

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Соотношение неопределенности
и соотношение ошибка измерения – возмущение

Ю.И. Воронцов

Обсуждаются истоки и физические следствия традиционного соотношения между ошибкой измерения координаты и возмущением импульса $\Delta_m^2 x \Delta_p^2 p \geq \hbar^2/4$. Доказывается, что отвечающее ему увеличение дисперсии импульса в апостериорном состоянии имеет место только в некоторых частных случаях. Показывается, что соотношение между $\Delta_m^2 A$ и $\Delta_p^2 B$ в случаях, если коммутатор $[A, B]$ является оператором, существенно отличается от соответствующего соотношения неопределенности. Находятся квантовые пределы ошибок совместного измерения квадратурных амплитуд оптической моды в гомодинной схеме. Показывается, что аналогичные результаты могут быть получены при оценке квадратурных амплитуд гармонического осциллятора с помощью непрерывного измерения координаты.

PACS numbers: 03.65. – w, 03.65.Ta, 03.67. – a

Содержание

1. Введение (1053).
 2. Соотношение ошибка измерения – возмущение (1054).
 - 2.1. Некоторые понятия квантовой теории измерений. 2.2. Истоки традиционного соотношения ошибка измерения – возмущение. 2.3. Соотношение ошибка измерения $\hat{A}$ – возмущение $\hat{B}$ в случае, если коммутатор $[\hat{A}, \hat{B}]$ — оператор. 2.4. Ошибка измерения и возмущение при селективном измерении.
 3. Ошибки совместного измерения координаты и импульса (1060).
 - 3.1. Непосредственное совместное измерение координаты и импульса. 3.2. Совместное измерение координаты и импульса с помощью вспомогательной степени свободы. 3.3. Совместное измерение квадратурных амплитуд моды излучения.
 4. Ошибки измерения и возмущение при непрерывном измерении координаты (1064).
 - 4.1. Классические характеристики процесса непрерывного измерения. 4.2. Ошибки совместного оценивания квадратурных амплитуд гармонического осциллятора. 4.3. Состояние, создаваемое непрерывным селективным измерением.
 5. Заключение (1066).
- Список литературы (1067).

1. Введение

Фундаментальное соотношение между дисперсиями координаты и импульса, известное как соотношение

неопределенности Гейзенберга

$$\Delta^2 x \Delta^2 p \geq \frac{\hbar^2}{4}, \quad (1)$$

является количественным выражением принципа неопределенности Гейзенберга [1]. Оно характеризует состояние объекта и является прямым следствием некоммутативности операторов $\hat{x}$ и $\hat{p}$ [2–4]. По определению величины $\Delta^2 x$ и $\Delta^2 p$ зависят только от состояния объекта и не связаны с ошибками измерения.

Экспериментальная проверка соотношения (1) подразумевает следующее. Приготавливают многочисленный ансамбль частиц. В одной его половине измеряют точно (с ошибкой, много меньшей Δx) координаты частиц, в другой — импульсы. Из полученных числовых массивов находят дисперсии координаты и импульса.

Есть соотношения, по форме подобные соотношению (1), но другие по содержанию. Наиболее известное из них — соотношение между ошибкой измерения координаты и возмущением импульса. Традиционно оно доказывается на примере измерения координаты с помощью микроскопа (микроскоп Гейзенберга) и записывается в тех же обозначениях, что и соотношение (1). Мы представим его в виде

$$\Delta_m^2 x \Delta_p^2 p \geq \frac{\hbar^2}{4}, \quad (2)$$

где $\Delta_m^2 x$ — дисперсия ошибки измерения координаты, $\Delta_p^2 p$ — дисперсия возмущения импульса. Под ошибкой (погрешностью) измерения координаты понимается разность между результатом измерения и истинным ее значением. Под возмущением импульса понимается изменение импульса объекта в результате его взаимодействия с прибором. Согласно определению ни ошибка

Ю.И. Воронцов. Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет, 119899 Москва, Воробьевы горы, Российская Федерация
Тел. (095) 939-39-03. Факс (095) 932-88-20
E-mail: vorontsov@phys.msu.ru

Статья поступила 13 мая 2005 г., после доработки 28 июня 2005 г.

измерения, ни возмущение не зависят от состояния и динамических свойств объекта.

Логическим следствием соотношения (1) считается соотношение между дисперсиями ошибок совместного (одновременного) измерения координаты и импульса

$$\Delta_{m.s}^2 x \Delta_{m.s}^2 p \geq \frac{\hbar^2}{4}. \quad (3)$$

Под совместным измерением координаты и импульса подразумевается одновременное взаимодействие с объектом двух приборов, один из которых измеряет координату, другой — импульс.

В статьях, посвященных анализу одновременного измерения координаты и импульса, есть соотношение, названное в [5] истинным принципом неопределенности для совместных измерений. Запишем его в виде [6]

$$\Delta x_1 \Delta x_2 \geq \hbar. \quad (4)$$

Здесь x_1 и x_2 не наблюдаемые объекта, а наблюдаемые приборов. Величины Δx_1 и Δx_2 не ошибки измерения, а стандартные отклонения результатов точного измерения x_1 в одном приборе и x_2 в другом.

Соотношениям (1)–(3) столько же лет, сколько и самой квантовой механике. Тем не менее их взаимосвязь и следствия до сих пор остаются предметом дискуссии.

На заре развития квантовой механики распространенным было мнение, что само соотношение неопределенности является следствием возможностей измерительных приборов, что необходимость в статистическом описании системы возникает из-за фундаментальной природы возмущения, вызванного процессом измерения [4, 7]. Отголоски таких взглядов сохранились в некоторых используемых до сих пор учебниках по квантовой механике, например в [8–10]. Считается, что нет противоречия между утверждениями о существовании соотношения неопределенности как следствия общих принципов квантовой механики и как следствия возможностей измерительных приборов. При этом не обращается внимания на то, что соотношение (2) доказывалось на примерах (обычно с микроскопом), в которых фактически принималось, что сам прибор (луч света) уже подчиняется соотношению неопределенности.

Соотношение (2) обычно понимается так: в результате измерения координаты с ошибкой $\Delta_m^2 x$ дисперсия импульса объекта всегда увеличивается на $\Delta_p^2 p \geq \hbar^2 / (4\Delta_m^2 x)$. Такое понимание ошибочно. При определенных условиях в результате приближенного измерения координаты объект может оказаться в состоянии с дисперсией импульса, меньшей исходной [11–13] и меньшей чем $\hbar^2 / (4\Delta_m^2 x)$ [14]. Прибор может вообще не оставить следов своего динамического воздействия на объект, несмотря на уменьшение дисперсии координаты.

Соотношение (3) безусловно справедливо, если имеются в виду ошибки измерения значений координаты и импульса, относящихся к состоянию после измерения. В противном случае можно было бы приготовить состояние, противоречащее соотношению неопределенности. Однако поскольку определение обобщенного импульса в связанной системе объект–прибор допускает различные варианты, соотношение (3) может не выполняться по отношению к значениям координаты и обобщенного импульса, относящимся ко времени взаимодействия объекта с приборами.

По аналогии с обобщенным соотношением неопределенности [3, 15, 16]

$$\Delta^2 A \Delta^2 B \geq \frac{\hbar^2}{4} |\langle \hat{C} \rangle|^2, \quad \hat{C} = \frac{[\hat{A}, \hat{B}]}{i\hbar}, \quad (5)$$

тождественность формы соотношений (1)–(3) провоцирует написать соотношения

$$\Delta_m^2 A \Delta_p^2 B \geq \frac{\hbar^2}{4} |\langle \hat{C} \rangle|^2, \quad (6)$$

$$\Delta_{m.s}^2 A \Delta_{m.s}^2 B \geq \frac{\hbar^2}{4} |\langle \hat{C} \rangle|^2. \quad (7)$$

Но это будет ошибкой!

Цель настоящей статьи — с позиций современной квантовой теории измерений исследовать истоки и границы применимости соотношений (2), (3) и найти правильные соотношения вместо ошибочных (6), (7).

В разделе 2 объясняется, что в квантовой теории измерений понимают под состоянием объекта после измерения, вводятся понятия селективного и неселективного измерений. На примере стандартной квантовой схемы измерения координаты доказывается, что соотношение (2) является следствием соотношения неопределенности между наблюдаемыми прибора. Затем исследуются соотношения $\Delta_m A \Delta_p B$ и $\Delta_m B \Delta_p A$ в случае $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hbar \hat{C}$, излагается математический аппарат преобразования состояния объекта при измерении, приводятся примеры, в которых изменение дисперсии импульса объекта противоречит соотношению (2).

Далее исследуются соотношения между ошибками совместного измерения некоммутирующих наблюдаемых. В разделе 3 рассматриваются три известные модели измерения: 1) одновременное взаимодействие с объектом двух приборов, когда один из них реагирует на координату, другой — на импульс; 2) совместное измерение координаты и импульса с помощью вспомогательной степени свободы, когда совместное измерение некоммутирующих наблюдаемых сводится к совместному измерению коммутирующих комбинаций наблюдаемых; 3) измерение квадратурных амплитуд и числа квантов моды излучения в гомодинной схеме. При этом показывается происхождение соотношения (4), его отношение к соотношению (3). В разделе 4 анализируются ошибки совместного оценивания некоммутирующих наблюдаемых с помощью непрерывного измерения координаты, описывается создаваемое таким измерением стационарное состояние объекта.

Основные итоги работы формулируются в разделе 5.

2. Соотношение ошибка измерения – возмущение

В процессе предлагаемого анализа неизбежно использование специфического аппарата и понятий квантовой теории измерений. Изложим кратко основные из них.

2.1. Некоторые понятия квантовой теории измерений

Измерение — принципиально необратимый процесс. Необратимым может быть взаимодействие уже на первом этапе измерения, например при определении координаты электрона по точке высвечивания на экране. Такое измерение называют прямым. Если же измерение

координаты электронов используют для оценки напряженности поля, через которое проходит поток электронов, необратимым будет второй этап измерения. Первый этап — взаимодействие электронов с полем — имеет обратимый характер. Такое измерение напряженности поля называют косвенным.

Поток электронов в данной схеме играет роль квантовой считывающей системы (КСС) [17, 18] — квантового преобразователя, микродатчика [14]. После косвенного измерения объект остается в том же окружении, что и до измерения. Косвенное измерение дает информацию как об исходном (априорном) состоянии объекта, так и о его состоянии после измерения (апостериорном).

Чем отличается процесс измерения от взаимодействия объекта с прибором как с обычной физической системой? В приборе информация об объекте преобразуется с квантового на классический уровень. Это дает возможность с помощью определенных классических действий разделить первоначальный ансамбль объектов на подансамбли в соответствии с результатами измерений. Состояния вторичных ансамблей называют состояниями после *селективного* измерения [14].

Хотя специфическими квантовыми свойствами обладают единичные объекты, убедиться в том, что объект готовится в определенном состоянии можно только в экспериментах над множеством неразличимых объектов или над одним и тем же объектом, многократно возвращаемым в исходное состояние. Когда говорят о состоянии отдельного объекта, невольно подразумевают, что этот объект является представителем определенного ансамбля. В эксперименте над единичным объектом процесс разделения является виртуальным: он ограничивается регистрацией результата измерения. Состояние после селективного измерения зависит не только от точности, но и от результата измерения.

Если разделения по результатам измерения не происходит, состояние объекта после взаимодействия с прибором можно представить как смесь состояний, которые могли бы получиться при селективном измерении [11, 14]. Распределение измеряемой наблюдаемой в такой смеси не отличается от начального. Подобные измерения называют *неселективными* [14].

В связи с неоднозначностью понятия состояния после измерения следует уточнить, что понимать под возмущением импульса при измерении координаты. Определение дисперсии возмущения импульса как дисперсии разности $p(\tau) - p(0)$, где $p(\tau)$ — значение импульса после измерения, $p(0)$ — значение импульса до измерения, физически бессмысленно, поскольку измерения импульса $p(0)$ и координаты несовместны. Имеет смысл разность дисперсий импульсов

$$\Delta^2 p(\tau) - \Delta^2 p(0) = \int (p - \langle p \rangle)^2 w_\tau(p) dp - \int (p - \langle p \rangle)^2 w_0(p) dp. \quad (8)$$

Здесь $w_\tau(p)$ и $w_0(p)$ — плотности вероятности импульса в конечном и начальном состояниях объекта соответственно. (Пределы интегрирования в (8) и ниже от $-\infty$ до ∞ .)

