

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Устойчивость и хаос в двумерных случайно-неоднородных средах и LC-цепочках

А.М. Дыхне, А.А. Снарский, М.И. Женировский

Рассмотрен ряд физических (флуктуация и поглощение) и математических (устойчивость) вопросов, касающихся распределения электрических полей в двумерных самодуальных средах, в частности, в средах на пороге протекания и в LC-цепочках — фильтрах низких частот. Обсуждается парадокс конечного поглощения энергии в таких средах, составленных из непоглощающих элементов.

PACS numbers: 03.50.De, 05.45.Ac, 41.20.-q, 64.60.Ak, 84.32.-y

Содержание

1. Введение (887).
 2. Двухфазные двумерные среды с дуальным расположением фаз (888).
 3. Иерархическая реализация D-среды (888).
 4. Иерархическая D-сетка (890).
 5. Дискуссия (891).
 6. Лестничный фильтр (LC-цепочка) (892).
- Список литературы (894).

1. Введение

В этой заметке мы рассмотрим два физических явления в электродинамике неоднородных сред, привлекающих внимание в последнее время. Одно из них — аномально высокие пространственные флуктуации локальных электрических полей в случайно-неоднородных двумерных средах на пороге протекания. Второе — аномально высокое поглощение энергии в таких средах. И в том, и в другом случае речь идет о двумерно-неоднородных двухфазных средах вблизи и на самом пороге протекания, т.е. при критической концентрации фазы p_c , в условиях, когда реальная часть локальной проводимости

сти фаз мала (в идеальном случае равна нулю), а мнимые части имеют разные знаки. Можно сказать, что среда состоит из индуктивностей и емкостей, характеризующихся магнитной и диэлектрической проницаемостью. Одним из примеров таких сред являются пленки, состоящие из металлических островков, разделенных диэлектрическими областями. Металлические части пленки обладают индуктивностью, а диэлектрические области (часто это просто воздух) — емкостью. В работе [1] впервые было получено точное решение двумерной задачи об эффективной проводимости двухфазной среды (пленки) при равной концентрации фаз и их в среднем геометрически эквивалентном расположении. Ограничения на значения проводимости фаз при этом не налагались. В частности, одна из фаз может представлять собой идеальный проводник — проводимость имеет только мнимую отрицательную часть (индуктивность), а вторая — идеальную емкость (проводимость имеет только мнимую положительную часть). Согласно [1] проводимость такой среды в целом является действительной, т.е. среда, "составленная из мнимых сопротивлений, не приводящих к диссипации энергии, обладает вещественным эквивалентным сопротивлением, т.е. поглощает энергию". Этот парадокс разрешается, если учесть, что "энергия источника тратится на резонансное возбуждение локальных колебаний. При этом к истинной (конечной) диссипации приведет наличие в системе как угодно малого поглощения" [1]. При конечных размерах, меньших корреляционного радиуса, в таких средах наблюдаются гигантские флуктуации неоднородности локальных полей (см., например, [2–4] и обзор [5]). Упомянутый выше парадокс — "появление" вещественной части сопротивления в среде, состоящей из элементов с чисто мнимой частью сопротивления [1], присутствует также в простейшей теории цепей в теории лестничного фильтра (LC-цепочки) и продолжает привлекать внимание до последнего времени [6]. В учебниках по общей физике можно встретить диаметрально противоположные мнения относительно существования

А.М. Дыхне. Государственный научный центр "Троицкий институт инновационных и термоядерных исследований" 142092 Московская обл., г. Троицк, ул. Пушкиновых 1, Российская Федерация
Тел. (095) 334-51-58
E-mail: alexander.dykhne@algodign.com
А.А. Снарский, М.И. Женировский. Национальный технический университет Украины "Киевский политехнический институт" 03056 Киев, пр. Победы 37, Украина
Тел. (038) 044-241-76-49
E-mail: phys@ln.ua, cbikiev@public.ua.net

Статья поступила 15 мая 2003 г.,
после доработки 14 января 2004 г.

вещественной части сопротивления лестничного фильтра в определенном диапазоне частот и, как следствие, противоположные объяснения работы такого фильтра.

В настоящей заметке мы вначале, в разделе 2, рассмотрим проблему определения эффективной проводимости в двухфазной двумерной среде на пороге протекания в случае малой или нулевой диссипативной части проводимости фаз. В разделе 3 мы покажем на примере одной из реализаций построения таких сред наличие детерминированного хаоса. В разделе 4 рассмотрим поведение проводимости сеточной иерархической реализации таких сред. В конце, в разделе 6, мы кратко обсудим задачу об импедансе лестничной цепи.

2. Двухфазные двумерные среды с дуальным расположением фаз

В работе [1] для двухфазных сред с геометрически эквивалентным в среднем расположением фаз получено точное выражение для эффективной проводимости σ_e :

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2}. \quad (1)$$

Фазы с проводимостями σ_1 и σ_2 в таких средах дуальны — взаимная замена $\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2$ не приводит к изменению эффективной проводимости σ_e . К таким дуальным средам, назовем их для краткости D-средами, относятся и двумерные случайно-неоднородные среды на пороге протекания $p_c = 0.5$. Речь идет, конечно, о том случае, когда для случайно-неоднородной среды можно ввести понятие эффективной проводимости, в частности, при размерах среды $L > \xi$, где ξ — корреляционная длина, т.е. такая длина, на которой происходит самоусреднение, в данном случае эффективной проводимости. Под самоусреднением понимается, что при вычислении для данной случайной реализации какой-либо величины, характеризующей систему в целом, не требуется дополнительного усреднения по реализациям.

Выражение (1) получено на основе впервые введенных в [1] преобразований симметрии

$$\tilde{\mathbf{j}} = A \mathbf{n} \times \mathbf{E}, \quad \tilde{\mathbf{E}} = A^{-1} \mathbf{n} \times \mathbf{j}, \quad (2)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор нормали к плоскости среды, \mathbf{j} и \mathbf{E} — плотность тока и напряженность поля в "основной" среде соответственно, а $\tilde{\mathbf{j}}$ и $\tilde{\mathbf{E}}$ — в дуальной к ней (рис. 1).

