Август 2004 г. **Том 174, № 8**

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ИЗ ИСТОРИИ ФИЗИКИ

Тяготение и абсолютное пространство. Работы Нильса Бьёрна (1865 – 1909)

Д.Е. Бурланков

Н. Бьёрн почти на 20 лет раньше Эйнштейна построил теорию гравитации, основанную на принципе, именуемом сейчас принципом эквивалентности, но, естественно, без привлечения идей специальной теории относительности. Им предсказаны практически все эффекты, считающиеся экспериментальной проверкой общей теории относительности, при этом расчетные формулы для этих эффектов в точности совпадают с формулами ОТО. Н. Бьёрн стоял на позициях абсолютного пространства, и гравитационное поле описывается им с помощью поля абсолютных скоростей инерциального пространства. Идеи СТО понадобились лишь при описании движения перигелия орбиты Меркурия. Анализируется причина такого совпадения результатов теории Бьёрна и ОТО.

PACS numbers: **01.65. + g**, **04.20. – q**

Содержание

1. **Введение (899).**
2. **Нильс Бьёрн (1865 – 1909) (899).**
   2.1. Работы Бьёрна и эксперименты XX века. 2.2. Инерциальная система. 2.3. Всеобщая инерциальная система (1894). 2.4. Более общий случай движения в гравитационном поле. 2.5. Распространение света (1896). 2.6. Изменение частоты света. 2.7. Космология (1897). 2.8. Софус Ли. 2.9. Абсолютная инерциальная система. 2.10. Принцип наименьшего действия. 2.11. Координатные преобразования. 2.12. Гравитационная волна (1901). 2.13. Динамика сферического мира (1903). 2.14. Движение перигелия Меркурия (1909). 2.15. Дальнейшая судьба.
3. **Динамическое пространство Бьёрна и общая теория относительности (907).**
   3.1. Протяженная инерциальная система в ОТО. 3.2. Внешняя задача Шварцшильда. 3.3. Глобальное время в ОТО. 3.4. Единственность инерциальной системы. 3.5. Динамические свойства пространства.
4. **Заключение (910).**
5. **Приложение. Список работ Нильса Бьёрна (910).**

Список литературы (910).

1. Введение

На наше представление о структуре пространства и времени, выраженное в концепции "общая теория относительности" (ОТО), существенное влияние оказала последовательность прохождения концептуальных барьеров: сначала при активнейшем участии А. Эйнштейна создается специальная теория относительности (СТО), объявившая об отсутствии абсолютного времени, а затем тот же А. Эйнштейн при участии математиков Гроссмана и Гильберта создает общую теорию относительности. Несмотря на то, что физические объекты этих теорий различны, авторское единство привело к сильнейшему влиянию идей релятивизма на теорию гравитации, которая оказалась как бы обобщением СТО.

Парадокс истории общей теории относительности состоит в том, что ее экспериментальная база была создана более чем за 300 лет до возникновения ОТО — это легендарные эксперименты Галилея по наблюдению падения пуль и ядер, сброшенных с Пизанской башни. Для осознания *принципа эквивалентности* не нужен был эксперимент Майкельсона – Морли или тончайшие эксперименты Этвеша. СТО понадобилась только для того, чтобы ребром поставить вопрос: что такое *инерциальная система*? Эйнштейн обратился к этому глубочайшему вопросу лишь в 1911 г. [1].

И хотя, как говорят, история не терпит сослагательного наклонения, иногда открываются события, ранее неизвестные, иллюстрирующие тот или иной дотоле только умозрительный путь. Аналогичное событие произошло и в истории теории гравитации.

2. Нильс Бьёрн (1865 – 1909)

Совершенно неожиданно в наши руки попала подшивка рукописного журнала *Archiv for Naturvidenskab*, издававшегося в 1888 – 1909 гг. группой норвежских школьных учителей. С ней нас познакомила Анна Флоренс, правнучка Нильса Бьёрна, учителя математики в сельской школе.

Нильс Бьёрн (Niels Bjern, 1865 – 1909) окончил университет в Христиании, где, в частности, слушал лекции

Д.Е. Бурланков. Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина 23, Российская Федерация
Тел./Факс (8312) 65-66-15
E-mail: bur@phys.unn.runet.ru

Статья поступила 1 октября 2003 г., после доработки 17 декабря 2003 г.

Софуса Ли. Однако в университете не было духа гонки за какими-то научными открытиями, и Нильс с удовольствием начал преподавать математику в сельской школе. Был дружен с Вильгельмом Бьёркнесом, заинтересовавшим его проблемами гидродинамики. Нильс написал несколько работ по течению вязкой жидкости, однако, принципиально не желая принимать участие в "европейской научной гонке", не стал направлять их в журналы, а вместе с несколькими учителями своей и ближайших школ организовал рукописный журнал *Archiv for Naturvidenskab*, в издании которого активно участвовали ученики, также писавшие статьи для этого журнала.

Тематика журнала была самая разнообразная: бабочки, туманы, рунические письмена, но печатались также работы по физике и математике. И вот в этом журнале обнаружился удивительный цикл статей Н. Бьёрна, в которых гравитация предстает в совершенно непривычном виде с точки зрения физики XX века.

2.1. Работы Бьёрна и эксперименты XX века

В основных своих работах Бьёрн предсказал все экспериментальные факты, считающиеся проверкой ОТО.

1. Искривление светового луча в поле тяжести. Проверено экспериментально в 1919 г.

2. Изменение частоты света при переходе между точками с различными гравитационными потенциалами. Проверено Паундом и Ребкой в 1959 г.

3. Расширение Вселенной (Фридман, Хаббл).

4. Уменьшение частоты света при расширении Вселенной.

5. Гравитационное излучение энергии. Измерено Тейлором и Халсом. Нобелевская премия 1993 г.

6. Расчет угловой скорости вращения перигелия Меркурия.

Несмотря на малость этих эффектов, их описания совпадают в теории Бьёрна и ОТО не только в первом порядке, но и в точных формулах. Это говорит о том, что *принцип эквивалентности*, лежащий в основе как теории Бьёрна, так и ОТО, является определяющим физическим принципом теории гравитации.

Нужно, правда, отметить, что величина измеренного Паундом и Ребкой гравитационного красного смещения не совпадает с величиной, расчитанной Бьёрном, но правильное выражение получается из его формул, если учесть СТО. То же относится и к вычислению потерь энергии вследствие гравитационного излучения — Бьёрн рассчитал только плоскую (нелинейную) гравитационную волну; лишь линеаризация и учет связи с материей дадут формулу Эйнштейна, косвенно проверенную Пензиасом и Вильсоном.

Короче говоря, для полного совпадения с результатами ОТО в теорию Бьёрна нужно добавить специальную теорию относительности, что он успел сделать лишь в своей последней работе о движении перигелия Меркурия.

2.2. Инерциальная система

В 1891 г. Нильс Бьёрн печатает работу "Инерциальная система внутри мяча", в которой, в частности, пишет:

"Мне подарили небольшой мячик, с помощью которого я демонстрирую своим ученикам различные физические явления, в частности, движение свободно брошенного тела по параболе. Но у мяча есть дефект: внутрь его при отливке попал то ли камешек, то ли кусочек каучука, и если мячик потрясти, слышен стук. Ученики про него знают и называют его "хозяином". Однажды при демонстрации полета мяча один ученик спросил: "А хозяин тоже летит по параболе?". Я, не задумываясь, ответил: "Конечно". Однако вопрос застрял в моей голове, и я несколько дней непрерывно размышлял о происходящем внутри мяча во время его полета. Я проводил вычисления, а также вспомнил, что в каком-то задачнике читал задачу о полете снарядов, где в решениях рекомендовалось перейти в свободно падающую систему, в которой все снаряды движутся равномерно и прямолинейно. Значит, и с точки зрения одного из них все другие движутся равномерно и прямолинейно. Значит, и во время полета моего мяча "хозяин" движется относительно стенок равномерно и прямолинейно, или покоится.

Но ведь это означает, что внутри мяча реализуется инерциальная система. А мы, стоя на земле, находимся в неинерциальной системе. И это легко проверить, отпустив тот же мячик: он не останется в покое, а будет равноускоренно падать.

С математической точки зрения это есть следствие одинаковости ускорения свободного падения для всех тел, независимо от их массы.

Физически же это означает, что только внутри ядра или мяча, совершающего свободный полет, реализуется действительно инерциальная система".

Далее Бьёрн пытается вывести из этого соображения некоторые следствия, но серьезных результатов достигает лишь в работе 1894 г.

