

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ**Измерение "без взаимодействия": возможности и ограничения**

С.П. Вятчанин, Ф.Я. Халили

Так называемое измерение "без взаимодействия" представляет собой весьма интересный квантовый эффект, дающий возможность регистрировать наличие поглощающего свет объекта в данной области пространства со сколь угодно малой, в принципе, вероятностью поглощения фотонов объектом. Эта вероятность ограничена снизу лишь величиной порядка  $\omega\tau$ , где  $\omega$  — частота света и  $\tau$  — продолжительность измерения. Такой вероятности соответствует средняя поглощаемая энергия порядка  $\hbar/\tau$ . Используя измерение "без взаимодействия", можно также измерить координату объекта, однако только в том случае, если последний заранее подготовлен в специальном "дискретизованном" квантовом состоянии. Такое состояние возникает, например, в пондеромоторном измерителе электромагнитной энергии, что дает принципиальную возможность осуществить измерение "без взаимодействия" для энергии электромагнитного резонатора. Оценки показывают, что современный уровень экспериментальной техники позволяет с помощью измерения "без взаимодействия" регистрировать наличие отдельных атомов внутри оптических резонаторов.

PACS numbers: 03.65.Ta, 03.67.-a, 42.50.Tv

**Содержание**

1. Введение (765).
2. Минимальные затраты энергии при измерении "без взаимодействия" (767).
3. Редукция состояния объекта при измерении "без взаимодействия" (767).
  - 3.1. "Да-нет" измерения.
  - 3.2. Измерение координаты "без взаимодействия".
4. Измерение числа квантов в электромагнитном резонаторе (771).
  - 4.1. Схема измерения.
  - 4.2. "Обычное" измерение.
  - 4.3. Измерение "без взаимодействия".
5. Возможные приложения (773).
  - 5.1. Резонатор Фабри–Перо вместо непрозрачного объекта.
  - 5.2. Обнаружение "без взаимодействия" единичных атомов в резонаторе Фабри–Перо.
6. Заключение (774).
7. Приложения (775).
  - 7.1. Схема измерения "без взаимодействия" с квантовой эффективностью, близкой к единице.
  - 7.2. Доказательство формул (3.8) и (3.12).
  - 7.3. Координатная и импульсная волновые функции в дискретизированном состоянии.

**Список литературы (777).**

**С.П. Вятчанин, Ф.Я. Халили.** Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет, 119899 Москва, Воробьевы горы, Российская Федерация  
Тел. (095) 939-44-28, (095) 939-12-24  
Факс (095) 932-88-20  
E-mail: [vyat@hbar.phys.msu.ru](mailto:vyat@hbar.phys.msu.ru), [farid@hbar.phys.msu.ru](mailto:farid@hbar.phys.msu.ru)

Статья поступила 16 февраля 2004 г.,  
после доработки 4 марта 2004 г.

**1. Введение**

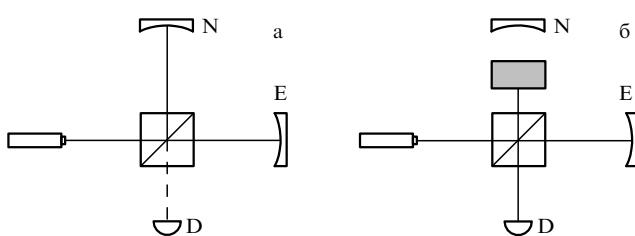
Так называемое измерение "без взаимодействия" [1] (interaction-free measurement<sup>1</sup>) принадлежит к тому классу чисто квантовых явлений, где одновременно работают как волновые, так и корпускулярные свойства квантовых объектов. Такие явления выглядят парадоксально с классической точки зрения; и они же привлекают в последнее время наибольший интерес в связи с возможностью их использования в квантовых вычислениях и квантовой криптографии (см., например, книгу [2]).

В принципе, измерение "без взаимодействия" может быть реализовано на основе любой схемы, где свет (или электроны, атомы и т.д.; для конкретности мы будем говорить о фотонах) могут проходить по одному из двух возможных путей, давая интерференционную картину. Это может быть интерференция на двух щелях, интерферометр Маха–Цандера (как в оригинальной работе [1]) или Майкельсона [3, 4]. В данной работе мы будем рассматривать последний вариант.

Пусть имеется интерферометр Майкельсона, в котором расстояния между центральным светоделителем и зеркалами N и E подобраны так, чтобы все излучение от источника света отражалось обратно и на фотодетектор D ничего не попадало (рис. 1а). Если теперь в одно из плеч интерферометра вставить поглощающий свет объект (рис. 1б), то интерференция нарушится и появится конечная вероятность срабатывания детектора.

Рассмотрим случай, когда в интерферометр был запущен один фотон. При наличии поглощающего

<sup>1</sup> Данный термин нельзя считать очень удачным, но он уже используется в литературе, и поэтому мы будем им пользоваться.



**Рис. 1.** Простой вариант схемы измерения "без взаимодействия": (а) длины плеч интерферометра подобраны так, что весь свет отражается обратно в лазер; (б) если в одно из плеч вставить поглощающий объект, то появится ненулевая вероятность попадания фотонов на детектор.

объекта, поскольку интерференция отсутствует (разветвившиеся пути эволюции фотона никогда не сходятся вновь), этот фотон можно рассматривать как классическую частицу. Для него будут возможны три исхода. С вероятностью  $p_- = R$ , где  $R$  — коэффициент отражения центрального светоделителя, он может пойти по пути, перекрытому объектом, и поглотиться им (будем называть такой результат неудачным); с вероятностью  $p_+ = RT$ , где  $T = 1 - R$ , пойти по второму пути и попасть на детектор (удачный результат), и с вероятностью  $p_0 = T^2$  также пойти по второму пути, но вернуться к источнику (на рис. 1б — налево). В последнем случае можно зарегистрировать фотон дополнительным детектором, чтобы отличить этот исход от случая, когда фотон поглотился объектом.

Удачный результат (который, в соответствии со своим названием, собственно и является целью эксперимента) позволяет сделать однозначный вывод, что один из путей интерференции перекрыт. В то же время в этом случае с некоторой долей условности можно утверждать, что фотон на своем пути к детектору не проходил по этому пути и не взаимодействовал с перекрывающим этот путь объектом (иначе он бы поглотился им). Такое рассуждение, основанное на представлении о фотоне как о классической частице, и привело к термину "измерение без взаимодействия".