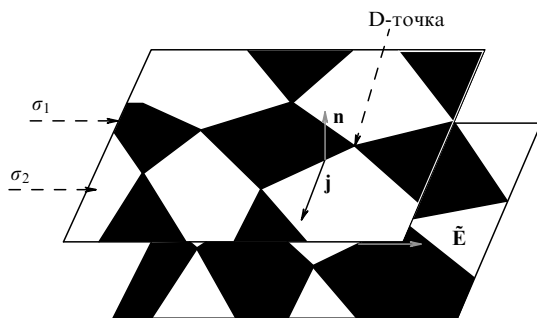


Рис. 1. Двухфазная дуальная среда. Вверху "основная" среда, внизу — дуальная к ней, \mathbf{n} — единичный вектор нормали. Штриховой стрелкой указана одна из D-точек. Областям с проводимостью σ_1 (σ_2) в "основной" среде соответствуют в дуальной среде области с σ_2 (σ_1).

Константа A определяется из требования равенства $\tilde{\sigma}_e = \sigma_e$, $A^2 = \sigma_1 \sigma_2$, и, конечно, поля и токи в "основной" и дуальной средах связаны между собой согласно закону Ома $\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{r})\mathbf{E}$, $\tilde{\mathbf{j}} = \tilde{\sigma}(\mathbf{r})\tilde{\mathbf{E}}$. Из усредненных по объему преобразований (2)

$$\langle \tilde{\mathbf{j}} \rangle = A \mathbf{n} \times \langle \mathbf{E} \rangle, \quad \langle \tilde{\mathbf{E}} \rangle = A^{-1} \mathbf{n} \times \langle \mathbf{j} \rangle, \quad (3)$$

где $\langle \dots \rangle$ — среднее по объему с характерным размером, бóльшим корреляционной длины, следует $\sigma_e = A$, что с учетом $A^2 = \sigma_1 \sigma_2$ дает (1).

В случае, когда обе фазы имеют чисто мнимые проводимости с разными знаками,

$$\sigma_1 = -iy, \quad \sigma_2 = ix, \quad x > 0, \quad y > 0, \quad (4)$$

где $x = \omega c$, $y = 1/\omega l$, а c и l — удельные емкость и индуктивность материала, соответственно измеряемые фарадами и генри на 1 м^{-3} , из (1) следует:

$$\sigma_e = \sqrt{xy} = \sqrt{\frac{c}{l}}. \quad (5)$$

Согласно (5), среда, состоящая из бездиссипативных элементов ($\text{Re } \sigma_1 = \text{Re } \sigma_2 = 0$), является диссипативной с $\text{Re } \sigma_e > 0$, в чем и состоит парадокс.

3. Иерархическая реализация D-среды

Рассмотрим одну из возможных реализаций D-среды, получаемую при помощи так называемой процедуры перемешивания [7–10]. На первом шаге (рис. 2а) среда "собирается" из полосок с толщиной d_1 и d_2 и проводимостью σ_1 и σ_2 , причем, конечно, $p/d_1 = (1-p)/d_2$, где p — концентрация фазы с проводимостью σ_1 . Устремляя толщину полосок к нулю, т.е. гомогенизируя среду, получаем "монокристалл" (рис. 2б) с главными компонентами тензора проводимости $\sigma_{\parallel}^{(1)}$ и $\sigma_{\perp}^{(1)}$,

$$\sigma_{\parallel}^{(1)} = p\sigma_1 + (1-p)\sigma_2, \quad \sigma_{\perp}^{(1)} = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{(1-p)\sigma_1 + p\sigma_2}. \quad (6)$$

Затем, нарезая вдоль и поперек этого "монокристалла" полоски толщиной d_1 и d_2 соответственно, набираем из них новый "монокристалл" (рис. 2в), главные компоненты тензора проводимости которого равны $\sigma_{\parallel}^{(2)}$ и $\sigma_{\perp}^{(2)}$. Повторяя описанную процедуру n раз замечаем, что на каждом шаге

$$\sigma_{\parallel}^{(n+1)} = p\sigma_{\parallel}^{(n)} + (1-p)\sigma_{\perp}^{(n)}, \quad \sigma_{\perp}^{(n+1)} = \frac{\sigma_{\parallel}^{(n)} \sigma_{\perp}^{(n)}}{p\sigma_{\parallel}^{(n)} + (1-p)\sigma_{\perp}^{(n)}}. \quad (7)$$

Так как итерационная процедура (7) обладает инвариантом I ,

$$I = \sigma_{\parallel}^{(n+1)} \sigma_{\perp}^{(n+1)} = \sigma_{\parallel}^{(n)} \sigma_{\perp}^{(n)} = \sigma_1 \sigma_2 \frac{p\sigma_1 + (1-p)\sigma_2}{(1-p)\sigma_1 + p\sigma_2}, \quad (8)$$

то первое уравнение в (7) можно записать в виде

$$\sigma_{\parallel}^{(n+1)} = p\sigma_{\parallel}^{(n)} + (1-p) \frac{I}{\sigma_{\parallel}^{(n)}}. \quad (9)$$

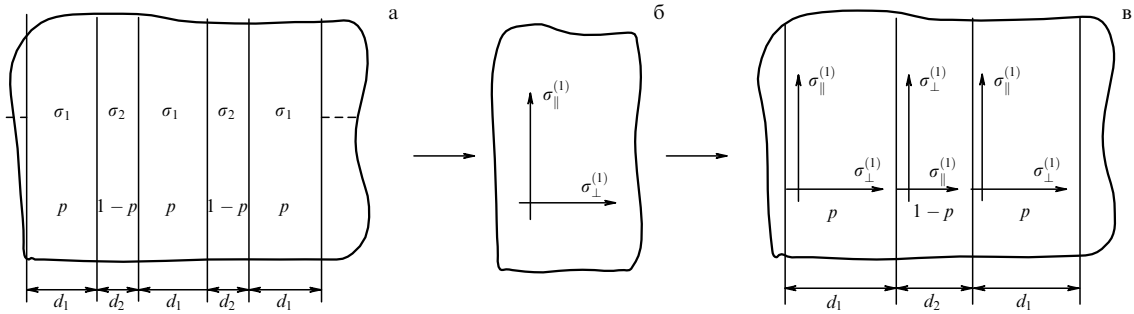


Рис. 2. Процедура последовательного построения (перемешивания) двухфазной иерархической среды с произвольной концентрацией фаз. На первом этапе (а) среда состоит из полосок первой (σ_1) и второй (σ_2) фаз с концентрациями p и $1-p$; после гомогенизации ($d_{1,2} \rightarrow 0$) представляет собой "монокристалл" (б) с главными значениями тензора проводимости $\sigma_{\parallel}^{(1)}$ и $\sigma_{\perp}^{(1)}$. Следующий этап (в) состоит в гомогенизации среды, составленной из полосок, вырезанных из полученного ранее "монокристалла".