2.3. Всеобщая инерциальная система (1894)

Через три года, в 1894 г., Н. Бьёрн, увлеченный восхитившей его идеей, печатает совершенно зрелую работу "Всеобщая инерциальная система", в которой сделаны важнейшие выводы о структуре пространства:

"При отсутствии гравитационного поля абсолютная инерциальная система (абсолютное пространство Ньютона) представляет из себя неизменное евклидово пространство. Все законы физики "привязаны" к этому абсолютному пространству. Так как в ключевом законе механики, втором законе Ньютона, центральным объектом является ускорение, то в некоей евклидовой системе, движущейся равномерно и прямолинейно по отношению к абсолютной, законы механики оказываются точно такими же, как и в абсолютной. Возникает понятие множества инерциальных систем.

Однако при наличии гравитационного поля абсолютное пространство перестает быть евклидовым, и скорость относительно него в некотором евклидовом пространстве оказывается неоднородной, зависящей от точки. Гравитация снимает возможность существования множества равноправных глобальных инерциальных систем, оставляя таковой только одну".

Бьёрн рассматривает Солнце и строит вокруг него поле скоростей относительно инерциальной системы. Итак:

"...Инерциальная система — это свободно падающий полый мяч. Но если рассматривать его в гравитационном поле Солнца, то более удаленная от Солнца и более приближенная к нему части мяча имеют различные ускорения, а также слегка непараллельны ускорения боковых точек, направленные к центру Солнца. Одинаковость ускорений в неоднородном гравитационном поле соблюдается лишь в бесконечно малой области.

Поэтому евклидовы инерциальные системы существуют лишь в бесконечно малом. Всеобщая инерциальная система не является евклидовой и состоит из множества согласованно летящих по инерции мячей".

Для описания распределенных физических систем приходится строить непрерывную совокупность бесконечно малых систем. Математическим аппаратом для построения такой совокупности систем является уравнение Гамильтона – Якоби. Для свободно падающих в гравитационном потенциале $\phi(\mathbf{r})$ мячей выписывается уравнение для действия S:

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{(\nabla S)^2}{2m}+m\,\phi(\mathbf{r})=0\,. \tag{1}$$

Отсюда скорость движения инерциального мяча

$$\mathbf{V}=\frac{\boldsymbol{\nabla} S}{m}\,.$$

В статическом случае $\partial S/\partial t=0$, и уравнение (1) после введения функции $s=S/m$ принимает вид

$$\frac{(\nabla s)^2}{2}+\phi(\mathbf{r})=0. \tag{2}$$

Поле скоростей

$$\mathbf{V}(\mathbf{r})=\boldsymbol{\nabla} s\,,\quad V=\sqrt{-2\,\phi} \tag{3}$$

Бьёрн называет *полем абсолютных скоростей*.

"Гравитационное поле делает инерциальную систему единственной, — пишет Бьёрн. — Единственное поле абсолютных скоростей, найденное из уравнений (2) и (3) при неоднородном потенциале $\phi(\mathbf{r})$, не допускает преобразований Галилея от одной инерциальной системы к другой. Такое преобразование допустимо лишь в малой области, где абсолютную скорость можно считать постоянной, и с точки зрения механики равномерно движущиеся (в малом) системы оказываются равноправными. Но во всем пространстве поле абсолютных скоростей оказывается единственным.

Самое главное, я понял: ранее в физике рассматривались системы, движущиеся равномерно и прямолинейно относительно абсолютной инерциальной системы; при наличии гравитационного поля таких систем просто нет.

Лишь в случае отсутствия гравитационного потенциала абсолютная скорость постоянна во всем пространстве и все равномерно движущиеся системы оказываются равноправными для механических движений".

Далее Бьёрн рассматривает Солнце как сферическое тело массой M, полагая, что s зависит только от радиуса:

$$\phi=-\frac{k\,M}{r}\,,$$
$$V=V_r=\sqrt{-2\,\phi}=\sqrt{\frac{2k\,M}{r}}\,. \tag{4}$$

На бесконечности поле абсолютных скоростей равно нулю.

Пространство вне Солнца с полученным полем абсолютных скоростей Бьёрн называет *инерциальной системой Солнца*.

2.3.1. Движение тел в инерциальной системе Солнца. То, что введенная система является эффективным физическим инструментом, Бьёрн демонстрирует на примере описания движения тел в инерциальной системе Солнца как движения свободных частиц. Описание ведется на лагранжевом языке. Для свободного тела (с единичной массой — так как от массы закон движения не зависит) в сферической системе координат лагранжиан имеет вид

$$L=\frac{1}{2}\left[(\dot r-V)^2+r^2\dot\varphi^2\right]. \tag{5}$$

Импульсы

$$p_r\equiv p=\dot r-V\,,\quad p_\varphi\equiv l=r^2\,\dot\varphi=\mathrm{const} \tag{6}$$

определяют гамильтониан

$$H=\dot r\,p+\dot\varphi\,l-L=\frac{\dot r^2-V^2}{2}+\frac{l^2}{2\,r^2}=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\dot r^{\,2}+\frac{l^2}{r^2}\right)-\frac{k\,M}{r}=E\,. \tag{7}$$

Последнее выражение в точности совпадает с гамильтонианом частицы в сферическом гравитационном поле и определяет движение по коническим сечениям.

2.3.2. Выводы. В конце работы Бьёрн подводит итоги.

1. Классические евклидовы инерциальные системы имеют бесконечно малые размеры.
2. Всеобщая инерциальная система не является евклидовой и не связана с каким-либо объемным твердым телом.
3. Общая мировая евклидова система является неинерциальной, что определяется заданным в ней полем абсолютной скорости, определяемым гравитационным потенциалом.
4. Задание поля абсолютных скоростей равносильно заданию гравитационного потенциала.

2.4. Более общий случай движения в гравитационном поле

В следующей работе, также написанной в 1894 г., Бьёрн рассматривает более общий случай гравитационного потенциала. Если имеется произвольное абсолютное поле скоростей $\mathbf{V}(\mathbf{r})$, связанное с гравитационным потенциалом соотношением (2), то движение свободной частицы в этом поле описывается лагранжианом

$$L=\frac{(\dot{\mathbf{r}}-\mathbf{V})^2}{2}\,;\quad \mathbf{p}=\dot{\mathbf{r}}-\mathbf{V};$$
$$H=\mathbf{p}\,\dot{\mathbf{r}}-L=\frac{\dot{\mathbf{r}}^{\,2}}{2}-\frac{V(r)^2}{2}=\frac{\dot{\mathbf{r}}^{\,2}}{2}+\phi(r)\,. \tag{8}$$

И в общем случае описание абсолютной скорости полем эквивалентно описанию гравитационным потенциалом — гамильтониан одинаков.

2.5. Распространение света (1896)

Однако Бьёрн понимает, что понятие *инерциальная система* значительно шире, чем *гравитационный потенциал*, оказывающий воздействие лишь на механические системы. Он начинает заниматься распространением света в движущихся системах, находясь при этом на классических ньютоновых позициях абсолютного пространства и абсолютного движения. Он полагает, что в абсолютной инерциальной системе уравнение эйконала имеет известный вид:

$$\frac{\omega_0^2}{c^2} - \mathbf{k}^2 = 0\,; \quad \omega_0 = \frac{\partial \psi}{\partial t}\,; \quad \mathbf{k} = \nabla \psi\,. \tag{9}$$

При переходе от абсолютно покоящейся системы к движущейся относительно нее со скоростью $\mathbf{V}$ производные по координатам не изменяются, а производные (от скаляра) по времени приобретают "переносную" добавку

$$\frac{\partial}{\partial t} \to \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}\nabla\,. \tag{10}$$

Поэтому при переходе от абсолютно покоящейся системы к движущейся волновой вектор луча $\mathbf{k}$ не изменяется, а частота преобразуется по закону

$$\omega_0 = \omega + (\mathbf{V}\cdot\mathbf{k})\,. \tag{11}$$

Бьёрн изучает дисперсионное уравнение в системе, имеющей абсолютные скорости $\mathbf{V}(\mathbf{r})$:

$$\frac{1}{c^2}\left[\omega + (\mathbf{V}\cdot\mathbf{k})\right]^2 - \mathbf{k}^2 \stackrel{\text{def}}{\equiv} 2\,h(\omega, \mathbf{k}) = 0\,. \tag{12}$$

Из теории дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка следует, что для лучей (характеристик) существует некоторый параметр τ, через который характеристики выражаются с помощью уравнений

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{k}}\,, \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{k}}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{\partial h}{\partial \mathbf{r}}\,. \tag{13}$$

В сферически симметричном случае с полем (4)

$$h = \frac{1}{2}\left(k_r^2 + \frac{k_\varphi^2}{r^2} - \frac{\left(\omega + V(r)\,k_r\right)^2}{c^2}\right) = 0\,, \tag{14}$$

отсюда

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\partial h}{\partial k_r} = k_r\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) - \frac{V\omega}{c^2}\,, \quad \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau} = \frac{k_\varphi}{r^2}\,, \tag{15}$$

где ω и k_φ являются константами.