Неудачный результат также позволяет зарегистрировать наличие объекта, но "неинтересным" способом: фотон явно провзаимодействовал с ним.

Нейтральный результат соответствует ситуации "пропуска цели": фотон попал туда, куда он мог попасть и при отсутствии объекта. В этом случае эксперимент можно повторить заново, и так до тех пор, пока не будет получен либо удачный, либо неудачный результат, или же пока итоговая вероятность "пропуска цели"  $P_0 = p_0^N$  ( $N$  — число повторений) не станет меньше некоторого наперед заданного порога. Вероятности удачного и неудачного результата при этом, как легко показать, будут равны

$$P_+ = \frac{1 - p_0^N}{1 - p_0} p_+ \rightarrow \frac{p_+}{p_+ + p_-}, \quad (1.1a)$$

$$P_- = \frac{1 - p_0^N}{1 - p_0} p_- \rightarrow \frac{p_-}{p_+ + p_-}. \quad (1.1b)$$

К настоящему времени было выполнено несколько экспериментов, подтверждающих приведенные рассуж-

дения [5–7], причем в одном из них [7] использовалась интерференция нейтронов.

Хотелось бы сразу подчеркнуть, что однозначного ответа на вопрос, имеет ли здесь место взаимодействие с объектом "на самом деле", невозможен, по крайней мере в рамках современной физики: он зависит от исповедуемой интерпретации квантовой механики. Причем спектр ответов, даваемых различными интерпретациями, помимо простых "да" и "нет" включает также и варианты "да, но в параллельной Вселенной" и "не знаем и знать не можем". В данной статье мы постараемся подойти к этому явлению позитивистским образом, т.е. с чисто "потребительской" точки зрения рассмотреть некоторые ограничения такого класса измерений, а также возможности, по крайней мере потенциальные, его использования.

В работе [4] был предложен и экспериментально продемонстрирован усовершенствованный вариант измерения "без взаимодействия", в котором вероятность  $P_+$  (в этой работе она называется квантовой эффективностью схемы, и мы будем следовать этой терминологии) может быть сколь угодно близка к единице. Мы подробно рассмотрим такой усовершенствованный вариант в разделе 2, где будет получен принципиальный нижний предел для величины квантовой эффективности.

Одной из любопытных особенностей измерения "без взаимодействия" является то, что оно нарушает простую логику микроскопа Гейзенберга "измерение координаты — возмущение импульса". В схеме измерения "без взаимодействия" явно имеет место локализация объекта (редукция его координатной волновой функции), в то время как какая-либо случайная сила, действующая на объект со стороны измерителя и обеспечивающая возмущение импульса объекта, отсутствует. Следует сразу отметить, что никакого нарушения соотношения неопределенностей Гейзенберга здесь не происходит (микроскоп Гейзенберга представляет собой лишь иллюстрацию соотношения неопределенностей, но никак не доказательство).

Мы рассмотрим эту проблему в разделе 3. Там же будет детально проанализирована предложенная в работе [3] возможность измерения координаты объекта "без взаимодействия" путем серии описанных выше проверок местонахождения объекта в последовательных точках пространства.

В разделе 4 будет рассмотрена процедура измерения числа квантов в электромагнитном резонаторе, состоящая из преобразования числа квантов в координату механического объекта и последующего измерения этой координаты "без взаимодействия".

Наконец, в разделе 5 мы рассмотрим схему эксперимента с резонатором Фабри–Перо вместо поглощающего тела. Напомним, что резонатор Фабри–Перо при резонансе пропускает через себя свет, т.е. является "поглотителем", вне резонанса — отражает свет, т.е. является "зеркалом". Известно, что присутствие атома внутри резонатора сдвигает резонансную частоту и таким образом появление атома внутри резонатора может превратить его из "зеркала" в "поглотитель". Мы покажем, что современный уровень экспериментальной техники позволяет с помощью измерения "без взаимодействия" регистрировать наличие отдельных атомов внутри оптических резонаторов.

## 2. Минимальные затраты энергии при измерении "без взаимодействия"

Квантовая эффективность простой схемы измерения "без взаимодействия", приведенной на рис. 1, равна

$$P_+ = \frac{T}{1 + T}. \quad (2.1)$$

При  $T \rightarrow 1$  она близка к  $1/2$ . В работе [4] было показано, что, добавив к интерферометру Майкельсона дополнительное зеркало  $S$  в "южном" плече, можно довести квантовую эффективность до величины, сколь угодно близкой к единице. В настоящей работе мы рассмотрим схему, где имеется еще одно дополнительное зеркало в "западном" плече (рис. 2), обеспечивающее автоматическую рециркуляцию квантов в случае нейтрального результата. В этой схеме вероятности как неудачного, так и нейтрального результата могут быть сделаны сколь угодно малыми даже при однократном измерении.

Как показано в приложении 7.1, если выполняется условие согласования

$$T = \frac{T_S}{T_S + T_W} \Leftrightarrow R = \frac{T_W}{T_S + T_W}, \quad (2.2)$$

где  $T_S, T_W$  — коэффициенты пропускания зеркал  $S$  и  $W$ , соответственно, а длительность светового импульса  $\tau$  достаточно велика, так что ширина занимаемой им полосы частот меньше, чем полоса пропускания интерферометра  $\tilde{\tau}^{-1}$ , то вероятности неудачного и нейтрального результата будут равны, соответственно,

$$p_- = \frac{T_S + T_W}{4}, \quad p_0 = \left(\frac{\tilde{\tau}}{\tau}\right)^2. \quad (2.3)$$

При  $T_{S,W} \ll 1$  вероятность  $p_-$  может быть сколь угодно близка к нулю.

Из этих рассуждений можно сделать вывод, что *при неограниченном времени измерения* рассмотренная схема позволяет получить бит информации (находится объект в данной области пространства или нет), затратив на это сколь угодно малую энергию. Действительно, фотодетектор в принципе может быть заменен схемой квантового невозмущающего измерения энергии [8]. Этот

измеритель зарегистрирует пролет кванта через "южное" плечо, не поглотив его, после чего этот квант можно будет использовать, например, в последующих таких же измерениях.