В "обычном" случае при $\text{Im } \sigma_1 = \text{Im } \sigma_2 = 0$ процедура перемешивания быстро сходится к изотропной среде с

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2} \sqrt{\frac{p\sigma_1 + (1-p)\sigma_2}{(1-p)\sigma_1 + p\sigma_2}}. \quad (10)$$

При концентрации фазы $p = p_c = 1/2$ выражение (10) сводится к (1), а итерационный процесс представляет собой хорошо известный из прикладной математики

способ вычисления квадратного корня по методу Ньютона (рис. 3а). На врезке рис. 3а показано, как изменяется $\sigma_{\parallel}^{(n)}$ в ходе итерационной процедуры. В случае проводимостей с нулевой действительной частью и мнимыми частями с одинаковыми знаками (например, среда состоит из двух сред с разными диэлектрическими проницаемостями) с точностью до обозначений все остается без изменений. А вот в случае разных знаков мнимых частей, т.е. при $\text{Re } \sigma_1 = \text{Re } \sigma_2 = 0$ и $\text{Im } \sigma_1 \text{Im } \sigma_2 < 0$, ситуация меняется кардинальным образом (рис. 3б). Учитывая, что $\text{Re } \sigma_{\perp}^{(n)} = \text{Re } \sigma_{\parallel}^{(n)} = 0$, и вводя аналогичные (4) обозначения для $\sigma_{\perp}^{(n)}$ и $\sigma_{\parallel}^{(n)}$:

$$\sigma_{\perp}^{(n)} = -iY_n, \quad \sigma_{\parallel}^{(n)} = iX_n, \quad \text{Im } X_n = \text{Im } Y_n = 0, \quad (11)$$

для инварианта I получаем

$$I = xy \frac{py - (1-p)x}{(1-p)y - px}, \quad (12)$$

а вместо итерационного процесса (9) — итерационный процесс

$$X_{n+1} = pX_n - (1-p) \frac{I}{X_n}, \quad (13)$$

неподвижная точка X^* которого равна

$$X^* = \pm \sqrt{-I}. \quad (14)$$

По определению (11) $\text{Im } X_n = 0$, следовательно, неподвижная точка X^* существует только при $I < 0$, что возможно при удовлетворении любой из двух систем неравенств (рис. 4.)

$$\begin{cases} py > (1-p)x \\ (1-p)y < px \end{cases}, \quad \begin{cases} py < (1-p)x \\ (1-p)y > px \end{cases}. \quad (15)$$

Заштрихованным областям на рис. 4 соответствует пустое множество решений систем (15) — неподвижной точки нет.

Таким образом, полученная при $p = 1/2$ среда, с одной стороны, геометрически является D-средой, а с другой стороны, как видно из рис. 4, — неподвижная точка отсутствует. Записав в этом случае отображение (9) в виде $N(z) = (z - I/z)/2$, $\text{Im } I = 0$, $\text{Re } I > 0$, можно показать [11], что его множество Жюлиа J_N , разделяющее

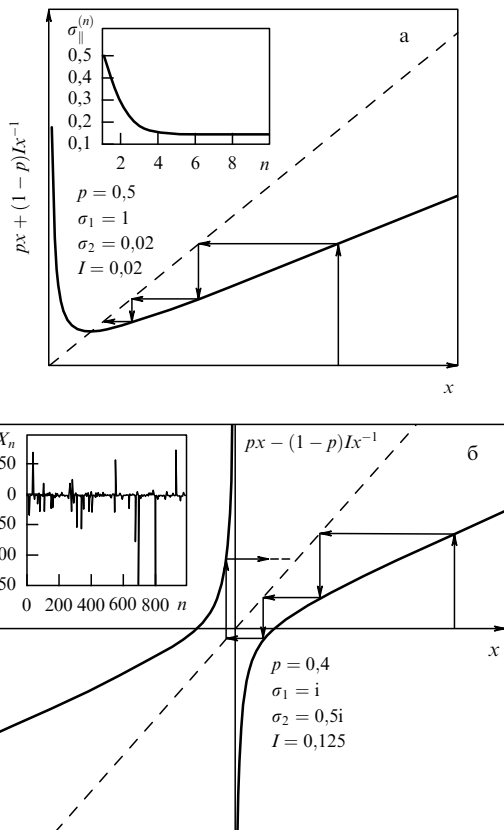


Рис. 3. (а) Одномерное отображение $x \rightarrow px + (1-p)/x$, $I = 0,02$ ($\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 0,02$) процесса (9) с концентрацией $p = 1/2$ при наличии неподвижной точки. Видна быстрая сходимость к $\sqrt{I} = \sqrt{0,02} = 0,141$. (б) Одномерное отображение $x \rightarrow px - (1-p)/x$, $I = 0,125$, процесса (13) для концентрации $p = 0,4$ и $\sigma_1 = i, \sigma_2 = -0,5i$; на врезке показан итерационный процесс для этих параметров.

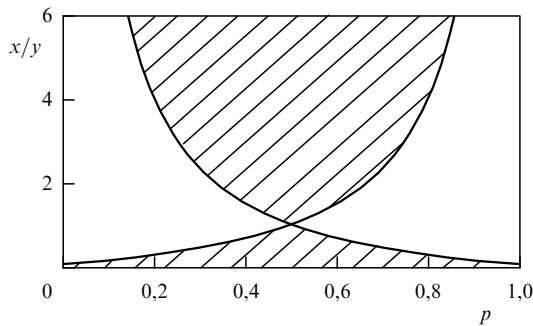


Рис. 4. Области неустойчивости (заштрихованы) процедуры перемешивания (13) в зависимости от концентрации p первой фазы и отношения проводимостей фаз x/y .