Значение разности (8) зависит от того, к какому измерению она относится: к селективному или неселективному.

2.2. Истоки традиционного соотношения ошибка измерения – возмущение

Рассмотрим стандартную квантовую схему косвенного измерения координаты. Чтобы в прибор поступала информация о мгновенном значении координаты, гамильтониан взаимодействия $\hat{H}_i$ объекта с КСС должен быть линейной функцией оператора координаты. Допустим, что $\hat{H}_i = \alpha \hat{x} \hat{Y}$, где $\hat{Y}$ — какой-либо оператор КСС (координата, импульс, квадрат координаты и т.д.), α — коэффициент связи. Представим гамильтониан системы объект – прибор в виде

$$\hat{H} = \hat{H}_o + \hat{H}_i + \hat{H}_a,$$

где $\hat{H}_o$ и $\hat{H}_a$ — гамильтонианы объекта и прибора соответственно.

Запишем уравнения движения системы в картине Гейзенберга, считая $\hat{Y}$ оператором координаты КСС:

$$\begin{aligned} (a) \quad \frac{d\hat{p}}{dt} &= \frac{1}{i\hbar} [\hat{p}, \hat{H}_o] + \alpha \hat{Y}, \\ (б) \quad \frac{d\hat{P}}{dt} &= \frac{1}{i\hbar} [\hat{P}, \hat{H}_a] + \alpha \hat{x}. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $\hat{P}$ — оператор сопряженного координате Y импульса КСС. Из уравнения (9а) следует, что в процессе измерения координаты на объект со стороны прибора действует сила (обратного флуктуационного влияния), оператор которой $\hat{F}_{b,a} = \alpha \hat{Y}$.

В случае "мгновенного" измерения, т.е. настолько малой длительности взаимодействия τ прибора с объектом, что собственными эволюциями объекта и прибора за это время можно пренебречь ($\tau \rightarrow 0$, $\alpha\tau$ — конечная величина), из уравнений (9) имеем

$$\begin{aligned} (a) \quad \hat{p}(\tau) &= \hat{p}(0) + \alpha\tau \hat{Y}(0), \\ (б) \quad \hat{P}(\tau) &= \hat{P}(0) + \alpha\tau \hat{x}(0). \end{aligned} \quad (10)$$

Информация о координате объекта поступает в прибор в виде изменения импульса КСС. Оценка координаты $x(0)$ объекта получается после измерения импульса КСС $P(\tau)$. Если измерение дает величину $\tilde{P}$, то в качестве оценки координаты объекта принимается максимально правдоподобное ее значение

$$\tilde{x} = \frac{1}{\alpha\tau} (\tilde{P} - \langle \hat{P}(0) \rangle), \quad (11)$$

где $\langle \hat{P}(0) \rangle$ — среднее значение импульса КСС в исходном состоянии.

Дисперсией ошибки измерения называют условную (при заданном значении координаты) дисперсию оценки. В данном случае она равна

$$\Delta_m^2 x = \frac{1}{(\alpha\tau)^2} (\Delta_m^2 \tilde{P} + \Delta^2 P(0)) \geq \frac{\Delta^2 P(0)}{(\alpha\tau)^2}, \quad (12)$$

где $\Delta_m^2 \tilde{P}$ — дисперсия ошибки измерения импульса КСС, $\Delta^2 P(0)$ — дисперсия импульса КСС в исходном состоянии. Разброс возможных значений оценки при заданном состоянии объекта характеризует ее безусловная дисперсия

$$\Delta^2 \tilde{x} = \Delta_m^2 x + \Delta^2 x(0), \quad (13)$$

где $\Delta^2 x(0)$ — априорная дисперсия координаты объекта.

После взаимодействия с прибором согласно (10) дисперсия импульса объекта

$$\Delta^2 p(\tau) = \Delta^2 p(0) + (\alpha\tau)^2 \Delta^2 Y(0), \quad (14)$$

что на

$$\Delta_p^2 p = (\alpha\tau)^2 \Delta^2 Y(0) \quad (15)$$

больше ее значения в исходном состоянии.

Из (12) и (15) имеем

$$\Delta_m^2 x \Delta_p^2 p \geq \Delta^2 P(0) \Delta^2 Y(0). \quad (16)$$

Следовательно, соотношение (2) справедливо постольку, поскольку справедливо соотношение неопределенности для состояния КСС. (В примере с микроскопом с самого начала фактически постулируется такое свойство КСС (света).) Поэтому соотношение (2) между ошибкой измерения координаты и возмущением импульса можно рассматривать только как следствие соотношения неопределенности. Фактически соотношение (2) есть соотношение неопределенности для прибора, пересчитанное к наблюдаемому объекту.

Замечание. Иногда рассматривается произведение соотношений (13) и (14) [19]. После его оптимизации получается соотношение

$$\Delta^2 \tilde{x} \Delta^2 p(\tau) \geq \hbar^2,$$

которое связывает безусловную дисперсию оценок координаты, зависящую от начальных состояний объекта и прибора, с безусловной дисперсией импульса объекта после измерения.

2.3. Соотношение ошибка измерения $\hat{A}$ – возмущение $\hat{B}$ в случае, если коммутатор $[\hat{A}, \hat{B}]$ — оператор

Принципиальное различие между соотношением неопределенности для объекта и соотношением ошибка измерения – возмущение становится очевидным в случае, если при измерении наблюдаемой $\hat{A}$ рассматривается возмущение наблюдаемой $\hat{B}$, такой что коммутатор $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hbar\hat{C}$ является оператором. Например, если $\hat{A} = \hat{x}$, $\hat{B} = \hat{p}^2$, то из (5) следует

$$\Delta^2 x \Delta^2 p^2 \geq \hbar^2 |\langle \hat{p} \rangle|^2, \quad (17)$$

где $\langle \hat{p} \rangle$ — среднее значение импульса объекта.

Если бы подобное (5) соотношение было справедливо для произведения дисперсий ошибки измерения координаты и возмущения квадрата импульса, то дисперсия возмущения квадрата импульса должна была бы зависеть не от начальной дисперсии импульса, а только от его среднего значения. Однако согласно (10а) изменение дисперсии квадрата импульса объекта

$$\begin{aligned} \Delta^2 p^2 &= \Delta^2 p^2(\tau) - \Delta^2 p^2(0) = \\ &= 4\langle p^2(0) \rangle (\alpha\tau)^2 \Delta^2 Y + (\alpha\tau)^4 \Delta^2 Y^2, \\ \Delta^2 Y^2 &= \langle Y^4 \rangle - \langle Y^2 \rangle^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Из (12) и (18) имеем

$$\Delta_m^2 x \Delta_p^2 p^2 = 4\langle p^2(0) \rangle \Delta^2 P \Delta^2 Y + (\alpha\tau)^2 \Delta^2 P \Delta^2 Y^2. \quad (19)$$

Согласно соотношению (5)

$$\Delta^2 P \Delta^2 Y^2 \geq \hbar^2 \langle Y \rangle^2.$$

Следовательно, в случае $\langle Y \rangle = 0$ второе слагаемое в (19) может быть равно нулю. Соответствующее состояние исследовалось в [20]. В гильбертовом пространстве к этому состоянию асимптотически стремится гауссово при $\Delta^2 Y \rightarrow 0$.

Поскольку в случае гауссова состояния КСС

$$\Delta^2 Y^2 = \langle Y^4 \rangle - \langle Y^2 \rangle^2 = 2(\Delta^2 Y)^2,$$

второе слагаемое в (19) равно

$$\frac{\hbar^2 (\alpha\tau)^2}{2} \Delta^2 Y \geq \frac{\hbar^4 (\alpha\tau)^2}{8\Delta^2 P(0)} = \frac{\hbar^4}{8\Delta_m^2 x}.$$

Соответственно, соотношение ошибка измерения координаты – возмущение квадрата импульса можно представить в виде

$$\Delta_m^2 x \Delta_p^2 p^2 \geq \hbar^2 \langle p^2(0) \rangle + \frac{\hbar^4}{8\Delta_m^2 x}. \quad (20)$$

Это соотношение принципиально отличается от соотношения неопределенности (17). Различие сохраняется и в случае, когда можно пренебречь вторым слагаемым. Правая часть соотношения (20) зависит от среднего значения квадрата импульса, в то время как в (17) фигурирует квадрат среднего значения импульса.

Легко доказать, что соотношение между ошибкой измерения квадрата импульса $\Delta_m^2 p^2$ и возмущением координаты $\Delta_p^2 x$ отличается не только от соответствующего соотношения неопределенности, но и от соотношения ошибка измерения координаты – возмущение квадрата импульса (20). Представляя гамильтониан взаимодействия в виде $\hat{H}_i = \alpha \hat{p}^2 \hat{Y}$ и решая соответствующие уравнения, находим

$$\Delta_m^2 p^2 \Delta_p^2 x \geq \hbar^2 \langle p^2(0) \rangle. \quad (21)$$

В общем случае произведение ошибка измерения – возмущение $\Delta_m^2 A \Delta_p^2 B$ зависит от коммутаторов

$$[\hat{C}, \hat{A}], \quad [[\hat{C}, \hat{A}], \hat{A}], \quad [[[\hat{C}, \hat{A}], \hat{A}], \hat{A}], \quad \dots$$

Если $[\hat{C}, \hat{A}] = 0$, то

$$\Delta_m^2 A \Delta_p^2 B \geq \frac{\hbar^2}{4} \langle \hat{C}^2(0) \rangle. \quad (22)$$

В случае $[\hat{C}, \hat{A}] = i\hbar\beta$ (где β — с-число) имеем

$$\Delta_m^2 A \Delta_p^2 B \geq \frac{\hbar^2}{4} \langle \hat{C}^2(0) \rangle + \beta^2 \frac{\hbar^4}{8\Delta_m^2 A}. \quad (23)$$

Если же не равны нулю многократные коммутаторы $[\dots [\hat{C}, \hat{A}], \hat{A}], \dots, \hat{A}]$, то в правой части исследуемого соотношения будут слагаемые, пропорциональные величинам $\hbar^n / (\Delta_m^{(n-2)} A)$, где $n = 4, 6, 8, \dots$

К какому состоянию относятся соотношения (2), (21) – (23)? При обосновании соотношений (14) – (23) все усреднения в картине Гейзенберга проводились по начальным

состояниям объекта и прибора. В картине Шрёдингера этому соответствует усреднение по запутанному состоянию объекта с прибором, возникающему в результате их взаимодействия.

Если до взаимодействия объект был в чистом состоянии $|\psi_o\rangle$, а КСС в состоянии $|\psi_a\rangle$, то после взаимодействия (в момент τ), но до измерения $\hat{P}(\tau)$ в приборе прибор и объект будут в запутанном состоянии

$$|\Psi_{\text{ent}}\rangle = \exp(-i\hat{H}_i\tau) |\psi_a(0)\rangle \otimes |\psi_o(0)\rangle.$$

(Здесь и в дальнейшем считаем $\hbar = 1$.) В x - и Y -представлении функция

$$|\Psi_{\text{ent}}\rangle = \iint |Y\rangle \psi_o(x) \psi_a(Y) \exp(-i\alpha\tau x Y) |x\rangle dx dY. \quad (24)$$

Соответствующее запутанному состоянию (24) распределение координаты объекта

$$w_{\text{ent}}(x) = \langle \Psi_{\text{ent}} | x \rangle \langle x | \Psi_{\text{ent}} \rangle = \int |\psi_a(Y)|^2 |\psi_o(x)|^2 dY = w_o(x)$$

такое же, как и в исходном состоянии $|\psi_o\rangle$. Эффект сужения волнового пакета при измерении в этом расчете отсутствует. Следовательно, в данном случае мы имеем дело с неселективным измерением координаты.