В то же время, в приложении 7.1 показано, что при  $T_{S,W} \rightarrow 0$  полоса пропускания интерферометра также стремится к нулю. Поэтому чем меньше должна быть величина  $p_-$ , тем более длинные световые импульсы требуется использовать. В результате при заданной величине  $\tau$  в объекте будет в среднем на одно испытание поглощаться энергия порядка

$$\mathcal{E} = \hbar\omega p_- \gtrsim \frac{\hbar}{\tau}, \quad (2.4)$$

что полностью соответствует обычным представлениям о величине минимальной энергии, диссилируемой при получении одного бита информации.

Подчеркнем, что эта энергия будет поглощаться именно *в среднем*: в большинстве случаев энергия не будет поглощаться вообще, но изредка, с вероятностью  $\sim 1/\omega\tau$ , фотон будет лететь "не туда" и поглощаться объектом.

## 3. Редукция состояния объекта при измерении "без взаимодействия"

### 3.1. "Да-нет" измерения

Принято считать, что локализация объекта (т.е. получение информации о его координате) должна сопровождаться возмущением его импульса. Действительно, как правило, при измерении координаты  $x$  относительно широкая априорная координатная волновая функция  $\psi_{\text{apr}}(x)$  преобразуется в более узкую апостериорную волновую функцию  $\psi_{\text{apost}}(x)$  (рис. 3а, б). Соответственно, относительная узкая априорная волновая функция в импульсном представлении  $\phi_{\text{apr}}(p)$  (рис. 3в), преобразуется в более широкую апостериорную  $\phi_{\text{apost}}(p)$  (рис. 3г). Дополнительный случайный импульс при этом должен быть обеспечен измерителем.

Измеритель "без взаимодействия", казалось бы, не может сделать этого. Действительно, если объект находится вне интерферометра, то он не может получить никакого импульса от поля в последнем (рис. 4а). Если объект находится внутри своего плеча интерферометра, целиком перекрывая его, то возмущение его импульса также отсутствует, поскольку тогда фотони не попадают в это плечо (рис. 4б). Однако возможен третий, промежуточный, случай, когда объект *частично* перекрывает плечо интерферометра. В этом случае фотони будут с некоторой конечной вероятностью попадать в северное плечо, рассеиваться на объекте и передавать ему случайный импульс (рис. 4в).

Рассмотренная ситуация имеет место не только для измерения "без взаимодействия". Рассмотрим простой пример, изображенный на рис. 5 и являющийся вариантом известного метода "ножа и щели". Здесь требуется определить местонахождение отражающего свет объекта  $M$  на оси  $x$ . Для этого на место его предполагаемого расположения посылается луч света, который либо не отражается от объекта и регистрируется фотодетектором  $D1$  (рис. 5а), либо отражается и регистрируется фотодетектором  $D2$  (рис. 5б). Возмущение импульса объекта, очевидно, отсутствует в случае (а). В случае (б)

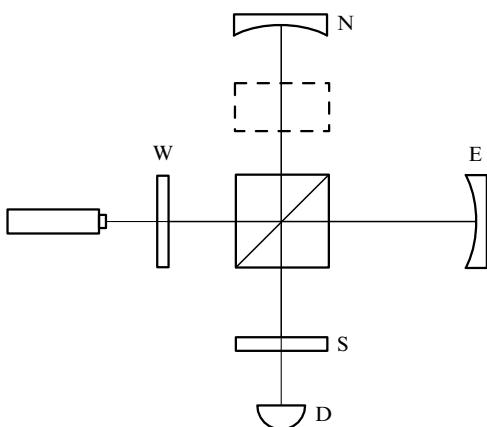
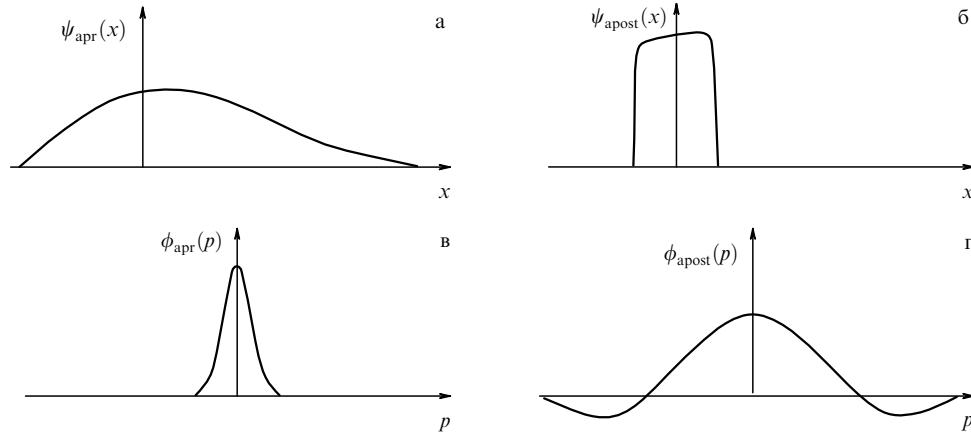
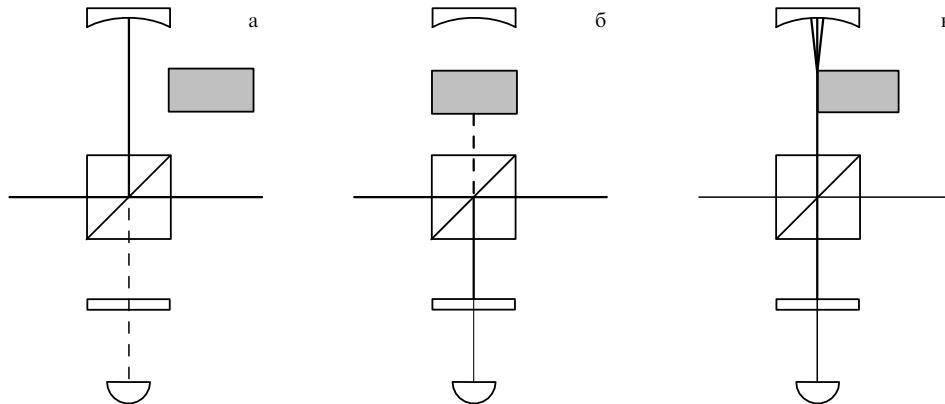


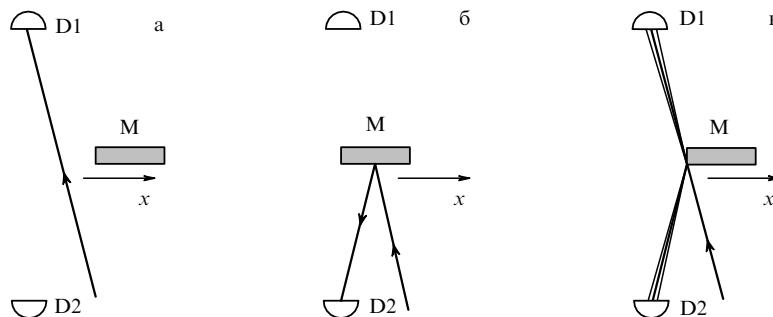
Рис. 2. Используя дополнительные зеркала в "южном" и "западном" плечах, можно довести квантовую эффективность схемы "измерения без взаимодействия" до величины, сколь угодно близкой к единице.