бассейны притяжения устойчивых неподвижных точек $\pm\sqrt{I}$, совпадает с мнимой осью. Отображение $N(z)$ сопряжено с отображением $R(u) = u^2$, получаемым заменой $u = (z + \sqrt{I}) / (z - \sqrt{I})$. При этом мнимая ось (множество Жюлиа) переходит в единичную окружность, динамика на которой задается отображением $r(\theta) = 2\theta \text{ mod } 2$. Последнее, как хорошо известно [11, 12], порождает хаотическую динамику.

Следовательно, как видно из вышеизложенного, при попадании параметров среды в заштрихованную область итерационный процесс не сходится, а при $p = 1/2$ имеет место строго детерминированный хаос. В частности, это означает, что в такой среде отсутствует самоусреднение, т.е. корреляционный радиус стремится к бесконечности.

4. Иерархическая D-сетка

Обсудим еще одну реализацию D-среды — иерархическую D-сетку (рис. 5). Введя обозначения для начального (нулевого) этапа построения

$$R_0(r_x) = \frac{r_x r_1 + 2r_1 r_2 + r_x r_2}{r_1 + 2r_x + r_2}, \tag{16}$$

рассмотрим несколько разных иерархических сеток $R_n(r_0)$, $R_n(r_1)$ и $R_n(r_2)$, различающихся одним единственным сопротивлением r_x , находящимся в "центре" сетки. Как видно из рис. 5, итерационные процессы для этих трех сеток могут быть записаны следующим образом: для $R_{n+1}(r_0)$ как

$$R_{n+1}(r_0) = \frac{R_n(r_0) R_n(r_1) + 2R_n(r_1) R_n(r_2) + R_n(r_0) R_n(r_2)}{R_n(r_1) + 2R_n(r_0) + R_n(r_2)} \tag{17}$$

и аналогично для $R_n(r_1)$ и $R_n(r_2)$ с заменой в (17) r_0 на r_1 и r_2 соответственно. Сетка $R_n(r_0)$ при $r_x = r_0 = \sqrt{r_1 r_2}$ для любого номера n является D-сеткой, ее сопротивление точно равно $r_0 = \sqrt{r_1 r_2}$. При $\text{Im } r_1 = \text{Im } r_2 = 0$, как и должно быть,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(r_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(r_2) = \sqrt{r_1 r_2}, \quad \text{Im } r_1 = \text{Im } r_2 = 0, \tag{18}$$

так как с точностью до одного сопротивления (на фоне $n \rightarrow \infty$) сетки $R_n(r_1)$ и $R_n(r_2)$ также являются D-сетками.

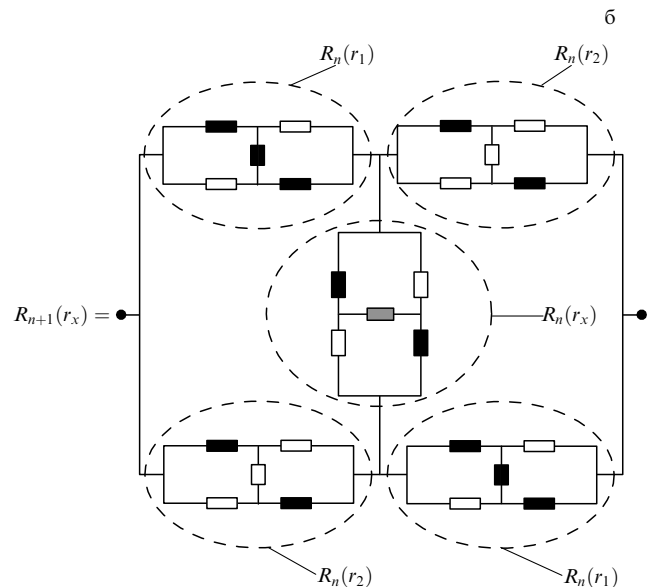
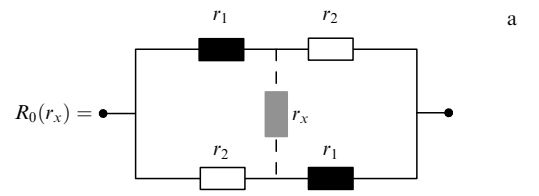


Рис. 5. Иерархическая D-решетка. Начальный (а) и n -й (б) этапы построения.

В случае $\text{Re } r_1 = \text{Re } r_2 = 0$ и $\text{Im } r_1 \text{Im } r_2 < 0$ сетки $R_n(r_1)$ и $R_n(r_2)$ также отличаются от D-сетки только одним сопротивлением, однако теперь неподвижной устойчивой точки у преобразования

$$\begin{aligned} R_{n+1}(r_1) &= R_n(r_1) \frac{R_n(r_1) + 3R_n(r_2)}{3R_n(r_1) + R_n(r_2)}, \\ R_{n+1}(r_2) &= R_n(r_2) \frac{3R_n(r_1) + R_n(r_2)}{R_n(r_1) + 3R_n(r_2)} \end{aligned} \tag{19}$$

нет, и поведение $R_n(r_1)$ и $R_n(r_2)$ хаотично. Если при $\text{Im } r_1 \text{Im } r_2 < 0$ сопротивление r_x положить равным действительному сопротивлению, $r_x = r_0 = \sqrt{r_1 r_2}$, т.е. D-сопротивлению, то такая замена одного сопротивления в сколь угодно большой сетке принципиально изменит ее поведение — теперь неподвижная устойчивая точка существует:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(r_0) = r_0 = \sqrt{r_1 r_2}, \quad \text{Im } r_1 \text{Im } r_2 < 0. \tag{20}$$

Заметим, что если в качестве r_x взять действительное сопротивление, но не равное D-сопротивлению, т.е. $r_x \neq r_0 = \sqrt{r_1 r_2}$, то последовательность $R_n(r_x, \text{Im } r_x = 0)$ опять начинает хаотически колебаться, но вокруг "правильного" значения $r_0 = \sqrt{r_1 r_2}$, причем среднее значение $\langle R_n(r_x) \rangle$ с ростом n стремится к r_0 :

$$\langle R_n(r_x) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{1+N} \sum_{n=0}^N R_n(r_x) \rightarrow r_0 = \sqrt{r_1 r_2}. \tag{21}$$

