Ноябрь 2005 г. УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК *Том 175, № 11*

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Калибровочные теории как теории струн: первые результаты

А.С. Горский

Рассматривается дуальность между калибровочными теориями и теорией струн в искривленном пространстве. В качестве основного примера обсуждается дуальность между неабелевой конформной калибровочной теорией с $N=4$ суперсимметрией и теорией замкнутой суперструны, распространяющейся в метрике $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$. Показано, что дуальность в приближении супергравитации для струны позволяет вычислить различные характеристики калибровочной теории в режиме сильной связи. В приближении классической суперструны получено выражение для вильсоновской петли в случае специального контура. Обсуждается роль скрытой интегрируемости в низших петлевых вычислениях в калибровочной теории и в различных приближениях теории струны. Показано, каким образом операторы калибровочной теории с большими квантовыми числами описываются в дуальной струнной картине. Предъявлены примеры метрик, отвечающих дуальному описанию калибровочных теорий с нарушенной конформной симметрией, и показано, как в гравитационных терминах описывается их вакуумная структура.

PACS numbers: **11.15.–q**, **11.25.–w**, 11.25.Tq, 11.30.Pb

Содержание

А.С. Горский. Государственный научный центр Российской Федерации "Институт теоретической и экспериментальной физики",
117218 Москва, Б. Черемушкинская ул. 25, Российская Федерация
Тел. (095) 129-94-93. Факс (095) 127-08-33
E-mail: gorsky@itep.ru

Статья поступила 19 августа 2005 г.

1. Введение

Термин "дуальность" имеет достаточно долгую историю. Он возник в теории сильных взаимодействий, когда Венециано предложил описывать амплитуды рассеяния адронов формулами, обладающими симметриями относительно перестановки *s*- и *t*-каналов. Подобная симметрия подразумевала возможность струнной интерпретации, однако потребовалось почти тридцать лет, чтобы качественная картина приобрела достаточно ясные количественные очертания. За эти годы появилось несколько новых типов дуальности, связывающих в основном различные типы теории струн или теории струн, распространяющихся в различных фоновых полях.

Параллельно идея дуальности развивалась и в контексте теории поля, что позволяет, например, связать теории в "электрической" и "магнитной" формулировке. Поэтому, говоря о дуальности, требуется четко определить, о какой дуальности идет речь. Предметом настоящего обзора является формулировка дуальности между неабелевыми калибровочными теориями и теорией замкнутой суперструны, распространяющейся в искривленном пространстве.

Идея дуальности между калибровочными теориями и теорией струн является одной из наиболее глубоких в теории фундаментальных взаимодействий. Она призвана формализовать связь теории струн с физически интересными теориями поля. Качественная программа, содержащая многие ключевые идеи, развитые в дальнейшем, была сформулирована Поляковым в 80-е годы.

После того как гипотеза дуальности была количественно сформулирована в работах [1–3], в теории поля и теории струн был получен ряд новых результатов, в том числе и достаточно неожиданных. Мы попытаемся сформулировать идеи, на которых основано понятие дуальности, ограничиваясь только самыми необходимыми техническими деталями. Нашей главной целью будет иллюстрация общих идей конкретными примерами дуальности, которые могут быть проверены количественно. Мы также приведем примеры предсказаний, являющихся следствием дуальности, для калибровочных теорий в режиме сильной связи.

После 1997 г. появилось около четырех тысяч работ, в которых рассматривались те или иные аспекты дуальности между калибровочными теориями и теорией струн, поэтому отразить в полной мере все полученные интересные результаты не представляется возможным. Мы надеемся, что список литературы включает в себя достаточное количество специализированных обзоров, которые позволят читателю получить информацию, касающуюся более технических аспектов проблемы.

Наиболее оптимистическая точка зрения на теорию струн состоит в том, что она является "теорией всего", однако дуальность между калибровочной теорией и теорией струны предполагает более умеренный взгляд на проблему. Согласно гипотезе дуальности калибровочная теория Янга–Миллса в четырех измерениях, в простейшем случае обладающая суперсимметрией, эквивалентна теории суперструны, распространяющейся в нетривиальной геометрии в десяти измерениях.

Исходной идеей, позволяющей предположить наличие подобной связи, является дуальность между открытыми и замкнутыми струнами, которая, например, связывает распространение замкнутой струны в древесном приближении с однопетлевой амплитудой в теории открытой струны. Поскольку открытая струна содержит в своем спектре безмассовый калибровочный бозон, а замкнутая струна — безмассовый гравитон, естественно ожидать дуальности между калибровочной теорией и теорией гравитации. Однако дуальности между замкнутыми и открытыми струнами оказывается недостаточно для формулировки дуальности между калибровочной теорией и теорией струны, и требуется привлечение дополнительных результатов, полученных за последнее десятилетие.

Существенную роль играют солитонные объекты теории струн — D-браны, на мировой поверхности которых определена нетривиальная теория поля. Важным обстоятельством является тот факт, что открытая струна может заканчиваться на D-бране [4] и безмассовая калибровочная мода открытой струны генерирует абелево калибровочное поле на мировой поверхности браны.

Более того, на мировой поверхности N_c совпадающих бран генерируется $U(N_c)$ неабелева калибровочная теория [5]. Таким образом в нашем распоряжении оказывается "конструктор", позволяющий получить калибровочную теорию поля на мировой поверхности бран с "заранее заданными свойствами".

Чтобы рассмотреть роль D-бран в теории замкнутых струн, заметим, что любой массивный объект деформирует метрику вокруг себя и D-брана как объект с ненулевым натяжением не является исключением. Таким образом, замкнутая струна, которая может излучаться браной, распространяется в нетривиальной геометрии, определяемой браной. В дальнейшем в основном рассматривается предел большого числа N параллельных бран и показывается, что в этом пределе метрика существенно упрощается. Более того, p-браны являются источниками полей $(p+1)$-форм, аналогично тому как заряженная точечная частица является источником поля 1-формы, т.е. векторного электромагнитного потенциала. Поэтому замкнутые струны, помимо метрики, чувствуют поля высших форм, генерируемых бранами. Оказывается, что в некотором смысле можно забыть непосредственно про браны и изучать динамику замкнутых струн во внешнем гравитационном поле, отвечающем большому числу бран, и во внешнем поле p-форм. Мы постараемся объяснить, что нахождение геометрии, отвечающей калибровочной теории поля с известными симметриями, является наиболее трудной частью задачи.

Здесь уместно сделать небольшое историческое отступление. Идея дуальности калибровочных полей и теории струн в многомерном пространстве была достаточно давно предложена Поляковым и развивалась им в течение нескольких десятилетий. Существенным шагом явилось осознание роли одной из "дополнительных", по отношению к обычным четырем, координат как ренормгруппового масштаба в четырехмерной теории поля [6]. Следующее важное продвижение было сделано Клебановым [7], который показал возможность самосогласованного учета обратной реакции испускаемых браной замкнутых струн на калибровочную теорию на мировой поверхности браны.

Кульминационной стала работа Малдасены [1], который предположил, что замкнутая струна, распространяющаяся в геометрии $AdS_5 \times S^5$ и во внешнем поле 4-формы с постоянной напряженностью, дуальна калибровочной теории с максимально возможной в четырех измерениях $N = 4$ суперсимметрией. В исходной формулировке Малдасены считалось, что важны безмассовые моды струны, т.е. теория струны эффективно редуцировалась к теории супергравитации. В формулировке также неявно предполагался голографический принцип [8], так как калибровочная теория была сформулирована на границе AdS_5, а супергравитация — во всем десятимерном пространстве.

Почти сразу после работы Малдасены было осознано [2, 3], что действие на решении классических уравнений движения супергравитации при фиксированных граничных значениях полей супергравитации является производящим функционалом для корреляторов в калибровочной теории на границе. При этом поля, входящие в корреляторы, в качестве источников имеют граничные значения соответствующих мод из лагранжиана супергравитации. Впоследствии были найдены метрики и поля форм, определяющие геометрию теории струн дуальной калибровочной теории с меньшей суперсимметрией [9–11]. Более того, был найден пример геометрии, в которой теория струны оказывается точно решаемой, и детальное сравнение с соответствующим сектором калибровочной теории [12] подтвердило справедливость дуального описания.

Настоящий обзор организован следующим образом. Сначала вводятся необходимые понятия, формулируется гипотеза Малдасены для $N = 4$ суперсимметричной калибровочной теории Янга–Миллса. В разделе 3 дуальность для $N = 4$ теории изучается в супергравитационном приближении и показывается, каким образом корреляторы в калибровочной теории могут быть вычислены с помощью решений классических уравнений движения в супергравитации. В качестве красивой иллюстрации дуальности в этом приближении показывается, что в гидродинамическом режиме калибровочной теории в режиме сильной связи прогнозируется универсальное поведение для вязкости. В разделе 4 рассматривается режим, когда справедливо приближение классической струны, и в качестве примера вычисляется вильсоновская петля с геометрией окружности в $N = 4$ теории. В данной геометрии вычисление с помощью классической струны можно сравнить с явным вычислением фейнмановских диаграмм при произвольной константе связи.

В разделе 5 обсуждаются предсказания дуальности для матрицы аномальных размерностей операторов с большими квантовыми числами в суперсимметричной калибровочной теории. Оказывается, что собственные значения матрицы аномальных размерностей подобных операторов совпадают с классической энергией струны, вращающейся с соответствующими угловыми моментами в $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$. Ключевую роль в данном случае играет скрытая интегрируемость, отражающая высокую степень симметрии системы.

Интегрируемость может быть явно продемонстрирована в низших порядках теории возмущений в калибровочной теории, а также для струны в $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ в классическом приближении. В следующем разделе кратко обсуждается предел, когда геометрия $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ редуцируется в так называемый предел *pp*-волны, в котором может быть точно найден квантовый спектр струны, совпадающий с аномальной размерностью соответствующих операторов в калибровочной теории в низших порядках теории возмущений. В данном пределе удается точно отождествить гильбертовы пространства дуальных теорий.

В двух последующих разделах рассматриваются теории с меньшей ($N = 2$ и $N = 1$) суперсимметрией, которые более похожи на реалистичную теорию сильных взаимодействий. Показывается, что бета-функция $N = 2$ теории может быть получена в рамках супергравитационного приближения, причем деформация геометрии $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ в геометрию, дуальную калибровочной теории с $N = 2$, может быть явно описана. В разделе 8 исследуется дальнейшая деформация дуальной геометрии для $N = 1$ суперсимметричной теории и показывается, что основные непертурбативные явления (конечное число вакуумных состояний, глюинный конденсат, точная бета-функция) могут быть описаны в дуальной теории струны в приближении супергравитации. Некоторые результаты, касающиеся несуперсимметричных теорий, приводятся в разделе 9.

Литература, касающаяся дуальности между калибровочными теориями и теорией струн, обширна и не может быть полностью отражена в коротком обзоре. Поэтому мы надеемся, что исчерпывающая библиография, а также необходимый вводный материал могут быть найдены в указанных ниже более специальных обзорах. Введение в рассматриваемую дуальность с большим количеством примеров содержится в обзорах [13, 14], вычисление вильсоновских петель подробно излагается в [15]. Различные аспекты скрытой интегрируемости детально описываются в обзорах [16–18]. Дуальность в приближении супергравитации для струны подробно обсуждается для $N = 2$ теории в [11], а для $N = 1$ теории в [19, 20]. Точно решаемый предел струны в геометрии *pp*-волны и ее связь с сектором специальных операторов в $N = 4$ калибровочной теории могут быть найдены в [21].

2. Основные элементы дуальности

Впервые дуальность была сформулирована для конформной суперсимметричной $N = 4$ калибровочной теории с нулевой бета-функцией. Состав полей теории включает в себя калибровочный бозон, шесть действительных скалярных полей Φ_i и их фермионные суперпартнеры. Все поля лежат в присоединенном представлении калибровочной группы $\mathrm{SU}(N_\mathrm{c})$, а глобальная $\mathrm{SO}(6)$-симметрия отвечает вращению в пространстве скалярных полей. В теории имеется бесконечное число вакуумных состояний — вакуумное пространство модулей, точка в котором параметризуется вакуумными значениями скалярных полей.

Действие теории в компонентах имеет вид

$$S_{N=4} = \frac{1}{g_{\mathrm{YM}}^2} \int \mathrm{d}^4 x \, \mathrm{Tr} \left[F_{\mu\nu}^2 + (D\Phi_i)^2 + [\Phi_i, \Phi_j]^2 \right] + \\ + \text{фермионы} \,. \tag{1}$$

Гипотеза дуальности предполагает, что калибровочная теория дуальна замкнутой суперструне типа IIB в метрике $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ [1]. Метрика десятимерного пространства в координатах Пуанкаре выглядит следующим образом:

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{r^2}{R^2}(-\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2 + \mathrm{d}x_3^2) + \frac{R^2}{r^2}\, \mathrm{d}r^2 + R^2 \,\mathrm{d}\Omega_5^2 \,. \tag{2}$$

Здесь r — радиальная координата в AdS_5, а последний член отвечает S^5-геометрии. Данная метрика по сути дела является метрикой, генерируемой D3-браной в области, близкой к горизонту.