**Рис. 3.** Как правило, локализация объекта (т.е. сужение его координатной волновой функции, вверху) сопровождается возмущением его импульса (ширеением импульсной волновой функции, внизу).



**Рис. 4.** При измерении "без взаимодействия" возмущение импульса объекта имеет место только если объект частично перекрывает луч света.



**Рис. 5.** Более простой пример измерения типа "да-нет"; здесь возмущение импульса объекта также имеет место только если он частично перекрывает луч света.

возмущение  $x$ -компоненты импульса, в принципе, может быть сделано сколь угодно малым, так как при отражении света от идеально отражающего зеркала последнему в тангенциальном направлении (вдоль оси  $x$ ) не передается никакого импульса. Возмущение  $x$ -компоненты импульса здесь также имеет место только в том случае, когда луч касается края объекта и дифрагирует на нем (рис. 5в).

В обоих рассмотренных примерах измеритель дает информацию не о координате объекта, а о том, находится ли его координата в некотором заданном диапазоне значений. Впервые квантовые измерения такого

типа были рассмотрены в книге [9]. Измеряемой величиной в них являются бинарные наблюдаемые — *Eigenschaften* (в русском переводе книги — *альтернативные свойства*), которые могут принимать лишь два значения: "да" или "нет". Будем называть такие измерения "да-нет" измерениями.

Очевидно, что начальное состояние объекта может быть и таким, для которого вариант рис. 4в, 5в заведомо не реализуется. Пусть начальная волновая функция объекта в координатном представлении имеет вид двугорбой кривой, максимумы которой находятся в точках  $x = 0$  и  $x = X > A$ , а ширина каждого максимума равна

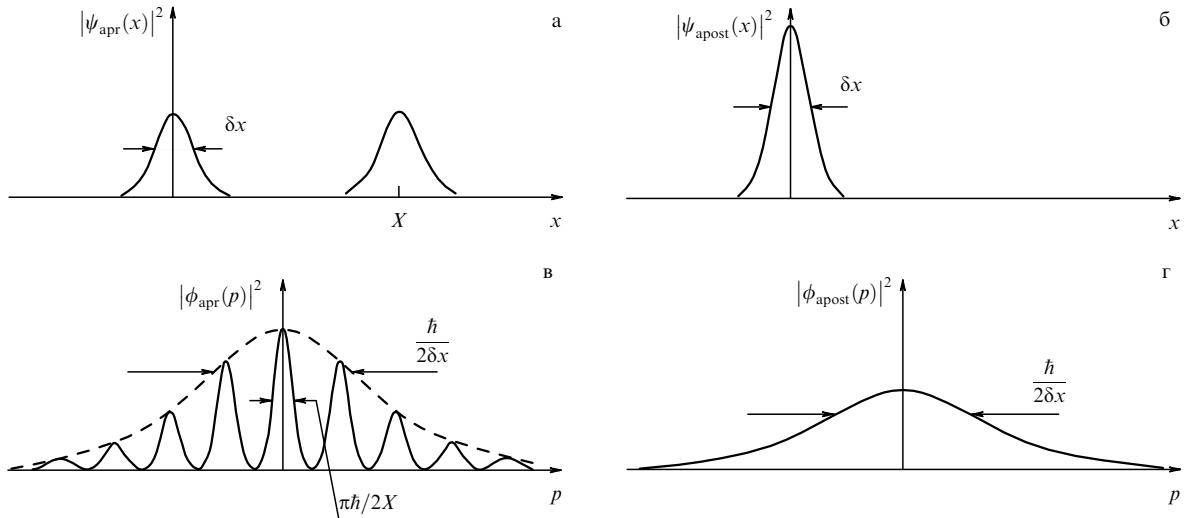


Рис. 6. В "да-нет" измерении возмущение импульса может быть равно нулю.

$\delta x \ll X$  (рис. 6а). В импульсном представлении эта волновая функция имеет вид косинусоиды с периодом  $2\pi\hbar/X$ , промодулированной медленно спадающей огибающей шириной  $\Delta p \sim \hbar/2\delta x \gg \hbar/X$  (рис. 6в).

В соответствии со сказанным, возмущение импульса объекта в результате "да-нет" измерения в этом случае должно быть равно нулю. И действительно, после измерения из двух горбов координатной волновой функции остается один (рис. 6б), а у волновой функции в импульсном представлении теряется тонкая структура (рис. 6г). Однако ее ширина не меняется и остается равной начальному значению  $\Delta p$ .

Приведенные рассуждения никоим образом не противоречат соотношению неопределенностей Гейзенберга, понимаемому в строгом математическом смысле. Действительно, строгое неравенство Гейзенберга связывает между собой минимальные значения дисперсий двух наблюдаемых объекта в заданном квантовом состоянии. Это соотношение не нарушается: просто произведение неопределенностей координаты и импульса в начальном состоянии (рис. 6а) значительно превышает  $\hbar/2$ , и поэтому даже с учетом уменьшения неопределенности координаты в результате измерения произведение неопределенностей координаты и импульса в конечном состоянии (рис. 6б) остается больше или равно  $\hbar/2$ .

С другой стороны, в квантовой теории измерений под соотношениями неопределенностей понимаются также неравенства, связывающие ошибку измерения некоторой наблюдаемой и возмущение при измерении какой-либо другой наблюдаемой. Именно это соотношение неопределенностей иллюстрируется обычно при помощи микроскопа Гейзенберга. Строгий анализ показывает, что оно выполняется далеко не всегда. Мы не будем здесь подробно обсуждать этот достаточно нетривиальный вопрос; его различные аспекты излагаются, например, в монографиях [10, 11] и статье [12].