5. Дискуссия

В работе [13] предложен еще один подход к проблеме устойчивости в D-средах. Из соотношений (3) и определения эффективной проводимости как величины, связывающей средние по объему поля и токи, следует соотношение $\tilde{\sigma}_e = A^2/\sigma_e$ [1]. Это соотношение в работе [13] предложено интерпретировать как преобразование $f(Z) = A^2/Z$ в комплексной области, неподвижной (устойчивой или неустойчивой) точкой $Z^* = \pm A$ которого является эффективное значение. Критерием устойчивости неподвижной точки Z^* согласно теореме о сжатых отображениях Банаха (см., например, [14], с. 175) является неравенство $|f'(Z^*)| < 1$. В рассматриваемом случае — $\text{Im } \sigma_1 \text{Im } \sigma_2 < 0$ — имеет место $|f'(Z^*)| = 1$, т.е. Z^* не является устойчивой неподвижной точкой. В самом деле, при любом Z , как угодно близком к Z^* , выполняется $f(f(Z)) = Z$, т.е. отображение не сходится к Z^* — имеет место не устойчивый центр, а фокус. В работе [13] преобразование $Z \rightarrow f(Z) = A^2/Z$ сначала записывается в конечно-разностном виде

$$Z_{n+1} - Z_n = f(Z_n) - Z_n = F(Z_n), \tag{22}$$

после чего переписывается в виде дифференциальных уравнений (для действительной и мнимой частей (22)) по независимой переменной n . Если бы такой переход был корректен, то согласно теории устойчивости дифференциальных уравнений (см., например, [14], с. 29) выполнялся бы критерий устойчивости $\text{Re}(F'(Z^*)) < 0$, так как в рассматриваемом случае $\text{Re}(F'(Z^*)) = -2$. Однако переход к непрерывному случаю некорректен, что следует хотя бы из равенства $Z_{n+2} = Z_n$.

Для сеточной реализации D-сред (имеются в виду обычные, а не иерархические сетки, рассмотренные в разделе 4) отсутствие определенного значения σ_e в конечной сетке при $\text{Im } \sigma_1 \text{Im } \sigma_2 < 0$ впервые было отмечено в [15]. Согласно [15] при значениях концентрации выше p_c существует непрерывный путь от одного контакта к другому (из "−∞" в "∞") как "слева направо", так и "снизу вверх" по связям, которые представляют собой индуктивность. Однако эффективная проводимость среды, в зависимости от значений проводимостей элементов сетки, может быть как больше, так и меньше нуля, т.е. представлять собой как емкость, так и индуктивность. В сеточных средах при концентрации, не равной пороговой, соотношение взаимности $\sigma_e \tilde{\sigma}_e = A^2$ [1] означает, что если эффективная проводимость "основной" среды имеет емкостный тип ($\text{Im } \sigma_e > 0$), то взаимной среды — индуктивный ($\text{Im } \sigma_e < 0$). При концентрации, стремящейся к пороговой, ничего не изменится и, в конечном счете, эффективные проводимости "основной" и дуальной сред остаются с разными знаками. С другой стороны, в сеточных средах на пороге протекания, если они являются D-средами, всегда присутствует хотя бы один элемент (связь) с проводимостью, не равной ни проводимости первой фазы, ни проводимости второй (рис. 6). Проводимость этой D-связи равна $\sqrt{\sigma_1 \sigma_2}$ (см. подробности в [15, 16]). В континуальном двухфазном случае D-сред эти связи вырождаются в точки; на рис. 1 стрелкой указана одна из таких D-точек. Если такая D-связь отсутствует, то при $\text{Re } \sigma_{1,2} = 0$ и $\text{Im } \sigma_1 \text{Im } \sigma_2 < 0$ сетка не будет дуальной, в частности, кондактансы "слева направо" и "снизу вверх" будут иметь разные знаки — вдоль одного

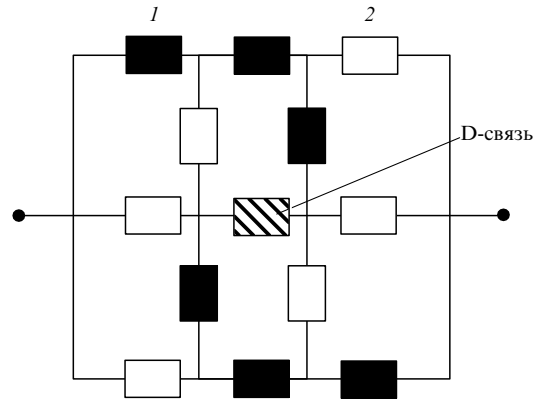


Рис. 6. Одна из возможных реализаций D-сетки конечного размера [15]. Черным цветом обозначены сопротивления z_1 , белым — z_2 . В центре находится D-связь, которая для удовлетворения сеточного варианта преобразований (2), (3) и условия $\tilde{\sigma}_e = \sigma_e$ должна иметь сопротивление, равное $\sqrt{z_1 z_2}$. D-связь (сопротивление) является сеточным аналогом D-точек в континуальном случае (см. рис. 1).

направления среда будет "конденсатором", а вдоль другого — "емкостью". А если D-связь присутствует, то среда не является, строго говоря, D-средой, состоящей из двух фаз. Влияние этой связи должно быть тем меньше, чем больше размер среды. Последнее оказывается верным при $\text{Im } \sigma_1 \text{Im } \sigma_2 < 0$ только для случая $\text{Re } \sigma_{1,2} \neq 0$.