В запутанном состоянии (24) плотность вероятности импульса объекта

$$\begin{aligned} w_{\text{ent}}(p) &= \langle \Psi_{\text{ent}} | p \rangle \langle p | \Psi_{\text{ent}} \rangle = \int |\varphi_o(\alpha\tau Y + p)|^2 |\psi_a(Y)|^2 dY, \\ \varphi_o(\alpha\tau Y + p) &= \int \exp(-i(p + \alpha\tau Y)x) \psi_o(x) dx, \\ \psi_o(x) &= \langle x | \psi_o(0) \rangle, \quad \psi_a(Y) = \langle Y | \psi_a(0) \rangle. \end{aligned}$$

Функция $w_{\text{ent}}(p)$ есть плотность вероятности суммы независимых случайных величин $p + \alpha\tau Y$. Такому распределению импульса соответствует дисперсия (14).

2.4. Ошибка измерения и возмущение при селективном измерении

Рассмотрим преобразование состояния объекта в случае, когда исходный ансамбль разделяется на подансамбли в соответствии с результатами измерения.

2.4.1. Состояние объекта после точного измерения в КСС. Точное измерение $\hat{P}$ с результатом $\tilde{P}$ преобразует любое состояние КСС в состояние $|\tilde{P}\rangle$. Такое преобразование производит проектор $|\tilde{P}\rangle\langle\tilde{P}|$. Соответственно, система объект – КСС из запутанного состояния $|\Psi_{\text{ent}}\rangle$ переходит в состояние (без нормировки)

$$|\tilde{P}\rangle\langle\tilde{P}|\Psi_{\text{ent}}\rangle = |\tilde{P}\rangle \otimes |\psi_o(\tilde{P})\rangle,$$

где

$$\begin{aligned} |\psi_o(\tilde{P})\rangle &= \int \varphi_a(\tilde{P} + \alpha\tau x) \psi_o(x) |x\rangle dx, \\ \varphi_a(\tilde{P} + \alpha\tau x) &= \int \langle P | Y \rangle \psi_a(Y) \exp(-i\alpha\tau x Y) dY. \end{aligned}$$

Таким образом, точное измерение импульса КСС превращает запутанное состояние в произведение незапу-

танных $|\tilde{P}\rangle$ и $|\psi_o(\tilde{P})\rangle$. Вектор $|\psi_o(\tilde{P})\rangle$ представляет состояние объекта после селективного измерения координаты.

Поскольку значение $\tilde{P}$ задает оценку координаты объекта $\tilde{x} = \tilde{P}/\alpha\tau$, вектор $|\psi_o(\tilde{P})\rangle$ можно представить как

$$|\psi_o(\tilde{x})\rangle = \int \varphi_a(\tilde{x}|x) \psi_o(x) |x\rangle dx, \quad (25)$$

$$\varphi_a(\tilde{x}|x) = (\alpha\tau)^{1/2} \varphi_a(\tilde{P} + \alpha\tau x). \quad (26)$$

Преобразование начального (априорного) состояния объекта

$$|\psi_o\rangle = \int \psi_o(x_1) |x_1\rangle dx_1$$

в апостериорное (25) можно представить как действие на $|\psi_o\rangle$ оператора редукции [17, 21]

$$\hat{R}(\tilde{x}) = \int \varphi_a(\tilde{x}|x) |x\rangle\langle x| dx = \varphi_a(\tilde{x}|\hat{x}). \quad (27)$$

Апостериорное состояние получилось чистым потому, что были чистыми начальные состояния объекта и КСС и точным измерение импульса КСС.

2.4.2. Апостериорное распределение координаты и импульса объекта. Апостериорные распределения наблюдаемых объекта находятся по известным правилам с помощью соотношения (25) (при идеализированных условиях измерения).

Соответствующая вектору (25) нормированная волновая функция

$$\psi(x|\tilde{x}) = \frac{\varphi_a(\tilde{x}|x) \psi_o(x)}{w^{1/2}(\tilde{x})}, \quad (28)$$

где

$$w(\tilde{x}) = \int w(\tilde{x}|x) w_o(x) dx$$

— безусловная плотность распределения оценки $\tilde{x}$.

Преобразование (28) исходной волновой функции подобно ее преобразованию пространственным фильтром с коэффициентом пропускания $\varphi_a(\tilde{x}|x)$. Другими словами, селективное измерение координаты изменяет состояние объекта так же, как это делает пространственный фильтр с коэффициентом пропускания, зависящим от начального состояния прибора и результата измерения координаты.

Согласно (28) апостериорная плотность распределения координаты объекта

$$w(x|\tilde{x}) = \frac{w(\tilde{x}|x) w_o(x)}{w(\tilde{x})} \quad (29)$$

связана с условной плотностью распределения оценки $w(\tilde{x}|x) = |\varphi_a(\tilde{x}|x)|^2$ и априорной плотностью распределения координаты $w_o(x) = |\psi_o(x)|^2$ известным классическим соотношением Байеса [22].

По аналогии с (29) соотношение (28), связывающее не плотности распределения, а соответствующие волновые функции, можно назвать *квантовым аналогом соотношения Байеса*.

Апостериорная плотность распределения импульса объекта

$$w(p|\tilde{x}) = \frac{1}{2\pi} \left| \int \varphi_a(\tilde{x} + x) \psi_o(x) \exp(-ipx) dx \right|^2.$$

Апостериорное значение среднего квадрата импульса

$$\begin{aligned} \langle p^2 \rangle &= \int |\psi'(\tilde{x}|x)|^2 dx = \\ &= \int |\varphi'_a(\tilde{x}|x) \psi_o(x) + \varphi_a(\tilde{x}|x) \psi'_o(x)|^2 dx. \end{aligned} \quad (30)$$

2.4.3. Примеры преобразования состояния объекта при селективном измерении. *Пример 1.* В случае чистых гауссовых с минимальными неопределенностями начальных состояний объекта и КСС апостериорное состояние объекта будет гауссовым с дисперсией координаты $\Delta^2 x(\tilde{x})$, обратная величина которой

$$\frac{1}{\Delta^2 x(\tilde{x})} = \frac{1}{\Delta_0^2 x} + \frac{1}{\Delta_m^2 x}.$$

Апостериорное распределение импульса также гауссово с дисперсией

$$\Delta^2 p(\tilde{x}) = \frac{\hbar^2}{4\Delta^2 x(\tilde{x})}.$$

Дисперсия импульса увеличивается на

$$\Delta_p^2 p = \frac{\hbar^2}{4\Delta_m^2 x}. \quad (31)$$

Соотношение (31), относящееся к селективному измерению координаты, тождественно соотношению (2). Этот пример воспринимался как наглядное доказательство справедливости соотношения (2) и при селективных измерениях координаты. Казалось бы, подтверждается распространенное убеждение, что и в результате селективного измерения координаты дисперсия импульса неизбежно увеличивается согласно соотношению (2). Однако такое утверждение ошибочно. После селективного измерения координаты дисперсия импульса может быть меньше ее начального значения. Убедиться в этом можно было бы и на примере гауссовых состояний, но с корреляцией между координатой и импульсом объекта [11]. Однако нагляднее это можно сделать на других примерах [12, 13].

Пример 2. Возьмем функцию $\psi_o(x)$ в виде прямоугольного импульса

$$\psi_o(x) = \begin{cases} \frac{1}{(2l)^{1/2}} & \text{при } -l < x < l, \\ 0, & \text{если иначе.} \end{cases} \quad (32)$$

Соответствующая дисперсия импульса $\Delta_0^2 p = \infty$. Пусть

$$\begin{aligned} \varphi_a(\tilde{x}|x) &= \\ &= \begin{cases} \left(\frac{k}{3\pi}\right)^{1/2} (1 + \cos k(x - \tilde{x})) & \text{при } -\frac{\pi}{k} \leq x - \tilde{x} \leq \frac{\pi}{k}, \\ 0, & \text{если иначе,} \end{cases} \end{aligned} \quad (33)$$

где $\pi/k < l$.

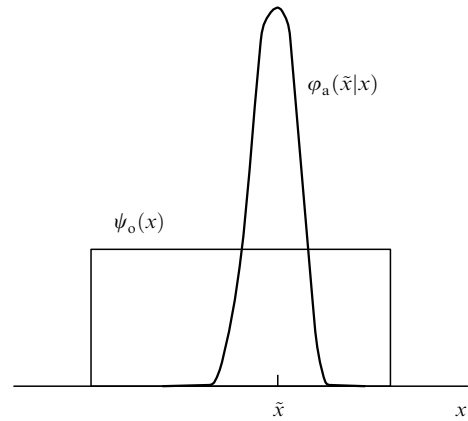


Рис. 1. Иллюстрация к примеру 2.

Допустим, что в результате измерения получено значение $\tilde{x}$, такое что $|\tilde{x}| \leq l - \pi/k$. Соответствующие этому случаю графики функций (32) и (33) изображены на рис. 1. Согласно (28) апостериорная волновая функция по форме повторяет приборную функцию $\varphi_a(\tilde{x}|x)$.

Функция $\varphi_a(\tilde{x}|x)$ в (33) и ее первая производная непрерывны. Следовательно, апостериорная дисперсия импульса конечна. Таким образом, в результате измерения координаты из начального состояния с бесконечной дисперсией импульса может быть получено состояние с конечным ее значением.

Бесконечное значение априорной дисперсии импульса в данном примере не принципиально. Есть множество таких функций $\psi_o(x)$ и $\varphi_a(\tilde{x}|x)$, что соответствующая им апостериорная дисперсия импульса при определенных результатах измерения координаты будет меньше априорной.

В рассмотренном примере апостериорная дисперсия импульса конечна только при $|\tilde{x}| < l - \pi/k$. В противном случае апостериорная дисперсия импульса будет бесконечной, как и в исходном состоянии. Более того, график апостериорной функции распределения импульса пойдет ниже графика априорного распределения.

Обратим внимание на следующий нетривиальный факт. Соответствующая рис. 1 апостериорная дисперсия импульса объекта

$$\Delta^2 p(\tilde{x}) = (\alpha\tau)^2 \Delta^2 Y$$

совпадает с (15), т.е. равна безусловной дисперсии возмущения импульса. Априорная неопределенность импульса объекта на апостериорное состояние не повлияла.

В ситуации, изображенной на рис. 1, измерение, действуя как пространственный фильтр, выделяет только частицы, координаты которых лежат в пределах, где $\psi'_o(x) = 0$. Картина такая, как если бы все частицы с такими координатами имели до измерения один и тот же импульс. В этом утверждении не будет противоречия с соотношением неопределенности, поскольку утверждение касается прошлого, а соотношение неопределенности относится к настоящему и будущему.

При желании и этот случай можно было бы рассматривать как доказательство того, что прибор возмущает импульс в соответствии с соотношением (2). Уменьшение дисперсии импульса в апостериорном состоянии можно

считать следствием специфического начального состояния объекта. Однако могут быть такие условия измерения, при которых дисперсия импульса объекта будет равна исходной. Прибор не оставит следов своего случайного динамического воздействия.

Пример 3. Допустим, что теперь форму прямоугольного импульса имеет функция $\varphi_a(\tilde{x}|x)$, а форму колокола — функция $\psi_o(x)$:

$$\varphi_a(\tilde{x}|x) = \begin{cases} \frac{1}{(2l)^{1/2}} & \text{при } -l < x - \tilde{x} < l, \\ 0, & \text{если иначе,} \end{cases} \quad (34)$$

$$\psi_o(x) = \begin{cases} \left(\frac{k}{3\pi}\right)^{1/2} (1 + \cos k(x - \tilde{x})) & \text{при } -\frac{\pi}{k} \leq x - \tilde{x} \leq \frac{\pi}{k}, \\ 0, & \text{если иначе,} \end{cases} \quad (35)$$

где $\pi/k < l$. При $|\tilde{x}| < l - \pi/k$ апостериорное состояние тождественно априорному. Несмотря на взаимодействие с прибором, находившимся в состоянии с $\Delta^2 Y = \infty$, чему соответствует $\Delta_p^2 p = \infty$, дисперсия импульса объекта не изменилась. Правда, при этом не изменилась и неопределенность координаты.