Как уже отмечалось, D3-брана является также источником поля 4-формы A_4, поэтому внешнюю метрику, в которой распространяется струна, следует дополнить потоком напряженности поля 4-формы, который согласно дуальности совпадает с рангом калибровочной группы:

$$F_5 = dA_4 \,, \qquad \int_{\mathrm{S}^5} * F_5 = N_\mathrm{c} \,. \tag{3}$$

Радиусы AdS_5 и S^5 совпадают и равны

$$R^4 = 4\pi g_\mathrm{s} \alpha'^2 N_\mathrm{c} \,, \tag{4}$$

где g_s отождествляется со струнной константой связи.

Калибровочная теория локализована на границе AdS_5, причем конформная группа в четырех измерениях $\mathrm{SO}(2,4)$ и группа R-симметрии $N = 4$ теории $\mathrm{SO}(6)$ отождествляются с изометриями пространств AdS_5 и S^5 соответственно. Шесть дополнительных координат в десятимерном пространстве идентифицируются с вакуумными значениями шести действительных скалярных полей калибровочной теории.

Ключевым моментом, позволяющим проверять дуальность на количественном уровне, является совпадение оператора дилатации в калибровочной теории с гамильтонианом струны в радиальном квантовании. Таким образом, собственные значения оператора дилатации, определяющие аномальные размерности операторов в теории поля, совпадают с энергией струны, вычисленной на соответствующих решениях уравнений движения.

Следующим шагом должно быть отождествление параметров в дуальных теориях. В калибровочной теории имеются константа связи g_{YM} и ранг калибровочной группы N_{c}, в то время как в теории струны — натяжение струны T, струнная константа связи g_{s} и радиусы, задающие кривизны внешней геометрии.

Эффективное безразмерное натяжение струны определяется через радиусы следующим образом:

$$T = \frac{R^2}{2\pi\alpha'}\,, \tag{5}$$

т.е. ключевые соответствия имеют вид

$$\begin{gathered} 4\pi g_{\mathrm{s}} = g_{\mathrm{YM}}^2\,, \\ T = \frac{1}{2\pi}\,(g_{\mathrm{YM}}^2 N_{\mathrm{c}})^{1/2} = \frac{1}{2\pi}\,\lambda^{1/2}\,. \end{gathered} \tag{6}$$

Таким образом, при произвольной константе связи в калибровочной теории при дуальном описании имеется квантовая струна, распространяющаяся в сложной метрике и внешнем поле 4-формы. Такая теория исключительно сложна для анализа, и до настоящего времени ее удовлетворительной квантовой версии не построено, однако в различных пределах она поддается количественному анализу, что мы и будем интенсивно в дальнейшем использовать. В частности, можно рассматривать предел $g_{\mathrm{s}} \to 0$ при фиксированном натяжении, когда применимо приближение классической струны. Если также предположить, что $T \to \infty$, то в теории струны выживают только безмассовые моды и она эффективно редуцируется в теорию нулевых мод — супергравитацию.

В дальнейшем мы встретимся с примерами ситуаций, когда эффективным оказывается тот или иной предел. Мы покажем, что многие явления в режиме сильной связи в калибровочной теории успешно описываются в приближении супергравитации. Вычисления вильсоновской петли и аномальных размерностей операторов в калибровочной теории удобно сравнивать с вычислениями, сделанными в классическом пределе теории струны. Мы кратко рассмотрим предел pp-волны для метрики, в котором точно вычисляется спектр квантовой струны, и сравним его с аномальными размерностями операторов в калибровочной теории.

3. Приближение супергравитации

Рассмотрим предел большой константы 'т Хофта, когда $T \to \infty$ и все массивные моды струны отщепляются. Именно такой предел супергравитации был рассмотрен Малдасеной в его пионерской работе. В этом пределе струнная сигма-модель заменяется классическим действием IIB супергравитации

$$\begin{aligned} &Z(G_{\mu\nu}, B_2, \Phi, A, C_2, A_4) = \\ &\quad = \int \mathrm{d}^{10}x\,(-\det G)^{1/2} \exp(-2\Phi) \times \\ &\quad \times \left[R + 4G^{\mu\nu}\,\partial_\mu\Phi\,\partial_\nu\Phi - \frac{1}{12}\,H_3^2\right] - \\ &\quad - \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^{10}x\,(-\det G)^{1/2}\Big[G^{\mu\nu}\,\partial_\mu A\,\partial_\nu A + (F_3 - AH_3)^2 + \\ &\quad + \left(F_5 - \frac{1}{2}\,C_2\wedge H_3 + \frac{1}{2}\,B_2\wedge F_3\right)^2\Big] + \\ &\quad + \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^{10}x\,A_4\wedge H_3\wedge F_3 + \text{фермионы}\,, \end{aligned} \tag{7}$$

включающим метрику $G_{\mu\nu}$, два скалярных поля Φ и A, два поля 2-формы $C_{\mu\nu} = C_2$ и $B_{\mu\nu} = B_2$ с напряженностями F_3 и H_3 и поле 4-формы $A_{\mu_1,\,\mu_2,\,\mu_3,\,\mu_4} = A_4$ с напряженностью F_5. В дальнейшем предполагается, что на напряженность F_5 наложено условие самодуальности.

Первая количественная проверка дуальности сделана в работах [2, 3], где проводилось сравнение корреляторов в калибровочной $N=4$ теории с решениями классических уравнений движения в супергравитации. Было показано, что действие супергравитации, вычисленное на классическом решении с заданными граничными данными, является производящей функцией для корреляторов в калибровочной теории:

$$\begin{aligned} &\left\langle \exp\left(\sum \phi_k O_k\right)\right\rangle_{N=4} = \\ &\quad = \exp\left\{-S_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{sugra}}\left[\phi_k(x,z)\to\phi_k(x)\right]\right\}. \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь O_k — оператор в калибровочной теории, взаимодействующий с полем супергравитации $\phi_k(x,z)$, принимающим значение $\phi_k(x)$ на границе пространства AdS_5.

3.1. $N=4$ калибровочная теория в приближении супергравитации: вычисление корреляторов

Изучим простейший пример вычисления коррелятора калибровочной теории в дуальной теории супергравитации. Для этого рассмотрим поле дилатона Φ во внешней метрике пространства AdS_5 с действием

$$S(\Phi) = \mathrm{const}\cdot\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}z\;\frac{1}{z^3}\left[(\partial_z\Phi)^2 + (\partial_m\Phi)^2\right], \tag{9}$$

где $m = 1,\ldots,4$, и граница в метрике

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{R^2}{z^2}(\mathrm{d}z^2 + \mathrm{d}x_m^2) \tag{10}$$

лежит при $z=0$. Действие на классических решениях, которые регулярны на границе и падают при больших z, расходится [2, 3], что предполагает введение инфракрасного обрезания в AdS_5 при $z=\epsilon$.

Нормируемое решение уравнений движения для поля дилатона с граничным условием

$$\Phi(z=\epsilon, x) = \exp(\mathrm{i}kx) = \Phi_0(x)$$

имеет вид

$$\Phi(x_m, z) = \frac{(kz)^2 K_2(kz)}{(k\epsilon)^2 K_2(k\epsilon)} \exp\,(\mathrm{i}k_m x_m)\,, \qquad k = (k_m^2)^{1/2} \tag{11}$$

(K_2 — модифицированная функция Бесселя). Нетрудно вычислить и действие на решении:

$$S \propto N \int \mathrm{d}^4 x \int \mathrm{d}^4 y\; \Phi_0(x)\, \Phi_0(y)\; \frac{1}{\left(\epsilon^2 + |x_m - y_m|^2\right)^4} + O(\epsilon^2)\,. \tag{12}$$

Сравним полученный результат с вычислением коррелятора в калибровочной теории. Так как дилатон взаимодействует с оператором $\mathrm{Tr}\,F^2$, производящая функция

$$Z(\Phi_0) = \left\langle \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{g_{\mathrm{YM}}^2} \int \mathrm{d}^4 x\, \Phi_0(x)\, [\mathrm{Tr}\,F^2 + \ldots]\right)\right\rangle. \tag{13}$$

Здесь многоточие отвечает вкладу суперпартнеров, а усреднение проводится с помощью стандартного функционального интеграла $N = 4$ теории. В квадратичном приближении по полю дилатона функция

$$Z(\Phi_0) \propto$$
$$\propto \exp\left(-a\mathrm{i} \int \mathrm{d}^4 x\, \mathrm{d}^4 y\; \Phi_0(x)\, \Phi_0(y) \left\langle \mathrm{Tr}\,F^2(x)\, \mathrm{Tr}\,F^2(y)\right\rangle\right), \tag{14}$$

где $a = \mathrm{const}$.

Конформная инвариантность теории однозначно фиксирует двухточечные функции

$$\left\langle \mathrm{Tr}\,F^2(x)\, \mathrm{Tr}\,F^2(y)\right\rangle \propto \frac{N_{\mathrm{c}}^2}{|x_m - y_m|^8}\,. \tag{15}$$

Отсюда видно, что вычисления в супергравитации и калибровочной теории действительно совпадают, если аккуратно согласовать регуляризации в дуальных теориях. Если ввести параметр ультрафиолетовой регуляризации η_{UV} при $x_m = y_m$ и положить $\eta_{\mathrm{UV}} = \epsilon$, то достигается равенство, предсказываемое гипотезой дуальности. Рассмотренный пример был обобщен для целого ряда корреляторов более сложных операторов, и во всех случаях гипотеза дуальности оказывалась справедливой.

3.2. $N = 4$ калибровочная теория в приближении супергравитации: вязкость в гидродинамическом режиме

Интересное и достаточно неожиданное приложение дуальности между калибровочными теориями и струнами к вычислению гидродинамических характеристик калибровочной теории в режиме сильной связи предложено в [23]. Оказалось, что отношение вязкости к плотности энтропии, которое является макроскопической характеристикой гидродинамической системы, можно вычислить в дуальной теории супергравитации. В качестве гравитационного решения, отвечающего теории поля при ненулевой температуре, рассматривались решения типа черной дыры в пространстве анти-де-Ситтера, причем выражение для искомого отношения имеет вид, зависящий только от универсальных постоянных.

Определим метрику, ответственную за дуальное описание калибровочной теории при ненулевой температуре. Важной для дальнейшего оказывается пятимерная часть полной геометрии, которая отождествлялась в [22] с метрикой черной дыры в AdS_5:

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{r^2}{R^2}\left[-\left(1 - \frac{r_0^4}{r^4}\right)\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2\right] +$$
$$+ \frac{R^2}{1 - r_0^4/r^4}\;\mathrm{d}r^2\,. \tag{16}$$

Отметим, что данную метрику можно рассматривать как метрику, генерируемую конфигурацией бран в десятимерном пространстве.

Температура в теории поля совпадает с хоукинговской температурой черной дыры, а энтропия в теории поля совпадает с площадью горизонта событий

$$S = \frac{A}{4G}\,, \tag{17}$$

где G — гравитационная постоянная. Естественно рассматривать плотность энтропии, полученную делением на бесконечный фактор, отвечающий объему пространства, параллельного горизонту.

Вязкость вычисляется с помощью формулы Кубо в терминах равновесной корреляционной функции компонент тензора энергии-импульса T_{xy} суперсимметричной калибровочной теории:

$$\eta = \lim_{\omega \to 0} \frac{1}{2\omega} \int \mathrm{d}t\, \mathrm{d}\mathbf{x} \left\langle T_{xy}(t, \mathbf{x}),\, T_{xy}(0, 0)\right\rangle \exp\,(\mathrm{i}\omega t)\,. \tag{18}$$

Оптическая теорема позволяет связать коррелятор с сечением поглощения гравитона, распространяющегося перпендикулярно бране, на которой определена четырехмерная теория поля, и поляризованного в xy-плоскости [7]:

$$\eta = \frac{\sigma_{\mathrm{abs}}(\omega = 0)}{16\pi G}\,. \tag{19}$$

С другой стороны, можно показать, что сечение поглощения гравитона в данной задаче совпадает с сечением поглощения скаляра и в пределе низких энергий определяется геометрической площадью горизонта. Таким образом, для интересующего нас отношения имеем [23]

$$\frac{\eta}{s} = \frac{\hbar}{4\pi k_{\mathrm{B}}}\,. \tag{20}$$

Удивительным образом ответ оказывается универсальным. Более того, как было показано, он не зависит от деталей метрики в дуальной теории при условии, что имеется горизонт событий.

Универсальность ответа позволила выдвинуть гипотезу, что полученный в суперсимметричной теории результат на самом деле является нижней границей для отношения в любой релятивистской теории поля при конечной температуре и нулевом химическом потенциале. Полученные поправки к этому значению в неконформных теориях подтвердили гипотезу [24], но ее статус в общем случае, безусловно, остается открытым вопросом. Отметим, что высказывается оптимистическая точка зрения, что данная характеристика может оказаться весьма полезной при изучении столкновений тяжелых ионов, где ее универсальность может быть проверена.

4. $N = 4$ калибровочная теория и классическая струна: вычисление вильсоновской петли

В пределе, когда возможны явные количественные вычисления, натяжение струны остается конечным, а струнная константа связи мала, т.е. справедливо классическое приближение для струны. Таким образом, решая классические уравнения в сигма-модели на $AdS_5 \times S^5$ с выбранными граничными условиями на мировой поверхности струны, можно находить интересующие нас величины в дуальной калибровочной теории в режиме сильной связи.

В качестве примера, иллюстрирующего эффективность использования данного приближения, рассмотрим вычисление вильсоновской петли в $N = 4$ калибровочной теории с геометрией окружности. Вильсоновская петля естественно ассоциируется с мировой линией W-бозона, причем удобно исследовать случай, когда $SU(N+1)$ калибровочная симметрия нарушается до $SU(N) \times U(1)$ и вакуумное среднее скалярного поля, определяющее масштаб нарушения, велико. В этом случае W-бозон является тяжелым объектом.