Поясним теперь, каким образом в D-среде при $\xi \rightarrow \infty$ и $\text{Re } \sigma_{1,2} = 0$ появляется поглощение, т.е. действительное значение эффективной проводимости. Ответ заключается в том, что $\xi \rightarrow \infty$ и существуют флуктуации проводимости с ненулевой действительной частью. Легко убедиться, что добавленная к σ_1 или σ_2 как угодно малая действительная часть делает рассмотренный в разделе 3 итерационный процесс (13) устойчивым. Этот процесс теперь сходится к действительному значению

$$\begin{aligned} \sqrt{\sigma_1 \sigma_2} &= \sqrt{(\text{Re } \sigma_1 + i \text{Im } \sigma_1)(\text{Re } \sigma_2 + i \text{Im } \sigma_2)} \approx \\ &\approx \sqrt{-\text{Im } \sigma_1 \text{Im } \sigma_2} \end{aligned}$$

(в котором можно пренебречь малыми "затравочными" действительными добавками). Из рисунка 7 видно, как малые флуктуации выводят фазовую точку (в пространстве $\{\text{Re } \sigma - \text{Im } \sigma\}$) с оси $\text{Im } \sigma$, где она совершала хаотические скачки (рис. 3б), на траекторию, сходящуюся к действительной оси. Таким образом, имеются одновременно два предельных перехода $\xi \rightarrow \infty$ и $\text{Re } \sigma_{1,2} \rightarrow 0$, причем их нельзя менять местами. При конечных размерах среды будет происходить конкуренция между числом элементов (связи, размер среды) и величиной действительной части проводимости. Если число элементов "проигрывает", то в среде нет самоусреднения и имеет место данная случайная фрактальная реализация (напомним, что на пороге протекания среды обладают фрактальной структурой) [17, 18]. В такой, в среднем неоднородной среде, естественно, существуют большие пространственные флуктуации, в том числе джоулева тепловыделения, поглощения, высших моментов распределения токов и т.п. [2–5].

Разумеется, для количественного расчета распределения локальных полей и их моментов необходимы более рафинированные методы вычислений. В работе [5] показано, что на сетке с чисто мнимыми проводимостями

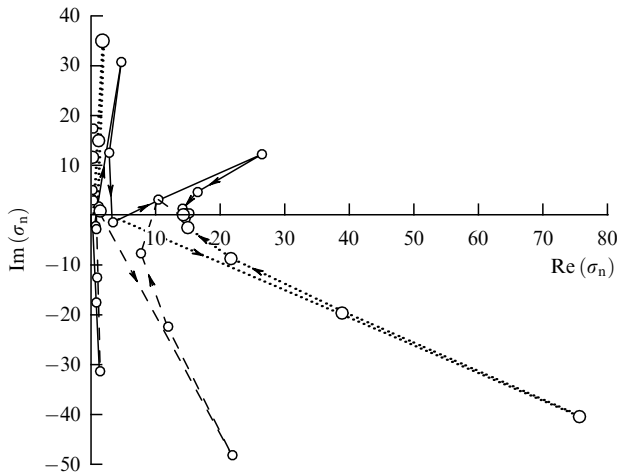


Рис. 7. "Фазовые" траектории итерационного процесса (9) в пространстве $\{\text{Im } \sigma - \text{Re } \sigma\}$ при малых действительных "затравочных" частях проводимости фаз и концентрации $p = 0,5$. Штриховая ломаная соответствует $\sigma_1 = 0,038 - 5i$, $\sigma_2 = 0,1 + 40i$; сплошная — $\sigma_1 = 0,1 - 10i$, $\sigma_2 = 0,1 + 20i$; пунктирная — $\sigma_1 = 0,056 - 6,667i$, $\sigma_2 = 0,1 + 30i$. Фазовые траектории быстро сходятся к действительной оси, а именно к $\sqrt{\sigma_1 \sigma_2} = \sqrt{(\text{Re } \sigma_1 + i \text{Im } \sigma_1)(\text{Re } \sigma_2 + i \text{Im } \sigma_2)} \approx \sqrt{-\text{Im } \sigma_1 \text{Im } \sigma_2} \approx 14,14$, при этом можно пренебречь малыми "затравочными" частями в начальных значениях проводимости.

связей задача о распределении потенциала совпадает с задачей о локализации Андерсона. Небольшую действительную добавку к мнимой части проводимости металлической фазы можно учесть в рамках теории возмущений. При таком подходе была, в частности, вычислена корреляционная длина, которая оказалась пропорциональной $1/\sqrt{\text{Re } \sigma_1}$ (для двумерного случая). Таким образом, в случае чисто мнимых фаз, как следует и из вышеприведенных рассуждений, корреляционная длина расходитя: $\xi(\text{Re } \sigma_1 \rightarrow 0) \rightarrow \infty$.

6. Лестничный фильтр (LC-цепочка)

Обратимся теперь к хорошо известной из классического курса общей физики задаче об импедансе LC — лестничной цепи (рис. 8). Удивительно, что даже в "канонических" учебниках по курсу общей физики, например в [19] и [20], даны разные решения этой задачи. Тем более это удивительно, если принять во внимание, что LC-цепочка — это простейший фильтр, использующийся в бесчисленных реальных устройствах.

Импеданс Z бесконечной лестничной цепи можно найти путем ее последовательного построения, записав выражение для Z_{n+1} :

$$Z_{n+1} = f(Z_n), \quad f(Z_n) = z_1 + \frac{Z_n z_2}{Z_n + z_2}, \quad n = 1, 2, \dots, \infty, \quad (23)$$

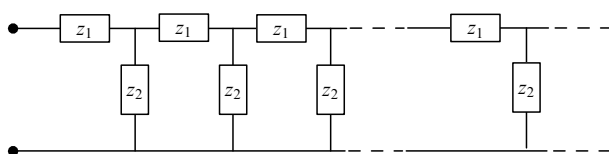


Рис. 8. Бесконечная лестничная LC-цепочка (фильтр), $z_1 = i\omega L$, $z_2 = 1/i\omega C$.

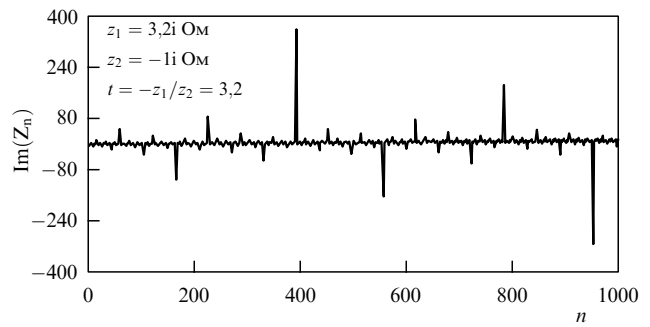


Рис. 9. Хаотическая зависимость импеданса лестничной цепи от числа элементов n . Параметр t выбран равным $t = -z_1/z_2 = 3,2$ и находится согласно критерию (28) в диапазоне неустойчивости.