Величину k_r можно выразить из соотношения (14):

$$k_r^2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) - 2\,\frac{\omega}{c}\,\frac{V}{c}\,k_r + \frac{k_\varphi^2}{r^2} - \frac{\omega^2}{c^2} = 0\,,$$

$$k_r = \frac{V\omega/c^2 - \sqrt{1 - (k_\varphi^2/r^2)\,(1 - V^2/c^2)}}{1 - V^2/c^2}\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau} = k_r\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) - \frac{V\omega}{c^2} = \sqrt{1 - \frac{k_\varphi^2}{r^2}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)} = $$

$$= \sqrt{1 - \frac{k_\varphi^2}{r^2}\left(1 - \frac{2\,k\,M}{r\,c^2}\right)}\,.$$

Эти выражения определяют дифференциальное уравнение траектории луча

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{\dot r}{\dot\varphi} = \frac{r^2}{k_\varphi}\sqrt{1 - \frac{k_\varphi^2}{r^2}\left(1 - \frac{2\,k\,M}{r\,c^2}\right)}\,. \tag{16}$$

Бьёрн предсказывает искривление светового луча в поле тяготения! Отклонение луча от прямой определяется максимальным значением величины $2\,k\,M/(r\,c^2)$ при r, равном радиусу Солнца, и, вычислив эту величину, Бьёрн пишет, что эффект в поле Солнца ничтожно мал и на наблюдаемой картине неба практически не сказывается.

Однако обратим внимание, что эта формула в точности совпадает с формулой ОТО (см., например, [2]).

2.6. Изменение частоты света

В выражении (11) величина ω является константой, но физической частотой — в инерциальной системе — является величина ω_0, которая различна в разных точках.

Отмечая это обстоятельство, Бьёрн получает эффект, называемый в наше время *гравитационным красным смещением*.

Следует при этом отметить, что Бьёрн, не знакомый еще с понятием собственного времени (до создания СТО), полагает, что в эксперименте проявляется изменение ω_0, так что при правильном (с точки зрения ОТО) дисперсионном соотношении (12) вычисляемые им поправки не совсем корректны.

2.7. Космология (1897)

Бьёрн уже пришел к выводу о неевклидовости абсолютного пространства, однако элементарные соображения — наличие поля скоростей — приводят его к мысли о нестатичности пространства.

Бьёрн ищет простую задачу, в которой абсолютное пространство описывалось бы явно. В 1897 г. он рассматривает пылевидную (звездную) материю, распределенную с однородной плотностью ρ. Вследствие гравитационного притяжения эта система не может быть статической, но все пылинки движутся инерциально (в поле тяготения). Для расчета их движения выделим среди них некую точку — "центр Мира". Другая точка на расстоянии r от этого центра движется под действием силы притяжения массы внутри сферы радиусом r:

$$M = \frac{4}{3}\pi\rho r^3\,. \tag{17}$$

Из закона сохранения энергии, как и в задаче о сферическом теле, следует:

$$V^2 = \frac{2kM}{r} = \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2.$$

Так как при движении масса внутри сферы не изменяется, то это выражение можно рассматривать как дифференциальное уравнение, решение которого

$$r^3 = \frac{9kM}{2}\,t^2\,. \tag{18}$$

Скорость удаления какой-либо звезды от "центра" в каждый момент пропорциональна расстоянию до него и направлена от центра:

$$v = \frac{2}{3t}\,r\,, \quad \mathbf{v} = \frac{2}{3t}\,\mathbf{r}\,. \tag{19}$$

Если, например, скорость Солнца равна $\mathbf{v}_0$, то скорость звезды относительно Солнца

$$\mathbf{v}_{\text{rel}} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0 = \frac{2}{3t}\,(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\,, \tag{20}$$

как если бы Солнце было этим выделенным центром.

Таким образом, роль "центра Мира" может играть любая звезда: движение относительно нее таково, как если бы она была этим покоящимся центром. В частности, при $\mathbf{r} = 0$ скорость движения равна нулю — свободно отпущенное тело относительно заданной точки покоится — выполняется первый закон Ньютона. При этом все точки равноправны. Это множество звезд с расстояниями, изменяющимися по закону (18), реализует *нестатическую всеобщую инерциальную систему*.

Для объяснения изменения расстояния между звездами приходится вводить масштаб, зависящий от времени:

$$r(t) = m(t)\,\bar{r}\,, \quad m(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3}, \tag{21}$$

где $\bar{r}$ — неизменное (угловое) расстояние между звездами.

Таким образом, инерциальная система в этой задаче построена в явном виде, и ее геометрические свойства оказываются динамическими.

Владея техникой описания движения света, Бьёрн демонстрирует изменение частоты свободно распространяющегося света при изменении масштаба мира. Дисперсионное соотношение имеет вид

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\mathbf{k}^2}{m^2(t)}\,.$$

Так как система инерциальная, то ω является абсолютной частотой. Вследствие однородности пространства $\mathbf{k}$ постоянен, и частота оказывается обратно пропорциональной масштабу.

2.8. Софус Ли

В 1899 г. выходит работа: Софус Ли, Нильс Бьёрн "Динамика пространства". Работа написана одним Бьёрном и опубликована все в том же рукописном журнале *Archiv for Naturvidenskab*. Во введении он подробно рассказывает о роли С. Ли в создании этой работы:

"Карл Бьёркнес, с которым я часто общался благодаря моей дружбе с Вильгельмом и который с большим интересом относился к моим работам, нередко говорил, что их обязательно нужно показать Софусу Ли. Когда осенью 1898 года Ли вернулся в Норвегию, Бьёркнесу удалось договориться о моей встрече с профессором. Однако меня предупредили, что из-за плохого состояния здоровья профессор сможет уделить мне не более одного часа.

Мы приехали к нему мрачным осенним утром. Профессор был хмур, лицо его было опухшим и отливало синеватым оттенком. Однако встретил меня он достаточно приветливо и даже сделал вид, что вспомнил меня как студента. Мы уселись в кресла, и он приготовился слушать. Я начал излагать ему свои мысли по поводу замены гравитационного потенциала полем абсолютных скоростей, об искривлении луча полем Солнца. Он слушал все более и более внимательно. Когда я рассказал о космологической задаче, он вскочил с кресла, несколько минут ходил по комнате и, наконец, воскликнул:

«Я всегда говорил Феликсу [видимо, Клейну], что наш мир не может быть всюду плоским, как евклидовы треугольники! Вы ведь тоже идете от евклидова мира, у Вас меняется только общий масштаб. Но звезды на небе расположены неоднородно. А значит, и этот масштаб в разных частях Мира будет изменяться по-разному. Но это значит, что будут изменяться все компоненты квадратичного риманова элемента пространства. Вот для чего нужна новая теория, которую я сейчас разрабатываю!»

Уже давно прошел назначенный час. Ли грозно отверг намеки домашних на необходимость закончить встречу. Нас пригласили к обеду. Профессор почти ничего не ел, сидел тихо, весь погруженный в себя, и как бы светился каким-то внутренним светом. Лицо его порозовело, пропала болезненная синева.

После обеда он совершенно спокойно, даже не мне, а, скорее, себе сформулировал, что же нужно делать.

1. Пространство является римановым, описываемым римановой квадратичной формой.

2. Зависимость элементов квадратичной формы пространства от времени должна определяться из принципа наименьшего действия, куда, в отличие от теории Лапласа, должны входить производные по времени.

3. Но это означает, что эти уравнения должны иметь волновые решения и в лагранжиан должна входить константа, определяющая скорость гравитационной волны.

4. Преобразование к абсолютной инерциальной системе координат, где поле абсолютной скорости всюду равно нулю, требует зависимости новых координат от времени.

5. Нужно построить формулы преобразования тензоров от абсолютной инерциальной системы к неинерциальной.

Он не только сформулировал эти вопросы, но почти по всем набросал пути поиска ответов. Когда мы, уже вечером, прощались, он мне сказал: «Это Вам задание на неделю. Ровно через неделю приезжайте ко мне, посмотрим, что получилось. А мне неделя тоже нужна: я теперь знаю, на что нужно направлять мою новую теорию. Феликс лопнет от зависти».

К глубочайшему сожалению, не только через неделю, но и никогда больше мы не смогли с ним встретиться. В следующий раз я увидел его лишь на похоронах.

В этой и последующих работах я попытаюсь реализовать идеи, высказанные профессором Ли во время той единственной встречи. Я смотрел на свои работы как на забаву и никак не ожидал такого бурного интереса к ним от заслуженного профессора".

