенных условиях, обсуждаемых ниже, система (10.9) описывает стохастические режимы "игрушечных" глобальных геофизических течений. Впер-

вые система (10.9) и ее нерегулярные решения были получены в 1980 г. в работе [48], но тогда исследование ограничилось лишь анализом этих решений без сопоставления с соответствующими решениями системы (10.1) и геофизической трактовки результатов. В этом же году Э. Лоренц [18] обнаружил, что уравнения (10.10) описывают не только рэлеевскую конвекцию, но и медленное многообразие в редуцированной системе взаимодействующих планетарных и инерционно-гравитационных волн.

Заметим, что уравнения (10.9) и (10.10) инвариантны относительно замены $D \rightarrow -D$, $\beta \rightarrow -\beta$ ($\sigma_{\text{В1}} \rightarrow -\sigma_{\text{В1}}$, $\varphi \rightarrow -\varphi$). Поэтому положим по определению бета-эффект положительным (отрицательным), если $D\beta > 0$ или $\sigma_{\text{В1}}\varphi > 0$ ($D\beta < 0$ или $\sigma_{\text{В1}}\varphi < 0$). Так как бета-эффект нарушает симметрию первоначальной конфигурации сил, существует два типа режимов Россби в зависимости от его знака. Как и ранее, предполагается, что $\sigma_{\text{В1}} < 0$. Поэтому для положительного бета-эффекта, т.е. при $D < 0$ и $\beta < 0$, стационарные режимы Хэдли и Россби описываются формулами:

$$\begin{aligned}(\text{H}) \quad X &= |D|, \quad Y = Z = 0, \\ (\text{R}_{\pm}) \quad X &= D_1 \equiv \sqrt{\frac{\beta^2}{4\Gamma^2} + \frac{\zeta}{\Gamma} - \frac{|\beta|}{2\Gamma}}, \\ Y &= \pm D_1^{1/2}(|D| - D_1)^{1/2}, \\ Z &= \pm D_1^{-1/2}(|D| - D_1)^{1/2}.\end{aligned}$$

Для отрицательного бета-эффекта, т.е. при $D < 0$ и $\beta > 0$,

$$\begin{aligned}(\text{H}) \quad X &= |D|, \quad Y = Z = 0, \\ (\text{R}_{\pm}) \quad X &= D_2 \equiv \sqrt{\frac{\beta^2}{4\Gamma^2} + \frac{\zeta}{\Gamma} + \frac{|\beta|}{2\Gamma}}, \\ Y &= \pm D_2^{1/2}(|D| - D_2)^{1/2}, \\ Z &= \pm D_2^{-1/2}(|D| - D_2)^{1/2}.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что уравнения нижних ветвей области существования режимов Россби задаются равенствами $|D| = D_{1,2}$. В плоскости внешних критериев подобия (Ta , Ro_T) они описываются кривыми (согласно (10.6) и соответствующему выражению для β)

$$\text{Ro}_T = \sqrt{\frac{\beta_0^2}{4\Gamma^2} + \frac{1}{\zeta\Gamma \text{Ta}}} \mp \frac{|\beta_0|}{2\Gamma}, \quad (10.11)$$

которые асимптотически при $\text{Ta} \rightarrow \infty$ ведут себя как $\text{Ro}_T = (\zeta|\beta_0|\text{Ta})^{-1}$ и $\text{Ro}_T = \beta_0/\Gamma = \text{const}$ соответственно для положительного и отрицательного бета-эффектов.

Легко показать, что в рамках редуцированных уравнений (10.9) формулы (10.11) описывают также критические кривые режимов Н и R. Из сопоставления (10.8) и (10.11) видно, что бета-эффект дестабилизирует или стабилизирует режим Н в зависимости от знака бета-эффекта.