где z_1, z_2 — комплексные сопротивления — кондактансы элементов цепи.

При любых z_1, z_2 всегда есть неподвижная точка Z^* , определяемая из уравнения $Z^* = f(Z^*)$:

$$Z^* = \frac{z_1}{2} \pm \sqrt{\frac{z_1^2}{4} + z_1 z_2}. \quad (24)$$

Если неподвижная точка Z^* является устойчивой, то импеданс Z бесконечной лестничной цепочки существует и является пределом $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = Z^*$. В противном случае предела $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n$ не существует (рис. 9, см. также аналогичный рисунок в [6]), и не имеет смысла говорить об импедансе бесконечной цепочки.

Анализ соотношений (23) показывает, что в идеальном случае чисто мнимых импедансов (цепочка состоит из емкостей и индуктивностей с нулевыми активными сопротивлениями) при определенных значениях z_1 и z_2 не существует устойчивой неподвижной точки Z^* . В самом деле, неподвижная точка Z^* итерационного процесса (23) является устойчивой [12], если

$$\left| \frac{df(Z_n)}{dZ_n} \right|_{Z_n=Z^*} < 1. \quad (25)$$

В рассматриваемом случае

$$\begin{aligned} \left| \frac{df(Z_n)}{dZ_n} \right|_{Z_n=Z^*} &= \left| \frac{1}{(1 + Z^*/z_2)^2} \right| = \\ &= \frac{4}{\left| \left(2 + z_1/z_2 \pm \sqrt{(z_1/z_2)^2 + 4z_1/z_2} \right)^2 \right|}. \end{aligned} \quad (26)$$

Обозначив $t = -z_1/z_2$, перепишем условие (25) в виде

$$F(t) = \frac{4}{\left| \left(2 - t \pm \sqrt{t^2 - 4t} \right)^2 \right|} < 1. \quad (27)$$

При действительном t функция $F(t)$, как легко убедиться непосредственно, ведет себя в диапазоне

$$0 \leq t \leq 4 \quad (28)$$

несколько неожиданно — не зависит от t и точно равна 1. Таким образом, неравенство (27) не выполняется, и неподвижная точка не является устойчивой. Отметим, что при добавке как угодно малой действительной части

к z_1 или z_2 условие устойчивости выполняется всегда, что можно объяснить тем, что система с $F(t) = 1$ как бы находится на грани устойчивости, и достаточно сколь угодно малого сдвига, чтобы итерационная последовательность (23) приобрела неподвижную устойчивую точку. Устойчивая точка существует при $t < 0$ и равняется

$$Z^* = \frac{1}{2} \left(z_1 + \sqrt{z_1^2 + 4z_1z_2} \right), \quad t < 0, \quad (29)$$

а при $t > 4$ устойчивая точка равна

$$Z^* = \frac{1}{2} \left(z_1 - \sqrt{z_1^2 + 4z_1z_2} \right), \quad t > 4. \quad (30)$$

Обратим внимание на разные знаки перед корнем¹ в (29), (30).

Рассмотрим подробнее случай чисто мнимых z_1 и z_2 с разными знаками. Когда $z_1 = i\omega L$, $z_2 = 1/i\omega C$, из (27), (29) следует, что при

$$\omega > \omega_0 = \frac{2}{\sqrt{LC}} \quad (31)$$

неподвижная точка устойчива, импеданс бесконечной цепочки существует и, как и следовало ожидать, является чисто мнимым,

$$Z^* = i \left(\frac{\omega L}{2} + \sqrt{\frac{\omega^2 L^2}{4} - \frac{L}{C}} \right). \quad (32)$$

Неподвижной устойчивой точки не существует при

$$\omega < \omega_0 = \frac{2}{\sqrt{LC}}, \quad (33)$$

и, следовательно, нельзя говорить о импедансе бесконечной цепочки. Поэтому утверждение из работы [19]: "Глядя на бесконечную сеть из зажима a' , мы бы увидели характеристический импеданс $Z_0 = \sqrt{L/C - \omega^2 L^2/4}$ ", — несправедливо. И далее в той же работе: "Для низких частот импеданс — чистое сопротивление и потому поглощает энергию". Таким образом, пропускание фильтра для низких частот согласно [19] связано с их поглощением, вызванным ($\text{Re } Z_0 > 0$) диссипацией. Правда, далее в работе [19] следует совершенно справедливое утверждение: "...получается, что, когда источник соединен с цепью, он обязан сперва снабдить энергией первую индуктивность и емкость, затем вторую, третью и т.д. В цепях подобного рода энергия непрерывно и с постоянной скоростью отсасывается из генератора и безостановочно течет в цепь. Энергия запасается в индуктивностях и емкостях вдоль цепи". Таким образом, поглощение энергии фильтром есть, а диссипации нет, т.е. следует четко различать поглощение энергии средой из LC-элементов с диссипацией и без диссипации. Дело в том, что в работе [19] Z_0 найдено из решения квадратного уравнения в предположении (неверном), что импеданс цепочки из n звеньев (при $\omega < \omega_0$) сходится. В работе [6] рассмотрено поведение Z_n при $n \rightarrow \infty$ в зависимости от значений z_1 и z_2 . Как и положено, при $z_1 = i\omega L$ и $z_2 = 1/i\omega C$ в диапазоне

$\omega < \omega_0$ Z_n не сходится. Диапазон $\omega < \omega_0$ есть диапазон пропускания фильтра. В работе [6] пропускание фильтра в этом диапазоне связывается (как и в [19]) с наличием в системе диссипации. На свой вопрос: "How can Eq. (29) give² the right answer in practice when we just argued that this equation is incorrect?", автор [6] отвечает: "...a realistic inductor has an internal resistance $r \neq 0$ ". В этом случае вопрос о сходимости Z_n при $n \rightarrow \infty$, конечно, отпадает. При существовании как угодно малой действительной части y z_1 и (или) z_2 характеристический импеданс $Z_0 = \sqrt{L/C - \omega^2 L^2/4}$ существует. Однако в реальных фильтрах с конечным, иногда очень небольшим, числом элементов малая действительная часть в z_1 и (или) z_2 очевидно ничего изменить не может. Поэтому "существование" $Z_0 = \sqrt{L/C - \omega^2 L^2/4}$ не может привлекаться при объяснении пропускания фильтра.