2.9. Абсолютная инерциальная система

Первое, о чем шел разговор, — об абсолютной инерциальной системе:

"«Общепринято считать, что инерциальная система представляет собой неизменное евклидово пространство, — говорил профессор Ли. — Я не знаю, поняли ли Вы, что Вы показали совершенно другие свойства пространства. Во-первых, оно динамично. Его риманова квадратичная форма зависит от времени, и хотя в Вашей работе изменяется только масштаб — это следствие однородности задачи, — в общем неоднородном случае должны изменяться все компоненты. То есть общая инерциальная система может иметь тензор Кристоффеля, не равный нулю».

На мой вопрос, как это может быть, профессор ответил: «Ну, например, наш мир может оказаться трехмерным сферическим пространством Римана. Все направления равноправны, но куда бы Вы ни пошли, пройдя одно и то же расстояние в любом направлении, Вы вернетесь в ту же точку с противоположной стороны.

Если радиус этой сферы очень большой, то мир нам кажется плоским. Как Землю мы воспринимаем плоской. Однако радиус мира должен быть несравненно больше радиуса Земли. А самое главное, как Вы показали, он зависит от времени. Мы с Вами пока не знаем, как вычислить эту зависимость, но сегодня мы должны разработать принципы, на основании которых эта зависимость может быть получена.

Зависимость римановой квадратичной формы от времени неизбежна для того, чтобы в каждой точке инерциальной системы выполнялся первый закон Ньютона, но в более жесткой форме, только с одним требованием: покоящееся тело остается в покое. О равномерном движении в общем случае и говорить не приходится, разве что в бесконечно малом, где все пространства являются плоскими. Именно внутри Вашего мяча первый закон Ньютона выполняется полностью.

Мы с Вами спокойно сидим в креслах, но наша система не является инерциальной. Я отпускаю карандаш, но он не сохраняет состояние покоя. С точки зрения Вашего поля абсолютной скорости в инерциальной системе это поле равно нулю во всех точках. Поэтому проблема распадается на две части: построение теории в общей инерциальной системе и пересчет всех результатов в произвольную систему. Вторая часть с точки зрения математики является чисто технической (в основном благодаря моим работам)»".

2.10. Принцип наименьшего действия

Далее собеседники перешли к обсуждению уравнений динамики пространства во всеобщей инерциальной системе:

"Профессор настойчиво утверждал, что динамика римановой квадратичной формы должна определяться из принципа наименьшего действия Гамильтона. Видно было, что к этому принципу он относится с особым вниманием:

«Функция Лагранжа для различных полей представляется как разность плотностей кинетической и потенциальной энергии»".

Построение кинетической энергии собеседники начали с изучения размерности. Размерность гравитационной постоянной [кг$^{-1}$ м^3 с$^{-2}$]. Лагранжиан имеет ту же размерность, что и энергия, [кг м^2 с$^{-2}$], а размерность плотности лагранжиана для поля [кг м$^{-1}$ с$^{-2}$]. Произведение ее на гравитационную постоянную имеет размерность [м^2 с$^{-4}$], т.е. квадрата производной по времени от масштаба [с$^{-2}$], умноженного на квадрат некоторой скорости.

"«Это, без сомнения, скорость распространения гравитации! — воскликнул профессор. — Я слышал, что она значительно превышает даже скорость света, но она не бесконечна. Гравитация также может распространяться в виде волн. Назовем эту скорость U. Теперь мы можем сконструировать выражение для кинетической энергии. Моя новая работа, которую я недавно начал, называется "Вариация инвариантных интегралов". Она посвящена составлению интегралов, инвариантных по отношению к координатным преобразованиям. Из инвариантности при бесконечно малых преобразованиях следуют интересные дифференциальные тождества. Однако пока эта теория у меня имела чисто абстрактный характер. Вы предоставили великолепную область ее приложения»".

В результате обсуждения авторы статьи "Динамика пространства" приходят к выражению для плотности кинетической энергии (мы записываем его в современных обозначениях с использованием верхних и нижних индексов):

$$T = \frac{U^2}{2k}\left(g^{ij}g^{kl} - g^{ik}g^{jl}\right)\dot g_{ik}\,\dot g_{jl}\sqrt{\det(g)}\,; \tag{22}$$

при этом С. Ли настаивал именно на знаке "минус", утверждая, что знак "плюс" дал бы только колебательные решения, а не бесконечное расширение, как это имело место в космологической задаче Н. Бьёрна:

"Теперь нужно правильно записать плотность потенциальной энергии. Здесь моя новая работа дает почти однозначный ответ. Она должна быть пропорциональна скаляру пространственной кривизны".

Таким образом, авторы приходят к выражению для действия динамики пространства в инерциальной системе:

$$S_g = \frac{U^2}{2k}\int\left[(g^{ij}g^{kl} - g^{ik}g^{jl})\,\dot g_{ik}\,\dot g_{jl} + q\,U^2 R\right]\sqrt{g}\,\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}t\,, \tag{23}$$

где q — пока неопределенная константа.

"«Вам я задаю довольно сложную задачу. Срок — неделя. Нужно, как и в электродинамике, построить решение для плоской волны, где все компоненты римановой квадратичной формы зависят от времени и только от одной из координат. Если бы пространство было двумерно — Вы это сделали бы легко. Я помню, как Вы быстро считали вторую гауссову квадратичную форму по первой, — Софус Ли действительно вспомнил меня как студента. В дифференциальной геометрии я ориентировался очень свободно. — Вам нужно взять $\mathrm{d}l^2 = m^2(x,t)\,\mathrm{d}x^2 + A^2(x,t)\,\mathrm{d}y^2 + B^2(x,t)\,\mathrm{d}z^2$ и вычислить гауссову кривизну этой формы. Если Вы положите $A = 0$, то получите двумерную поверхность, для которой Вы все легко вычислите. Аналогично, если положить $B = 0$. Ваш окончательный ответ должен переходить в эти частные случаи. Но нужно вычислить еще взаимовлияние A и B. Ладно, на неделю у Вас и без этого работы много, я подумаю сам, как упростить вычисления. Дело в том, что в любой момент времени можно выбрать координату x так, чтобы коэффициент m обратился в единицу. Но установить $m(x,t) = 1$ можно только после вариации».

Это задание полностью я не выполнил до сих пор, но вслед за этой работой я непременно займусь гравитационной волной".

2.11. Координатные преобразования

Затем собеседники обсудили перевод результатов в неинерциальную систему координат общего вида.

Обозначим пространственные координаты инерциальной системы через $\bar x^i$, а некоторой произвольной системы — как $x^j(\bar x, t)$.

Преобразования пространственных переменных x^i могут зависеть от времени. При этом появляется вектор абсолютной скорости, а квадратичный риманов элемент преобразуется следующим образом:

$$V^i = \frac{\partial x^i}{\partial t}\,; \quad g^{ij} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar x^k}\,\frac{\partial x^j}{\partial \bar x^l}\,\bar g^{kl}\,. \tag{24}$$

Производные по времени, если функция зависит от координат, в различных системах выражаются по-разному. Производную по времени в инерциальной системе авторы "Динамики пространства" называют полной производной по времени. По правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x^i}\,\frac{\partial x^i}{\partial t}\;=\frac{\partial F}{\partial t}+V^i\,\frac{\partial F}{\partial x^i}\,. \tag{25}$$

Для тензорной функции выражение чуть сложнее, так как производится еще преобразование, связанное с индексами, однако именно эти преобразования были введены и изучены С. Ли и в наше время носят название *Ли вариаций*. При бесконечно малом преобразовании координат инерциальной системы $x^i=\bar{x}^i+\xi^i(x,t)$, например, тензор третьего ранга Q^i_{jk} приобретает Ли вариацию

$$\delta_\xi Q^i_{jk}=\xi^i_{,s}\,Q^s_{jk}-\xi^s_{,j}\,Q^i_{sk}-\xi^s_{,k}\,Q^i_{js}-\xi^s\,Q^i_{jk,\,s}\,.$$

При возврате в инерциальную систему $\xi^s=-V^s\,\mathrm{d}t$, и преобразование выражается через поле абсолютных скоростей V^s и его пространственные производные, которые добавлением и вычитанием соответствующих связностей приводятся к ковариантным (современное обозначение — точка с запятой):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,Q^i_{jk}=\frac{\partial}{\partial t}\,Q^i_{jk}-V^i_{;s}Q^s_{jk}+V^s_{;j}Q^i_{sk}+V^s_{;k}Q^i_{js}+V^sQ^i_{jk;\,s}\,. \tag{26}$$

Например, для контрвариантного векторного поля A^i

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,A^i=\frac{\partial A^i}{\partial t}-A^j\,\frac{\partial V^i}{\partial x^j}+V^j\,\frac{\partial A^i}{\partial x^j}=\frac{\partial A^i}{\partial t}-V^i_{;j}\,A^j+V^jA^i_{;j}\,. \tag{27}$$

Аналогично, для ковариантного векторного поля

$$\frac{\mathrm{d}B_i}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial B_i}{\partial t}+V^j_{;i}B_j+V^jB_{i;j}\,. \tag{28}$$

Особо важным является выражение для ковариантной производной по времени компонент метрического тензора. Так как пространственные ковариантные производные от него равны нулю, то

$$\frac{\mathrm{d}g_{ij}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial g_{ij}}{\partial t}+V_{i;j}+V_{j;i}\,. \tag{29}$$

Теперь все соотношения, полученные в инерциальной системе координат, можно перенести в произвольную, заменив частную производную по времени на полную. Это, в частности, определяет добавку от поля абсолютной скорости к кинетической энергии в лагранжиане.