Результаты численного исследования устойчивости режимов Н и R₋ на основе нередуцированных уравнений движения (10.1) представлены на рис. 15 для $\zeta = 1$ при положительном и отрицательном бета-эффектах, на рис. 16 для $\zeta = 3$, $\sigma_{\text{В1}}\varphi > 0$ и на рис. 17 для $\zeta = 0,4$,

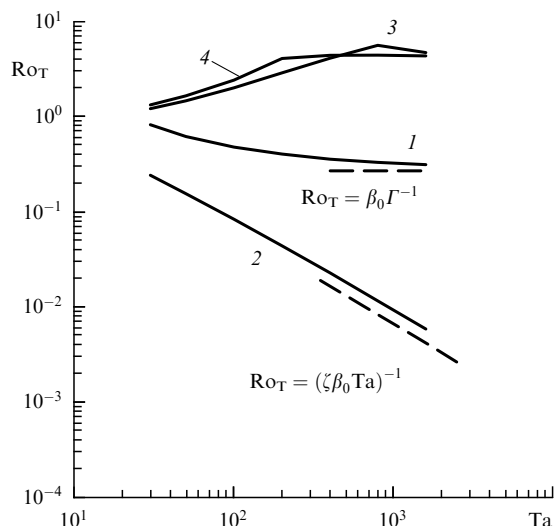


Рис. 15. Критические кривые режима R_- для положительного (2, 3) и отрицательного (1, 4) бета-эффектов при $|\varphi| = 1$ и $\zeta = 1$. Штриховые линии относятся к соответствующим квазигеострофическим критическим кривым.

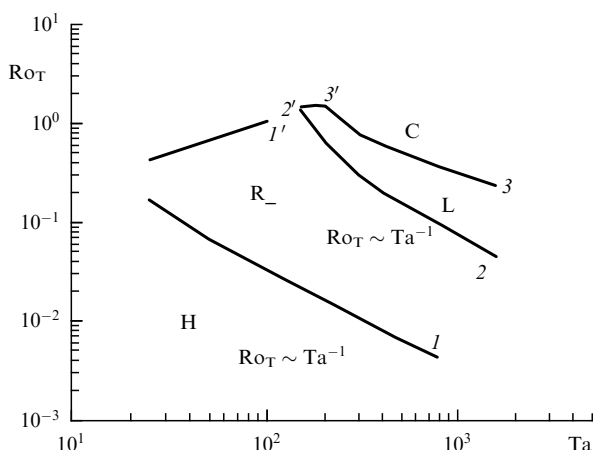


Рис. 16. Критические кривые режима R_- , периодического (C) и стохастического (L) режимов при $\zeta = 3$ и положительном бета-эффекте ($\sigma_{B1}\varphi > 0$, $|\varphi| = 1^\circ$). Символ L означает, что хаос аналогичен аттрактору Лоренца.

$\sigma_{B1}\varphi < 0$. Расчеты проводились при значениях главных полуосей эллипсоида $a_1 = 3$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$ и угле между $-\mathbf{g}$ и $\mathbf{\Omega}_0$, равном $|\varphi| = 1^\circ$. Для каждого из указанных примеров асимптотика нижней ветви критической кривой согласуется с "геострофической" кривой устойчивости. Вопреки ожиданию оказалось, что квазигеострофическое приближение удовлетворительно описывает или, по крайней мере, отражает главные особенности точных фазовых траекторий даже при "агеострофических" (недостаточно малых) Ro_T при условии, что $Ta \gtrsim 50$.

В областях, ограниченных на рис. 15 ($\zeta = 1$) критическими кривыми режима R_- , автоколебаний не было обнаружено. Рисунок иллюстрирует влияние бета-эффекта на устойчивость стационарных режимов Россби. Критические кривые смещаются вниз или вверх, а скорость убывания их нижних ветвей возрастает (убывает) при $\sigma_{B1}\varphi > 0$ ($\sigma_{B1}\varphi < 0$). Однако рост верхних ветвей заметно замедляется под действием бета-эффекта любого знака. Заметим также, что бета-эффект