В силу суперсимметрии фазовый фактор тяжелого W-бозона включает вклады векторных и скалярных полей:

$$W(C) = \frac{1}{N}\,\mathrm{Tr}\,P\exp\left[\oint \mathrm{d}\tau\,\left(\mathrm{i}A_\mu(x)\,\dot{x}^\mu + \Phi_i(x)\,\theta^i|\dot{x}|\right)\right]. \qquad (21)$$

Здесь C — замкнутый контур, параметризованный как $x^\mu(\tau)$, а θ^i — единичный вектор во "внутреннем" пространстве в направлении, соответствующем нарушению симметрии. Покажем, что вакуумное среднее от круглой вильсоновской петли в режиме сильной связи совпадает с результатом в дуальной классической сигма-модели.

В дуальных теориях вычисляется

$$S = \exp\left[-ML(C)\right]\left\langle W(C)\right\rangle \qquad (22)$$

в пределе большой массы W-бозона M. В теории струны рассматривается действие сигма-модели, вычисленное на мировой поверхности струны, чья граница совпадает с вильсоновской петлей на границе AdS_5. Интеграл по путям представляется в виде

$$S = \int \mathrm{D}X^\mu\,\mathrm{D}Y^i\,\mathrm{D}h_{ab}\,\mathrm{D}\Theta^\alpha \times$$
$$\times \exp\left(-\frac{\lambda}{4\pi}\int_D \mathrm{d}^2\sigma\,h^{1/2}\,\frac{h^{ab}}{Y^2}\left(\partial_a X^\mu\,\partial_b X^\mu + \partial_a Y^i\,\partial_b Y^i\right)\right) +$$
$$+ \text{фермионы}, \qquad (23)$$

где X и Y — координаты в десятимерном пространстве, на котором определена сигма-модель.

При большом натяжении струны функциональный интеграл вычисляется квазиклассически, и перевальное значение имеет вид [26]

$$-\ln\left\langle W(C)\right\rangle = \frac{\lambda^{1/2}}{2\pi}\,A(C) - ML(C)\,. \qquad (24)$$

Площадь мировой поверхности струны в AdS_5 с граничным контуром C расходится, однако можно показать, что расходимость относится к перенормировке массы W-бозона.

Таким образом, конечная часть площади приводит к следующему предсказанию для среднего от вильсоновской петли в режиме сильной связи:

$$\left\langle W(C)\right\rangle = \exp\left(c\lambda^{1/2}\right), \qquad (25)$$

где c — положительное число, зависящее от контура. Если учесть нулевые моды на классическом решении, то предсказание для вильсоновской петли со стороны теории струн имеет вид

$$\left\langle W(C)\right\rangle = \lambda^{-3/4}\exp\left[\frac{\lambda^{1/2}}{2\pi}\,A(C)\right]\sum_{n=0}^{\infty} c_n\lambda^{-n/2}\,. \qquad (26)$$

Для произвольного контура трудно надеяться на проверку дуальности, так как невозможно получить точный результат в режиме сильной связи со стороны калибровочной теории. Однако подобное сравнение оказывается возможным для круглой петли. Лидирующий член

$$\left\langle W(C)\right\rangle = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\lambda^{-3/4}\exp\lambda^{1/2}\,, \qquad (27)$$

полученный в классической сигма-модели для круглого контура, можно сравнить с ответом, полученным при суммировании петлевых поправок в калибровочной теории.

Высокая суперсимметрия позволяет провести суммирование петлевых поправок для круглой петли в $N = 4$ теории [27]. Ключевое наблюдение работы [27] состояло в обнаружении сокращения диаграмм с внутренними вершинами для круглого контура в высоких порядках теории возмущений, т.е. задача эффективно сводится к суммированию лестничных диаграмм. Явное суммирование планарных лестничных диаграмм в режиме сильной связи приводит к результату, в точности совпадающему с соотношением (27). Таким образом, вычисление вильсоновской петли является точным тестом дуальности в приближении классической струны.

5. $N = 4$ теория в приближении классической струны: интегрируемость и аномальные размерности операторов

5.1. Интегрируемость в калибровочных теориях

В этом разделе мы постараемся продемонстрировать, что скрытая интегрируемость позволяет проверять дуальность в низших порядках теории возмущений по константе связи. Ключевую роль играет идентификация аномальных размерностей операторов в калибровочной теории с энергиями классических струнных конфигураций. Как показано в дальнейшем, интегрируемость позволяет в ряде случаев делать предсказания для аномальных размерностей в калибровочной теории.

Начнем обсуждение с объяснения роли интегрируемости в четырехмерной калибровочной теории. На первый взгляд, появление интегрируемых систем с конечным числом степеней свободы в калибровочной теории поля может показаться неожиданным. Действительно, интегрируемая система с конечным числом степеней свободы имеет канонические переменные, определенные в терминах фазового пространства, а гамильтониан, зависящий от канонических переменных, определяет эволюцию по "физическому" времени. С другой стороны, мы имеем полевую систему в четырех измерениях с бесконечным числом степеней свободы, которая не является интегрируемой *per se*.

Оказывается, что интегрируемость возникает в калибровочной теории в различных пределах [31 – 34] при некотором эффективном описании. Смысл степеней свободы в этих интегрируемых системах, идентификация временно́й переменной и соответствующего гамильтониана не являются очевидными и выявляются в каждом рассматриваемом пределе. Мы рассмотрим интегрируемые системы, описывающие ренормгрупповую эволюцию локальных операторов в КХД и суперсимметричных теориях.

Уравнение ренормгруппы можно представить в гамильтоновом виде, если интерпретировать логарифм масштаба как временну́ю переменную в динамической системе. Оказывается, что соответствующий гамильтониан в однопетлевом приближении в простейшем случае совпадает с гамильтонианом спиновой цепочки Гейзенберга

$$H_{s=1/2} = -\sum_{n=1}^{L}\left(S_n S_{n+1} - \frac{1}{4}\right). \tag{28}$$

Здесь $S_n = (S_n^x, S_n^y, S_n^z)$ — оператор спина $1/2$ в n-м узле цепочки L, причем предполагаются периодические граничные условия $S_{L+1} = S_1$.

Модель Гейзенберга (28) интегрируема, и спектр можно точно найти с помощью бете-анзаца. Обобщение на магнетик произвольного спина найдено в [28, 29], соответствующий гамильтониан магнетика спина s имеет вид [29]

$$H_s = \sum_{n=1}^{L} H(J_{n,n+1}), \qquad J_{n,n+1}(J_{n,n+1}+1) = (S_n + S_{n+1})^2. \tag{29}$$

Оператор $J_{n,n+1}$ связан с суммой спинов на соседних узлах, $S_n^2 = s(s+1)$, а функция $H(x)$ выражается через гармоническую сумму:

$$H(x) = \sum_{l=x}^{2s-1}\frac{1}{l+1} = \psi(2s+1) - \psi(x+1), \tag{30}$$

$$\psi(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\Gamma(x).$$

Для $s = 1/2$ двухчастичный спин может принимать значения $J_{n,n+1} = 0$, $J_{n,n+1} = 1$. В этом случае $H(0) = 1$ и $H(1) = 0$, поэтому в согласии с (28) гамильтониан $H(J_{n,n+1})$ задается проектором на подпространство $J_{n,n+1} = 0$:

$$H(J_{n,n+1}) = \frac{1}{4} - S_n S_{n+1}.$$

Вычисления аномальных размерностей и асимптотик сечений рассеяния в реджевском режиме [30] в КХД продемонстрировали, что эволюционным оператором является $[\psi(J) - \psi(1)]$, где J имеет смысл лоренцевского $\mathrm{SL}(2)$ спина при вычислении аномальных размерностей или конформного спина при анализе асимптотик сечений. Было явно продемонстрировано, что появление ψ-функций является универсальной особенностью калибровочных теорий, связанной с наличием безмассовой векторной частицы. Сравнение явных вычислений в КХД с гамильтонианами спиновых цепочек позволило обнаружить скрытую интегрируемость эволюционных уравнений в КХД [31 – 34].

В бьеркеновском кинематическом пределе процессов рассеяния при высоких энергиях в КХД динамика малых расстояний отделена от непертурбативной инфракрасной динамики и описывается в терминах ренормгрупповой логарифмической эволюции локальных составных операторов, построенных из фундаментальных полей и ковариантных производных. В общем случае операторы одной канонической размерности смешиваются при эволюции, которая описывается ренормгрупповыми уравнениями Каллана – Симанзика

$$\mu\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\,O_n(x) = \sum_k \gamma_{n,k}(g)\,O_k(x), \tag{31}$$

где $\gamma_{n,k}$ — матрица смешивания, вычисляемая в виде ряда теории возмущений по константе связи $g = g(\mu^2)$.

Размер матрицы смешивания определяется симметриями рассматриваемых операторов, а сама матрица может быть интерпретирована как гамильтониан, действующий в пространстве операторов [35]. Логарифм ренормгруппового масштаба $\tau = \ln\mu$ играет роль временно́й переменной, а уравнение (31) принимает форму уравнения Шрёдингера. Как оказалось, однопетлевая эволюция широкого класса операторов описывается магнетиками Гейзенберга разных спинов, каждый их которых реализуется в терминах генераторов группы $\mathrm{SL}(2, R)$ [34, 36, 37]. Число узлов в спиновой цепочке совпадает с числом фундаментальных полей теории, из которых состоит данный составной оператор. Если оператор содержит кварковые поля в фундаментальном представлении, то, как правило, его эволюция описывается открытой спиновой цепочкой, а если оператор содержит только поля в присоединенном представлении, то спиновая цепочка замкнута.

Появление группы $\mathrm{SL}(2, R)$ как структурной группы спиновой цепочки не является случайным и отражает тот факт, что она является редукцией полной конформной группы в четырех измерениях $\mathrm{SO}(2, 4)$ на кинематику светового конуса, которая важна в бьеркеновском пределе. Как было обнаружено в [38], операторы, реализующие представления конформной группы, перенормируются мультипликативно в однопетлевом приближении.

В работах [40] с помощью интегрируемости детально изучались аномальные размерности операторов твиста 3, которые важны для описания степенны́х поправок в КХД. Отметим, что наиболее простая интегрируемая структура для операторов высших твистов возникает в пределе больших N_{c}. Для произвольных N_{c} ситуация существенно усложняется, так как приходится учитывать взаимодействие между степенями свободы во всех узлах решетки, а не только между ближайшими соседями, как в пределе больших N_{c}.

Хотя явление однопетлевой интегрируемости уравнений эволюции было обнаружено в КХД, оно вызвало существенный интерес в контексте суперсимметричных калибровочных теорий. Интегрируемость была переоткрыта для класса скалярных операторов в $N = 4$ теории в работе [43] и для общих операторов в $N=4$ теории была сформулирована в [41], где было продемонстрировано, что полной структурной группой в суперсимметричном случае является супергруппа $\mathrm{SU}(2,2|4)$. Последовательное упрощение структурной группы от $N=4$ теории до теории без суперсимметрии ($N=0$) прослеживалось в калибровке светового конуса в [42]. Отметим, что в суперсимметричном случае наиболее просто описывается интегрируемая структура для матрицы смешивания скалярных операторов типа $\mathrm{Tr}\left\{\Phi_1^{J_1}(0)\,\Phi_2^{J_2}(0)\,\Phi_3^{J_3}(0)\right\}$, отождествляемой с SO(6)-магнетиком Гейзенберга длины $J_1+J_2+J_3$ [43, 44].

Нашей целью является изучение роли интегрируемости в контексте дуальности между калибровочными теориями и теорией струны. Спектр возбуждений струны, сравниваемый со спектром аномальных размерностей калибровочной теории, в общем случае неизвестен, за исключением предельной геометрии *pp*-волны [12]. Поэтому для сравнения энергии струны с пертурбативными вычислениями в теории поля приходится изучать аномальные размерности операторов с большими квантовыми числами, что позволяет использовать классическое приближение для струны. Мы покажем, что классическая струна, описываемая как сигма-модель, может быть получена из магнетика в термодинамическом пределе. При этом имеется точное согласие между спектром аномальных размерностей широкого класса операторов и классическими энергиями соответствующих конфигураций струны. Мы также приведем пример обратной связи, когда на специальных решениях уравнения движения струны редуцируются к уравнениям движения конечномерной интегрируемой системы.

5.2. Струна как термодинамический предел спиновой цепочки

Оператор дилатации в теории Янга – Миллса в однопетлевом приближении совпадает с гамильтонианом спиновой цепочки, причем число узлов в цепочке совпадает с числом полей в составном операторе. Например, оператор $\mathrm{Tr}\,\Phi^J$ (где Φ — некоторое поле теории) отвечает цепочке длины J, т.е. при больших J естественно рассматривать термодинамический предел спиновой цепочки. Мы покажем, что термодинамический предел спиновой цепочки может быть отождествлен с гамильтонианом струны, распространяющейся по некоторому подмногообразию $\mathrm{AdS}_5\times\mathrm{S}^5$. Таким образом, по существу спиновая цепочка может рассматриваться как дискретизация струны в геометрии $\mathrm{AdS}_5\times\mathrm{S}^5$.