Аналогичную замену производных по времени необходимо проводить и при записи уравнений или лагранжианов других полей.

2.12. Гравитационная волна (1901)

Наконец, только более чем через два года после памятной беседы с Софусом Ли Н. Бьёрн завершает работу о плоской гравитационной волне, что позволило ему уточнить коэффициенты в действии (23):

"Для квадратичной формы

$$\mathrm{d}l^2=m(x,t)^2\,\mathrm{d}x^2+A(x,t)^2\,\mathrm{d}y^2+B(x,t)^2\,\mathrm{d}z^2$$

в инерциальной системе кинетическая энергия выражается следующим образом:

$$T=2\left[\left(\frac{\dot m}{m}\right)^2+\left(\frac{\dot A}{A}\right)^2+\left(\frac{\dot B}{B}\right)^2-\left(\frac{\dot m}{m}+\frac{\dot A}{A}+\frac{\dot B}{B}\right)^2\right]\times$$
$$\times\,mAB=-4\left[\dot m\,(\dot AB+A\dot B)+m\dot A\dot B\right]\,.$$

Вычисление скалярной кривизны сложнее. После многих попыток я, наконец, понял, что имел в виду профессор Ли, когда говорил о возможности в какой-то момент времени положить коэффициент $m(x,t)$ равным единице. Это можно сделать, но так как при этом подразумевается преобразование координаты x инерциальной системы, зависящее от времени, то необходимо ввести поле абсолютной скорости $V_x(x,t)\equiv V$, так что полные производные по времени (при $m=1$) будут выглядеть как

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=V'\,,\quad\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\dot A+VA'\,,\quad\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}=\dot B+VB'\,.$$

Но зато существенно упростится вычисление гауссовой кривизны:

$$R\sqrt{g}=-2(A''\,B+A\,B''+A'B')\,.$$

Для такой волны лагранжиан, описываемый формулой (23), принимает вид

$$L=-4\Big\{\,V'\left[(\dot A+VA')\,B+A\,(\dot B+VB')\right]+$$
$$+\,(\dot A+VA')(\dot B+VB')\Big\}-q(A''B+AB''+A'B')\,.$$

Три вариации (по A, B и V) определяют три дифференциальных уравнения. Однако нас интересует ответ в инерциальной системе, где $V=0$, поэтому, положив это соотношение верным после вариации, получим три уравнения для двух функций A и B (при $q=4$):

$$\ddot A-A''=0\,;\quad\ddot B-B''=0\,;\quad\dot A'B+A\dot B'=0\,.$$

Первые два уравнения определяют функции A и B как волновые решения — произвольные функции от $x-Ut$.

Последнее уравнение устанавливает связь между этими двумя функциями (A и B), зависящими от одной переменной:

$$A''B+AB''=0\,.$$

Это уравнение довольно просто решается, если ввести параметризацию $A=F\exp(\psi)$, $B=F\exp(-\psi)$, что приводит к уравнению

$$F''+(\psi')^2\,F=0\,.$$

Профессор Ли говорил, что мы определяем действие с точностью до безразмерного множителя, поэтому выведенное ранее выражение можно разделить на четыре, что удобнее сделать, введя полные производные по времени от элементов римановой квадратичной формы в виде

$$w^i_j=\frac{g^{ik}}{2\,U}\,(\dot g_{kj}+V_{k;j}+V_{j;k})\,.$$

При этом действие описывается выражением

$$S=\frac{U^4}{2k}\int(w^i_j\,w^j_i-(w^j_j)^2+R)\sqrt{g}\,\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}t\,. \tag{30}$$

(Напомним, что мы используем современные обозначения ковариантных производных и суммирования по индексам — *Д.Б.*).

«Численный множитель перед этим выражением должен находиться из рассмотрения связи с материальными полями», — говорил профессор Ли. Эта связь как раз устанавливается методами его новой теории "Вариация инвариантных интегралов", которую он надеялся вскоре закончить".

Аналогичное волновое решение в ОТО приведено в книге [3].

2.13. Динамика сферического мира (1903)

В этой работе Н. Бьёрна получены решения для динамики сферического мира, найденные в ОТО А.А. Фридманом почти на 20 лет позднее:

"Объясняя мне, что такое неплоское пространство, Софус Ли привел пример трехмерной сферы. Я уже научился вычислять гауссову кривизну трехмерных пространств. В частности, для трехмерной сферы радиусом r она равна $6/r^2$. Профессор упрекал меня, что я все отталкиваюсь от плоского пространства, и у меня появилась идея рассмотреть динамику трехмерного сферического пространства с радиусом, зависящим от времени. Несложно вычислить и кинетическую энергию. Как и для плоского случая,

$$\dot{g}_{ij} = \frac{2\,\dot{r}}{r}\, g_{ij}\,,$$

откуда, при учете, что мера объема $\sqrt{g} = 2\,\pi^2 r^3$, плотность лагранжиана

$$L = \frac{6\,\pi^2\,U^2}{k}\;(r\dot{r}^2 - r)\,,$$

а плотность гамильтониана

$$H = \frac{6\,\pi^2\,U^2}{k}\;(r\dot{r}^2 + r)\,.$$

Так как система имеет всего одну степень свободы, то вся динамика определяется из закона сохранения энергии

$$r\dot{r}^{\,2} + r = r_{\mathrm{m}}\,, \tag{31}$$

где r_{m} — константа интегрирования, имеющая смысл максимально возможного значения радиуса.

Это дифференциальное уравнение легко решается. Его решение хорошо известно — это циклоида с радиусом $r_{\mathrm{m}}/2$. В таком мире радиус (и все масштабы) увеличивается от нуля до r_{m}, а затем снова уменьшается до нуля.

Это решение вряд ли имеет какое-то практическое значение, но интересно в познавательном плане для изучения возможных конфигураций нашего мира, который, как я это понял почти десять лет назад, обязан быть нестатичным".

2.14. Движение перигелия Меркурия (1909)

В конце 1908 г. Н. Бьёрн пишет работу, в которой выясняет, что дает для его теории только что созданная теория относительности. Прежде всего, он полагает, что скорость гравитационной волны, входившая в его уравнения как неопределенная константа, и, как полагал С. Ли, значительно бóльшая скорости света, должна равняться последней.

Однако центральной частью этой работы, вышедшей в весеннем выпуске журнала *Archiv for Naturvidenskab* за 1909 г., является учет изменения, внесенного теорией относительности в динамику материальной точки, в соответствии с которым Бьёрн полагает, что частица движется по принципу минимума собственного времени, однако расписывает этот принцип не очень стандартно. Он ищет параметрические зависимости координат $x^i(\tau)$ и времени $t(\tau)$ от собственного времени:

$$\tau = \int_A^B \frac{c^2\,\mathrm{d}\tau^2}{c^2\,\mathrm{d}\tau^2}\;\mathrm{d}\tau = \int_A^B \frac{c^2\,\mathrm{d}t^2 - \left(\mathrm{d}\mathbf{r} - \mathbf{V}(r)\,\mathrm{d}t\right)^2}{c^2\,\mathrm{d}\tau^2}\;\mathrm{d}\tau\,. \tag{32}$$

Вместо нахождения экстремалей собственного времени Бьёрн ищет экстремали пропорционального этому времени действия $S = -c^2\,\tau/2$ с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2}\left[\left(\dot{\mathbf{r}} - \mathbf{V}(r)\dot{t}\right)^2 - c^2\,\dot{t}^{\,2}\right] = -\frac{c^2}{2}\,, \tag{33}$$

где точкой обозначена производная по τ.