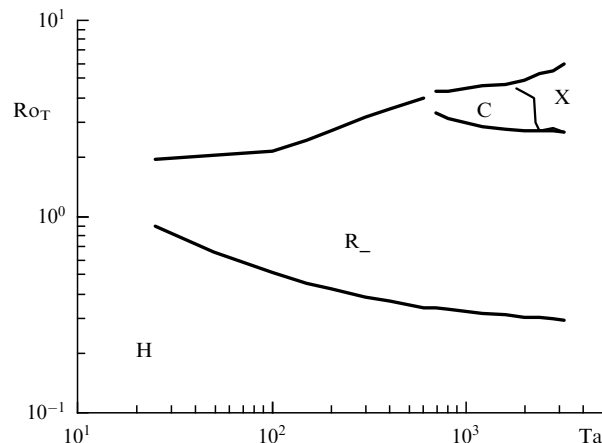


Рис. 17. Критические кривые режима R_- , периодического (C) и стохастического (X) режимов при $\zeta = 0,4$ и отрицательном бета-эффекте ($\sigma_{B1}\varphi < 0$, $|\varphi| = 1^\circ$). Символ X означает, что происхождение хаоса неизвестно.

способствует переходу $H \rightarrow R_-$, который при определенных условиях становится доминирующим.

Кривая $1-1'$ на рис. 16 разделяет области устойчивости режимов H и R_- . Хаос, родственник аттрактору Э. Лоренца, наблюдается в области режима L, ограниченной кривыми $2-2'$ и $3'-3$. Отметим, что зависимость $Ro_T \sim Ta^{-1}$, соответствующая ветви $2-2'$, найдена численно и не имеет теоретического объяснения. Критические кривые при $\zeta > 1$ смещаются в область малых чисел Россби, что способствует сближению точных и квазигеострофических фазовых траекторий. В частности, рис. 18а иллюстрирует степень близости точного и квазигеострофического стохастических аттракторов, что типично для подавляющей части области L.

Некоторые наблюдения, сделанные при численном моделировании хаоса в области L, состоят в следующем.

1. Квазигеострофическая модель (10.9) хорошо описывает установившиеся режимы, но переходные стадии точных и приближенных решений могут существенно различаться. Кроме того, установившиеся точные и квазигеострофические траектории значительно различаются по фазе.

2. Как правило, "точный" хаос сопровождается квазигеострофическим, тогда как обратное неверно. В частности, квазигеострофический хаос наблюдается в области, находящейся выше ветви $3-3'$.

3. Иногда переход $R_- \rightarrow L$ означает переход в метастабильное состояние. Аттрактор Лоренца продолжает существовать длительное время, но затем медленно деградирует в режим R_+ , т.е. реализуется двойной переход $R_- \rightarrow L \rightarrow R_+$. Такая ситуация типична для окрестности кривой $2-2'$, что существенно затрудняет ее построение. Длительность метастабильного состояния в экспериментах варьировалась от нескольких месяцев до нескольких десятилетий, если период общего вращения принять за сутки. Уместно отметить, что режимы R_+ и L сосуществуют, т.е. оба режима устойчивы в области L или, по крайней мере, один из них является метастабильным.

При отрицательном бета-эффекте и $\zeta > 1$ автоколебаний в проведенных численных экспериментах не наблюдалось. Это не слишком удивительно, потому что квазигеострофическая модель удовлетворительно опи-