Но представим себе, что начальная волновая функция объекта имеет вид последовательности неперекрывающихся идентичных колоколообразных функций

$$\psi_N(x) = \frac{1}{\|\psi_N(x)\|^{1/2}} \sum_{m=1}^N \psi_o(x + mL)$$

(L — период) и только один из колоколов перекрывается приборной функцией $\varphi_a(\tilde{x}|x)$ (рис. 2). Апостериорная волновая функция будет представлена одним колоколом, как и в предшествующем примере.

Априорная неопределенность координаты определяется в основном расстоянием между крайними в последовательности колоколами, в то время как апостериорная — шириной колокола. Измерение в таком случае приведет к уменьшению дисперсии координаты. Что же станет с дисперсией импульса? Она не изменится!

Действительно, отвечающий последовательности $\psi_N(x)$ средний квадрат импульса

$$\begin{aligned} \langle p_N^2 \rangle &= \frac{1}{\|\psi_N\|} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi'_N(x)|^2 dx = \frac{N}{\|\psi_N\|} \int_{-\pi/k}^{\pi/k} |\psi'_o(x)|^2 dx = \\ &= \frac{1}{\|\psi_o\|} \int_{-\pi/k}^{\pi/k} |\psi'_o(x)|^2 dx = \langle p_o^2 \rangle, \end{aligned}$$

где $\langle p_o^2 \rangle$ — средний квадрат импульса, соответствующий одиночному колоколу $\psi_o(x)$.

Неизменность дисперсии импульса в данном примере не означает неизменности распределения импульса. Функция $w_o(p)$ одиночного импульса гладкая, а $w_N(p)$ периодически модулирована. Измерение координаты уничтожило квантовые корреляции в исходном чистом состоянии. Если бы начальное состояние было смесью колоколообразных состояний, апостериорное распределение импульса не изменилось бы вовсе.

Отсутствие флуктуационного влияния прибора на апостериорное состояние объекта не означает отсутствия вообще какого-либо динамического влияния при-

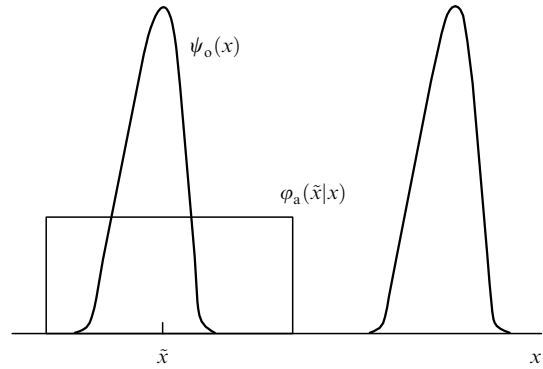


Рис. 2. Иллюстрация к примеру 3.

бора. В состоянии прибора (34) среднее значение силы $\alpha\tau\langle Y \rangle$ обратного влияния прибора на объект равно нулю. Если изменить $\langle Y \rangle$, не изменяя модуля функции $\varphi_a(\tilde{x}|x)$, среднее значение импульса объекта в апостериорном состоянии изменится на $\alpha\tau\langle Y \rangle$. (Этим рассматриваемое измерение отличается от так называемого измерения без взаимодействия [23].)

Соответствующая данному примеру ситуация может быть реализована при измерении координаты тела путем измерения времени прихода отраженного фотона, если плотность распределения его времени вылета $w(\tau)$ имеет прямоугольную форму. Картина будет такой, как если бы фотоны, время вылета которых относится к горизонтальной части графика $w(\tau)$, имели одинаковые импульсы.

Аналогичная картина может иметь место при измерении фазы осциллятора с помощью нуль-детектора координаты, сопровождающемся взаимодействием осциллятора с прибором в ограниченной области вблизи нуля координаты [24].

Следует обратить внимание и на то, что дисперсия как характеристика распределения наблюдаемых достаточно только при гауссовых состояниях. Использование дисперсии импульса в качестве характеристики состояния в других случаях можно оправдать тем, что она определяет минимум средней кинетической энергии объекта.

2.4.4. Соотношение апостериорная дисперсия импульса – ошибка измерения координаты. Соотношение между $\Delta^2 p(\tilde{x})$ и $\hbar^2/(4\Delta_m^2 x)$ подробно исследовалось в [14]. Как мы видели, апостериорная дисперсия импульса $\Delta^2 p(\tilde{x})$ может быть меньше априорной $\Delta^2 p(0)$, может быть равна дисперсии возмущения импульса. Но может ли она быть меньше чем $\hbar^2/(4\Delta_m^2 x)$? Менским доказано, что такая ситуация возможна (рис. 3). Дисперсия импульса после измерения координаты остается равной исходному значению. Величина же

$$\Delta_m^2 x = \int (\tilde{x} - x)^2 |\varphi_a(\tilde{x}|x)|^2 dx$$

при относительно низких крыльях функции $\varphi_a(\tilde{x}|x)$ зависит только от ширины ее центральной части, которая может быть сколь угодно малой. Соответственно, значение $\hbar/(4\Delta_m x)$ может быть больше чем $\Delta p(\tilde{x})$. Однако дисперсия импульса в запутанном состоянии (24) равна (14) и всегда больше чем $\hbar^2/(4\Delta_m^2 x)$.

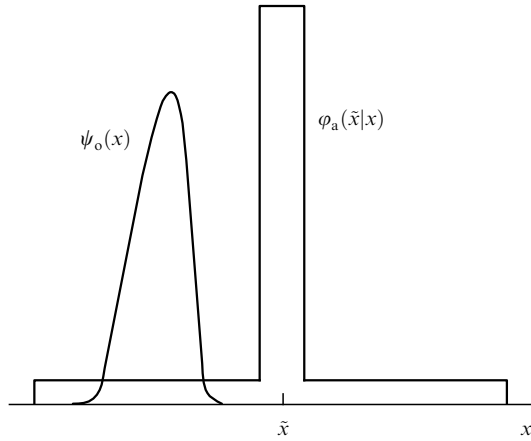


Рис. 3. Пример, доказывающий, что апостериорная дисперсия импульса объекта может быть меньше чем $\hbar^2/(4\Delta_m^2 x)$.

3. Ошибки совместного измерения координаты и импульса

Обычно под совместным (одновременным) измерением двух наблюдаемых подразумевается измерение, при котором с объектом одновременно взаимодействуют два прибора. Есть два варианта математической модели таких измерений координаты и импульса. В первом одна из КСС реагирует непосредственно на координату, другая — на импульс [5, 6]. Гамильтониан взаимодействия объекта с прибором представляется в виде суммы

$$\hat{H}_i = -\alpha \hat{x} \hat{Y} + \beta \hat{p} \hat{Z}.$$

В другом варианте в схему измерения вводится еще одна степень свободы (y, p_y) в состоянии с минимальной неопределенностью ($\Delta y \Delta p_y = \hbar/2$).

Гамильтониан взаимодействия берется в форме

$$\hat{H}_i = -\alpha(\hat{x} - \hat{y})\hat{Y} + \beta(\hat{p} + \hat{p}_y)\hat{Z}. \quad (36)$$

Это дает возможность преобразовать совместное измерение некоммутирующих $\hat{x}$ и $\hat{p}$ в совместное измерение коммутирующих

$$\hat{Q}_- = \hat{x} - \hat{y}, \quad \hat{P}_+ = \hat{p} + \hat{p}_y.$$

(Подобное измерение в [25] считается оптимальным.) Формально точность измерения наблюдаемых $\hat{Q}_-$ и $\hat{P}_+$ не ограничена. Соответственно, пределы ошибок оценивания x и p равны неопределенностям y и p_y .

Для совместного измерения некоммутирующих наблюдаемых фактически используются схемы, совершенно не соответствующие указанным выше взаимодействиям. Ниже показывается, что таковыми, например, являются гомодинальная схема измерения квадратурных амплитуд моды излучения, схема непрерывного измерения координаты.

Сначала рассмотрим характеристики стандартных схем на примере неселективного совместного измерения координаты и импульса. (Состояние после селективного измерения в первой схеме исследовалось в [5, 6].)

3.1. Непосредственное совместное измерение координаты и импульса

Полный гамильтониан объекта и КСС в этой схеме

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - \alpha \hat{x} \hat{Y} + \beta \hat{p} \hat{Z} + \hat{H}_{a,x} + \hat{H}_{a,p}, \quad (37)$$

где $\hat{H}_{a,x}$, $\hat{H}_{a,p}$ и $\hat{Y}$, $\hat{Z}$ — гамильтонианы и операторы координат КСС, реагирующих на x и p соответственно.

Положим $\hat{H}_0 = \hat{p}^2/2m$. Гамильтониану (37) соответствуют уравнения

$$(a) \quad \frac{d\hat{x}}{dt} = \frac{\hat{p}}{m} + \beta \hat{Z}, \quad (38)$$

$$(б) \quad \frac{d\hat{p}}{dt} = \alpha \hat{Y},$$

$$(a) \quad \frac{d\hat{P}_y}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{P}_y, \hat{H}_{a,x}] + \alpha \hat{x}, \quad (39)$$

$$(б) \quad \frac{d\hat{P}_z}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{P}_z, \hat{H}_{a,p}] - \beta \hat{p}.$$

В приближении мгновенного измерения ($\alpha\tau^2 \rightarrow 0$, $\beta\tau^2 \rightarrow 0$) их решениями будут

$$(a) \quad \hat{x}(\tau) = \hat{x}(0) + \beta\tau \hat{Z}, \quad (40)$$

$$(б) \quad \hat{p}(\tau) = \hat{p}(0) + \alpha\tau \hat{Y},$$

$$(a) \quad \hat{P}_y(\tau) = \hat{P}_y(0) + \alpha\tau \hat{x}(0) + \frac{1}{2} \alpha\beta\tau^2 \hat{Z}, \quad (41)$$

$$(б) \quad \hat{P}_z(\tau) = \hat{P}_z(0) - \beta\tau \hat{p}(0) - \frac{1}{2} \alpha\beta\tau^2 \hat{Y}.$$

После измерения $P_y(\tau)$ и $P_z(\tau)$ можно оценить координату и импульс объекта в любой момент времени. В частности, это могут быть значения до измерения ($x(0), p(0)$), в момент окончания взаимодействия ($x(\tau), p(\tau)$), в момент $\tau/2$ ($x(\tau/2), p(\tau/2)$). Если $\langle P_y(0) \rangle = \langle P_z(0) \rangle = \langle Y \rangle = \langle Z \rangle = 0$, во всех трех случаях оценкой координаты по методу максимального правдоподобия будет $\hat{P}_y/\alpha\tau$, а оценкой импульса будет $\hat{P}_z/\beta\tau$, где $\hat{P}_y$ и $\hat{P}_z$ — результаты измерения импульсов КСС. Ошибки оценивания будут разными.

Ошибки оценивания $x(0)$ и $p(0)$. Как следует из (41), дисперсии ошибок оценивания $x(0)$ и $p(0)$ в приближении точного измерения $P_y(\tau)$ и $P_z(\tau)$ равны

$$(a) \quad \Delta_{m,s}^2 x(0) = \Delta_m^2 x + \frac{1}{4} \Delta_p^2 x, \quad (42)$$

$$(б) \quad \Delta_{m,s}^2 p(0) = \Delta_m^2 p + \frac{1}{4} \Delta_p^2 p.$$

Здесь

$$\Delta_m^2 x = \frac{\Delta^2 P_y(0)}{(\alpha\tau)^2}, \quad \Delta_p^2 x = (\beta\tau)^2 \Delta^2 Z,$$

$$\Delta_m^2 p = \frac{\Delta^2 P_z(0)}{(\beta\tau)^2}, \quad \Delta_p^2 p = (\alpha\tau)^2 \Delta^2 Y$$

— дисперсии ошибок измерения и дисперсии возмущения при раздельном измерении координаты и импульса. Вторые слагаемые в правых частях соотношений (42) — следствие влияния на ошибки измерения перекрестного возмущения координаты прибором, измеряющим импульс, и возмущения импульса прибором, измеряющим координату. Простые преобразования произведения $\Delta_{m,s}^2 x(0) \Delta_{m,s}^2 p(0)$, в которых учтено, что

$$\Delta^2 P_y \Delta^2 Y \geq \frac{\hbar^2}{4}, \quad \Delta^2 P_z \Delta^2 Z \geq \frac{\hbar^2}{4},$$

$$\Delta^2 P_y \Delta^2 P_z + \left(\frac{\alpha\beta\tau^2}{2} \right)^4 \Delta^2 Y \Delta^2 Z \geq \frac{1}{8} (\alpha\beta\tau^2)^2 \hbar^2,$$

дают

$$\Delta_{m.s}^2 x(0) \Delta_{m.s}^2 p(0) \geq \frac{\hbar^2}{4}. \quad (43)$$

Минимум достигается при

$$\Delta^2 Y \Delta^2 Z = \frac{\hbar^2}{(\alpha\beta\tau^2)^2}. \quad (44)$$

В принципе можно исключить вторые слагаемые в (42), измеряя в КСС не $P_y(\tau)$ и $P_z(\tau)$, а комбинации

$$\hat{Q}_x = \hat{P}_y - \frac{1}{2} \alpha\beta\tau^2 \hat{Z},$$

$$\hat{Q}_p = \hat{P}_z + \frac{1}{2} \alpha\beta\tau^2 \hat{Y}.$$

Но это не может изменить соотношение (43). Совместное точное измерение предложенных комбинаций невозможно, поскольку они не коммутируют между собой. В правых частях (42) вместо $\Delta_p^2 x$ и $\Delta_p^2 p$ появятся $\Delta_m^2 Q_x$ и $\Delta_m^2 Q_p$.