Возьмем поле абсолютных скоростей сферической массы $V_r \equiv V = \sqrt{2kM/r}$ и распишем лагранжиан в сферических координатах:

$$L = \frac{1}{2}\left[(\dot{r} - V\,\dot{t}\,)^2 + r^2\dot{\varphi}^2 - c^2\dot{t}^2\right]. \tag{34}$$

Так как коэффициенты этого выражения не зависят от t и φ, то время и угол — циклические координаты и сопряженные им импульсы (ε и l) постоянны на траекториях:

$$p_\varphi = r^2\,\dot{\varphi}\,,\quad \dot{\varphi} = \frac{l}{r^2}\,;$$
$$p_t = V\dot{r} + (c^2 - V^2)\,\dot{t}\,,\quad \dot{t} = \frac{c^2\,\varepsilon - V\,\dot{r}}{c^2 - V^2}\,.$$

Подставляя эти выражения в лагранжиан (для свободной частицы совпадающий с гамильтонианом), получаем

$$2L = \frac{\dot{r}^2 - c^2\,\varepsilon^2}{1 - V^2/c^2} + \frac{l^2}{r^2} = -c^2\,,$$

откуда следует:

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}c\,\tau}\right)^2 + \left(1 + \frac{l^2}{c^2\,r^2}\right)\left(1 - \frac{2\,k\,M}{r\,c^2}\right) = \varepsilon^2\,. \tag{35}$$

Выражая $\mathrm{d}\tau$ через $\mathrm{d}\varphi$ из закона сохранения момента,

$$\mathrm{d}\tau = \frac{r^2\,\mathrm{d}\varphi}{l}\,,$$

после замены переменной $x = l/(c\,r)$ и обозначения $kM/(lc) \equiv \alpha$ приводим уравнение (35) к виду

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 + W(x) = \varepsilon^2 - 1\,,\quad W(x) \equiv x^2 - 2\alpha x - 2\alpha x^3\,. \tag{36}$$

Это уравнение имеет вид закона сохранения энергии при одномерном движении материальной точки в потенциальном поле $W(x)$. Роль времени здесь играет угол φ.

Важно отметить, что выражение (36) *в точности* совпадает с выражением для движения материальной точки в поле Шварцшильда.

Круговому движению соответствует точка в минимуме функции $W(x)$, точка x_0 (время-угол растет, а радиус не изменяется):

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x} = 2x_0 - 2\alpha - 6\alpha x_0^2 = 0\,,\quad x_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - 12\alpha^2}}{6\alpha}\,.$$

Рассматривая траектории, близкие к окружности, Н. Бьёрн изучает малые колебания траектории вблизи круговой орбиты. Их частота (по углу φ)

$$\Omega^2 = \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}^2 W}{\mathrm{d}x^2} = 1 - 6\alpha x_0 = \sqrt{1 - 12\alpha^2}\,. \tag{37}$$

Классический подход соответствует пренебрежению добавкой $12\alpha^2$: $\Omega = 1$, $T = 2\pi$. Период колебания в точности совпадает с периодом обращения, и траектория движения замкнута (эллипс).

Однако теория относительности вносит поправки. Частота уменьшается, период колебаний оказывается больше 2π, и точка описывает эллипс, поворачивающийся с угловой скоростью $\Omega \approx 1 - 3\alpha^2$ по направлению вращения. За каждый оборот угол увеличивается на величину

$$\delta\varphi = 6\pi\alpha^2\,.$$

Этим объясняется *вращение перигелия Меркурия*, зафиксированное Леверье, проанализировавшим результаты трех столетий наблюдения, начиная со времен датского астронома Тихо Браге, — большая ось эллиптической орбиты Меркурия за столетие поворачивается на угол порядка $40''$.

2.15. Дальнейшая судьба

28 мая 1909 г. Н. Бьёрн трагически погиб в горах на глазах у своих учеников. Журналы *Archiv for Naturvidenskab* хранились в семьях некоторых учителей и учеников. Бурное развитие теории относительности в XX веке привело к тому, что, даже когда работы Бьёрна, опубликованные в провинциальном журнале, попадали в руки физика, тот (как говорит Анна Флоренс) с улыбкой откладывал их в сторону, и в конце концов они оказались забытыми.

А. Флоренс была удивлена интересом, вызванным у меня работами Бьёрна, которые она мне показала. Мой интерес объяснялся просто. В течение последних десяти лет я нашел в ОТО тот узловой момент, который был утерян в процессе создания теории под парадигмой относительности: *глобальное время*, которое прекрасно вписывается в математическую структуру ОТО.

3. Динамическое пространство Бьёрна и общая теория относительности

В большинстве случаев расчетные формулы Бьёрна совпадают с аналогичными выражениями ОТО, хотя о преобразовании времени он даже не помышлял. Лишь в задаче о движении перигелия Меркурия он использовал понятие СТО "собственное время", но для описания динамического пространства использовал свою старую модель инерциальной системы вокруг тяготеющей массы и получил выражение для траектории движения, *в точности* совпадающее с выражением в ОТО.

Кроме того, при описании *гравитационного красного смещения* Бьёрн получил выражение для изменения частоты лишь для инерциальной системы, не сумев правильно пересчитать результат для покоящегося (неинерциального) наблюдателя, так как тогда еще отсутствовало понятие *собственного времени*. Однако записанное им уравнение эйконала, из которого при учете СТО получаются все наблюдаемые эффекты, в точности совпадает с уравнением эйконала в ОТО.

Таким образом, если в теорию Бьёрна *локально* добавить специальную теорию относительности, то получающаяся теория в существенной части совпадает с ОТО. Чтобы увидеть область совпадения этих теорий, нужно попытаться найти в ОТО глобальное время Ньютона и динамическое пространство Бьёрна.

3.1. Протяженная инерциальная система в ОТО

В литературе неоднократно отмечалась удивительная простота уравнений гравитации в *синхронной системе отсчета* (см., например, [2]):

$$\mathrm{d}s^2 = dt^2 - \gamma_{ij}(t,x)\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j\,. \tag{38}$$

В этой системе $g^{00} = 1$ — время глобальное и всюду течет равномерно. Изменяются во времени только компоненты трехмерной метрики. В этой системе, рассматриваемой с точки зрения теории Бьёрна как *инерциальная*, имеется совпадение теории Бьёрна и ОТО.

Действительно, чуть-чуть изменив определения, принятые в [2]:

$$\mu_{ij} = \frac{1}{2}\,\dot{\gamma}_{ij}\,; \quad \mu_i^i = \frac{\partial \ln\sqrt{\gamma}}{\partial t}\,,$$

получаем действие Гильберта для гравитационного поля, совпадающее с действием Бьёрна – Ли с точностью до внеинтегрального члена:

$$-\frac{1}{2}\,R\sqrt{g} = \frac{\partial}{\partial t}\,(\mu_i^i\sqrt{\gamma}) + \frac{\sqrt{\gamma}}{2}\,(\mu_j^i\mu_i^j - \mu_i^i\mu_j^j) + \frac{\sqrt{\gamma}}{2}\,R_3\,, \tag{39}$$

где R_3 — скалярная кривизна трехмерного многообразия $\tau = \mathrm{const}$ (см. [3]).

При переходе к неинерциальным системам в ОТО происходит пересчет собственного времени движущегося наблюдателя — в теории Бьёрна этот процесс отсутствует. В ОТО при преобразованиях (зависящих от времени) только пространственных координат $x^i = x^i(t,\bar{x})$, где $\bar{x}$ — координаты в синхронной системе, появляется недиагональная компонента метрики

$$g^{0i} = \frac{\partial x^i}{\partial ct} \equiv \frac{V^i}{c}\,, \tag{40}$$

и метрика принимает вид (см. [4])

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\,\mathrm{d}t^2 - \gamma_{ij}(\,\mathrm{d}x^i - V^i)(\,\mathrm{d}x^j - V^j)\,. \tag{41}$$

Недиагональные элементы метрики $g^{0i}c \equiv V^i$ здесь с очевидностью выступают как некоторые скорости. Еще большее совпадение связано с обратным метрическим тензором. Выражение ОТО, входящее в уравнение Гамильтона – Якоби и в уравнение эйконала,

$$g^{\alpha\beta}\,\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\,\frac{\partial f}{\partial x^\beta} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + V^i\,\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)^2 - \gamma^{ij}\,\frac{\partial f}{\partial x^i}\,\frac{\partial f}{\partial x^j} \tag{42}$$

точно так же преобразуется и Бьёрном за счет "переносной" поправки

$$\frac{\partial}{\partial t} \to \frac{\partial}{\partial t} + V^i\,\frac{\partial}{\partial x^i}\,.$$

Поэтому все расчеты Бьёрна, связанные с уравнениями Гамильтона – Якоби и эйконала, совпадают с выражениями ОТО.

Глобальное время в ОТО используется довольно часто, например, *все* космологические задачи формулируются и решаются в глобальном времени в синхронной системе отсчета.

3.2. Внешняя задача Шварцшильда

Эффекты искривления светового луча, вращения перигелия Меркурия, предсказанные Бьёрном и в точности совпадающие с соответствующими выражениями ОТО, связаны с инерциальной системой в окрестности тяготеющей массы. Так как принцип эквивалентности является общим для обеих теорий, используем этот принцип для выяснения причин такого совпадения.