В качестве примера, иллюстрирующего подобную интерпретацию, покажем, что XXX спиновая цепочка со структурной группой SU(2), определяющая однопетлевую эволюцию операторов, состоящих из произведений степеней двух комплексных скалярных полей Φ_1,Φ_2, в термодинамическом пределе описывает классическую струну, распространяющуюся в S^3-подмногообразии $\mathrm{AdS}_5\times\mathrm{S}^5$. Сигма-модель, отвечающая струне, возникает из спиновой цепочки в длинноволновом приближении. Поправки к классической сигма-модели ведут себя как $1/J$ и подавлены в термодинамическом пределе.

Технически при переходе от цепочки к классической струне используется формализм когерентных состояний [47]. Пусть $|ss\rangle$ — состояние с полным спином s и проекцией на z-ось $S_z=s$. Когерентное состояние, отвечающее представлению $-s$ группы SU(2), определяется следующим образом:

$$|\mathbf{n}\rangle=\exp\left(\mathrm{i}S_x\phi\right)\exp\left(\mathrm{i}S_y\theta\right)|ss\rangle\,, \qquad (32)$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор, $\mathbf{n}^2=1$,

$$\mathbf{n}=(\sin\theta\cos\phi,\sin\theta\sin\phi,\cos\theta)\,, \qquad (33)$$

а θ и ϕ — сферические углы.

Гамильтониан спиновой цепочки

$$H=\frac{\lambda}{4\pi^2}\sum_{k=1}^{J}\left(\frac{1}{4}-\mathbf{S}_k\mathbf{S}_{k+1}\right) \qquad (34)$$

можно разложить по когерентным состояниям. Статистическую сумму $\mathrm{Tr}\,\exp(-Ht)$ можно представить в виде функционального интеграла по переменным $\mathbf{S}_k=s\,\mathbf{n}_k$ с действием

$$S(\mathbf{n})=s\sum_{k=1}^{J}\int\mathrm{d}t\int_0^1\mathrm{d}\tau\,\mathbf{n}_k\left[\partial_t\mathbf{n}_k\,\partial_\tau\mathbf{n}_k\right]-$$
$$-\frac{\lambda}{8\pi^2}\,s^2\int\mathrm{d}t\sum_{k=1}^{J}(\mathbf{n}_k-\mathbf{n}_{k+1})^2 \qquad (35)$$

при условии $\mathbf{n}_{J+1}=\mathbf{n}_1$.

В длинноволновом приближении векторы $\mathbf{n}_k(t)$ слабо меняются вдоль спиновой цепочки. Таким образом, можно ввести функцию $\mathbf{n}(\sigma,t)$, непрерывно зависящую от переменной σ, которая принимает значения от нуля до длины цепочки J с действием

$$S=-s\int\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\sigma\;\partial_t\phi\cos\theta-$$
$$-\frac{\lambda}{8\pi^2}\,s^2\int\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\sigma\left[(\partial_\sigma\theta)^2+(\partial_\sigma\phi)^2\sin^2\theta\right]. \qquad (36)$$

Как показано в [47], для спина $s=1/2$ действие совпадает с действием

$$S_{\mathrm{str}}=\frac{R^2}{4\pi\alpha'}\int\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}\tau\left[G_{\mu\nu}\,\partial_\tau X^\mu\,\partial_\tau X^\nu-G_{\mu\nu}\,\partial_\sigma X^\mu\,\partial_\sigma X^\nu\right] \qquad (37)$$

для классической струны, распространяющейся в метрике

$$\mathrm{d}s^2=-\mathrm{d}t^2+\mathrm{d}\psi^2+\mathrm{d}\varphi_1^2+\mathrm{d}\varphi_2^2+2\cos(2\psi)\,\mathrm{d}\varphi_1\,\mathrm{d}\varphi_2\,. \qquad (38)$$

Для того чтобы получить действие струны, удобно зафиксировать калибровку $t=\chi\tau$, рассмотреть предел $\partial_\tau X^i\to 0$ и $\chi\to\infty$ при $\chi\partial_\tau X^i=\mathrm{const}$ и отождествить переменные

$$\varphi_2=-\frac{1}{2}\,\phi\,,\qquad \psi=\frac{1}{2}\,\theta\,. \qquad (39)$$

Исключая переменную φ_1 с помощью классических уравнений движения, мы немедленно получаем (36).

Аналогичным образом можно найти действие классической струны из более общей спиновой цепочки со структурной группой SU(3) [48], а также для струнной конфигурации, обладающей как лоренцевским спином S, так и R-зарядом J [49]. Можно также учесть поправки к действию сигма-модели (36), содержащие высшие производные полей.

5.3. Классические струнные конфигурации и интегрируемые системы

Мы показали, что струнные конфигурации возникают при рассмотрении термодинамического предела интегрируемых спиновых цепочек. В данном разделе мы покажем, что справедлива и обратная связь, т.е. специальные решения струнных уравнений движения в $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ сводятся к конечномерным интегрируемым системам. Для этого удобно рассмотреть струнное действие

$$S = \frac{\lambda^{1/2}}{4\pi} \int \mathrm{d}\sigma\, \mathrm{d}\tau [G_{mn}^{\mathrm{AdS}}\, \partial y_m\, \partial y_n + G_{kl}^{\mathrm{S}^5}\, \partial x^k\, \partial x^l] \tag{40}$$

с натяжением струны, определяемым константой связи калибровочной теории. Вводя связи с множителями Лагранжа, перепишем действие в несколько другом виде:

$$S = \frac{\lambda^{1/2}}{4\pi} \int \mathrm{d}\sigma\, \mathrm{d}\tau \left[\partial X_m\, \partial X_m + \Lambda_x (X^2 - 1) + \right.$$
$$\left. + \partial Y^k \partial Y^k + \Lambda_y (Y^2 + 1)\right], \tag{41}$$

где X_n $(n = 1, \ldots, 6)$ и Y_k $(k = 0, \ldots, 5)$ — два набора координат, описывающих вложение нашей геометрии в R^6 с сигнатурами $(6, 0)$ и $(4, 2)$ соответственно. Помимо анализа действия, необходимо наложить на динамические переменные связи Вирасоро, отражающие факт зануления двумерного тензора энергии-импульса на мировой поверхности струны:

$$\dot{Y}_k \dot{Y}_l + Y'_k Y'_l + \dot{X}_n \dot{X}_n + X'_n X'_n = \dot{Y}_k Y'_k + \dot{X}_n X'_n = 0\,, \tag{42}$$

и периодические граничные условия

$$Y_k(\sigma + 2\pi) = Y_k(\sigma)\,, \qquad X_n(\sigma + 2\pi) = X_n(\sigma)\,. \tag{43}$$

Наличие глобальных симметрий $\mathrm{SO}(2, 4)$ и $\mathrm{SO}(6)$ позволяет определить набор сохраняющихся зарядов:

$$\begin{aligned} S_{kl} &= \lambda^{1/2} \int \mathrm{d}\sigma\, (Y_k \dot{Y}_l - Y_l \dot{Y}_k)\,, \\ J_{nm} &= \lambda^{1/2} \int \mathrm{d}\sigma\, (X_n \dot{X}_m - X_m \dot{X}_n)\,. \end{aligned} \tag{44}$$

Среди них естественно выделить шесть генераторов алгебры симметрии: энергию $E = S_{05}$, лоренцевские спины S_{12}, S_{34} и угловые моменты, отвечающие вращению в S^5: J_{12}, J_{34}, J_{56}. Набор сохраняющихся зарядов (44) параметризует общее решение классических уравнений движения в сигма-модели [50].

Для того чтобы описать данный оператор в калибровочной теории при дуальном описании струны, необходимо найти соответствующее ему решение струнных уравнений движения, удовлетворяющее связям (42) и граничным условиям (43). В качестве простейшего примера рассмотрим

$$\begin{aligned} &Y_5 + \mathrm{i}\, Y_0 = \exp\,(\mathrm{i}t)\,, \\ &X_{2i-1} + \mathrm{i} X_{2i} = r_i(\sigma) \exp\left[\mathrm{i}\omega_i \tau + \mathrm{i}\alpha_i(\sigma)\right], \end{aligned} \tag{45}$$

где $i = 1, 2, 3$, а Y-координаты положены равными нулю. Подставляя данный анзац в действие сигма-модели, получаем [51]

$$L = \sum_{i=1}^{3} \left(r_i'^2 + r_i^2 \alpha_i'^2 - \omega_i^2 r_i^2\right) - \Lambda_x \sum_{i=1}^{3} \left(r_i^2 - 1\right). \tag{46}$$

Решая уравнения движения для α_i, имеем $\alpha_i' = v_i / r_i^2$, где v_i — константы интегрирования.

Возникающий лагранжиан описывает конечномерную интегрируемую систему Неймана – Рософатиуса, обладающую пятью интегралами движения. Три из них идентифицируются с v_1, v_2, v_3, а два других интеграла имеют вид

$$I_i = r_i^2 + \sum_{j \neq i}^{3} \frac{1}{\omega_i^2 - \omega_j^2} \left[(r_i r_j' - r_i r_j')^2 + \frac{v_i^2 r_j^2}{r_i^2} + \frac{v_j^2 r_i^2}{r_j^2}\right], \tag{47}$$

где

$$\sum_{i=1}^{3} I_i = 0\,.$$

В итоге энергия системы зависит от частот ω_i и пяти целых чисел, связанных условием Вирасоро.

Таким образом, вычисляя классическую энергию конечномерной динамической системы как функцию всех интегралов движения, мы автоматически вычисляем аномальные размерности операторов в калибровочной теории с тем же набором квантовых чисел относительно глобальных симметрий [52, 53]. На настоящий момент известно множество решений уравнений движения сигма-модели, для которых вычислены аномальные размерности соответствующих операторов [50, 16]. В случаях, когда возможно сравнение с результатами явного вычисления в теории поля, результаты двух вычислений совпадают.

Отметим, что, на первый взгляд, система с конечным числом степеней свободы может описать лишь весьма узкий класс решений уравнений движения и, соответственно, операторов в калибровочной теории. Однако, поскольку обсуждаемая сигма-модель на $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ интегрируема на классическом уровне, можно использовать мощные методы, известные в теории интегрируемых систем. В частности, с помощью так называемого преобразования Бэклунда из простейших решений, соответствующих системе Неймана – Рософатиуса, можно генерировать более сложные решения в сигма-модели, отвечающие достаточно общим операторам в теории поля [53].

5.4. Общая структура соответствия между спиновыми цепочками и струнами

Мы рассмотрели примеры связи между спиновыми цепочками, определяющими эволюцию операторов в калибровочной теории, и решениями уравнений движения в струнной сигма-модели. Обсудим общую структуру соответствия между ними. В первую очередь необходимо выяснить связь между структурной группой цепочки и типом решения уравнений движения струны. Напомним, что общая конфигурация струны $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ задается пятью квантовыми числами S_1, S_2, J_1, J_2, J_3, где S_1, S_2 определяют заряды по группе Лоренца, а J_i в калибровочной теории отвечают зарядам по группе R-симметрии. Поскольку квантовые числа операторов должны совпадать с квантовыми числами струнного решения, нетрудно понять, что перенормировка операторов с двумя ненулевыми R-зарядами J_1, J_2 описывается $\mathrm{SU}(2)$ спиновыми цепочками, а операторов с одним ненулевым лоренцевским спином S — $\mathrm{SL}(2, R)$ цепочкой. Наиболее общие операторы в суперсимметричной теории описываются цепочками со структурной супергруппой $SO(4,2|2)\times SO(6)$.

Другим очевидным вопросом является зависимость от константы связи. Энергия, вычисленная на классическом решении в струне, зависит от константы связи сложным образом. Для сравнения с пертурбативными вычислениями необходимо разложить точный струнный ответ в ряд. Вообще говоря, аналитичность точного ответа по константе связи не гарантирована, но для широкого класса операторов с большими квантовыми числами она имеет место. В качестве примера приведем первый член в разложении энергии струны по константе связи для состояния с большими значениями квантовых чисел (J_1, J_2) [16]:

$$E_{\mathrm{str}} = \frac{2}{\pi^2}\,K(x)\big[E(x)-(1-x)K(x)\big]\,,\qquad \frac{J_2}{J_1+J_2} = 1-\frac{E(x)}{K(x)}\,. \tag{48}$$

Здесь $K(x)$ и $E(x)$ — стандартные эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода соответственно. Выражение (48) выглядит достаточно сложным, но оно в точности совпадает с аномальной размерностью операторов типа $\mathrm{Tr}\,\Phi_1^{J_1}\Phi_2^{J_2}$, вычисленной как энергия состояния в SU(2) спиновой цепочке с (J_1+J_2)-узлами, что демонстрирует справедливость дуальности в однопетлевом приближении для данного класса операторов.

Согласие между результатами вычислений в спиновой цепочке и струне поднимает вопрос о возможной интегрируемости следующих членов разложения оператора дилатации по константе связи. Оказывается, что явное вычисление действительно приводит к интегрируемому гамильтониану, описывающему эволюцию операторов в скалярном секторе в двух петлях:

$$H^{2\,\mathrm{loop}} = \frac{\lambda}{8\pi^2}\sum_{k=1}^{J}(1-P_{k,k+1}) + \frac{\lambda^2}{128\pi^4}\sum_{k=1}^{J}(-4+6P_{k,k+1}-P_{k,k+1}P_{k+1,k+2} - P_{k+1,k+2}P_{k,k+1}) + O(\lambda^3)\,, \tag{49}$$

где $P_{i,j}$ — оператор перестановки i-го и j-го узлов. Для $S=1/2$ он может быть представлен в более привычном виде $(\mathbf{S}_i\mathbf{S}_j - \mathrm{const})$. Вычисления спектра двухпетлевого гамильтона в точности воспроизводят энергии струнных решений, разложенные до второго порядка по константе связи.