Ошибки оценивания $x(\tau)$ и $p(\tau)$. Соотношения (41) можно представить в виде

$$(a) \quad \hat{P}_y(\tau) = \hat{P}_y(0) + \alpha\tau\hat{x}(\tau) - \frac{1}{2} \alpha\beta\tau^2 \hat{Z}, \quad (45)$$

$$(б) \quad \hat{P}_z(\tau) = \hat{P}_z(0) - \beta\tau\hat{p}(\tau) + \frac{1}{2} \alpha\beta\tau^2 \hat{Y}.$$

Дисперсии искомых оценок будут такими же, как и (42). Их произведение

$$\Delta_{m.s}^2 x(\tau) \Delta_{m.s}^2 p(\tau) \geq \frac{\hbar^2}{4}, \quad (46)$$

как и следовало ожидать, подтверждает правило, что нельзя приготовить состояние, противоречащее соотношению неопределенности.

Происхождение и физический смысл соотношения (4). Обозначая $x_1 = P_y(\tau)/\alpha\tau$, $x_2 = P_z(\tau)/\beta\tau$, из уравнений (41) получаем

$$\Delta^2 x_1 = \Delta_m^2 x + \Delta^2 x(0), \quad \Delta^2 x_2 = \Delta_m^2 p + \Delta^2 p(0).$$

После простых преобразований находим

$$\Delta^2 x_1 \Delta^2 x_2 \geq \hbar^2.$$

Это соотношение связывает между собой безусловные дисперсии результатов измерений в двух КСС.

Ошибки оценивания $x(\tau/2)$ и $p(\tau/2)$. Из (40) и (41) следует

$$(a) \quad \hat{P}_y(\tau) = \hat{P}_y(0) + \alpha\tau\hat{x}\left(\frac{\tau}{2}\right), \quad (47)$$

$$(б) \quad \hat{P}_z(\tau) = \hat{P}_z(0) - \beta\tau\hat{p}\left(\frac{\tau}{2}\right).$$

Дисперсии искомых оценок

$$\Delta_{m.s}^2 x\left(\frac{\tau}{2}\right) = \frac{\Delta^2 P_y}{(\alpha\tau)^2}, \quad \Delta_{m.s}^2 p\left(\frac{\tau}{2}\right) = \frac{\Delta^2 P_z}{(\beta\tau)^2}$$

не связаны между собой и могут быть одновременно сколь угодно малыми. Это можно выразить в форме

$$\Delta_{m.s}^2 x\left(\frac{\tau}{2}\right) \Delta_{m.s}^2 p\left(\frac{\tau}{2}\right) > 0. \quad (48)$$

Получается, что совместное измерение координаты и импульса может дать точные их значения в момент времени, соответствующий середине интервала взаимодействия. Это не означает, что можно приготовить состояние, противоречащее соотношению неопределенности. (Находясь в рамках аппарата квантовой механики, невозможно без ошибок получить результат, противоречащий ее основам.)

Обратим внимание на то, что в момент $\tau/2$ объект находится во взаимодействии с КСС и согласно (38) оператор $\hat{p} = m\hat{x} - m\beta\hat{Z}$ не равен оператору импульса свободного тела (здесь $\hat{p}$ — оператор обобщенного импульса в связанной системе). В теоретической механике обобщенный импульс определяется как производная от лагранжиана по скорости. Поскольку сам лагранжиан определяется с точностью до полной производной по времени от произвольной функции координат, можно сделать так, что и в связанной системе сопряженный координате x обобщенный импульс будет равен кинематическому $m\dot{x}$. Однако при этом изменится гамильтониан и соответствующие уравнения. При новом определении обобщенного импульса станет невозможным точное измерение его значения и в момент $\tau/2$.

Рассмотрим ошибку измерения величины $m\dot{x}(\tau/2)$. Согласно (38a)

$$m\dot{x}\left(\frac{\tau}{2}\right) = p\left(\frac{\tau}{2}\right) - m\beta Z.$$

Соответственно, дисперсия ошибки измерения

$$\begin{aligned} \Delta_{m.s}^2(m\dot{x}) &= \Delta_{m.s}^2 p\left(\frac{\tau}{2}\right) + (m\beta)^2 \Delta^2 Z = \\ &= \frac{\Delta^2 P_z}{(\beta\tau)^2} + (m\beta)^2 \Delta^2 Z \geq \frac{\hbar m}{\tau}. \end{aligned}$$

Величина $\sqrt{\hbar m/\tau}$ — так называемый стандартный квантовый предел точности измерения импульса [26, 27]. При $\tau \rightarrow 0$ получаем $\Delta_{m.s}^2(m\dot{x}) \rightarrow \infty$. Следовательно, точное измерение кинематического импульса, относящегося ко времени взаимодействия с прибором, невозможно.

3.2. Совместное измерение координаты и импульса с помощью вспомогательной степени свободы

В схеме измерения с гамильтонианом взаимодействия (36) общий гамильтониан объекта, вспомогательной системы и взаимодействующих с ними КСС имеет вид

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_y - \alpha\hat{Q}_- \hat{Y} + \beta\hat{P}_+ \hat{Z} + \hat{H}_{a,x} + \hat{H}_{a,p}. \quad (49)$$

Без ограничения общности результатов дальнейшего анализа можно положить $\hat{H}_0 = \hat{P}^2/2m$, $\hat{H}_y = \hat{p}_y^2/2m_y$.

В приближении мгновенного измерения ($\alpha\tau^2 \rightarrow 0$, $\beta\tau^2 \rightarrow 0$) решениями соответствующих уравнений Гейзенберга будут

$$\begin{aligned} \hat{P}_y(\tau) &= \alpha\tau\hat{Q}_- + \hat{P}_y(0), & \hat{P}_z(\tau) &= \beta\tau\hat{Q}_+ + \hat{P}_z(0), \\ \hat{Q}_-(\tau) &= \hat{Q}_-(0), & \hat{P}_+(\tau) &= \hat{P}_+(0), \\ \hat{y}(\tau) &= \hat{y}(0) + \beta\tau\hat{Z}, & \hat{p}_y(\tau) &= \hat{p}_y(0) - \alpha\tau\hat{Y}. \end{aligned}$$

Измерение $\hat{P}_y(\tau)$ и $\hat{P}_z(\tau)$ дает оценки

$$\tilde{Q}_- = \frac{\tilde{P}_y}{\alpha\tau}, \quad \tilde{P}_+ = \frac{\tilde{P}_z}{\beta\tau}.$$

Их условные дисперсии

$$\Delta_{m.s}^2 Q_- = \frac{\Delta^2 P_y(0)}{(\alpha\tau)^2}, \quad \Delta_{m.s}^2 P_+ = \frac{\Delta^2 P_z(0)}{(\beta\tau)^2}.$$

Из оценок $\tilde{Q}_-$ и $\tilde{P}_+$ получаем оценки

$$\tilde{x}(0) = \tilde{Q}_- + \langle y(0) \rangle, \quad \tilde{p}(0) = \tilde{P}_+ - \langle p_y(0) \rangle, \\ \tilde{x}(\tau) = \tilde{Q}_- + \langle y(\tau) \rangle, \quad \tilde{p}(\tau) = \tilde{P}_+ - \langle p_y(\tau) \rangle,$$

условные дисперсии которых

$$\Delta_{m.s}^2 x(0) = \Delta_{m.s}^2 Q_- + \Delta^2 y(0), \\ \Delta_{m.s}^2 p(0) = \Delta_{m.s}^2 P_+ + \Delta^2 p_y(0), \\ \Delta_{m.s}^2 x(\tau) = \Delta_{m.s}^2 Q_- + \Delta^2 y(\tau), \\ \Delta_{m.s}^2 p(\tau) = \Delta_{m.s}^2 P_+ + \Delta^2 p_y(\tau).$$

Значения $\Delta_{m.s}^2 Q_-$ и $\Delta_{m.s}^2 P_+$ могут быть одновременно сколь угодно малыми. В таком приближении произведение

$$\Delta_{m.s}^2 x(0) \Delta_{m.s}^2 p(0) = \Delta^2 y(0) \Delta^2 p_y(0) \geq \frac{\hbar^2}{4}$$

такое же, как и (43) в схеме непосредственного совместного измерения координаты и импульса.

С дисперсиями оценок $\tilde{x}(\tau)$ и $\tilde{p}(\tau)$ все обстоит гораздо хуже. Произведение

$$\Delta_{m.s}^2 x(\tau) \Delta_{m.s}^2 p(\tau) \geq \frac{9\hbar^2}{4} \quad (50)$$

в 9 раз больше оптимального значения. Причина этого в том, что и после точного измерения P_y и P_z объект остается в запутанном состоянии со вспомогательной степенью свободы. Запутанность можно снять, измеряя отдельно точно $y(\tau)$ или $p_y(\tau)$ либо измеряя их совместно. После точного измерения $y(\tau)$ имеем $\Delta_{m.s}^2 x(\tau) = \Delta_{m.s}^2 Q_-$. Далее, полагая $\Delta^2 P_y(0)/(\alpha\tau)^2 \rightarrow 0$, находим

$$\Delta_{m.s}^2 x(\tau) \Delta_{m.s}^2 p(\tau) \geq \frac{\hbar^2}{4}.$$

Такой же результат получается и в случае совместного измерения $y(\tau)$ и $p_y(\tau)$ с ошибками $\Delta_{m.s}^2 y(\tau) \Delta_{m.s}^2 p_y(\tau) = \hbar^2/4$.

Таким образом, совместное измерение координаты и импульса объекта с помощью вспомогательной степени свободы дает такой же, оптимальный результат, как и непосредственное совместное измерение координаты и импульса в исходном состоянии $(x(0), p(0))$. Однако в качестве процедуры приготовления состояния объекта (измерения $x(\tau)$ и $p(\tau)$) эта схема далека от оптимальной, если она не дополняется измерением во вспомогательной степени свободы.

В ряде работ обращается внимание на произведение априорных дисперсий наблюдаемых $\hat{Q}_-(0)$ и $\hat{P}_+(0)$:

$$\Delta^2 Q_-(0) \Delta^2 P_+(0) = \\ = (\Delta^2 x(0) + \Delta^2 y(0))(\Delta^2 p(0) + \Delta^2 p_y(0)) \geq \hbar^2. \quad (51)$$

Это соотношение — аналог соотношения (4). Однако следует иметь в виду, что соотношение (51) не является следствием некоммутативности операторов $\hat{Q}_-$ и $\hat{P}_+$. Эти операторы коммутируют. Соотношение (51) является следствием независимости состояний объекта и вспомогательной степени свободы.