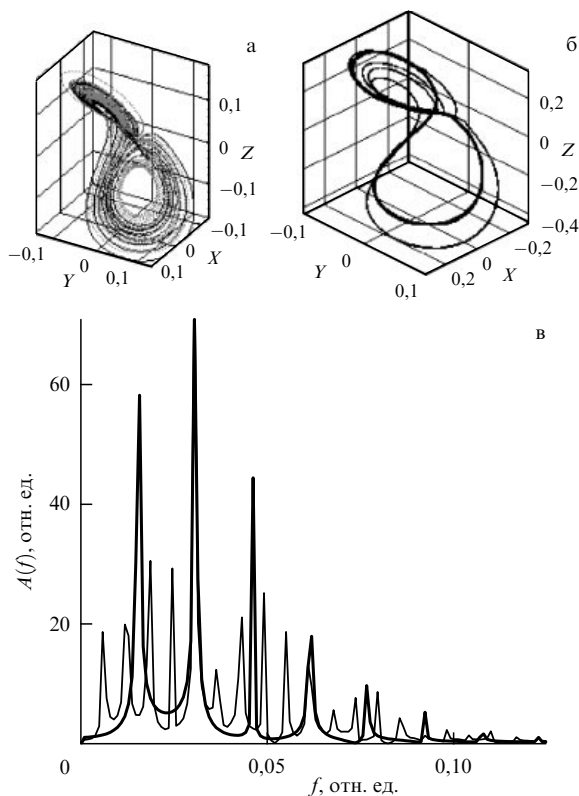


Рис. 18. (а) Фазовый портрет "квазигеострофического" и точного лоренцева хаоса в пространстве (X, Y, Z) для положительного бета-эффекта и $\zeta = 3$, $Ta = 450$, $Ro_T = 0,2$. (б) Фазовый портрет автоколебаний во внешней окрестности кривой $\beta' - \beta$ (см. рис. 16) при $\zeta = 3$, $Ta = 450$, $Ro_T = 1$. (в) Спектральные диаграммы для случая, представленного на рис. 6. Жирные линии соответствуют квазигеострофическому приближению, а тонкие — точным решениям.

сывает движение бароклинного волчка в подавляющей части области устойчивости R-режимов, а изменение знака бета-эффекта влечет за собой изменение знака коэффициента r в системе Лоренца (10.10). Согласно первоначальной трактовке Лоренца, эта система описывает рэлеевскую конвекцию жидкости, подогреваемой снизу, а r является числом Рэлея. Изменение знака r означает подогрев сверху, а в этом случае трудно ожидать возникновения колебаний.

Ситуация меняется, если, сохраняя знак бета-эффекта отрицательным, положить $\zeta < 1$. Это видно из рис. 19, соответствующего $\zeta = 0,4$ и $\sigma_{B1}\varphi < 0$ ($|\varphi| = 1^\circ$). В этом случае критическая кривая, показанная на рис. 17, сдвигается в область "агеострофических" чисел Россби. Поэтому квазигеострофические уравнения (10.9) "работают" лишь в окрестности нижней ветви критической кривой. Регулярные автоколебания и хаос неизвестного происхождения возникают в областях C и X соответственно (см. рис. 17) и описываются только нередуцированными уравнениями.

Подводя итоги этого раздела, отметим два обстоятельства. Во-первых, и это самое главное, под влиянием бета-эффекта асимптотика нижней ветви критической кривой $Ro_T \sim Ta^{-1/2}$ сменяется асимптотиками $Ro_T \sim Ta^{-1}$ или $Ro_T = \text{const}$ в зависимости от положительности или отрицательности бета-эффекта соответственно. Эти изменения проявляются при $|\varphi| = 1^\circ$ и вполне реалистических значениях числа Тейлора, т.е. характер-