Эйнштейн в 1911 г., сформулировав в работе [1] локальный принцип эквивалентности — в свободно падающей системе (лифте) реализуется инерциальная система, — предсказал замечательные эффекты (искривление светового луча в поле тяжести, гравитационное красное смещение). Однако он рассматривал лишь однородное поле тяготения. Важно отметить, что все рассуждения в этой работе велись в неизменном (глобальном) классическом времени.

Учтем теперь неоднородность гравитационного поля. Рассмотрим сферически симметричное тело массой M. Для описания физических явлений в окрестности этого тела введем бесконечно малые инерциальные системы, которые реализуются в свободно падающих по радиусу лабораториях (пылинках); в каждой из них введем метрику Минковского

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - \bar{\mathrm{d}}x^2 - \bar{\mathrm{d}}y^2 - \bar{\mathrm{d}}z^2\,, \tag{43}$$

где $\bar{\mathrm{d}}$ означает, что отсутствует соответствующая глобальная координата, ее изменение возможно только в бесконечно малой области. Отметим, что в выражении (43) это ограничение наложено лишь на пространственные координаты. По времени лаборатория (локальная инерциальная система) может иметь конечную (хотя, возможно, ограниченную) протяженность.

Связывая теперь локальные координаты в лаборатории с глобальными сферическими координатами в окрестности тяготеющей массы,

$$\bar{\mathrm{d}}x = r\,\mathrm{d}\theta\,, \quad \bar{\mathrm{d}}y = r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,, \quad \bar{\mathrm{d}}z = \mathrm{d}r - V\,\mathrm{d}t\,, \tag{44}$$

и подставляя их в (43), получаем выражение для метрики:

$$\mathrm{d}s^2 = (c^2 - V^2)\,\mathrm{d}t^2 + 2V\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t - \left[\mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2)\right]. \tag{45}$$

Чтобы переменная t тоже была глобальной, нам нужно синхронизировать часы в различных лабораториях. Это можно сделать, если выбрать их движение таким, чтобы на бесконечности, где пространство-время плоское, их скорость равнялась нулю — тогда эта переменная отсчитывает общее время наблюдателей, покоящихся на бесконечности и находящихся в свободно падающих лабораториях. Из закона сохранения энергии находим

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{kmM}{r} = 0\,; \quad V = \sqrt{\frac{2kM}{r}}\,. \tag{46}$$

Построенная глобальная система имеет единое физическое время

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{2kM}{c^2 r}\right)c^2\,\mathrm{d}t^2 + 2\sqrt{\frac{2kM}{c^2 r}}\,c\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}r - \mathrm{d}r^2 - r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2)\,. \tag{47}$$

При этом компоненты обратного метрического тензора имеют вид

$$g^{00} = 1\,; \quad g^{0r} = \frac{V}{c}\,. \tag{48}$$

Сечения $t = \mathrm{const}$ образуют *абсолютное пространство*. В полученной метрике оно является плоским евклидовым пространством. Единственное, что отличает полученную метрику от метрики Минковского — это радиальное поле абсолютных скоростей Бьёрна.

В то же время эта метрика переходит в диагональную метрику Шварцшильда при замене времени t на формальную переменную $\tilde{t}$:

$$\mathrm{d}t = \mathrm{d}\tilde{t} - \frac{V\,\mathrm{d}r}{c^2 - V^2}\,. \tag{49}$$

После такой замены получим

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{2kM}{c^2 r}\right)c^2\,\mathrm{d}\tilde{t}^2 - \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - (2kM/c^2 r)} - r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2)\,. \tag{50}$$

Таким образом, Бьёрн фактически работает в метрике Шварцшильда, приведенной к глобальному времени.

Выражение (47) для внешней метрики тяготеющей массы было получено в 1921 г. Painlevé [5] из метрики Шварцшильда преобразованием, обратным (49).

Между этими двумя выражениями — огромная разница: в метрике (47) переменная t — это *глобальное время*, в то время как в (50) $\tilde{t}$ — просто формальная переменная, наделенная физическим смыслом лишь в асимптотике при $r \to \infty$, но зато метрика диагональна. Это различие проявляется в геометрии пространства трехмерных сечений $t = \mathrm{const}$. В метрике (47) — это плоское евклидово пространство, в то время как в метрике (50) такие сечения имеют особенность на сфере $r = r_g$, внутри которой сечение становится псевдоевклидовым.

3.3. Глобальное время в ОТО

В общей теории относительности все четыре координаты носят одинаково формальный характер. Если мы хотим перейти ко времени синхронной системы с $g^{00} = 1$ (но, возможно, в неинерциальных пространственных координатах при $V^i \neq 0$), нужно найти такую глобальную переменную $t(x^\alpha)$, для которой $g^{00} = 1$. Это стандартное преобразование компоненты метрики

$$\bar{g}^{00} = g^{\alpha\beta}\,\frac{\partial t}{\partial x^\alpha}\,\frac{\partial t}{\partial x^\beta} = 1 \tag{51}$$

оказывается уравнением Гамильтона–Якоби для траекторий движения свободно падающих пылинок (лабораторий).

В качестве поучительного примера построим систему глобального времени для метрики Керра.

Уравнение (51) в координатах Бойера–Линдквиста записывается следующим образом [2]:

$$\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{(r^2+a^2)^2}{\Delta} - a^2\sin^2\theta\right)\left(\frac{\partial t}{\partial\tau}\right)^2 - \frac{\Delta}{\rho^2}\left(\frac{\partial t}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial t}{\partial\theta}\right)^2 - \frac{1}{\Delta\sin^2\theta}\left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial\varphi}\right)^2 + \frac{4Mar}{\rho^2\Delta}\,\frac{\partial t}{\partial\tau}\,\frac{\partial t}{\partial\varphi} = 1, \tag{52}$$

где $\Delta = r^2 + a^2 - 2Mr$, $\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta$.

Так как коэффициенты уравнения не зависят от t и φ, то сопряженные им импульсы есть константы:

$$\tau = \varepsilon t + l\varphi + f(\theta, r)\,.$$

Условия при $r = 0$ и на бесконечности определяют

$$\tau = t \pm u(r)\,, \quad u(r) = \frac{\sqrt{2Mr(r^2+a^2)}}{\varDelta}\,. \tag{53}$$

Подстановка $\mathrm{d}t = \mathrm{d}\tau + u\,\mathrm{d}r$ изменяет компоненты метрики

$$\bar{g}^{00} = 1\,, \quad g^{0r} = V^r = \frac{\sqrt{2Mr(r^2+a^2)}}{\rho^2}$$

и приводит пространственное сечение $\tau = \mathrm{const}$ к метрике

$$\gamma_{rr} = \frac{\rho^2}{\varDelta} + \frac{2Mr(r^2+a^2)(2Mr-\rho^2)}{\rho^2\varDelta^2}\,,$$

$$\gamma_{r\varphi} = \frac{\sqrt{2Mr(r^2+a^2)}}{\rho^2}\,\frac{2Mar}{\varDelta}\sin^2\theta\,,$$

$$\gamma_{\theta\theta} = \rho^2\,, \quad \gamma_{\varphi\varphi} = \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mr}{\rho^2}\,a^2\,\sin^2\theta\right)\sin^2\theta$$

со всюду положительным детерминантом

$$\det(\gamma_{ij}) = \rho^4\sin^2\theta\,.$$

Эта метрика при $a = 0$ переходит в метрику Шварцшильда в глобальном времени (47) с плоским пространственным сечением.

3.4. Единственность инерциальной системы

С точки зрения ОТО относительно синхронной системы отсчета имеются два вопроса.

1. Существует ли *глобальная* синхронная система, т.е. существуют ли координаты, в которых условия синхронности ($g^{00} = 1$, $g^{0i} = 0$) выполняются во всем пространстве и во все времена?

2. Если такая система существует, то единственна ли она?

Не исключено, что можно сконструировать такую четырехмерную метрику $g^{ij}(x)$, для которой не существует единственного глобального решения уравнения Гамильтона–Якоби (51), и такой четырехмерный мир нельзя разделить на глобальное время и пространство. Однако с точки зрения теории Бьёрна этот (первый) вопрос отсутствует, так как изначально уравнения динамики компонент пространственной метрики уже сформулированы в абсолютном (глобальном) времени.

Однако второй вопрос — об единственности пространства (синхронной системы) — существует в обеих теориях.