Реализации совместных косвенных измерений, соответствующих гамильтонианам (37), (49), не было. Не было предложено и ни одного реалистичного способа. Поэтому больший интерес представляют известные реализуемые схемы, которые не соответствуют стандартной схеме совместного измерения, но фактически позволяют одновременно оценить несколько некоммутирующих наблюдаемых. Таковыми являются гомодинарная схема измерения наблюдаемых моды излучения и схема непрерывного измерения координаты.

3.3. Совместное измерение

квадратурных амплитуд моды излучения

Классическим квадратурным амплитудам (КВА)

$$X_1 = A \cos \theta, \quad X_2 = A \sin \theta,$$

определяемым как действительная и мнимая части комплексной амплитуды $\hat{A} = X_1 + iX_2$, в квантовой оптике соответствуют операторы моды колебаний

$$\hat{x}_\theta = \hat{x} \cos \theta - \hat{p} \sin \theta = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^{1/2} (\hat{a}^\dagger \exp(-i\theta) + \hat{a} \exp(i\theta)),$$

$$\hat{p}_\theta = \hat{p} \cos \theta + \hat{x} \sin \theta = i\left(\frac{\hbar}{2}\right)^{1/2} (\hat{a}^\dagger \exp(-i\theta) - \hat{a} \exp(i\theta)),$$

$$\hat{x} = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^{1/2} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}), \quad \hat{p} = i\left(\frac{\hbar}{2}\right)^{1/2} (\hat{a}^\dagger - \hat{a}),$$

где $\hat{a}^\dagger, \hat{a}$ — операторы рождения и уничтожения. Коммутатор $[\hat{x}_\theta, \hat{p}_\theta] = i\hbar$ соответствует коммутатору операторов координаты и импульса. Фаза θ — классическая величина, зависящая от выбора начала отсчета времени (в экспериментах отсчитывается от фазы опорного колебания).

Для измерения КВА используют метод гетеродинамирования [29] или гомодинамирования [30–32]. Объектом измерения в этом случае является волна, приходящая на детектор за время измерения.

Совместное измерение x_θ, p_θ производилось с помощью восьмипортовой (четыре входа и четыре выхода) схемы гомодинамирования [30]. Обычная схема гомодинамирования состоит из (50:50)-делителя луча и двух фотодетекторов (рис. 4), в этой схеме есть два входа и два выхода. Сигнал подается на один из входов делителя, опорное колебание с частотой сигнала — на другой.

Выходные моды идеального делителя связаны с входными соотношениями

$$\hat{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_1 \exp(i\theta) + i\hat{a}_2), \quad \hat{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_2 + i\hat{a}_1 \exp(i\theta)).$$

Разность числа фотонов в выходных лучах

$$\hat{N}_{21} = \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 - \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 = i(\hat{a}_1^\dagger \exp(-i\theta) \hat{a}_2 - \hat{a}_1 \exp(i\theta) \hat{a}_2^\dagger). \quad (52)$$

Среднее правой части соотношения (52) по когерентному состоянию $|\alpha\rangle$ (с нулевой средней фазой) опорной

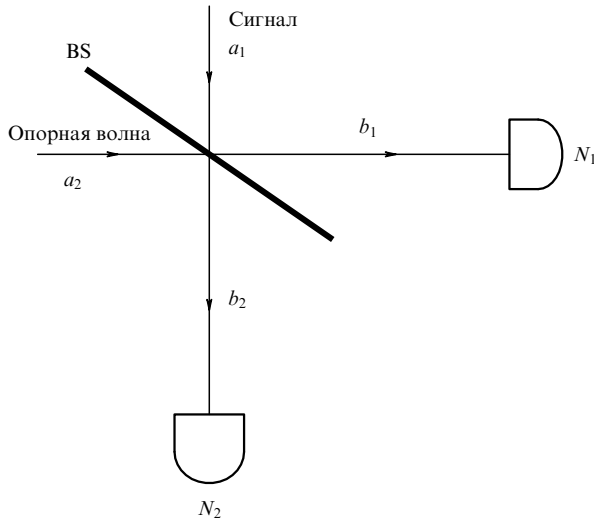


Рис. 4. Гомодинная схема измерения квадратурных амплитуд.

волны равно

$$i|\alpha|(\hat{a}_1^\dagger \exp(-i\theta) - \hat{a}_1 \exp(i\theta)) = \left(\frac{2}{\hbar}\right)^{1/2} |\alpha| \hat{p}_\theta = \left(\frac{2}{\hbar}\right)^{1/2} \langle n_{LO} \rangle^{1/2} \hat{p}_\theta.$$

($\langle n_{LO} \rangle$ — среднее значение числа квантов пробной волны, попадающее на детектор за время измерения.) Измеряя N_{21} , находим оценку максимального правдоподобия

$$\hat{p}_\theta = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^{1/2} \frac{\tilde{N}_{21}}{\langle n_{LO} \rangle^{1/2}}.$$

Дисперсия оценки зависит от дисперсий амплитуды и фазы опорной волны. Условная дисперсия разности числа квантов, связанная с неопределенностями амплитуды и фазы опорной волны,

$$\hat{D}N_{21}^{LO} = \langle \alpha | \hat{N}_{21}^2 | \alpha \rangle - \langle \alpha | \hat{N}_{21} | \alpha \rangle^2 = \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad (53)$$

зависит от состояния сигнальной волны. Соответственно, является оператором и дисперсия оценки КВА:

$$\hat{D}_m p_\theta = \frac{\hbar \hat{D}N_{21}^{LO}}{2\langle n_{LO} \rangle} = \frac{\hbar \hat{a}^\dagger \hat{a}}{2\langle n_{LO} \rangle}. \quad (54)$$

В реальных оптических гомодинных схемах в качестве источника опорной волны используется лазер. Его излучение называют когерентным, но это не значит, что оно соответствует чистому когерентному состоянию моды $|\alpha\rangle$. Дисперсия фазы излучения лазера не постоянна, она растет по диффузионному закону. Диффузией фазы можно пренебречь по сравнению с неопределенностью фазы в когерентном состоянии только в интервале времени t_c , удовлетворяющем неравенству $(Dt_c)^{1/2} \ll 1/\langle n \rangle$, где D — коэффициент диффузии фазы. При $D = 10^3$ величина $t_c \ll 10^{-3}/\langle n \rangle^2$. Поэтому, например, в экспериментах по сжатию света сигнальную и опорную волны получают из одного луча путем его деления [33]. При этом фаза волны будет случайной, но влияние диффузии фазы на разность фаз сигнальной и опорной волн существенно уменьшается. (В реальных экспериментах на ошибку измерения существенно влияет и квантовый выход детекторов.)

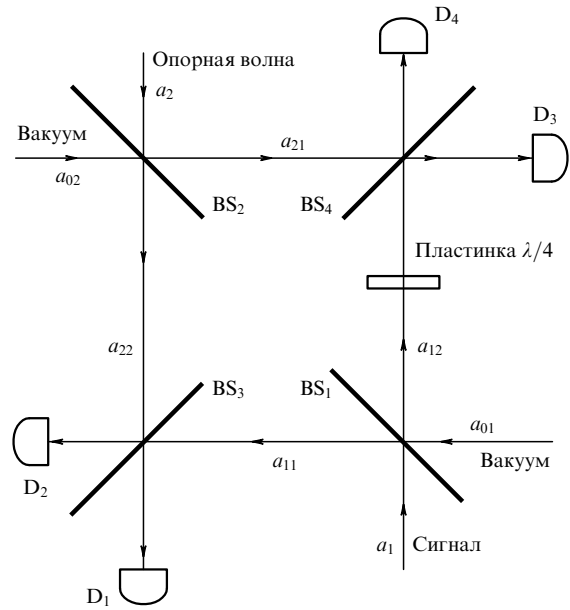


Рис. 5. Восьмипортовая гомодинная схема совместного измерения квадратурных амплитуд.

Обратим внимание на то, что даже обычная схема гомодинирования фактически является схемой совместного измерения некоммутирующих наблюдаемых: КВА и числа фотонов. Число фотонов сигнальной волны можно оценить, вычитая из суммы зарегистрированных фотонов среднее число фотонов в опорной волне. Дисперсия ошибки такого оценивания равна дисперсии числа фотонов в пробной волне $\langle n_{LO} \rangle$. Следовательно, произведение средней по состоянию сигнального поля дисперсии ошибки измерения КВА $\Delta_{m.s}^2 p_\theta = \langle D_m p_\theta \rangle$ и дисперсии ошибки измерения числа фотонов $\Delta_{m.s}^2 n$ имеет вид

$$\Delta_{m.s}^2 p_\theta \Delta_{m.s}^2 n = \frac{\hbar}{2} \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle. \quad (55)$$

Оно принципиально отличается от соотношения неопределенности

$$\Delta^2 p_\theta \Delta^2 n \geq \frac{1}{4} |\langle x_\theta \rangle|^2, \quad (56)$$

соответствующего коммутатору $[\hat{p}_\theta, \hat{n}] = -i\hat{x}_\theta$.

Схема совместного измерения двух КВА изображена на рис. 5. Сигнальная и опорная волны сначала делятся на два луча каждая на двух разных делителях. Затем один из вторичных лучей сигнала и опорной волны подается на один из двух гомодинных детекторов. На другой детектор идет второй сигнальный луч и другая половина опорной волны, предварительно задержанная по фазе на $\pi/2$. В результате первый гомодинный детектор измеряет одну КВА, второй — другую. Схема реализует совместное измерение двух КВА моды излучения. Но в отличие от схем (37), (49) в конце процесса измерения объект (волна) поглощается.

Платой за совместное измерение некоммутирующих наблюдаемых является принципиальное ограничение точности измерения. Неустраняемые ошибки измерения создают вакуумные поля, проникающие в схему через свободные входы делителей сигнальной и опорной волн. В результате на гомодинные детекторы сигнальная и опорная волны приходят в сумме с вакуумными полями

a_{01} и a_{02} :

$$\hat{a}_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_1 \exp(i\theta) + i\hat{a}_{01}), \quad \hat{a}_{22} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_2 + i\hat{a}_{02}).$$

Разность числа фотонов, попадающих на фотодетекторы, имеет вид

$$\hat{N}_{21} = \frac{i}{\sqrt{2}} (\hat{a}_{11}^\dagger \hat{a}_{22} - \hat{a}_{11} \hat{a}_{22}^\dagger).$$

Среднее по когерентному состоянию опорной волны и вакуумному полю $\hat{a}_{02}$ значение правой части этого соотношения равно

$$\frac{1}{2\hbar^{1/2}} |\alpha| (\hat{p}_\theta + \hat{x}_{01}),$$

где $\hat{x}_{01} = (\hbar/2)^{1/2} (\hat{a}_{01}^\dagger + \hat{a}_{01})$ — квадратура вакуумного поля a_{01} .

После измерения N_{21} получается оценка суммы $p_\theta + x_{01}$, ошибка которой подобно (54) стремится к нулю при увеличении энергии опорной волны. При этом дисперсия ошибки оценивания p_θ стремится к

$$\Delta_{m.s}^2 p_\theta = \langle \hat{x}_{01}^2 \rangle \geq \frac{\hbar}{2}.$$

В другой половине схемы аналогичным образом получается оценка суммы $(x_\theta + p_{02})$. Пределом ошибки оценивания x_θ будет

$$\Delta_{m.s}^2 x_\theta = \langle p_{02}^2 \rangle \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Произведение

$$\Delta_{m.s}^2 p_\theta \Delta_{m.s}^2 x_\theta \geq \frac{\hbar^2}{4} \quad (57)$$

такое же, как и в схемах (37), (49).

По точности измерения и сложности реализации исследуемая восьмипортовая схема уступает простой гомодинной схеме. Восьмипортовая схема разрабатывалась и использовалась не для измерения КВА, а как схема операционального определения операторов косинуса и синуса разности фаз [28, 30]. Обе КВА оптической моды излучения могут быть измерены совместно с той же точностью и с помощью гетеродинамирования. С такой же предельной точностью можно совместно оценить КВА гармонического осциллятора по результатам непрерывного измерения координаты.

4. Ошибки измерения и возмущение при непрерывном измерении координаты

Анализ измерения, в котором участвует единственная КСС, представляет интерес только с методической точки зрения, но далек от анализа реальных схем, в которых в качестве КСС используются потоки фотонов или электронов.