Несмотря на успех в первых двух петлях $N=4$ теории, ситуация в следующих петлях не является полностью удовлетворительной. Было предложено несколько кандидатов для интегрируемых систем, ответственных за операторы дилатации в высших петлях [67, 68], однако, начиная с трех петель, возникают расхождения между аномальными размерностями операторов с большим R-зарядом J в нелидирующем по $1/J$ члене, вычисленными в теории возмущений и в приближении классической струны [69]. Недавно был предложен новый кандидат для интегрируемой структуры, учитывающий все петли [45] и воспроизводящий крайне нетривиальный трехпетлевой результат для аномальных размерностей операторов с большим лоренцевским спином [70], но его статус как точного ответа не ясен.

Отметим, что можно провести сравнение интегрируемых структур в спиновой цепочке и в классической струне в терминах геометрических объектов — римановых поверхностей высокого рода. Дело в том, что якобианы подобных римановых поверхностей являются комплексными лиувиллевскими торами, по которым происходит классическая эволюция. Параметры этих поверхностей задаются полным набором интегралов движения динамической системы (в данном случае спиновой цепочки). С другой стороны, классические решения струнной сигма-модели также параметризуются модулями римановых поверхностей. В работе [66] показано, что римановы поверхности, возникающие в калибровочной теории через спиновые цепочки и при описании классических решений сигма-моделей, совпадают. Это дает надежду, что скрытая интегрируемость позволит точнее сформулировать дуальное описание в высших порядках теории возмущений.

6. $N = 4$ калибровочная теория и квантовая струна; предел *pp*-волны

На настоящий момент нет явного квантового ответа для спектра струны, распространяющейся в $AdS_5\times S^5$, что не позволяет провести полное сравнение гильбертовых пространств калибровочной теории и теории струны. Однако существует специальное вырождение $AdS_5\times S^5$ геометрии в предел Пенроуза, когда точный ответ может быть, тем не менее, получен [54]. Предел Пенроуза описывает область вблизи специальной нулевой геодезической, причем эффективно струна редуцируется в точечную частицу. Спектр струны в *pp*-волновом пределе был найден и исследован в [12, 55, 56].

Для явного описания метрики в *pp*-пределе удобно ввести переменные

$$x^+ = \frac{t+\chi}{2\mu}\,,\qquad x^- = \mu R^2(t-\chi)\,, \tag{50}$$

где χ — угловая переменная на S^5, а μ — вспомогательный масштаб. Рассматривая предел $R\to\infty$, мы получаем метрику *pp*-волны в виде

$$\mathrm{d}s^2 = -4\,\mathrm{d}x^+\,\mathrm{d}x^- - z^2\,\mathrm{d}x^{+2} + \sum_{i=1}^{8}\mathrm{d}z_i^2\,. \tag{51}$$

Восемь плоских координат z_i отвечают части координат из $AdS_5\times S^5$, а струна ведет себя как частица, вращающаяся с большим угловым моментом J вдоль угловой координаты χ в S^5.

Нетрудно увидеть, что гамильтониан струны на световом конусе

$$H = 2p^- = \mathrm{i}(\partial_t + \partial_\chi) = \Delta - J\,, \tag{52}$$

причем в пределе

$$R\to\infty\,,\qquad \Delta\sim J\to\infty\,,\qquad \frac{J^2}{R^4} = \mathrm{const} \tag{53}$$

его спектр точно вычисляется.

Квантование струны в метрики *pp*-волны сводится к квантованию системы осцилляторов, в результате спектр струны принимает вид

$$\Delta - J = \sum_k N_k \left(1 + \frac{\lambda k^2}{J^2}\right)^{1/2}, \tag{54}$$

где k отвечает номеру фурье-гармоники, N_k — полное число заполнения осцилляторной моды, причем условие Вирасоро накладывает на квантовые числа дополнительные ограничения

$$P = \sum_k k N_k = 0\,.$$

Нашей целью является отождествление спектра струны со спектром аномальных размерностей класса операторов в $N=4$ калибровочной теории. В первую очередь необходимо отождествить операторы, дуальные состояниям струны в пределе Пенроуза. Напомним, что эффективная длина струны J должна быть отождествлена с числом полей, входящих в составной оператор. Основное состояние струны можно отождествить с оператором, составленным из скаляров $Z = \Phi_1 + \mathrm{i}\Phi_2$:

$$|0, J\rangle \leftrightarrow \operatorname{Tr} Z^J\,. \tag{55}$$

Этот оператор имеет заряд J по отношению к плоскости вращения в pp-волне.

Осцилляторные возбуждения струны отвечают включению в составной оператор других скалярных полей из лагранжиана $N=4$ теории. Наиболее изучены так называемые BMN-операторы, которые отождествляются со струнными модами возбуждений следующим образом:

$$\begin{aligned} &a_0^{i+}\,|0, J\rangle \leftrightarrow \operatorname{Tr} \Phi_i Z^J\,,\\ &a_n^{i+} a_{-n}^{j+}\,|0, J\rangle \leftrightarrow \sum_l \exp\left(2\pi \mathrm{i}\,\frac{nl}{J}\right) \operatorname{Tr} \Phi_i Z^l \Phi_j Z^{J-l}\,. \end{aligned} \tag{56}$$

Используя соответствие, можно количественно сравнить собственные значения матрицы аномальной размерности операторов, смешивающихся между собой, со спектром энергии струны.

Энергия струны является точной функцией отношения константы связи и углового момента λ/J^2. Таким образом, мы имеем первый пример предсказания аномальной размерности операторов в теории поля в произвольном порядке по константе связи. Для сравнения с известными петлевыми вычислениями необходимо разложить точный спектр в пертурбативной области. Первые члены разложения по константе связи в точности воспроизводят вычисления в рамках суперсимметричной калибровочной теории, что является явным примером проверки дуальности в ситуации, когда струна рассматривается как квантовый объект.

Отметим, что в однопетлевом приближении оператор дилатации в $N=4$ теории в секторе скалярных операторов совпадает с гамильтонианом спиновой цепочки со структурной группой SO(6) [43]. Это позволяет также отобразить струнные состояния в состояния спиновой цепочки. В частности, если рассматривать операторы, построенные только из двух комплексных скалярных полей, структурная группа редуцируется к SU(2). При этом основное состояние струны соответствует всем спинам, выстроенным в одном направлении, а струнные возбуждения отвечают перевороту части спинов.

7. Дуальное описание неконформных теорий; $N = 2$ суперсимметричная калибровочная теория

В данном разделе обсуждается дуальное описание $N=2$ калибровочной теории в приближении супергравитации. Метрика в дуальном описании и поля высших форм имеют более сложную структуру по сравнению с $N=4$ случаем, но, тем не менее, могут быть предъявлены непосредственно. Продемонстрируем, как простейшие факты, известные в калибровочной теории, могут быть воспроизведены в дуальном описании. Начнем с краткого напоминания основных фактов, касающихся $N=2$ суперсимметричной теории.

Калибровочная теория без дополнительных полей материи описывается супермультиплетом полей в присоединенном представлении, включающим в себя калибровочное векторное поле, два майорановских фермиона и комплексный скаляр Φ. Теория является асимптотически свободной, и β-функция возникает только в одной петле. Классическая теория имеет $\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{U}(1)$ глобальную группу R-симметрии, но на квантовом уровне U(1)-часть нарушается до Z_{4N_c}. Бесконечное число вакуумных состояний теории параметризуется вакуумными значениями комплексного скаляра. Непертурбативное низкоэнергетическое действие, учитывающее инстантонные эффекты, было найдено в [57].

В теории супергравитации при дуальном описании метрика [11]

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = {}& H^{-1/2}\eta_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu + \\ &+ H^{1/2}\left[\mathrm{d}\rho^2 + \rho^2\,\mathrm{d}\theta^2 + \delta_{mn}\,\mathrm{d}x^n\,\mathrm{d}x^m\right], \end{aligned} \tag{57}$$

а поле высших форм, отвечающее $N=2$ калибровочной теории, имеет вид

$$\tilde F_5 = \mathrm{d}(H^{-1}\,\mathrm{d}x^0 \wedge \ldots\, \mathrm{d}x^3) + *\mathrm{d}(H^{-1}\,\mathrm{d}x^0 \wedge \ldots\, \mathrm{d}x^3)\,, \tag{58}$$

$$c + \mathrm{i}b = 4\pi\alpha' g_s N_c \ln\frac{z}{\rho_0}\,, \tag{59}$$

где $\rho^2 = (x_4^2 + x_5^2)$, $z = \rho\exp(\mathrm{i}\theta)$, $r^2 = x_6^2 + \ldots + x_9^2$, H — известная функция радиальных координат. Отметим, что решение включает в себя комплексное скалярное поле $c + \mathrm{i}b$, а также набор полей различных форм из (NS–NS)- и (R–R)-секторов:

$$\tilde F_5 = F_5 - C_2 \wedge H_3\,, \qquad H_3 = dB_2\,. \tag{60}$$

В терминах бран решение можно описать как набор полей, индуцированных связанным состоянием D3-бран, определенных на орбифолде C^2/Z_2. Согласно общей логике калибровочная теория идентифицируется как теория на мировой поверхности бран.

Для того чтобы описать несколько количественных характеристик теории, найдем параметры калибровочной теории в пределе низких энергий из действия Борна–Инфельда на мировой поверхности бран. После несложных вычислений для константы связи и θ_{YM} имеем

$$\frac{1}{g_{\mathrm{YM}}^2} = \frac{1}{16\pi^2\alpha' g_s}\int B_2 = \frac{N_c}{4\pi^2}\ln\frac{\rho}{\rho_0}\,, \tag{61}$$

$$\theta_{\mathrm{YM}} = \frac{1}{2\pi^2\alpha' g_s}\int C_2 = -2N_c\theta\,. \tag{62}$$

Решение уравнений движения в супергравитации обладает симметрией вида

$$\theta \to \theta + \frac{\pi k}{2N_c} \,. \tag{63}$$

Используя связь с θ_{YM}, замечаем, что она соответствует известной Z_{4N_c}-симметрии в $N=2$ суперсимметричной калибровочной теории.

Другой существенной характеристикой калибровочной теории является ее β-функция. Для того чтобы найти β-функцию в дуальной теории, необходимо аккуратно связать масштаб μ в калибровочной теории с координатой ρ в гравитационном решении.

Рассмотрим оператор, обладающий простыми ренормгрупповыми свойствами. Наиболее удобным для этих целей является скалярное поле, чье вакуумное среднее можно связать с координатой z следующим образом: $\phi = (2\pi\alpha')^{-1} z$. В результате нетрудно прийти к соотношению

$$\rho = 2\pi\alpha'\mu \,. \tag{64}$$

Подставляя это соотношение в гравитационное решение (61), для бегущей константы связи получаем поведение

$$\frac{1}{g_{\mathrm{YM}}^2} = \frac{N_c}{4\pi^2} \ln \frac{\mu}{\Lambda} \,, \tag{65}$$

что в точности воспроизводит β-функцию $N=2$ теории.

Отметим, что в рамках дуальной теории хорошо воспроизводится пертурбативное поведение $N=2$ теории, а полное непертурбативное низкоэнергетическое действие до настоящего момента не найдено. Причиной этого является сингулярное поведение функции H, определяющей решение в инфракрасной области [11]. Ожидается, что сингулярность исчезает при учете струнных мод, однако явно это пока не продемонстрировано.

8. Дуальное описание неконформных теорий; $N=1$ суперсимметричная калибровочная теория

Теория с $N=2$ суперсимметрией существенно отличается от реалистичных моделей, так как она обладает бесконечным числом вакуумных состояний. Поэтому интересно найти дуальное описание для более реалистичной $N=1$ суперсимметричной калибровочной теории. Напомним ее основные особенности и отличия от $N=2$ калибровочных теорий. Состав полей $N=1$ теории включает в себя векторное калибровочное поле и майорановское поле глюино в присоединенном представлении. Действие теории

$$L_{N=1} = \frac{1}{g_{\mathrm{YM}}^2} \int \mathrm{d}^4 x \, (\mathrm{Tr}\, F^2 + \mathrm{i}\bar{\lambda} D \lambda) \tag{66}$$

имеет много общих черт с КХД. В частности, теория асимптотически свободна и обладает массовой щелью.

В отличие от $N=2$ теории в $N=1$ теории имеется конечное число вакуумов, равное N_c для калибровочной группы $\mathrm{SU}(N_c)$. Мультиплет аномалий включает в себя аномалию в дилатационном токе, супертоке и токе, отвечающем R-симметрии. Соответствующие симметрии нарушены уже в однопетлевом приближении. В отличие от однопетлевой β-функции в $N=2$ теории в β-функцию $N=1$ теории вносят вклад все петли, причем для нее может быть получен точный ответ [58]:

$$\beta = -\frac{N_c g_{\mathrm{YM}}^2}{16\pi^2} \left(1 - \frac{N_c g_{\mathrm{YM}}^2}{8\pi^2} \right)^{-1} . \tag{67}$$

Отметим, что все петлевые вклады, начиная со второй петли, носят инфракрасное происхождение. Поэтому, вообще говоря, можно определить β-функцию в вильсоновском смысле, которая содержит только однопетлевой вклад.