Пусть уже имеется синхронная система с метрикой (38). Преобразования координат, зависящих от времени, $\tilde{x}^i = f^i(t,x)$, приводят к неинерциальной системе с полем абсолютных скоростей $V^i = \dot{x}^i$, но время при этом остается неизменным. Однако можно попытаться перейти ко времени τ какой-то движущейся системы частиц, сохранив синхронность. Локально такое преобразование существует (см. [2]):

$$\tau = \tau(t,x), \quad \dot{\tau}^2 - \gamma^{ij}\tau_{,i}\,\tau_{,j} = 1, \quad \dot{\tau}\dot{x}^j - \gamma^{jk}\,\frac{\partial\tau}{\partial x^k} = 0\,.$$

Существуют четырехмерные пространства, где такие преобразования допустимы глобально, как, например,

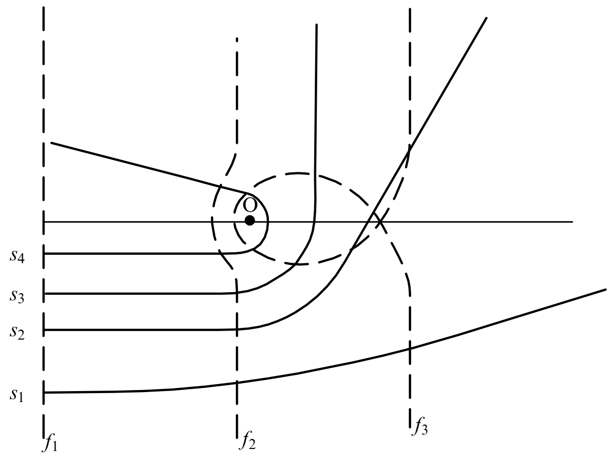

Рис 1. Искажение фронта одновременности тяготеющей массой.

пространство Минковского в прямоугольных координатах, остающееся синхронным при любых преобразованиях Лоренца. Здесь ситуация такая же, как и с группами движения: большинство пространств подобных глобальных преобразований не допускает.

Рассмотрим пространство Шварцшильда–Пенлеве с метрикой (47). Синхронизированные лаборатории в этой метрике на бесконечности покоятся. Перейдем теперь к системе равномерно движущихся на бесконечности (с малой скоростью) часов, имеющих до прохождения притягивающего центра, как показано на рисунке, плоский фронт f_1, на котором время всех часов одинаково. Часы, проходящие мимо центра ($r \gg r_g = 2kM/c^2$), движутся по гиперболам, повернутым в сторону тяготеющей массы. Угол поворота асимптоты после прохождения центра растет с уменьшением прицельного расстояния (для траекторий s_1, s_2, s_3, s_4), что приводит к закручиванию фронта потока часов после прохождения притягивающего центра O и, как следствие, — к неоднозначности определения времени по часам, движущимся таким образом (фронт синхронности f_3).

Видимо, именно это и имел в виду Бьёрн, утверждая, что гравитационный потенциал отменяет равноправие равномерно движущихся систем, оставляя в качестве инерциальной только одну систему.

3.5. Динамические свойства пространства

Описание динамики пространства в теории Бьёрна действием (30) с точки зрения динамической теории полей приравнивает его к обычному непрерывному полю.

Рассмотрим пример.

В сферическую форму залили расплавленный чугун и интенсивно охлаждают ее поверхность. В застывшем чугунном шаре возникнут внутренние напряжения. Это значит, что после разрезания его на мелкие части их невозможно будет снова сложить в шар без восстановления напряжений между соседними частями, без деформации этих частей. С точки зрения дифференциальной геометрии это означает, что вещество шара имеет внутреннюю кривизну.

Если бы такой шар удалось вложить в область пространства, имеющую точно такое же распределение кривизны, как и в самом шаре, то отдельные части соединились бы без всякого напряжения. Напряжения возникают из-за несоответствия внутренней кривизны вещества шара и кривизны пространства, в которое этот шар вложен.

Если бы пространство не обладало динамическими свойствами, а играло бы только роль "меток", то оно автоматически подстроило бы свою структуру под структуру кривизны вещества напряженного шара. Однако существование внутренних напряжений не только в нашем виртуальном шаре, но и в тысячах уже разрушившихся от внутренних напряжений реальных изделий, говорит о том, что с энергетической точки зрения пространство предпочитает минимально изменять свою кривизну под воздействием внешних тел. Математически это выражается в формуле Бьёрна – Ли для гравитационного действия (30), где в потенциальной энергии перед кривизной пространства стоит очень большой численный множитель $c^4/(16\pi k)$. Это означает, что малейшие отклонения от евклидова пространства требуют огромных затрат энергии.

Наше пространство (почти) евклидово не из-за красоты и изящества евклидовой геометрии, а вследствие того, что такое пространство имеет минимальную потенциальную энергию.

4. Заключение

Н. Бьёрн представил нам совершенно неожиданную с точки зрения XX века структуру пространства и времени. Нигде в своих работах он даже не помышляет о преобразовании времени. Время у него единое, ньютоново, как это и должно было быть в XIX веке.

Его теория диаметрально противоположна ОТО. Если Эйнштейн надеялся с помощью гравитации установить равноправие ускоренно и равномерно движущихся наблюдателей, то Бьёрн, наоборот, пришел к выводу, что гравитационное поле выделяет единственную инерциальную систему.

В обеих теориях физической основой является *локальный принцип эквивалентности*. Инерциальное пространство Бьёрна реализуется в ОТО в синхронной системе отсчета. Время в этой системе является *абсолютным временем Ньютона*. Вследствие кривизны пространства никаких других инерциальных систем не существует.

В теории Бьёрна пространство оказывается физическим объектом, имеющим свою динамику, участвующим почти на равных в динамике других полей, в то время как в ОТО вся динамика спрятана за четырехмерную геометрию.

Теория Бьёрна и ОТО в синхронной системе отсчета имеют одинаковое выражение для действия, однако в теории Бьёрна варьируются девять величин: шесть компонент пространственной метрики и три компоненты абсолютной скорости, в то время как в ОТО — все 10 компонент четырехмерной метрики. Если и в ОТО варьировать только девять упомянутых компонент, то получается теория, слегка отличная от ОТО, — разработанная автором *теория глобального времени*, основными отличиями которой от ОТО являются глобальное время и ненулевой гамильтониан. Но это уже не предмет *истории физики*.

Автор глубоко признателен Анне Флоренс, правнучке Бьёрна и русско-норвежской переводчице по профессии, которая не только познакомила нас с подшивкой журнала *Archiv for Naturvidenskab*, но и помогла отыскать все работы Бьёрна и перевела их.

5. Приложение. Список работ Нильса Бьёрна [1]

1. О плоском течении вязкой жидкости (1888).
2. О вихрях в вязкой жидкости (1889).
3. Инерциальная система внутри мяча (1891).
4. Всеобщая инерциальная система (1894).
5. Движение тел в инерциальной системе (1894).
6. Световой луч в поле тяготения (1895).
7. Изменение частоты света в поле тяготения (1896).
8. Динамика космоса (1897).
9. Динамика пространства (совместно с Софусом Ли) (1899).
10. Уравнения электродинамики в неинерциальной системе (1900).
11. Гравитационная волна (1901).
12. Динамика сферического мира (1903).
13. Движение жидкости в поле тяготения (1904).
14. О вращении перигелия Меркурия (1909).

Список литературы

1. Einstein A *Ann. Phys.* (Leipzig) **35** 898 (1911) [Перевод на русск. яз. в кн.: Эйнштейн А *Собрание научных трудов* Т. 1 (М.: Наука, 1966) с. 165]
2. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Наука, 1988)
3. Мизнер Ч, Торн К, Уилер Дж *Гравитация* (М.: Мир, 1977) [Misner C W, Thorne K S, Wheeler J A *Gravitation* (San Francisco: W.H. Freeman, 1973)]
4. Arnowitt R, Deser S, Misner C W *Phys. Rev.* **116** 1322 (1959)
5. Painlevé P *C.R. Acad. Sci.* (Paris) **173** 677 (1921)

[1] Все работы опубликованы в рукописном журнале *Archiv for Naturvidenskab*

Gravity and absolute space. The work of Niels Bjorn (1865 – 1909)

D.E. Burlankov
N.I. Lobachevskiĭ Nizhniĭ Novgorod State University
pr. Gagarina 23, 603950 Nizhniĭ Novgorod, Russian Federation
Tel./Fax (7-832) 65-66 15
E-mail: *bur@phys.unn.runet.ru*

Nearly 20 years before Einstein N Bjorn developed a theory of gravitation based on what is now known as the *equivalence principle* — but naturally without invoking the ideas of the special theory of relativity. Bjorn predicted virtually all the effects considered to provide tests for the general theory of relativity, his calculating formulas for the effects being exactly identical to those of GRT. An advocate of the absolute space concept, Bjorn described gravitational field in terms of the *field of absolute velocities* of inertial space. The ideas of GRT were only called for describing the perihelion advancement of Mercury. The reason for the identity of Bjorn's and GRT predictions is discussed.

PACS numbers: **01.65.+g, 04.20.–q**
Bibliography — 5 references
Received 1 October 2003, revised 17 December 2003