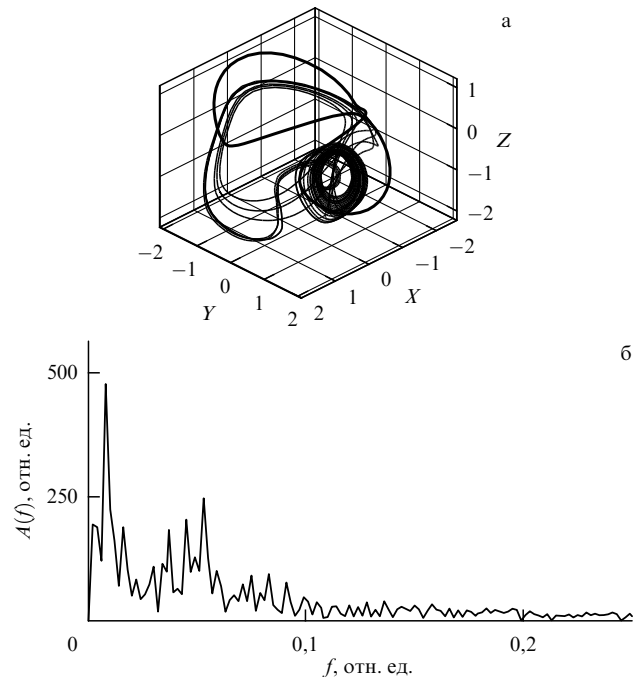


Рис. 19. Фазовый портрет стохастического режима X (а) и его спектральная диаграмма (б) при $\zeta = 0,4$, $Ta = 3200$ и $Ro_T = 4,5$.

ных для большинства лабораторных экспериментов, обсуждаемых в [53, 55] (см. также диаграмму на рис. 13). Эксперименты проводились с вращающимися кольцевыми сосудами, наполненными жидкостью со свободной поверхностью. Искривление свободной поверхности под влиянием центробежных сил создает положительный бета-эффект, соответствующий малым, но конечным значениям φ . Вероятно, малость этого угла побудила Э. Лоренца [58, 59] при построении 8- и 12-компонентных моделей пренебречь бета-эффектом, создаваемым центробежными силами, что и привело к асимптотике $Ro_T \sim Ta^{-1/2}$. Наши исследования показывают, что учет малого угла наклона Ω_0 по отношению к $-g$ дает результат, согласующийся с экспериментом, на что обратил внимание А.Е. Гледзер [60] (см. рис. 13).

Во-вторых, бета-эффект является причиной возникновения в рассматриваемой модели регулярных и хаотических автоколебаний, которые действительно наблюдаются в лабораторных экспериментах (см. рис. 13) и для обнаружения и описания которых Э. Лоренц вместо 8-компонентной сконструировал 12-компонентную систему. В какой степени найденные здесь автоколебательные режимы соответствуют реальности, еще предстоит выяснить, уточнив, в частности, значения эффективных коэффициентов трения λ и теплопроводности μ , адекватные эксперименту. Однако сам факт возникновения малокомпонентной турбулентности глобальных геофизических течений вследствие бета-эффекта представляется важным с точки зрения понимания причин их непредсказуемости. Подробно и более предметно эти вопросы обсуждаются в [60].

11. Заключение

Найденные аналогии между фундаментальными механическими и гидродинамическими инвариантами, указывающие на общность их происхождения, доставят, я

надеюсь, безотносительно к практическому применению определенное удовлетворение гидродинамикам и физикам-теоретикам. Это относится и к квазигеострофическим приближениям уравнений движения бароклинного волчка, которые в определенных, упомянутых в разделах 9, 10, случаях совпадают с механическими уравнениями Эйлера и известными уравнениями Э. Лоренца, описывающими малокомпонентную турбулентность. Эти уравнения формулируются в терминах главных характеристик глобальных геофизических течений, а потому их можно рассматривать в качестве "игрушечных" моделей общих циркуляций невязкой и вязкой атмосфер, обладающих общими симметриями с реальной атмосферой.