В то же время, остановимся на строгом определении понятия "возмущение импульса". Использовать в качестве меры возмущения импульса просто приращение его неопределенности после измерения нельзя — возможны, например, случаи, когда измеритель явно действует на объект с некоторой случайной силой, а неопределенность

импульса не только не увеличивается, но даже уменьшается (один из примеров приведен в заключении к данной статье). Примем в качестве меры возмущения импульса величину

$$(\delta p)_{\text{pert}}^2 = \langle (\hat{p}_{\text{final}} - \hat{p})^2 \rangle, \quad (3.1)$$

где

$$\hat{p}_{\text{final}} = \hat{\mathcal{U}}^+ \hat{p} \hat{\mathcal{U}} \quad (3.2)$$

— оператор импульса объекта после измерения (в картине Гейзенberга),  $\hat{\mathcal{U}}$  — оператор совместной эволюции объекта и измерителя. Она хорошо соответствует интуитивному представлению о возмущении объекта измерителем. В частности, в простых "линейных" схемах измерения [10]

$$\hat{p}_{\text{final}} - \hat{p} = \int_{t_1}^{t_2} \hat{F}(t) dt, \quad (3.3)$$

где  $\hat{F}(t)$  — случайная сила, действующая на объект со стороны прибора и представляющая собой оператор в гильбертовом пространстве прибора, а  $t_1, t_2$  — моменты начала и конца измерения.

Пусть ширина светового пучка в рассмотренных примерах равна  $\delta x$ , а поперечный размер объекта  $A \gg \delta x$ . Будем считать, что координата  $x$  объекта соответствует его середине и что ось светового пучка пересекает ось  $x$  в точке  $x = 0$ . Тогда измеритель будет гарантированно давать ответ "да" для значений координаты объекта  $|x| < (A - \delta x)/2$ , "нет" — для значений координаты  $|x| > (A + \delta x)/2$ . В промежуточных случаях будут возможны и тот, и другой ответы.

Если начальная волновая функция объекта была равна  $\psi_{\text{apr}}(x)$ , то после измерения в случае получения ответа "да" он перейдет в состояние с волновой функцией

$$\psi_+(x) = \frac{\Omega_+(x)\psi_{\text{apr}}(x)}{\sqrt{w_+}}, \quad (3.4)$$

а в случае ответа "нет" — в состояние с волновой функцией

$$\psi_-(x) = \frac{\Omega_-(x)\psi_{\text{apr}}(x)}{\sqrt{w_-}}. \quad (3.5)$$

Здесь  $\Omega_+$  — функция редукции, равная единице при  $|x| < (A - \delta x)/2$ , нулю — при  $|x| > (A + \delta x)/2$  и спадающая от единицы к нулю при возрастании  $|x|$  от  $(A - \delta x)/2$  до  $(A + \delta x)/2$ ,

$$\Omega_-(x) = \sqrt{1 - \Omega_+^2(x)}, \quad (3.6)$$

а

$$w_{\pm} = \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_{\pm}^2(x) |\psi_{\text{apr}}(x)|^2 dx \quad (3.7)$$

— вероятности получения результатов "да" и "нет" соответственно.

В приложении 7.2 показано, что возмущение импульса объекта в "да-нет" измерении равно

$$(\delta p)^2_{\text{pert}} = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \left| \frac{d\Omega_+(x)}{dx} \right|^2 + \left| \frac{d\Omega_-(x)}{dx} \right|^2 \right) |\psi_{\text{apr}}(x)|^2 dx, \quad (3.8)$$

т.е., действительно, в таких процедурах возмущение импульса имеет место только если априорная волновая функция объекта отлична от нуля в "серой" области, где функция редукции спадает от единицы к нулю и ее производная отлична от нуля. В случае же, изображенном на рис. 6,  $d\Omega_{\pm}/dx = 0$  везде, где  $\psi_{\text{apr}} \neq 0$ .

Известным примером "да-нет" измерения является процедура which-way [13], в которой невозмущающим (в смысле квантовых невозмущающих измерений [10]) образом определяется, по какому из двух возможных путей пролетела частица в схеме интерференции с двумя щелями. Идея этой процедуры изображена на рис. 7. Здесь D1, D2 — детекторы, которые срабатывают при пролете частицы через них. Апертура этих детекторов должна быть больше, чем ширина каждого из интерферирующих пучков. Важно также то, что детекторы в соответствии с основным принципом квантовых невозмущающих измерений не должны давать никакой другой информации о состоянии пролетевшей частицы, например, о конкретном значении ее координаты. Тогда состояние пролетевших частиц будет меняться так, как показано на рис. 6, а возмущение их импульса, задаваемое формулой (3.8), будет равно нулю.

Интересно отметить, что which-way измерение является фактически вариантом измерения "без взаимодействия", только рассматриваемого с "противополож-

ной стороны". Действительно, один из детекторов на рис. 7, например D2, может быть удален. Тогда мы получаем схему измерения "без взаимодействия": частицы, пролетевшие по нижнему пути и заведомо не взаимодействовавшие с детектором D1, тем не менее, "чувствуют" его наличие, теряя тонкую структуру своей импульсной волновой функции. Отличие от процедуры which-way здесь лишь в том, что в ней интерферирующие частицы выступают в роли исследуемых объектов, а детектор — в роли измерительного прибора, а в измерении "без взаимодействия" — наоборот.

Интересно отметить также работу [14], в которой утверждалось (на наш взгляд, ошибочно), что для нарушения интерференции в схеме which-way обязательно необходимо прямое локальное взаимодействие частиц с одним из детекторов D1 или D2, и ответную статью [15]. Процедура which-way также детально обсуждается в монографии [11].

### 3.2. Измерение координаты "без взаимодействия"

Рассмотренную выше процедуру бинарного обнаружения объекта "без взаимодействия" можно очевидным образом развить в процедуру измерения "без взаимодействия" координаты  $x$  этого объекта. Для этого достаточно просканировать рассмотренным выше прибором ось  $x$  с некоторым шагом  $X \leq A$ , определяемым требуемой точностью измерения. Минимальная величина этого шага ограничивается шириной  $\delta x$  "серых областей" функции  $\Omega_+(x)$  — участков, где ее производная по  $x$  отлична от нуля. Для интерферометра Майкельсона, рассматривавшегося в разделе 2, это величина несколько больше длины волны используемых квантов.