4.1. Классические характеристики процесса непрерывного измерения

Результатом реальных измерений координаты является последовательность оценок координаты во времени $\tilde{x}(t_j)$. При определенных условиях дискретную последовательность можно представить функцией $\tilde{x}(t)$. (Возможно и другое представление непрерывных измерений [14].) Силе обратного флуктуационного влияния, которой при

однократном измерении соответствует оператор $\alpha(t - t_0) \hat{Y}$, следует сопоставить

$$\hat{F}_{b.a} = \sum_j \alpha(t - t_j) \hat{Y}_j,$$

где Y_j — координата, t_j — момент начала взаимодействия с объектом j -й КСС. Длительность τ каждого взаимодействия конечна.

При однократном измерении приближенную оценку координаты $\tilde{x}$ можно представить как результат точного измерения наблюдаемой $\hat{x} = \hat{x} + \hat{x}_{er}$, где $\hat{x}_{er}$ — оператор ошибки однократного измерения, который согласно (11) равен $\hat{x}_{er} = \hat{P}(0)/\alpha\tau$. Аналогично, в случае непрерывных измерений функцию $\tilde{x}(t)$ можно считать результатом точного измерения наблюдаемой

$$\hat{\tilde{x}}(t) = \hat{x}(t) + \hat{x}_{er}(t), \quad (58)$$

где $\hat{x}(t)$ — оператор координаты объекта, $\hat{x}_{er}(t)$ — оператор ошибки непрерывного измерения координаты.

Координата объекта в режиме непрерывного измерения отличается от ее невозмущенного значения $\hat{x}_0(t)$. В линейной системе

$$\hat{x}(t) = \hat{x}_0(t) + \int_0^t \hat{F}_{b.a}(t') K(t - t') dt', \quad (59)$$

где

$$K(t - t') = \frac{1}{i\hbar} [\hat{x}(t), \hat{x}(t')]$$

— функция Грина объекта. (Другие подходы к проблеме непрерывного измерения представлены в [14].)

Количественными характеристиками ошибки измерения и силы обратного влияния служат ковариационные функции

$$B_x(t_1, t_2) = \frac{1}{2} \langle \{ \hat{x}_{er}(t_1), \hat{x}_{er}(t_2) \} \rangle,$$

$$B_F(t_1, t_2) = \frac{1}{2} \langle \{ \hat{F}_{b.a}(t_1), \hat{F}_{b.a}(t_2) \} \rangle,$$

$$B_{xF}(t_1, t_2) = \frac{1}{2} \langle \{ \hat{x}_{er}(t_1), \hat{F}(t_2) \} \rangle.$$

В случае стационарных измерений им соответствуют спектральные плотности $S_x(\omega)$, $S_F(\omega)$, $S_{xF}(\omega)$, которые подчиняются соотношению, эквивалентному соотношению неопределенности [17, 21, 34]:

$$S_x(\omega) S_F(\omega) = \Delta^2 Y(0) \Delta^2 P(0) \geq \frac{\hbar^2}{4}, \quad (60)$$

а с учетом корреляции [17, 21]:

$$S_F(\omega) S_x(\omega) - |S_{xF}|^2 \geq \frac{\hbar^2}{4} + \hbar\omega |\text{Im } S_{xF}(\omega)|^2. \quad (61)$$

В приближении мгновенного взаимодействия отдельных КСС с объектом ковариационные функции становятся δ -образными, а спектральные плотности не зависят от частоты. В этом случае дисперсия ошибки измерения средней за время $\bar{\tau}$ координаты

$$\Delta_m^2 \bar{x} = \Delta^2 \left(\frac{1}{\bar{\tau}} \int_0^{\bar{\tau}} \hat{x}_{er}(t) dt \right) = \frac{S_x}{\bar{\tau}}.$$

Дисперсия возмущения импульса за это же время

$$\Delta_p^2 p = \Delta^2 \left(\int_0^{\bar{\tau}} \hat{F}_{b,a}(t) dt \right) = S_F \bar{\tau}.$$

Соотношение

$$\Delta_m^2 \bar{x} \Delta_p^2 p = S_x S_F \geq \frac{\hbar^2}{4}$$

является аналогом соотношения (16).

Результат непрерывного измерения координаты $\tilde{x}(t)$ является классическим объектом и может быть многократно подвергнут любым классическим преобразованиям в целях извлечения из него нужной информации. Квантовым ограничением в классическом расчете будет только соотношение (61).

4.2. Ошибки совместного оценивания

квадратурных амплитуд гармонического осциллятора

В качестве примера рассмотрим ошибки совместного оценивания квадратурных амплитуд гармонического осциллятора

$$\hat{X}_1 = \hat{x}(0) = \frac{\hat{x}_0}{(m\omega)^{1/2}}, \quad \hat{X}_2 = \frac{\hat{p}(0)}{m\omega} = \frac{\hat{p}_0}{(m\omega)^{1/2}},$$

где m и ω — масса и частота осциллятора. В этом случае функция $\tilde{x}(t)$ является реализацией случайного процесса

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) = & \hat{X}_1 \cos \omega t + \hat{X}_2 \sin \omega t + \\ & + \frac{1}{m\omega} \int_0^t \hat{F}_{b,a}(t') \sin \omega(t-t') dt' + \hat{x}_{er}(t). \end{aligned} \quad (62)$$

Оцениванию X_1 и X_2 мешает не только случайное значение $x_{er}(t)$, но и случайное возмущение осциллятора силой $F_{b,a}(t)$.

С помощью классического метода оптимального оценивания в [17] получены оценки квадратурных амплитуд, условные дисперсии которых

$$\Delta_{m,s}^2 X_1 = \Delta_{m,s}^2 X_2 = \frac{(S_x S_F)^{1/2}}{m\omega} \geq \frac{\hbar}{2m\omega}. \quad (63)$$

Их произведение

$$\Delta_{m,s}^2 X_1 \Delta_{m,s}^2 X_2 \geq \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^2 = \frac{1}{4} |\langle [\hat{X}_1, \hat{X}_2] \rangle|^2 \quad (64)$$

подобно (57). (Оценки найдены при условии $S_{xF} = 0$ и в приближении $S_F/S_x m\omega^2 \ll 1$, что соответствует относительно малому возмущению координаты осциллятора за период колебаний.)

Зная оценки $\tilde{X}_1$ и $\tilde{X}_2$, можно оценить начальную энергию и фазу осциллятора:

$$\tilde{W} = \frac{m\omega^2}{2} (\tilde{X}_1^2 + \tilde{X}_2^2), \quad \tilde{\varphi} = -\arctan \frac{\tilde{X}_1}{\tilde{X}_2}.$$

При $\Delta_{m,s} X_{1,2} \ll \langle X_{1,2} \rangle$ дисперсии ошибок оценивания

$$\Delta_{m,s}^2 W = 2\omega \langle W \rangle (S_x S_F)^{1/2}, \quad (65)$$

$$\Delta_{m,s}^2 \varphi = \frac{\omega}{2\langle W \rangle} (S_x S_F)^{1/2}.$$

В квантовом пределе

$$\Delta_m^2 W = \hbar\omega \langle W \rangle = (\hbar\omega)^2 \langle n \rangle, \quad \Delta_m^2 \varphi = \frac{\hbar\omega}{4\langle W \rangle} = \frac{1}{4\langle n \rangle}. \quad (66)$$

Произведение

$$\frac{1}{(\hbar\omega)^2} \Delta_{m,s}^2 X_1 \Delta_{m,s}^2 W = \frac{\hbar \langle n \rangle}{2m\omega}$$

подобно (55).

Корень из предельных ошибок измерения (63), (66) называют стандартными квантовыми пределами (СКП) ошибок измерения соответствующих наблюдаемых осциллятора. (По определению, СКП ошибок измерения называют предельные среднеквадратические значения оценок наблюдаемых, рассчитанных по результатам измерения координаты.)

Обратим внимание на следующее. Выбор момента времени, к которому относятся оценки наблюдаемых, не связан с началом процесса измерения координаты. С одинаковыми ошибками могут быть оценены значения наблюдаемых относящихся как к невозмущенному состоянию (до начала измерения), так и к текущему состоянию, создаваемому измерением.

4.3. Состояние, создаваемое

непрерывным селективным измерением

Реальные непрерывные измерения представляют собой достаточно плотную последовательность дискретных измерений. Каждое измерение редуцирует состояние объекта. Между измерениями происходит его свободная эволюция. В приближении мгновенного взаимодействия изменение состояния описывается последовательным действием на начальное состояние объекта операторов редукции и оператора свободной эволюции. При относительно слабом влиянии на состояние отдельных измерений и малых интервалов между ними дискретное изменение состояния можно рассматривать как непрерывное. Скорость изменения состояния во времени складывается из скорости свободной эволюции и скорости изменения состояния за счет редукции [35]. Уравнение изменения состояния объекта зависит от состояния КСС и последующих измерений в них.

В случае чистого гауссова состояния КСС оператор редукции (27) при однократном измерении координаты имеет вид

$$\hat{R}(\tilde{x}_j) = G \exp \left[-\frac{(x - \tilde{x}_j)^2}{4\Delta_{m,x}^2} \right],$$

где G — нормирующий множитель. Состояние объекта после n -кратного измерения в интервале времени δt (без учета эволюции)

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \prod_{j=1}^n \hat{R}(\tilde{x}_j) |\psi_0\rangle = \\ &= G^n \exp \left[-\sum_j \frac{(\hat{x} - \tilde{x}_j)^2}{4\Delta_{m,x}^2} \right] |\psi_0\rangle = \\ &= B \exp \left[-\frac{(\hat{x} - \tilde{x}(t))^2 n}{4\Delta_{m,x}^2} \right] |\psi_0\rangle = \\ &= B \exp \left[-\frac{(\hat{x} - \tilde{x}(t))^2 \nu \delta t}{4\Delta_{m,x}^2} \right] |\psi_0\rangle. \end{aligned} \quad (67)$$

Здесь $\bar{x}(t)$ — среднее значение отсчетов за время δt , ν — частота измерений, B — нормирующий множитель.

Дисперсия ошибки многократного измерения координаты за время δt связана со спектральной плотностью ошибки измерения S_x соотношением

$$\frac{\Delta_m^2 x}{\nu \delta t} = \frac{S_x}{\delta t}.$$

Из (67) следует

$$\frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = -k(\hat{x} - \bar{x}(t))^2 |\psi(t)\rangle, \quad k = \frac{1}{S_x}. \quad (68)$$

Добавляя к правой части (68) слагаемое, соответствующее свободной эволюции, получаем уравнение изменения состояния в процессе непрерывного измерения координаты. Его обобщением на случай произвольного начального состояния объекта является уравнение

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}_0, \hat{\rho}] - k\{(\hat{x} - \bar{x}(t))^2, \hat{\rho}\}, \quad (69)$$

где $\hat{\rho}$ — оператор плотности объекта.

Уравнение (69) впервые было получено Менским [14] при другом подходе к проблеме непрерывных измерений — с помощью метода ограниченных интегралов по путям. Изложенный выше подход использовался Рембовским [35], который получил уравнение, учитывающее ошибки измерения в КСС, корреляции в состоянии КСС и вырожденность наблюдаемых КСС.

Обратим внимание на то, что при выводе уравнения (69) оператор координаты можно было бы заменить на оператор любой наблюдаемой. Следовательно, в уравнении (69) под символом x можно подразумевать любую из них. Состояние $\hat{\rho}(t)$ является состоянием после селективного измерения, соответствующим полученной при измерении записи $\bar{x}(t)$. Функция $\bar{x}(t)$ является реализацией случайного процесса (62).

Решения уравнения (69) (и более общего) исследованы в [36]. Найдено, что состояние объекта независимо от его начального состояния стремится к гауссову с постоянными значениями дисперсий координаты и импульса, но со средними, зависящими от времени, как функционал реализации $\bar{x}(t)$. Специфической особенностью формируемого состояния является корреляция между координатой и импульсом.