Концептуально проведенные наблюдения могут оказаться полезными при интерпретации гидродинамических явлений с помощью фундаментальных инвариантов движения или для построения упрощенных гидродинамических моделей, сохраняющих фундаментальную симметрию исходных гидродинамических уравнений. В этом отношении определенный интерес представляет теорема 3. За последнее время произошло осознание того, что в возникновении и эволюции торнадо и тропических циклонов существенную, если не решающую, роль играет спиральность. Вследствие сложности таких метеорологических объектов и трудности их описания возникает соблазн построить конечномерную модель гидродинамических уравнений Эйлера, описывающую нестационарные течения идеальной однородной жидкости с отличной от нуля спиральностью. Согласно теореме 3 не существует нестационарных решений уравнений движения идеальной однородной жидкости, строго описываемых конечномерной динамической системой, которая принадлежит классу ОТТ и обладает отличным от нуля инвариантом спиральности. В.И. Юдович в частном сообщении высказал в связи с этим "очень сильное подозрение, что группа $SDiffD$ не имеет других вполне геодезических подгрупп, кроме тех, которые порождаются пространственно линейными полями". В определенной степени я разделяю это подозрение. Однако пока подозрение остается подозрением, теорема 3 небесполезна, по крайней мере, в одном отношении — она предупреждает соблазн искать точные решения гидродинамических уравнений Эйлера, сохраняющие спиральность и описываемые динамической системой, которая принадлежит классу ОТТ.

В настоящем обзоре мы попытались показать, что глобальные течения действительно наследуют фундаментальные свойства механических движений. С этой точки зрения волчок в полях гравитации и сил Кориолиса можно рассматривать в качестве механического прообраза атмосфер вращающихся планет и их лабораторных аналогов: он воспроизводит движения, аналогичные волнам Россби, приближенную инвариантность вертикальной завихренности однородной несжимаемой вращающейся жидкости, механизм бароклинной неустойчивости Иди, энергетический цикл и области устойчивости фундаментальных режимов Хэдли и Россби, малокомпонентную турбулентность и непредсказуемость глобальных геофизических течений. По существу это означает, что перечисленные свойства геофизических течений можно было бы предсказать на основе анализа поведения баротропного и бароклинного волчков. Читатель-скептик скажет, что эти предсказания сделаны

постфактум. Справедливо, почти справедливо. Один расходящийся с теорией экспериментальный результат, относящийся к асимптотике нижней ветви критической кривой режима Россби, нам все-таки удалось объяснить. Кроме того, мы надеемся, что результаты раздела 10 могут оказаться полезными для климатологов. Речь идет о возможности сосуществования принципиально различных, т.е. регулярных и стохастических, режимов движения и ненулевой вероятности немотивированного извне взаимного перехода одного метастабильного динамического состояния в другое.

Сказанное дает также надежду на то, что систему (7.22)–(7.24), записанную с учетом общего вращения, можно использовать для предсказания фундаментальных свойств глобальных течений во внутреннем жидком ядре Земли, циркуляции на Солнце и других вращающихся звездах, гидродинамика которых еще недостаточно изучена. Учет гидродинамической спиральности можно осуществить комбинированием пространственно линейных полей с полями, описывающими вихрь Хилла [61] (см. также более доступные публикации [62, 63]).

Благодарности. Автор выражает искреннюю признательность Е.Б. Гледзеру, Г.С. Голицыну, В.П. Гончарову, Ю.А. Данилову, Е.А. Кузнецову и В.И. Юдовичу за неоднократные конструктивные дискуссии, способствующие пониманию результатов и улучшению качества изложения материала. Особую благодарность автор выражает В.М. Пономареву за подготовку вычислительных программ и иллюстративного материала и рецензенту рукописи, сделавшему ряд исключительно ценных и важных замечаний (не говоря уже о тщательном прочтении рукописи и указании на многочисленные неточности), без учета которых материал существенно потерял бы в качестве. Низкий поклон адресую Н.А. Должанской, без теплого участия которой мне едва ли удалось бы завершить рукопись.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 04-05-64588).