Рассмотрим процесс сканирования подробнее. Предположим для конкретности, что начальная волновая функция  $\psi_{\text{apr}}(x)$  отлична от нуля только при  $x \geq 0$ . Тогда интерферометр вначале размещается так, чтобы оптическая ось его "северного" плеча имела координату  $x = -A/2$ , и затем пошагово сдвигается вправо до тех пор, пока объект не будет обнаружен, т.е. пока на детектор не попадет один фотон.

Пусть это произошло на шаге  $n$ , т.е. при значении координаты  $x$  оптической оси "северного" плеча, равной  $-A/2 + nX$ . Это означает, что координата  $x$  середины объекта находится где-то между точками  $(n-1)X$  и  $nX$ . Соответственно, апостериорная волновая функция объекта становится равной

$$\psi_n(x) = \frac{\Omega_n(x)\psi_{\text{apr}}(x)}{\sqrt{w_n}}, \quad (3.9)$$

где

$$w_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |\Omega^2(x - nX)|^2 |\psi_{\text{apr}}(x)|^2 dx \quad (3.10)$$

— вероятность получения данного конкретного результата, а функции

$$\Omega_n(x) = \Omega(x - nX) \quad (3.11)$$

описывают редукцию волновой функции объекта в данном измерении. Функция  $\Omega(x)$  равна единице при  $\delta x/2 < x < X - \delta x/2$  и нулю при  $x < -\delta x/2$  и  $x > X + \delta x/2$ .

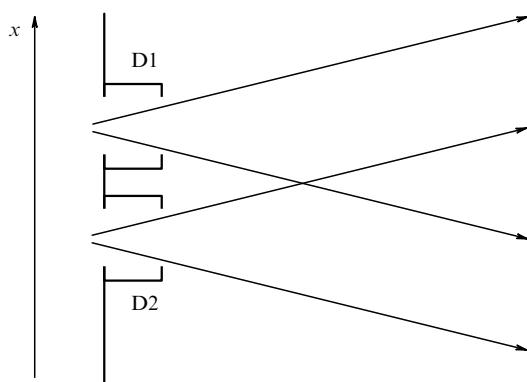


Рис. 7. Процедура which-way: детекторы D1 и D2 невозмущающим образом регистрируют пролеты частицы через них.

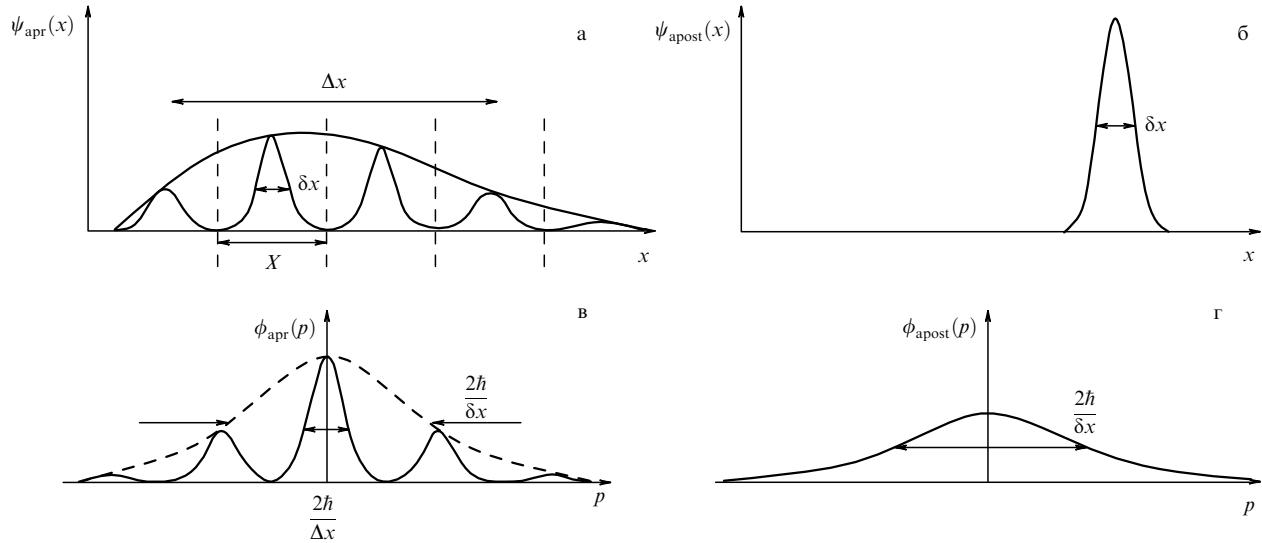


Рис. 8. При измерении "без взаимодействия" среднеквадратичное возмущение импульса может отсутствовать, если объект был заранее приготовлен в "дискретизированном" состоянии.

В приложении 7.2 показано, что возмущение импульса объекта в данной процедуре равно

$$(\delta p)_{\text{pert}}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d\Omega(x - nX)}{dx} \right|^2 |\psi_{\text{apr}}(x)|^2 dx. \quad (3.12)$$

Важно то, что множитель  $|d\Omega(x - nX)/dx|^2$  отличен от нуля только вблизи граничных точек  $x = nX$ . Поэтому, как и в предыдущем случае, возмущение импульса будет иметь место *только если* априорная волновая функция  $\psi_{\text{apr}}(x)$  отлична от нуля вблизи этих значений координаты, т.е. если возможны случаи, изображенные на рис. 4в.

В то же время, пусть начальная волновая функция объекта  $\psi_{\text{apr}}$  представляет собой набор пиков  $\psi_1(x)$  шириной  $\delta x < X$ , расположенных с шагом  $X$ , так что ее значения в точках  $nX$  равны нулю:

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n \psi_1(x - nX) \quad (3.13)$$

(рис. 8а). Пусть при этом общая ширина этой волновой функции  $\Delta x$  достаточно велика,  $\Delta x \gg X$ , и ее огибающая мало меняется на интервале  $X$ . Из формулы (3.11) следует, что возмущение импульса в описанной выше процедуре измерения "без взаимодействия" для такого начального состояния объекта должно отсутствовать.