В дальнейшем мы обсудим дуальное описание U(1) R-симметрии, которая нарушается до Z_{2N_c} однопетлевой аномалией. Более того, непертурбативными эффектами в теории генерируется глюинный конденсат, который приводит к дальнейшему спонтанному нарушению симметрии до Z_2. Выражение для конденсата имеет вид

$$\langle \mathrm{Tr}\, \lambda^2 \rangle = \Lambda^3 \exp \left(2\pi \mathrm{i} \, \frac{k}{N_c} \right) , \quad k = 0, 1, \ldots, N_c - 1 \,, \tag{68}$$

где Λ — инфракрасный масштаб теории. Глюинный конденсат является параметром порядка теории и номер k в (68) маркирует вакуумное состояние.

8.1. Решение уравнений движения в супергравитации

На настоящий момент предложены два решения уравнений супергравитации, обеспечивающие дуальное описание $N=1$ калибровочной теории: решение Малдасены – Нунеса [9] и решение Клебанова – Страсслера [10], которые связаны между собой цепочкой преобразований. В этом разделе обсуждается решение Малдасены – Нунеса, генерируемое бранами, намотанными на компактные подмногообразия. Напомним, что в предыдущих решениях, дуальных $N=4$ и $N=2$ калибровочным теориям, мы имели дело с D3-бранами, вложенными в десятимерное пространство. Однако в $N=1$ случае мы должны рассмотреть N_c совпадающих D5-бран, намотанных на компактный двумерный цикл.

Калибровочная теория определена на мировой поверхности N_c D5-бран во внешней метрике

$$\mathrm{d}s^2 = \exp \Phi \, \mathrm{d}x^2 + g_s N_c \exp \Phi \Big[\exp(2h) \, (\mathrm{d}\theta_1^2 + \sin^2 \theta_1 \, \mathrm{d}\phi_1^2) + \\ + \mathrm{d}\rho^2 + \sum_{a=1}^{3} (\omega^a - A^a)^2 \Big] \,, \tag{69}$$

$$\exp(2\Phi) = \frac{\sinh \rho}{2 \exp h} \,, \tag{70}$$

$$F_3 = 2 g_s N_c \prod_{a=1}^{3} (\omega^a - A^a) - g_s N_c \sum_{a=1}^{3} F^a \wedge \omega^a \,, \tag{71}$$

где

$$A^1 = -\frac{1}{2a(\rho)} \, \mathrm{d}\theta_1 \,, \quad A^2 = \frac{1}{2a(\rho)} \sin \theta_1 \, \mathrm{d}\phi_1 \,, \quad A^3 = -\frac{1}{2} \cos \theta_1 \, \mathrm{d}\phi_1 \,, \tag{72}$$

$$\exp h = \rho \coth(2\rho) - \frac{\rho^2}{\sinh^2(2\rho)} - \frac{1}{4} \,, \quad a(\rho) = \frac{2\rho}{\sinh \rho} \,. \tag{73}$$

Левоинвариантные формы имеют вид

$$\begin{aligned}
2\omega^1 &= \cos\psi\,\mathrm{d}\theta_1 + \sin\psi\sin\theta_2\,\mathrm{d}\phi_2\,,\\
2\omega^2 &= \sin\psi\,\mathrm{d}\theta_2 - \cos\psi\sin\theta_2\,\mathrm{d}\phi_2\,,\\
2\omega^3 &= \mathrm{d}\psi + \cos\theta_2\,\mathrm{d}\phi_3\,,
\end{aligned} \tag{74}$$

а $F^a = \nabla A^a$.

В отличие от $N = 2$ геометрии решение определяет несингулярную метрику и зависит от пяти угловых переменных и радиальной переменной ρ, которую мы вновь свяжем с масштабом энергии в калибровочной теории. Параметры калибровочной теории, как и в $N = 2$ случае, могут быть получены подстановкой решения уравнений движения супергравитации в низкоэнергетическое разложение действия Борна – Инфельда:

$$\frac{1}{g_{\mathrm{YM}}^2} = \frac{1}{16\pi^3 g_{\mathrm{s}}}\int_{\mathrm{S}^2}\exp(-\Phi)\,(\det G)^{1/2} = \frac{N_{\mathrm{c}}}{4\pi^2}\,\rho\tanh\rho\,, \tag{75}$$

$$\theta_{\mathrm{YM}} = -\frac{1}{2\pi g_{\mathrm{s}}}\int_{\mathrm{S}^2} C_2 = -N_{\mathrm{c}}\psi\,. \tag{76}$$

Из решения нетрудно понять, что предел больших значений радиальной координаты ρ отвечает ультрафиолетовой области теории поля, где константа связи мала, а U(1)-вращение, отвечающее R-симметрии, соответствует сдвигам угловой переменной ψ.

8.2. Физика $N = 1$ калибровочной теории в дуальном описании

Перейдем к дуальному описанию основных характеристик $N = 1$ теории и обсудим сначала геометрию нарушения U(1) R-симметрии. Как отмечалось, в ультрафиолетовой области мы ожидаем нарушения U(1) до $Z_{2N_{\mathrm{c}}}$, и естественно воспроизвести это нарушение в дуальном описании. Напомним, что ультрафиолетовое поведение отвечает большим ρ, когда $a(\rho) \to 0$. В этом пределе вращение вдоль угловой координаты ψ является изометрией метрики, и нарушение возникает только благодаря потоку поля формы C_2. Нетрудно заметить, что только сдвиг

$$\psi \to \psi + \frac{2\pi k}{N_{\mathrm{c}}} \tag{77}$$

является симметрией решения уравнений движений в супергравитации, что в точности отвечает ожидаемой $Z_{2N_{\mathrm{c}}}$-симметрии в дуальном описании.

Для анализа дальнейшего нарушения симметрии до Z_2 мы должны рассмотреть произвольные значения радиальной координаты ρ и изучить зависимость от нее функций, задающих решение. Наиболее существенно то обстоятельство, что функция $a(\rho)$ умножена на факторы $\cos\psi$ или $\sin\psi$, т.е. при произвольном ρ только сдвиг

$$\psi \to \psi + 2\pi N_{\mathrm{c}} \tag{78}$$

остается симметрией решения, что отвечает остающейся в инфракрасной области Z_2-симметрии.

Для определения β-функции необходимо найти связь между радиальной координатой решения ρ и масштабом энергии в калибровочной теории μ. Для этой цели удобно использовать дуальную идентификацию оператора в калибровочной теории, который не деформируется на квантовом уровне:

$$\langle\lambda^2\rangle \leftrightarrow a(\rho)\,, \tag{79}$$

что подразумевает соотношение

$$\frac{\Lambda^3}{\mu^3} = \frac{2\rho}{\sinh(2\rho)}\,. \tag{80}$$

Теперь можно определить β-функцию теории с помощью выражения

$$\beta_{\mathrm{YM}} = \frac{\partial g_{\mathrm{YM}}}{\partial\rho}\,\frac{\partial\rho}{\partial\big(\ln(\mu/\Lambda)\big)}\,. \tag{81}$$

При больших ρ имеем

$$\frac{\partial g_{\mathrm{YM}}}{\partial\rho} = -\frac{N_{\mathrm{c}} g_{\mathrm{YM}}^2}{8\pi^2}\,, \tag{82}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial\big(\ln(\mu/\Lambda)\big)} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{N_{\mathrm{c}} g_{\mathrm{YM}}^2}{8\pi^2}\right)^{-1}. \tag{83}$$

Комбинация двух уравнений немедленно приводит к ответу для β-функции, который в точности совпадает с пертурбативным результатом, полученным в калибровочной теории [59]. Отметим, что гравитационное вычисление предсказывает существование непертурбативных поправок к "точной" β-функции, но происхождение возможных поправок в калибровочной теории все еще остается неясным.

9. Дуальность и аномальные размерности операторов в несуперсимметричной теории Янга – Миллса

Приведем примеры дуальности для калибровочной теории поля, не обладающей суперсимметрией. Несмотря на то что теории без суперсимметрии более трудны для анализа, мы рассмотрим два хорошо установленных результата, касающихся аномальных размерностей операторов, не затрагивая другие утверждения, которые можно обнаружить в литературе, но которые носят менее строгий характер. Во-первых, обсудим интегрируемую структуру однопетлевого оператора дилатации в секторе самодуальных глюонных операторов и его струнную реализацию. Во-вторых, покажем, каким образом можно получить универсальное предсказание для аномальных размерностей некоторых операторов калибровочной теории в режиме сильной связи.

9.1. Классическая струна и глюонные операторы

Рассмотрим класс локальных операторов высокой канонической размерности, состоящих из глюонных полей:

$$\prod_{j=1}^{L} F_{\mu_j\nu_j}(0)\,. \tag{84}$$

Покажем, что перенормировка этих операторов в одной петле описывается интегрируемой спиновой цепочкой Гейзенберга с единичными спинами в каждом узле [60]. Для дальнейшего описания удобно перейти в евклидово пространство и разложить тензор на неприводимые компоненты с помощью символов 'т Хофта:

$$F_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}^A F_+^A + \bar\eta_{\mu\nu}^A F_-^A\,. \tag{85}$$

Самодуальная и антисамодуальная компоненты преобразуются относительно группы Лоренца как тензоры типа $(1,0)$ и $(0,1)$ соответственно. Прямым вычислением можно убедиться, что в одной петле гамильтониан, описывающий уравнения ренормгруппы, сохраняет число полей, входящих в составной оператор или, что эквивалентно, число узлов в спиновой цепочке. Полный гамильтониан взаимодействия между ближайшими соседями можно разложить по проекторам $P^P_{(j_1,j_2)}$ для компонент спина j и четности P [60]:

$$H_{12} = 7\big(P_{(2,0)} + P_{(0,2)}\big) + P_{(1,0)} + P_{(0,1)} - \\ - 11\big(P^+_{(0,0)} + P^-_{(0,0)}\big) + 3P^-_{(1,1)} \,. \tag{86}$$

Если рассмотреть операторы, состоящие только из самодуальных операторов F^A_+, то гамильтониан редуцируется к

$$H^{\mathrm{sd}}_{12} = 7P_{(2,0)} + P_{(1,0)} - 11P_{(0,0)} \,. \tag{87}$$

Соответствующие проекторы в (87) имеют следующее представление:

$$P_{(2,0)}F^A_+F^B_+ = \frac{1}{2}\left(F^A_+F^B_+ + F^B_+F^A_+ - \frac{2}{3}\,\delta^{AB}F^C_+F^C_+\right),$$

$$P_{(1,0)}F^A_+F^B_+ = \frac{1}{2}\left(F^A_+F^B_+ - F^B_+F^A_+\right),$$

$$P_{(2,0)}F^A_+F^B_+ = \frac{1}{3}\,\delta^{AB}F^C_+F^C_+ \,.$$

Эти проекторы можно свести к операторам перестановки $PF^A_+F^B_+ = F^B_+F^A_+$, взятия следа $KF^A_+F^B_+ = \delta^{AB}F^C_+F^C_+$ и тождественным операторам $IF^A_+F^B_+ = F^A_+F^B_+$:

$$P_{(2,0)} = \frac{1}{2}(I+P) - \frac{1}{3}\,K\,,$$

$$P_{(1,0)} = \frac{1}{2}(I-P)\,,$$

$$P_{(0,0)} = \frac{1}{3}\,K\,.$$

Таким образом, гамильтониан двухчастичных взаимодействий

$$H^{\mathrm{sd}}_{12} = 4I_{12} + 3P_{12} - 6K_{12} = 7 + 3\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2(1 - \mathbf{s}_1\mathbf{s}_2) \tag{88}$$

совпадает с гамильтонианом спиновой цепочки со спином единица, который исследовался ранее и может быть диагонализован с помощью метода бете-анзаца [28, 29].

Основной особенностью данного класса операторов является пропорциональность их аномальной размерности полному спину оператора S или, соответственно, полной длине спиновой цепочки. Для дуального описания таких операторов необходимо найти подходящее решение уравнений движения классической струны. Оказалось, что соответствующее решение описывает струну, вращающуюся в двух независимых плоскостях в AdS_5 с квантовыми числами (S, S, 0, 0, 0).

При малых S энергия классической струны имеет вид [61]

$$E = 2(mS)^{1/2} + O(S^{2/3})\,, \tag{89}$$

где m — число намоток струны, что совпадает с результатом в плоском случае. Однако, если рассмотреть операторы с большим квантовым числом ($S \gg 1$), что оправдывает приближение классической струны, энергия ведет себя как

$$E = 2S + \frac{3}{4}(4m^2S)^{1/3} + \ldots\,, \tag{90}$$

что согласуется с однопетлевым ответом. Отметим, что в области очень больших S классическое струнное решение оказывается нестабильным.

Выше обсуждались интегрируемые структуры в $N=4$ калибровочной теории и в теории без суперсимметрии. Аналогичные интегрируемые структуры были обнаружены и в других случаях. Например, однопетлевая перенормировка скалярных операторов в $N=2$ теории описывается XXZ спиновой цепочкой [62].