Список литературы

- Greenhill A G *Proc. Camb. Philos. Soc.* **3** 233 (1879)
- Жуковский Н Е *Журн. Русск. физ.-хим. общ.* **17/1** 81, 145, 431 (1885)
- Hough S S *Philos. Trans. R. Soc. London Ser. A* **186** (1) 469 (1895)
- Poincaré H *Bull. Astron.* **27** 321 (1910)
- Моисеев Н Н, Румянцев В В *Динамика тел с полостями, содержащими жидкость* (М.: Наука, 1965)
- Arnold V *Ann. Inst. Fourier* **16** (1) 319 (1966)
- Арнольд В И *Математические методы классической механики* (М.: Наука, 1979)
- Arnold V I, Khesin B A *Topological Methods in Hydrodynamics* (Appl. Math. Sci., Vol. 125) (New York: Springer, 1999)
- Kirchhoff G R *Vorlesungen über Mathematische Physik* (Leipzig: B.G. Teubner, 1876)
- Должанский Ф В *Изв. РАН. Сер. Физ. атм. и океана* **37** 446 (2001)
- Rossby C G et al. *J. Marine Res.* **2** 38 (1939)
- Ertel H *Meteorol. Z.* **59** (9) 277 (1942)
- Обухов А М *Изв. АН СССР. Сер. географ. и геофиз.* **13** 281 (1949)
- Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Гидродинамика* (М.: Наука, 1986)
- Moreau J J C.R. *Acad. Sci.* **252** 2810 (1961)
- Moffatt H K *J. Fluid Mech.* **35** 117 (1969)
- Woltjer L *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **44** 489, 833 (1958)
- Lorenz E N *J. Atm. Sci.* **37** 1685 (1980)

19. Lorenz E N *J. Atm. Sci.* **43** 1547 (1986)
20. Lorenz E N, Krishnamurthy V J. *Atm. Sci.* **44** 2940 (1987)
21. Reznik G M, Zeitlin V, Ben Jelloul M J. *Fluid Mech.* **445** 93 (2001)
22. Lorenz E N *J. Atm. Sci.* **20** 130 (1963)
23. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Механика* (М.: Наука, 1973)
24. Кочин Н Е, Кибель И А, Розе Н В *Теоретическая гидромеханика* Т. 1 (М.: Физматгиз, 1963)
25. Lamb H *Hydrodynamics* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993)
26. Гледзер Е Б, Должанский Ф В, Обухов А М *Системы гидродинамического типа и их применение* (М.: Наука, 1981)
27. Должанский Ф В *Изв. АН СССР. Сер. Физ. атм. и океана* **8** 661 (1972)
28. Должанский Ф В *Изв. АН СССР. Сер. Физ. атм. и океана* **13** 201 (1977)
29. Вишик С М, Должанский Ф В *ДАН СССР* **238** 1032 (1978)
30. Вишик С М, см. [24] Приложение 2
31. Pedlosky J *Geophysical Fluid Dynamics* (Heidelberg: Springer, 1979) [Педлоски Дж *Геофизическая гидродинамика* (М.: Мир, 1984)]
32. Moran F *Publ. Inst. Nac. Geofis. (Madrid)* 21 (1942)
33. Charney J G *Geophys. Publ.* **17** (2) 1 (1948)
34. Обухов А М, в сб. *Н.Е. Кочин и развитие механики* (Отв. ред. А Ю Ишлинский, сост. Н Н Кочина) (М.: Наука, 1984)
35. Захаров В Е, Кузнецов Е А *УФН* **167** 1137 (1997)
36. Salmon R *AIP Conf. Proc.* **88** 127 (1982)
37. Salmon R J. *Fluid Mech.* **132** 431 (1983)
38. Salmon R *Annu. Rev. Fluid Mech.* **20** 225 (1988)
39. Обухов А М *Метеорол. и гидрол.* (2) 3 (1964)
40. Hoskins B J, McIntyre M E, Robertson A W *Quart. J. R. Meteorol. Soc.* **111** 877 (1985)
41. Обухов А М, Курганский М В, Татарская М С *Метеорол. и гидрол.* (8) 111 (1988)
42. Haynes P H, McIntyre M E *J. Atm. Sci.* **47** 2021 (1990)
43. Viúdez Á J. *Atm. Sci.* **56** 507 (1999)
44. Огородникова Н П, Путин Г Ф *ДАН СССР* **269** 1065 (1983)
45. Должанский Ф В, Пономарев В М *Изв. РАН. Сер. Физ. атм. и океана* **38** 316 (2002)
46. Арнольд В И и др., в сб. *Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления* Т. 5 (Под ред. В И Арнольда, Р В Гамкрелидзе) (М.: ВИНТИ, 1986)
47. Eady G T *Tellus* **1** 33 (1949)
48. Глуховский А Б, Должанский Ф В *Изв. АН СССР. Сер. Физ. атм. и океана* **16** 451 (1980)
49. Зиглин С Л *Тр. Моск. мат. общ.* **41** 287 (1980)
50. Гледзер А Е *Изв. РАН. Сер. Физ. атм. и океана* **39** 466 (2003)
51. Должанский Ф В, Мямлина Л А *Изв. АН СССР. Сер. Физ. атм. и океана* **12** 3 (1976)
52. Должанский Ф В, Плешанова Л А, в сб. *Физика атмосферы и проблема климата* (Отв. ред. Г С Голицын, А М Яглом) (М.: Наука, 1980)
53. Lorenz E N *The Nature and Theory of the General Circulation of the Atmosphere* (Geneva: World Meteorological Organization, 1967) [Лоренц Э Н *Природа и теория общей циркуляции атмосферы* (Л.: Гидрометеиздат, 1970)]
54. Starr V P *Physics of Negative Viscosity Phenomena* (New York: McGraw-Hill, 1968) [Старр В *Физика явлений с отрицательной вязкостью* (М.: Мир, 1971)]
55. Hide R, Mason P T *Adv. Phys.* **24** (1) 47 (1975)
56. Должанский Ф В, Голицын Г С *Изв. АН СССР. Сер. Физ. атм. и океана* **13** 550 (1977)
57. Должанский Ф В *Изв. АН СССР. Сер. Физ. атм. и океана* **17** 563 (1981)
58. Lorenz E N *J. Atm. Sci.* **19** 39 (1962)
59. Lorenz E N *J. Atm. Sci.* **20** 448 (1963)
60. Гледзер А Е и др. *Изв. РАН. Сер. Физ. атм. и океана* (в печати)
61. Hill M J M *Philos. Trans. R. Soc. London Ser. A* **185** (1894)
62. Batchelor G K *An Introduction to Fluid Dynamics* (Cambridge: Univ. Press, 1967) [Бэтчелор Дж *Введение в динамику жидкости* (М.: Мир, 1973)]
63. Saffman P G *Vortex Dynamics* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992) [Сэффмэн Ф Дж *Динамика вихрей* (М.: Научный мир, 2000)]