В приложении 7.3 показано, что соответствующая волновая функция в импульсном представлении  $\phi_{\text{apr}}(p)$  при этом также будет иметь вид набора пиков, но расположенных с шагом  $P = 2\pi\hbar/X$  (рис. 8в). При этом ширина огибающей волновой функции  $\phi_{\text{apr}}(p)$  будет определяться шириной отдельного пика функции  $\psi_{\text{apr}}(x)$ ,

$$\Delta p \sim \frac{\hbar}{\delta x}, \quad (3.14)$$

и, наоборот, ширина единичного пика волновой функции  $\phi_{\text{apr}}(p)$  — шириной огибающей функции  $\psi_{\text{apr}}(x)$ :

$$\delta p \sim \frac{\hbar}{\Delta x}. \quad (3.15)$$

После измерения из всего множества пиков функции  $\phi_{\text{apr}}(p)$  остается один:

$$\psi_{\text{apost}}(x) = \psi_1(x - nX) \quad (3.16)$$

(рис. 8б). В силу формулы (7.24) волновая функция в импульсном представлении после измерения станет пропорциональна огибающей начальной импульсной волновой функции (рис. 8г).

Важно то, что ширина импульсной волновой функции (т.е. неопределенность импульса) здесь не увеличивается — меняется только ее "тонкая структура", заглаживаются отдельные пики. Никакой передачи случайного импульса от измерителя объекту (о которой говорилось в начале данного раздела) при этом не требуется и, следовательно, такое "дискретизированное" квантовое состояние делает возможным измерение координаты объекта "без взаимодействия".

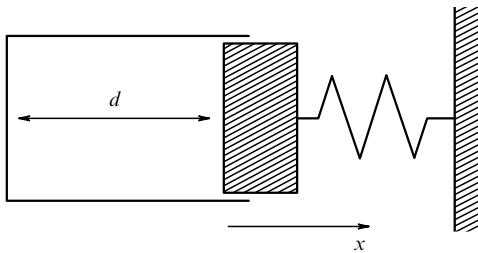
#### 4. Измерение числа квантов в электромагнитном резонаторе

##### 4.1. Схема измерения

Рассмотренное в предыдущем разделе измерение "дискретизированной" координаты механической степени свободы, в принципе, может быть использовано для измерения числа квантов в электромагнитном резонаторе. Следует оговориться, что процедуру, о которой будет идти речь в данном разделе, следует рассматривать скорее как пример мысленного эксперимента, чем реальную схему измерения. В то же время, она представляет заметный интерес с методической точки зрения.

Эта процедура основана на схеме пондеромоторного измерителя числа квантов [8], которая исходно была также предложена лишь в качестве мысленного эксперимента, но впоследствии послужила основой для практически реализованных схем невозмущающего измерения электромагнитной энергии.

Пусть имеется электромагнитный (например, СВЧ) резонатор, одна из стенок которого массой  $m$ , является



**Рис. 9.** Идея пондеромоторного измерителя электромагнитной энергии: сила электромагнитного давления на поршень пропорциональна числу квантов в резонаторе.

подвижной (рис. 9), так что частота резонатора зависит от координаты этой массы:

$$\omega_e(x) = \omega_e \left(1 - \frac{x}{d}\right). \quad (4.1)$$

Пусть эта масса, вместе с прикрепленной к ней жесткостью  $m\omega_m^2$ , образует механический осциллятор с собственной частотой  $\omega_m$ . Будем считать, что координата этого осциллятора отсчитывается от положения его равновесия при отсутствии резонатора.

Под действием силы электромагнитного давления оператор координаты этого осциллятора (в картине Гейзенберга) будет меняться следующим образом:

$$\hat{x}(t) = \hat{x} \cos \omega_m t + \frac{\hat{p}}{m\omega_m} \sin \omega_m t + \frac{\hbar\omega_e(1 - \cos \omega_m t)}{m\omega_m^2 d} \left(\hat{n} + \frac{1}{2}\right). \quad (4.2)$$

В момент времени  $t = \pi/\omega_m$  эта формула примет вид:

$$\hat{x}\left(\frac{\pi}{\omega_m}\right) = -\hat{x} + \frac{2\hbar\omega_e}{m\omega_m^2 d} \left(\hat{n} + \frac{1}{2}\right). \quad (4.3)$$

Следовательно, измерив координату  $x$  в этот момент времени, можно определить число квантов  $n$  с точностью, задаваемой начальной неопределенностью координаты  $\Delta x_{\text{init}}$  и ошибкой измерения координаты  $\Delta x_{\text{meas}}$ :

$$(\Delta n_{\text{meas}})^2 = \left(\frac{m\omega_m^2 d}{2\hbar\omega_e}\right)^2 [(\Delta x_{\text{init}})^2 + (\Delta x_{\text{meas}})^2]. \quad (4.4)$$

Измерение числа квантов в резонаторе должно, как известно, сопровождаться возмущением его фазы. Рассмотрим механизм этого возмущения более подробно. В качестве отправной точки рассмотрим сначала "обычное" измерение, а затем перейдем к измерению "без взаимодействия".

#### 4.2. "Обычное" измерение

В процессе совместной эволюции механического осциллятора и электромагнитного резонатора частота последнего (4.1) точно не определена, поскольку точно не определена координата первого (4.2). Поэтому у электромагнитного резонатора появится случайный сдвиг фазы

$$\hat{\varphi} = \frac{\omega_e}{d} \int_0^\tau \hat{x}(t) dt, \quad (4.5)$$

где  $\tau$  — время взаимодействия. Если  $\tau = \pi/\omega_m$ , то компонента  $\varphi$ , зависящая от начального состояния механического осциллятора (т.е. собственно возмущение) будет равна

$$\delta\hat{\varphi} = \frac{2\omega_e}{m\omega_m^2 d} \hat{p}, \quad (4.6)$$

а неопределенность этой величины, соответственно —

$$\Delta\varphi_{\text{pert}} = \frac{2\omega_e}{m\omega_m^2 d} \Delta p_{\text{init}}, \quad (4.7)$$

где  $\Delta p_{\text{init}}$  — начальная неопределенность импульса осциллятора. Легко видеть, что для ошибки измерения числа квантов (4.4) и возмущения фазы (4.7) выполняется соотношение неопределенностей

$$\begin{aligned} \Delta n_{\text{meas}} \Delta\varphi_{\text{pert}} &= \frac{\sqrt{(\Delta x_{\text{init}})^2 + (\Delta x_{\text{meas}})^2} \Delta p_{\text{init}}}{\hbar} \geq \\ &\geq \frac{\Delta x_{\text{init}} \Delta p_{\text{init}}}{\hbar} \geq \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