9.2. Аномальные размерности в режиме сильной связи

Отметим кратко некоторые общие свойства операторов в теории без суперсимметрии, которые можно получить, используя дуальное струнное описание. Операторы с большим лоренцевским спином S отвечают струне, вращающейся с большим угловым моментом в AdS_5. В режиме сильной связи аномальные размерности оператора $F_{+\perp}(D_+)^SF_{+\perp}$ твиста 2 совпадают с классической энергией струны, сложенной вдвое и вращающейся в AdS_5 [25]:

$$\gamma^{(\mathrm{tw}=2)}_S = \frac{\lambda^{1/2}}{2\pi}\ln S^2\,. \tag{91}$$

Для получения ответа (91) удобно рассмотреть струну с центром в $\rho=0$ в глобальных координатах с действием Намбу–Гото. В калибровке $\sigma_1=\tau$, $\sigma_2=\rho$ индуцированная метрика, входящая в действие, принимает вид

$$G_{MN}\,\partial_a X^M\,\partial_b X^N = \begin{pmatrix} -\cosh^2\rho + \dot\phi^2\sinh^2\rho & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{92}$$

Здесь $\phi=\phi(\tau)$ — азимутальный угол точки струны, τ играет роль времени в AdS, ρ — радиальная координата, а $\dot\phi \equiv \partial\phi/\partial\tau$ — соответствующая угловая скорость.

В итоге получаем действие

$$S_{\mathrm{cl}} = 4\,\frac{R^2}{2\pi\alpha'}\int\mathrm{d}\tau\int_0^{\rho_0}\mathrm{d}\rho\,\left(\cosh^2\rho - \dot\phi^2(\tau)\sinh^2\rho\right)^{1/2} \equiv \\ \equiv \int\mathrm{d}\tau\,L[\phi]\,. \tag{93}$$

Фактор 4 учитывает число сегментов сложенной струны, вращающейся вокруг $\rho=0$, а максимальное значение радиальной координаты $\rho \leqslant \rho_0$ получается из условия

$$\coth^2\rho - \dot\phi^2(\tau) \geqslant 0\,. \tag{94}$$

Уравнение (93) описывает классическую механическую модель вращающегося стержня с лагранжианом $\mathcal{L}[\phi]$, энергией

$$E = \dot\phi\,\frac{\partial}{\partial\dot\phi}\,L[\phi] - L = \\ = -4\left(\frac{\alpha_{\mathrm{s}}N_{\mathrm{c}}}{\pi}\right)^{1/2}\int_0^{\rho_0}\mathrm{d}\rho\,\frac{\cosh^2\rho}{(\cosh^2\rho - \dot\phi^2\sinh^2\rho)^{1/2}} \tag{95}$$

и спином

$$S = \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}} L[\phi] = = -4\left(\frac{\alpha_s N_c}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^{\rho_0} d\rho \, \frac{\dot{\phi} \sinh^2 \rho}{(\cosh^2 \rho - \dot{\phi}^2 \sinh^2 \rho)^{1/2}} \,. \quad (96)$$

Интегралы движения на классической траектории принимают значения E и S, а действие (93) на классической траектории равно

$$S_{cl} = \int d\tau \,(J\dot{\phi} - E) = 2\gamma_S(\alpha_s) \ln \frac{r_{max}}{r_{min}} \,, \quad (97)$$

где

$$\tau_{max,\,min} = \ln r_{max,\,min} \,,$$

$$\gamma_S(\alpha_s) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{d\tau}{2\pi} \,(S\dot{\phi} - E) = \frac{1}{2}\,(-E + S\omega) \,, \quad (98)$$

$\omega = \dot{\phi}$ — угловая скорость стержня.

Аномальная размерность определяется как коэффициент перед временем в AdS-пространстве в выражении для действия. В пределе длинной струны:

$$\rho_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\eta} \gg 1 \,, \qquad \omega = 1 + 2\eta \,, \quad (99)$$

при $\eta \to 0$, можно найти энергию и угловой момент струны:

$$E = 2\left(\frac{\alpha_s N_c}{\pi}\right)^{1/2} (\eta^{-1} - \ln \eta) \,,$$
$$S = 2\left(\frac{\alpha_s N_c}{\pi}\right)^{1/2} (\eta^{-1} + \ln \eta) \,. \quad (100)$$

Подставляя эти соотношения в (98), получаем

$$\gamma_S(\alpha_s) = 2\left(\frac{\alpha_s N_c}{\pi}\right)^{1/2} \ln S \,, \quad (101)$$

что и определяет аномальную размерность оператора в режиме сильной связи.

Возможно обобщение на случай операторов высокого твиста $F_{+\perp} D_+^{S_1} F_{+\perp} \ldots D_+^{S_{L-1}} F_{+\perp}$. В этом случае струна эффективно распадается на L компонент, каждая из которых достигает границы AdS_5. Энергия соответствующей струнной конфигурации равна [63]

$$\gamma^{(tw=L)}_{S_1,\ldots,S_{L-1}} = \frac{\lambda^{1/2}}{2\pi} \ln q_L(S_1, \ldots, S_{L-1}) \,. \quad (102)$$

В этом выражении q_L можно отождествить с интегралом движения в классической струне. Для $S_k \sim S \gg 1$ при $k = 1, \ldots, L-1$ имеем $q_L \sim S^L$. Отметим, что логарифмическое поведение аномальных размерностей операторов с большими квантовыми числами универсально для всех калибровочных теорий [64, 65].

9.3. Вычисление аномальных размерностей в теории открытых струн

Покажем, что логарифмический рост аномальной размерности операторов с большими лоренцевскими спинами (91) и (102) можно получить в терминах вильсоновских линий в калибровочной теории или, что эквивалентно, с помощью открытой струны в метрике AdS_5. Ключевым фактом является связь аномальных размерностей операторов, включающих большое число ковариантных производных вдоль светового конуса, и так называемой аномальной перенормировкой вильсоновской линии для контура с изломом [64, 65].

Достаточно давно было обнаружено [71], что вильсоновская петля

$$W[C] = \mathrm{Tr}\left\{ P \exp\left(ig \int_C dx^\mu A_\mu(x) \right) \right\}$$

приобретает нетривиальную аномальную размерность $\Gamma_{cusp}(\lambda, \theta)$, если контур интегрирования содержит излом

$$\langle W[C] \rangle \sim \mu^{\Gamma_{cusp}(\lambda,\theta)} \,, \quad (103)$$

где μ — ультрафиолетовое обрезание. Связь аномальных размерностей операторов твиста 2 с лоренцевским спином S и аномалии имеет вид [64, 65]

$$\gamma_S^{(tw=2)}(\lambda) = 2\Gamma_{cusp}(\lambda, \theta = \ln S) \quad (104)$$

и справедлива при всех значениях константы связи λ. В области слабой связи при $\theta \gg 1$ получаем

$$\Gamma_{cusp}(\lambda, \theta) = \theta\left[\frac{\lambda}{4\pi^2} + O(\lambda^2)\right] \,, \quad (105)$$

причем известно несколько следующих членов пертурбативного разложения.

Дуальное струнное описание позволяет провести вычисление $\Gamma_{cusp}(\lambda, \theta)$ в области сильной связи, используя открытую струну. В этом пределе можно рассмотреть вильсоновский контур с изломом, являющийся границей мировой поверхности открытой струны, распространяющейся в метрике AdS_5. Ответ для вакуумного значения вильсоновского контура при $\theta \gg 1$ сводится к вычислению минимальной поверхности [72, 73]:

$$\Gamma_{cusp}(\lambda, \theta) = \theta\left[\left(\frac{\lambda}{4\pi^2}\right)^{1/2} + O(\lambda^0)\right] \,. \quad (106)$$

Используя уравнения (104) и (106), можно воспроизвести результат в области сильной связи (91), полученный с помощью замкнутой струны [25].

Соответствие (104) можно продолжить и для операторов высокого твиста. Если оператор содержит L фундаментальных полей и полное число ковариантных производных равно $S \gg L$, его аномальную размерность можно получить из контура, состоящего из L вильсоновских контуров в фундаментальном представлении калибровочной группы, причем число изломов варьируется между 4 и $2L$ [63]. При больших N_c вакуумное значение произведения вильсоновских петель факторизуется в произведение вакуумных средних, поэтому вычисляемая в области сильной связи минимальная поверхность, отвечающая произведению $k = 2, \ldots, L$ контуров с изломами, дается суммой k "элементарных площадей":

$$2\,\Gamma_{cusp}(\lambda, \theta = \ln S) \leqslant \gamma_S^{(tw=L)}(\lambda) \leqslant L\,\Gamma_{cusp}(\lambda, \theta = \ln S) \,. \quad (107)$$

Отметим, что аномальные размерности операторов высокого твиста определяются не только его лоренцевским спином S. На самом деле возникает зонная структура для аномальных размерностей, параметризуемая дополнительными скрытыми квантовыми числами [63]. Явный пример зонной структуры можно проследить в режиме слабой связи, где внутренняя структура зоны параметризуется высшими интегралами движения в SL(2) спиновой цепочке.

10. Заключение

В этом коротком обзоре мы попытались отразить наиболее перспективные, с нашей точки зрения, направления и полученные на данный момент результаты, касающиеся дуальности между калибровочными теориями и теорией струн. Безусловно, пока сделаны только первые шаги в этом направлении, но даже относительный прогресс, достигнутый в последние годы, подтверждает исключительную перспективность подхода. Обсуждавшаяся дуальность в течение нескольких десятилетий казалась достаточно академичным предметом исследований, однако полученные результаты показали ее эффективность при анализе самых сложных проблем, касающихся поведения калибровочной теории в режиме сильной связи.

Подчеркнем, что с помощью дуального струнного описания сделаны конкретные количественные предсказания для калибровочных теорий, часть которых уже подтверждена явными вычислениями в теории поля. Отметим, что дуальность безусловно оказывает и будет оказывать и обратное влияние на теорию струн. Сейчас уже понятно, что переходное поведение между пертурбативным и непертурбативным режимом в теории поля требует знания квантовой гравитации, поэтому явления, хорошо известные в теории поля, могут пролить свет на ряд глубинных проблем в гравитационном секторе.

Конечно, самым интересным было бы получить дуальное струнное описание Стандартной модели. Однако на настоящий момент метрика в дуальном описании и соответствующие поля высших форм не найдены, хотя интенсивные исследования в этом направлении продолжаются и нет сомнений, что общая схема справедлива и в этом случае. Согласно наиболее оптимистичной точке зрения дуальное описание позволит сделать ключевое продвижение и в решении проблемы конфайнмента.

В режиме слабой связи основные надежды связаны с возможным суммированием в дуальной теории рядов теории возмущений. Несмотря на то что многочисленные сокращения справедливы лишь в $N = 4$ теории, ряд рассмотренных примеров показывает, что струнное описание фиксирует универсальные свойства рядов теории возмущений. В частности, было бы исключительно интересно найти струнную реализацию реджевского режима в КХД и увидеть соответствующие эффективные степени свободы. Первые шаги в этом направлении сделаны в работах [74–76].

Мы постарались аргументировать, что исключительно важную роль играет скрытая интегрируемость дуальных теорий, по крайней мере в некоторых секторах или режимах. По существу интегрируемость отражает существование дополнительных симметрий, которые не были обнаружены в предыдущих исследованиях, причем интегрируемость наиболее отчетливо проявляется при редукции к подходящим кинематическим секторам. В частности, она явно прослежена в ренормгрупповой динамике операторов на световом конусе в КХД и для операторов общего вида в суперсимметричных калибровочных теориях.

Несмотря на очевидный прогресс в этом направлении наиболее глубокий вопрос "какая скрытая симметрия ответственна за интегрируемость в калибровочной теории" остается открытым. Первые попытки последовательного выявления симметрии показали [77–79], что она должна быть связана с так называемыми нелокальными законами сохранения, известными в теории интегрируемых систем.

Помимо вопросов общего характера, связанных с интегрируемостью, упомянем более частные проблемы. Например, проверка интегрируемости оператора дилатации в калибровочной теории в высших петлях или проверка возможной интегрируемости дуальной сигма-модели на квантовом уровне. В любом случае методы интегрируемых систем уже показали свою эффективность при изучении дуальности между калибровочными теориями и струнами и, без сомнения, найдут дальнейшее применение в данном классе задач.

В заключение отметим, что ряд интересных результатов получен в самое последнее время. В частности, показано, каким образом в дуальной гравитационной теории решается U(1)-проблема [80], и найдена метрика для неконформных суперсимметричных калибровочных теорий с фундаментальной материей [81]. Был также предпринят ряд попыток получения физических характеристик мезонов в стандартной КХД в дуальной теории [82].

Мы практически не касались вопроса получения дуального струнного описания калибровочной теории из первых принципов. В этом направлении прогресс пока минимален, но, тем не менее, выделим несколько результатов, которые нам кажутся перспективными. В первую очередь, отметим новый подход к суммированию инстантонных эффектов [83], который позволил сформулировать гипотезу, что калибровочная теория по сути дела играет роль эффективной теории микроскопических гравитационных степеней свободы [84].

С другой стороны, было замечено [85], что петлевые вычисления в четырехмерной теории поля в плоской метрике могут быть переформулированы как древесные диаграммы в пятимерном пространстве в метрике AdS_5. Наконец, новый механизм возникновения эффективной теории гравитации из "конденсации" специальных состояний в калибровочной теории был предложен в [86]. Несмотря на некоторые продвижения, ключевой вопрос о физическом механизме генерации конденсата метрики в теории квантовой гравитации пока остается без ответа.

Автор благодарен А. Белицкому, В. Брауну и Г. Корчемскому за сотрудничество, а также А. Герасимову, К. Зарембо, Ю. Макеенко, А. Маршакову, А. Миронову, А. Морозову, Н. Некрасову, А. Цейтлину за полезные обсуждения вопросов, затронутых в обзоре. Работа частично поддержана грантами CRDF (RUP2-261-MO-04) и РФФИ (проект 04-011-00646).