On mechanical prototypes of fundamental hydrodynamical invariants and slow manifolds

F.V. Dolzhansky

A.M. Obukhov Institute of Atmospheric Physics, Russian Academy of Sciences,
per. Pyzhevskii 3, 119017 Moscow, Russian Federation
Tel. (7-495) 951-8480
E-mail: dolzhan@ifaran.ru

Arnold's group-theoretical concept of a generalized rigid body (GRB) includes Euler equations for a classical gyroscope and those for an ideal homogeneous fluid as special cases. Here, an extension of GRB to include motion in force fields with scalar and vector potentials and in a Coriolis force field is discussed. Generalized heavy-top and MHD-system concepts are introduced, which include as special cases the classical Euler-Poisson heavy top equations and the Kirchhoff equations for a rigid body in the potential flow of an ideal homogeneous fluid, on the one hand, and the Oberbeck – Bussinesq heavy fluid equations and MHD equations, on the other. On this basis, mechanical prototypes of all known fundamental hydrodynamic invariants are constructed, as are those of global geophysical flows, including the global atmospheric circulation.

PACS numbers: **02.40. – k, 45.40. – f, 92.10. – c, 92.60. – e**

Bibliography — 63 references

Received 22 December 2004, revised 25 August 2005

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **175** (12) 1257 – 1288 (2005)

Physics – Uspekhi **48** (12) (2005)