При идеализированных условиях измерения, которым соответствует уравнение (69), квазистационарным состоянием гармонического осциллятора будет чистое гауссово состояние с параметрами

$$\begin{aligned} \Delta^2 x &= \frac{\hbar}{2m\omega}, \\ \Delta^2 p &= \frac{\hbar m\omega}{2} \left[1 + \left(\frac{\hbar k}{m\omega^2} \right)^2 \right], \\ \Delta^2(xp) &= \frac{\hbar^2 k}{2m\omega}, \end{aligned}$$

удовлетворяющими соотношению неопределенности

$$\Delta^2 x \Delta^2 p - \Delta^2(xp) = \frac{\hbar^2}{4}.$$

Здесь m и ω — масса и частота осциллятора.

При непрерывном измерении координаты свободной частицы формируется чистое гауссово состояние с параметрами

$$\Delta^2 x = \left(\frac{\hbar}{4km} \right)^{1/2}, \quad \Delta^2 p = (\hbar^3 km)^{1/2}, \quad \Delta(xp) = \frac{\hbar}{2}.$$

Имея запись результатов непрерывного измерения наблюдаемой, можно рассчитать состояние объекта в любой момент времени. Как и при однократном измерении, апостериорное состояние объекта зависит от его начального состояния, состояния КСС и точности измерения $P(\tau)$ в КСС.

5. Заключение

Объектами представленного выше анализа были соотношение ошибка измерения — возмущение и соотношение между ошибками совместного измерения некоммутирующих наблюдаемых.

Исследование стандартной схемы измерения координаты показало, что соотношение (2) между ошибкой измерения координаты и возмущением импульса объекта является следствием соотношения неопределенности между наблюдаемыми прибора. Другими словами, соотношение (2) вторично по отношению к соотношению неопределенности. Поэтому нельзя считать обоснованным мнение, что нет противоречия между утверждениями о существовании соотношения неопределенности как следствия общих принципов квантовой механики и как следствия возможностей измерительных приборов.

Соотношение (2) нельзя понимать так, что в результате измерения координаты с ошибкой $\Delta_m^2 x$ дисперсия импульса объекта после измерения всегда больше начальной на $\Delta_p^2 \geq \hbar^2 / (4\Delta_m^2 x)$. Увеличение дисперсии импульса в соответствии с (2) происходит только при неселективном измерении и только в некоторых частных случаях селективного измерения.

При селективном измерении апостериорная дисперсия импульса определяется не априорным ее значением и точностью измерения координаты, а апостериорным состоянием объекта, которое зависит от априорных состояний прибора и объекта и результата измерения $\bar{x}$. В случае чистых начальных состояний и точного измерения в приборе апостериорная волновая функция $\psi(x|\bar{x})$ равна произведению исходной волновой функции объекта $\psi_o(x)$ и приборной функции $\varphi_a(\bar{x}|x)$ (см. (28)). Селективное измерение координаты изменяет состояние объекта подобно пространственному фильтру, функция пропускания которого зависит от состояния прибора и результата измерения.

При прочих равных условиях апостериорная дисперсия импульса зависит от результата измерения и может быть как больше, так и меньше исходной. Возможны такие ситуации, при которых в апостериорном состоянии объекта дисперсия импульса: а) не зависит от исходного ее значения и флуктуационного влияния прибора, б) может быть меньше чем $\hbar^2 / (4\Delta_m^2 x)$.

В соответствии с соотношением (2) происходит увеличение только безусловной дисперсии импульса, т.е. усредненной по всем возможным значениям $\bar{x}$ дисперсии импульса в апостериорных состояниях $\psi(x|\bar{x})$.

В общем случае при измерении наблюдаемой $\hat{A}$ с ошибкой $\Delta_m A$ возмущение $\Delta_p B$ наблюдаемой $\hat{B}$, коммутатор которой с $\hat{A}$ $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hbar \hat{C}$ является оператором, произведение $\Delta_m^2 A \Delta_p^2 B$ принципиально отличается от соответствующего соотношения неопределенности и зависит от значения вторичных коммутаторов $[\dots [\hat{C}, \hat{A}], \hat{A}] \dots, \hat{A}]$ (см. (22), (23)). Если $[\hat{C}, \hat{B}] \neq [\hat{C}, \hat{A}]$, произведения ошибка измерения – возмущение несимметричны, т.е. $\Delta_m^2 A \Delta_p^2 B \neq \Delta_m^2 B \Delta_p^2 A$.

Соотношение между ошибками совместного измерения некоммутирующих наблюдаемых исследовалось как на примерах общепринятых моделей совместного измерения координаты и импульса, так и на примерах гомодинного измерения квадратурных амплитуд моды излучения и схемы непрерывного измерения координаты.

При стандартном совместном измерении координаты и импульса как непосредственно (гамильтониан (37)), так и с помощью вспомогательной степени свободы (гамильтониан (36)) дисперсии ошибок измерения значений координаты и импульса до взаимодействия с прибором $(x(0), p(0))$ и их значений после взаимодействия $(x(\tau), p(\tau))$ удовлетворяют соотношению (3). Произведение ошибок совместного измерения значений координаты и импульса, относящихся к середине интервала взаимодействия объекта с приборами, зависит от того, как определен обобщенный импульс объекта. В случае гамильтониана (37) дисперсии оценок $\Delta_{m,s}^2 x(\tau/2)$ и $\Delta_{m,s}^2 p(\tau/2)$ могут быть одновременно сколь угодно малыми. Но при этом обобщенный импульс не равен кинематическому: $p(\tau/2) \neq m\dot{x}(\tau/2)$.

Произведение дисперсий ошибок совместного измерения наблюдаемых $\hat{A}$ и $\hat{B}$, коммутатор которых является оператором, отличается от соответствующего соотношения неопределенности, подобно тому как отличается от него произведение $\Delta_m^2 A \Delta_p^2 B$.

Исследованная восьмипортовая гомодинная схема (см. рис. 5) совместного измерения квадратурных амплитуд (КВА) моды излучения является разновидностью схемы измерения с помощью вспомогательной степени свободы. В этой схеме ошибки совместного измерения КВА в исходной моде удовлетворяют соотношению (3).

Простая (четырепортовая) гомодинная схема, которая обычно рассматривается как схема измерения только КВА, фактически является схемой совместного измерения квадратурной амплитуды и числа фотонов. Показано, что дисперсия ошибки оценивания КВА при когерентной опорной волне существенно зависит от неопределенности не только амплитуды, но и фазы опорной волны. Поэтому ошибка оценивания одной из КВА зависит от значений обеих КВА. В итоге дисперсия ошибки оценивания КВА пропорциональна числу квантов в сигнальной волне (см. (55)). Соотношение средних дисперсий ошибок совместного измерения КВА и числа квантов

$$\Delta_{m,s}^2 p_\theta \Delta_{m,s}^2 n \geq \frac{\hbar \langle n \rangle}{2} \quad (70)$$

существенно отличается от соответствующего этим наблюдаемым соотношения неопределенности.

Совместное оценивание наблюдаемых возможно и с помощью непрерывного измерения координаты. Оценки получаются из реализации $\hat{x}(t)$ с помощью классической

теории оценивания. Их квантовые пределы определяются квантовыми ограничениями на спектральные плотности флуктуаций в приборе. Соотношения между дисперсиями ошибок совместного оценивания КВА гармонического осциллятора и числа квантов такие же, как и в гомодинной схеме. Значения дисперсий ошибок оценивания соответствуют тому, что непрерывное стационарное измерение координаты преобразует любое начальное состояние объекта в гауссово с постоянными значениями дисперсий.

Автор выражает большую благодарность В.Б. Брагинскому и Ф.Я. Халили, взявшим на себя труд ознакомиться с рукописью статьи и давшим ряд ценных советов по ее содержанию.

Работа поддержана РФФИ (проект 03-02-16975а).

Список литературы

1. Гейзенберг В *Физические принципы квантовой теории* (М.: Гостехтеориздат, 1932)
2. Елютин П В, Кривченков В Д *Квантовая механика с задачами* (М.: Наука, 1976)
3. Додонов В В, Манько В И *Труды ФИАН СССР* **183** 200 (1987)
4. Люиселл У *Излучение и шумы в квантовой электронике* (М.: Наука, 1972)
5. Arthurs E, Kelly J L *Bell Syst. Tech. J.* **44** 725 (1965)
6. Stenholm S *Ann. Phys. (New York)* **218** 233 (1992)
7. Мандельштам Л И *Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике* (М.: Наука, 1972) с. 325
8. Вихман Э *Квантовая физика* (Берклевский курс физики, Т. 4) (М.: Наука, 1974)
9. Блохинцев Д И *Основы квантовой механики* (М.: Наука, 1983) с. 75
10. Вигнер Е *Этюды о симметрии* (М.: Мир, 1971) с. 143
11. Воронцов Ю И *Вестн. МГУ. Сер. 3. Физ. Астрон.* (6) 7 (1998)
12. Воронцов Ю И *Вестн. МГУ. Сер. 3. Физ. Астрон.* (1) 24 (1999)
13. Воронцов Ю И *Оптика и спектроскоп.* **96** 747 (2004)
14. Менский М Б *Квантовые измерения и декогеренция. Модели и феноменология* (М.: Физматлит, 2001)
15. Robertson H P *Phys. Rev.* **35** 667 (1930)
16. Шрёдингер Э *Избранные труды по квантовой механике* (М.: Наука, 1976)
17. Воронцов Ю И *Теория и методы макроскопических измерений* (М.: Наука, 1989)
18. Braginsky V B, Vorontsov Y I, Thorne K S *Science* **209** 547 (1980)
19. Braginsky V B et al. *Phys. Rev. D* **67** 082001 (2003)
20. Воронцов Ю И *Вестн. МГУ. Сер. 3. Физ. Астрон.* (4) 12 (1996)
21. Braginsky V B, Khalili F Ya *Quantum Measurement* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992)
22. Корн Г, Корн Т *Справочник по математике (для научных работников и инженеров)* (М.: Наука, 1978)
23. Вятчанин С П, Халили Ф Я *УФН* **174** 765 (2004)
24. Braginsky V B, Khalili F Ya, Kulaga A A *Phys. Lett. A* **202** 1 (1995)
25. Холево А С *Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории* (М.: Наука, 1980)
26. Брагинский В Б, Воронцов Ю И *УФН* **114** 41 (1974)
27. Воронцов Ю И *УФН* **164** 89 (1994)
28. Воронцов Ю И *УФН* **172** 907 (2002)
29. Shapiro J H, Wagner S S *IEEE J. Quantum Electron.* **QE-20** 803 (1984)
30. Noh J W, Fougères A, Mandel L *Phys. Rev. A* **45** 424 (1992)
31. Mandel L *Opt. Commun.* **42** 437 (1982)
32. Smithey D T et al. *Phys. Scripta* **T48** 35 (1993)

33. Bowen W P et al. *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **4** 421 (2002)
34. Giffard R P *Phys. Rev. D* **14** 2478 (1976)
35. Rembovsky Yu A *Phys. Lett. A* **297** 300 (2002)
36. Rembovsky Yu A *Phys. Lett. A* **305** 1 (2002)

Uncertainty relation and the measurement error – perturbation relation

Yu.I. Vorontsov

*Physics Department, M.V. Lomonosov Moscow State University,
Vorob'evy Gory, 119899 Moscow, Russian Federation
Tel. (7-095) 939-39 03. Fax (7-095) 932-88 20
E-mail: vorontsov@phys.msu.ru*

The classical relation between coordinate measurement error and momentum perturbation, $\Delta_p p \Delta_m x \geq \hbar/2$, is discussed in terms of its origin and physical implications. It is demonstrated that only in some special cases the momentum variance in the posterior state increases according to this relation. For the case where the commutator $[\hat{A}, \hat{B}]$ is an operator, the relation between $\Delta_p B$ and $\Delta_m A$ is shown to differ substantially from the corresponding uncertainty relation. Quantum limits for errors in the joint homodyne measurement of optical mode quadrature amplitudes are established. It is shown that similar results are obtained by continuously measuring a coordinate to determine the quadrature amplitudes of a harmonic oscillator.

PACS numbers: **03.65**, – w, 03.65.Ta, **03.67**, – a

Bibliography — 36 references

Received 13 May 2005, revised 28 June 2005

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **175** (10) 1053–1068 (2005)

Physics – Uspekhi **48** (10) (2005)