Список литературы

1. Maldacena J M *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** 231 (1998); *Int. J. Theor. Phys.* **38** 1113 (1999); hep-th/9711200
2. Gubser S S, Klebanov I R, Polyakov A M *Phys. Lett. B* **428** 105 (1998); hep-th/9802109

3. Witten E *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** 253 (1998); hep-th/9802150
4. Polchinski J *Phys. Rev. Lett.* **75** 4724 (1995); hep-th/9510017
5. Witten E *Nucl. Phys. B* **460** 335 (1996); hep-th/9510135
6. Polyakov A M *Nucl. Phys. B*: *Proc. Suppl.* **68** 1 (1998); hep-th/9711002
7. Klebanov I R *Nucl. Phys. B* **496** 231 (1997); hep-th/9702076
8. 't Hooft G, gr-qc/9310026; Susskind L, hep-th/9309145
9. Maldacena J M, Nuñez C *Phys. Rev. Lett.* **86** 588 (2001); hep-th/0008001
10. Klebanov I R, Strassler M J *J. High Energy Phys.* (08) 052 (2000); hep-th/0007191
11. Polchinski J *Int. J. Mod. Phys. A* **16** 707 (2001); hep-th/0011193
12. Berenstein D, Maldacena J, Nastase H *J. High Energy Phys.* (04) 013 (2002); hep-th/0202021
13. Aharony O et al. *Phys. Rep.* **323** 183 (2000); hep-th/9905111
14. Klebanov I R, hep-th/0009139
15. Semenoff G W, Zarembo K *Nucl. Phys. B*: *Proc. Suppl.* **108** 106 (2002); hep-th/0202156
16. Tseytlin A A, hep-th/0311139
17. Beisert N *Phys. Rep.* **405** 1 (2005); hep-th/0407277
18. Belitsky A V et al. *Int. J. Mod. Phys. A* **19** 4715 (2004); hep-th/0407232
19. Bertolini M *Int. J. Mod. Phys. A* **18** 5647 (2003); hep-th/0303160
20. Strassler M J, hep-th/0505153
21. Sadri D, Sheikh-Jabbari M M *Rev. Mod. Phys.* **76** 853 (2004); hep-th/0310119
22. Witten E *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** 505 (1998); hep-th/9803131
23. Kovtun P K, Son D T, Starinets A O *Phys. Rev. Lett.* **94** 111601 (2005); hep-th/0405231
24. Buchel A, Liu J T, Starinets A O *Nucl. Phys. B* **707** 56 (2005); hep-th/0406264
25. Gubser S S, Klebanov I R, Polyakov A M *Nucl. Phys. B* **636** 99 (2002); hep-th/0204051
26. Maldacena J M *Phys. Rev. Lett.* **80** 4859 (1998); hep-th/9803002; Rey S-J, Yee J-T *Eur. Phys. J. C* **22** 379 (2001); hep-th/9803001
27. Erickson J K, Semenoff G W, Zarembo K *Nucl. Phys. B* **582** 155 (2000); hep-th/0003055
28. Kulish P P, Reshetikhin N Yu, Sklyanin E K *Lett. Math. Phys.* **5** 393 (1981)
29. Тарасов В О, Тахтаджан Л А, Фаддеев Л Д *ТМФ* **57** 163 (1983)
30. Кураев Е А, Липатов Л Н, Фадин В С *ЖЭТФ* **71** 840 (1976); **72** 377 (1977); Балицкий И И, Липатов Л Н *ЯФ* **28** 1597 (1978)
31. Липатов Л Н *Письма в ЖЭТФ* **59** 571 (1994); hep-th/9311037
32. Faddeev L D, Korchemsky G P *Phys. Lett. B* **342** 311 (1995); hep-th/9404173
33. Korchemsky G P *Nucl. Phys. B* **443** 255 (1995); hep-ph/9501232
34. Braun V M, Derkachov S É, Manashov A N *Phys. Rev. Lett.* **81** 2020 (1998); hep-ph/9805225
35. Bukhvostov A P et al. *Nucl. Phys. B* **258** 601 (1985)
36. Belitsky A V *Nucl. Phys. B* **574** 407 (2000); hep-ph/9907420
37. Derkachov S É, Korchemsky G P, Manashov A N *Nucl. Phys. B* **566** 203 (2000); hep-ph/9909539
38. Макеенко Я М *ЯФ* **33** 842 (1981)
39. Korchemsky G P *Nucl. Phys. B* **462** 333 (1996); hep-th/9508025; *Nucl. Phys. B* **498** 68 (1997); hep-th/9609123
40. Braun V M et al. *Nucl. Phys. B* **553** 355 (1999); hep-ph/9902375; Belitsky A V *Phys. Lett. B* **453** 59 (1999); hep-ph/9902361; *Nucl. Phys. B* **558** 259 (1999); hep-ph/9903512; Braun V M, Korchemsky G P, Manashov A N *Phys. Lett. B* **476** 455 (2000); hep-ph/0001130; *Nucl. Phys. B* **597** 370 (2001); hep-ph/0010128; *Nucl. Phys. B* **603** 69 (2001); hep-ph/0102313
41. Beisert N *Nucl. Phys. B* **676** 3 (2004); hep-th/0307015; Beisert N, Staudacher M *Nucl. Phys. B* **670** 439 (2003)
42. Belitsky A V et al. *Phys. Lett. B* **594** 385 (2004); hep-th/0403085; *Phys. Rev. D* **70** 045021 (2004); hep-th/0311104
43. Minahan J A, Zarembo K *J. High Energy Phys.* (03) 013 (2003); hep-th/0212208
44. Beisert N, Kristjansen C, Staudacher M *Nucl. Phys. B* **664** 131 (2003); hep-th/0303060
45. Arutyunov G, Frolov S, Staudacher M *J. High Energy Phys.* (10) 016 (2004); hep-th/0406256; Staudacher M *J. High Energy Phys.* (05) 054 (2005); hep-th/0412188
46. Beisert N, Staudacher M, hep-th/0307042
47. Kruczenski M *Phys. Rev. Lett.* **93** 161602 (2004); hep-th/0311203
48. Hernández R, López E *J. High Energy Phys.* (04) 052 (2004); hep-th/0403139
49. Stefanski B J (Jr), Tseytlin A A *J. High Energy Phys.* (05) 042 (2004); hep-th/0404133
50. Frolov S, Tseytlin A A *J. High Energy Phys.* (06) 007 (2002); hep-th/0204226; *Nucl. Phys. B* **668** 77 (2003); hep-th/0304255; *J. High Energy Phys.* (07) 016 (2003); hep-th/0306130; *Phys. Lett. B* **570** 96 (2003); hep-th/0306143; Kruczenski M, Ryzhov A V, Tseytlin A A *Nucl. Phys. B* **692** 3 (2004); hep-th/0403120; Kruczenski M, Tseytlin A A *J. High Energy Phys.* (09) 038 (2004); hep-th/0406189
51. Arutyunov G, Russo J, Tseytlin A A *Phys. Rev. D* **69** 086009 (2004); hep-th/0311004; Arutyunov G et al. *Nucl. Phys. B* **671** 3 (2003); hep-th/0307191; Beisert N et al. *J. High Energy Phys.* (10) 037 (2003); hep-th/0308117; *J. High Energy Phys.* (09) 010 (2003); hep-th/0306139
52. Arutyunov G, Staudacher M, hep-th/0403077
53. Arutyunov G, Staudacher M *J. High Energy Phys.* (03) 004 (2004); hep-th/0310182
54. Metsaev R R *Nucl. Phys. B* **625** 70 (2002); hep-th/0112044
55. Beisert N et al. *Nucl. Phys. B* **650** 125 (2003); hep-th/0208178
56. Gross D J, Mikhailov A, Roiban R *Ann. Phys.* (New York) **301** 31 (2002); hep-th/0205066
57. Seiberg N, Witten E *Nucl. Phys. B* **426** 19 (1994); hep-th/9407087
58. Novikov V A et al. *Nucl. Phys. B* **229** 381 (1983)
59. Bertolini M et al. *Nucl. Phys. B* **621** 157 (2002); hep-th/0107057; *Nucl. Phys. B* **630** 222 (2002); hep-th/0112187
60. Ferretti G, Heise R, Zarembo K *Phys. Rev. D* **70** 074024 (2004); hep-th/0404187
61. Park I Y, Tirziu A, Tseytlin A A *Phys. Rev. D* **71** 126008 (2005); hep-th/0505130
62. Di Vecchia P, Tanzini A *J. Geom. Phys.* **54** 116 (2005); hep-th/0405262
63. Belitsky A V, Gorsky A S, Korchemsky G P *Nucl. Phys. B* **667** 3 (2003); hep-th/0304028
64. Korchemsky G P *Mod. Phys. Lett. A* **4** 1257 (1989)
65. Korchemsky G P, Marchesini G *Nucl. Phys. B* **406** 225 (1993)
66. Kazakov V A et al. *J. High Energy Phys.* (05) 024 (2004); hep-th/0402207
67. Serban D, Staudacher M *J. High Energy Phys.* (06) 001 (2004); hep-th/0401057
68. Beisert N, Dippel V, Staudacher M *J. High Energy Phys.* (07) 075 (2004); hep-th/0405001; Arutyunov G, Frolov S, Staudacher M *J. High Energy Phys.* (10) 016 (2004); hep-th/0406256
69. Callan C G (Jr) et al. *Nucl. Phys. B* **673** 3 (2003); hep-th/0307032; Callan C G (Jr), McLoughlin T, Swanson I *Nucl. Phys. B* **700** 271 (2004); hep-th/0405153; Swanson I, hep-th/0405172
70. Kotikov A V, Lipatov L N *Nucl. Phys. B* **661** 19 (2003); "Erratum" *Nucl. Phys. B* **685** 405 (2004); hep-ph/0208220; Kotikov A V, Lipatov L N, Velizhanin V N *Phys. Lett. B* **557** 114 (2003); hep-ph/0301021; Kotikov A V et al. *Phys. Lett. B* **595** 521 (2004); hep-th/0404092
71. Polyakov A M *Nucl. Phys. B* **164** 171 (1980)
72. Kruczenski M *J. High Energy Phys.* (12) 024 (2002); hep-th/0210115
73. Makeenko Yu *J. High Energy Phys.* (01) 007 (2003); hep-th/0210256
74. Polchinski J, Strassler M J *Phys. Rev. Lett.* **88** 031601 (2002); hep-th/0109174
75. Gorsky A, Kogan I I, Korchemsky G *J. High Energy Phys.* (05) 053 (2002); hep-th/0204183
76. Janik R A, Peschanski R *Nucl. Phys. B* **625** 279 (2002); hep-th/0110024

77. Bena I, Polchinski J, Roiban R *Phys. Rev. D* **69** 046002 (2004); hep-th/0305116
78. Dolan L, Nappi C R, Witten E *J. High Energy Phys.* (10) 017 (2003); hep-th/0308089; hep-th/0401243
79. Alday L F *J. High Energy Phys.* (12) 033 (2003); hep-th/0310146
80. Armoni A *J. High Energy Phys.* (06) 019 (2004); hep-th/0404248; Barbon J L F et al. *J. High Energy Phys.* (10) 029 (2004); hep-th/0404260
81. Kruczenski M et al. *J. High Energy Phys.* (07) 049 (2003); hep-th/0304032; *J. High Energy Phys.* (05) 041 (2004); hep-th/0311270; Núnez C, Paredes Á, Ramallo A V *J. High Energy Phys.* (12) 024 (2003); hep-th/0311201
82. Sakai T, Sugimoto S, hep-th/0507073; *Prog. Theor. Phys.* **113** 843 (2005); hep-th/0412141; Hong S, Yoon S, Strassler M J, hep-ph/0501197; Erlich J et al., hep-ph/0501128
83. Nekrasov N A *Adv. Theor. Math. Phys.* **7** 831 (2004); hep-th/0206161
84. Iqbal A et al., hep-th/0312022
85. Gopakumar R *Phys. Rev. D* **70** 025009 (2004); hep-th/0308184
86. Lin H, Lunin O, Maldacena J *J. High Energy Phys.* (10) 025 (2004); hep-th/0409174

Gauge theories as string theories: the first results

A.S. Gorsky
Russian Federation State Scientific Center "Institute for Theoretical and Experimental Physics",
B. Cheremushkinskaya ul. 25, 117218 Moscow, Russian Federation
Tel. (*7-095*) *129-94 93. Fax* (*7-095*) *127-08 33*
E-mail: *gorsky@itep.ru*

The gauge/string theory duality in curved space is discussed mainly using a nonabelian conformal $N = 4$ supersymmetric gauge theory and the theory of a closed superstring in the $AdS_5 \times S^5$ metric as an example. It is shown that in the supergravity approximation, string duality yields the characteristics of a strong coupling gauge theory. For a special shape of the contour, a Wilson loop expression is derived in the classical superstring approximation. The role of hidden integrability in lower loop calculations in gauge theory and in different approximations of string theory is discussed. It is demonstrated that in the large quantum number limit gauge theory operators can be described in terms of the dual string picture. Examples of metrics providing the dual description of gauge theories with broken conformal symmetry are presented, and how the vacuum structure of such theories can be formulated in terms of gravity is discussed.

PACS numbers: **11.15.–q**, **11.25.–w**, 11.25.Tq, 11.30.Pb

Bibliography — 86 references *Received 19 August 2005*

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **175** (11) 1145–1162 (2005) *Physics–Uspekhi* **48** (11) (2005)