В действительности, как хорошо известно [21], для конечного фильтра из n звеньев с чисто мнимыми элементами существуют два решения, связывающие напряжения $U(t) = U_0 \cos \omega t$ на входе и $U_n(t)$ на выходе. Первое из этих решений, справедливое для диапазона пропускания, имеет вид

$$U_n(t) = U_0 \frac{\cos \beta/2}{\cos(n+1/2)\beta} \cos \omega t, \quad \cos \beta = 1 - LC\omega^2, \quad \omega < \omega_0 = \frac{2}{\sqrt{LC}}. \quad (34)$$

При частоте $\omega \ll \omega_0$ $U_n(t) \approx U_0 \cos \omega t$, т.е. фильтр из чисто реактивных элементов с конечным, в том числе и очень малым, числом элементов пропускает сигнал без искажений. Для других частот из диапазона $\omega < \omega_0$ пропускание неравномерно, однако "запирания" не наступает.

Второе решение в диапазоне $\omega > \omega_0$ имеет вид

$$U_n(t) = U_0(-1)^n \times \frac{\exp(\xi/2) - \exp(-\xi/2)}{\exp[(n+1/2)\xi] - \exp[-(n+1/2)\xi]} \cos(\omega t), \quad (35)$$

где ξ находится из уравнения $\cosh \xi = |1 - LC\omega^2/2|$.

Из соотношения (35) сразу видно, что амплитуда сигнала на выходе экспоненциально уменьшается с увеличением числа звеньев n , и при достаточно большом их числе можно записать

$$U_n(t) = U_0(-1)^n \left[\exp\left(\frac{\xi}{2}\right) - \exp\left(-\frac{\xi}{2}\right) \right] \times \exp\left[-\left(n + \frac{1}{2}\right)\xi\right] \cos(\omega t), \quad (36)$$

т.е. происходит запирание сигнала, и фильтр не пропускает частоты выше критических.

Качественное объяснение работы фильтра заключается в следующем. В области пропускания находятся резонансы. В конечной цепочке частоты пропускания близки к резонансам. В бесконечной цепочке резонансы сливаются, и все частоты пропускания лежат на резонансных частотах.

А.А.С. и М.И.Ж. выражают благодарность П.М. Томчуку и С.П. Лукьянцу за многочисленные

¹ В работе [6] упущено, что в случае $t > 4$ необходимо при вычислении неподвижной точки выбирать отрицательный знак перед радикалом.

² При цитировании мы заменили номер уравнения в соответствии с нашей нумерацией.

обсуждения затронутых вопросов и А.Н. Селину за обсуждение математических вопросов теории устойчивости дискретных систем. Работа частично поддержана Deutscher Academic Austausch Dienst e.V. (грант 322, A/02/16226-2002).

Список литературы

1. Дыхне А М *ЖЭТФ* **59** 110 (1970)
2. Brouers F, Blacher S, Sarychev A K, in *Fractal Reviews in the Natural and Applied Sciences* (Ed. M M Novak) (London: Chapman & Hall, 1995) p. 237
3. Ducourtieux S et. al. *Phys. Rev. B* **64** 165403 (2001)
4. Baskin E M et al. *Physica A* **242** 49 (1997)
5. Sarychev A K, Shalaev V M *Phys. Rep.* **335** 275 (2000)
6. van Enk S J *Am. J. Phys.* **68** 854 (2000)
7. Schulgasser K J J. *Phys. C: Solid State Phys.* **10** 407 (1977)
8. Морозовский А Е, Снарский А А *Укр. физ. журн.* **28** 1230 (1983)
9. Лукьянец С П, Морозовский А Е, Снарский А А *Письма в ЖТФ* **23** (13) 89 (1997)
10. Энтин М В *ЖЭТФ* **114** 669 (1998)
11. Пайтген Х О, Рихтер П Х *Красота фракталов. Образцы комплексных динамических систем* (М.: Мир, 1993)
12. Шустер Г *Детерминированный хаос* (М.: Мир, 1988)
13. Архинчеев В Е *Письма в ЖЭТФ* **67** 951 (1998)
14. Мун Ф *Хаотические колебания* (М.: Мир, 1990)
15. Helsing J, Grimvall G *Phys. Rev. B* **41** 11364 (1990)
16. Снарский А А, Слипченко К В, Безсуднов И В *ЖЭТФ* **113** 1484 (1998)
17. Stauffer D, Aharony A *Introduction to Percolation Theory* 2nd ed. (London: Taylor & Francis, 1992)
18. Федер Е *Фракталы* (М.: Мир, 1991)
19. Фейнман Р, Лейтон Р, Сэндс М *Фейнмановские лекции по физике* Т. 6 (М.: Мир, 1966)
20. Сивухин Д В *Общий курс физики* Т. 3 (М.: Наука, 1977)
21. Мандельштам Л И *Лекции по теории колебаний* (М.: Наука, 1972)

Stability and chaos in randomly inhomogeneous two-dimensional media and LC circuits

A.M. Dykhne

State Research Center "Troitsk Institute for Innovation and Fusion Research"
ul. Pushkovykh 1, 142092 Troitsk, Moscow Region, Russian Federation
Tel. (7-095) 334-51 58

E-mail: alexander.dykhne@algodign.com

A.A. Snarskii, M.I. Zhenirovskii

National Technical University of Ukraine "Kiev Polytechnical Institute"
pr. Pobedy 37, 03056 Kiev, Ukraine
Tel. (038) 044-241 76 49

E-mail: phys.@ln.com.ua, cbikiev@public.ua.net

Electric field distribution in 2D self-dual media, in particular in nearly-percolating media and low-frequency filtering LC circuits, is discussed both from the physical (fluctuations and absorption) and mathematical (stability) perspectives. The finite energy absorption paradox occurring in such systems of nonabsorbing elements is discussed.

PACS numbers: 03.50.De, 05.45.Ac, **41.20.-q**, 64.60.Ak, **84.32.-y**

Bibliography — 21 references

Received 19 May 2003, revised 14 January 2004