В рассмотренной процедуре возмущение фазы электромагнитного резонатора определяется начальной неопределенностью импульса механического осциллятора  $\Delta p_{\text{init}}$ . Однако эта процедура может быть легко модифицирована так, чтобы возмущение фазы не зависело от начальной неопределенности импульса, а было пропорционально его возмущению  $\delta\hat{p}$  при измерении координаты осциллятора. Для этого достаточно после измерения координаты механического осциллятора в момент времени  $\pi/\omega_m$  продлить взаимодействие осциллятора с резонатором до момента времени  $2\pi/\omega_m$ . Тогда на интервале времени от  $\pi/\omega_m$  до  $2\pi/\omega_m$  оператор  $\hat{x}(t)$  будет иметь вид

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= \hat{x} \cos \omega_m t + \frac{\hat{p} + \delta\hat{p}}{m\omega_m} \sin \omega_m t + \\ &+ \frac{\hbar\omega_e(1 - \cos \omega_m t)}{m\omega_m^2 d} \left(\hat{n} + \frac{1}{2}\right), \end{aligned} \quad (4.9)$$

где  $\delta\hat{p}$  — возмущение импульса осциллятора при измерении его координаты. С математической точки зрения  $\delta\hat{p}$  — это оператор в гильбертовом пространстве измерителя координаты, и он, как правило, трактуется как результат действия на осциллятор случайной силы обратного флуктуационного воздействия со стороны измерителя.

Из формул (4.2) и (4.9) следует, что при  $\tau = 2\pi/\omega_m$  слагаемые в (4.5), пропорциональные  $x$  и  $p$ , оба обращаются в нуль, и возмущение фазы будет равно

$$\delta\hat{\varphi} = \frac{2\omega_e}{m\omega_m^2 d} \delta\hat{p}. \quad (4.10)$$

Соотношение неопределенностей (4.8) в данном случае принимает вид

$$\begin{aligned} \Delta n_{\text{meas}} \Delta\varphi_{\text{pert}} &= \frac{\sqrt{(\Delta x_{\text{init}})^2 + (\Delta x_{\text{meas}})^2} \Delta p_{\text{meas}}}{\hbar} \geq \\ &\geq \frac{\Delta x_{\text{meas}} \Delta p_{\text{meas}}}{\hbar} \geq \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

где  $\Delta p_{\text{meas}}$  — неопределенность  $\delta\hat{p}$ .

### 4.3. Измерение "без взаимодействия"

Измерение координаты механического осциллятора может быть, в принципе, осуществлено при помощи прибора, описанного в разделе 3, т.е. "без взаимодействия".

Пусть в начальный момент времени осциллятор был приготовлен в состоянии с волновой функцией  $\psi_0(x)$ , для которой среднее значение координаты  $x$  равно нулю, а неопределенность координаты мала — меньше сдвига координаты под действием силы притяжения, соответствующей одному кванту:

$$\Delta x_{\text{init}} \ll \frac{\hbar\omega_e}{m\omega_m^2 d}. \quad (4.12)$$

Начальную волновую функцию электромагнитного резонатора запишем в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n |n\rangle. \quad (4.13)$$

Тогда, как нетрудно показать, в момент времени  $t = \pi/\omega_m$  система "резонатор + осциллятор" перейдет в "переплетенное" (entangled) состояние

$$\int_0^{\infty} dx \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n \psi_1(x - nX) |n\rangle |x\rangle, \quad (4.14)$$

где  $|x\rangle$  — состояния осциллятора с заданной координатой,

$$\psi_1(x) = \psi_0(-x) \quad (4.15)$$

(инверсия знака  $x$  связана с тем, что при  $t = \pi/\omega_m$  координата осциллятора равна начальной с обратным знаком, см. формулу (4.2)) и

$$X = \frac{2\hbar\omega_e}{m\omega_m^2 d}. \quad (4.16)$$

В состоянии (4.14) точно так же, как и в состоянии (3.13), распределение вероятностей для координаты имеет вид набора неперекрывающихся пиков, расположенных с шагом  $X$ . Поэтому здесь можно применить процедуру измерения "без взаимодействия", после которой система перейдет в одно из состояний

$$|n\rangle \int_0^{\infty} \psi_1(x - nX) |x\rangle dx, \quad (4.17)$$

с вероятностью  $|\Psi_n|^2$ . Важно то, что при этом нельзя говорить о какой-либо случайной силе, действующей на осциллятор со стороны измерителя его координаты (нет слагаемого  $\delta\hat{\phi}$  в формуле (4.9); см. также раздел 3). Фаза электромагнитного резонатора в этот момент будет возмущена за счет начальной неопределенности импульса осциллятора: см. формулы (4.5)–(4.7). Чтобы обратить это возмущение в нуль, достаточно, как было уже отмечено, продлить взаимодействие до момента времени  $2\pi/\omega_m$ ; при этом будет

$$\delta\hat{\phi} = \frac{\omega_e}{d} \int_0^{2\pi/\omega_m} \hat{x}(t) dt \equiv 0. \quad (4.18)$$

В итоге, оба возможных "физических" источника возмущения фазы резонатора — начальная неопределенность импульса осциллятора и возмущение этого импульса при измерении координаты осциллятора — оказываются устранины. Тем не менее резонатор из произвольного начального состояния (4.13) переходит в состояние с заданным числом квантов  $|n\rangle$ , в котором фаза полностью не определена.

Нетрудно усмотреть сходство между рассмотренной процедурой и измерением типа "which-way", которое упоминалось в разделе 3.1. В обоих случаях имеет место селекция одной из компонент начальной волновой функции (в данном примере — одной из волновых функций  $|n\rangle$ , в измерении типа "which-way" — одного из путей пролета частиц) без прямого физического контакта объекта с прибором<sup>2</sup>. В обоих случаях эта селекция сопровождается потерей тонкой интерференционной структуры волновой функции объекта.

## 5. Возможные приложения

### 5.1. Резонатор Фабри–Перо вместо непрозрачного объекта

Разрешающая способность рассмотренной выше схемы  $X$  не может быть меньше ширины светового пучка, которая, в свою очередь, заведомо превышает длину световой волны:  $X \gg \lambda$ . Уменьшить величину  $X$  на несколько порядков можно, используя схему, изображенную на рис. 10. Здесь непрозрачное тело в "северном" плече интерферометра Майкельсона заменено резонатором Фабри–Перо с подвижным задним зеркалом. Данная схема позволяет измерить "без взаимодействия" координату этого зеркала.

Если зеркала резонатора Фабри–Перо имеют одинаковый коэффициент прозрачности  $T_{\text{FP}} \ll 1$  и потери в них отсутствуют, то коэффициент отражения от резонатора

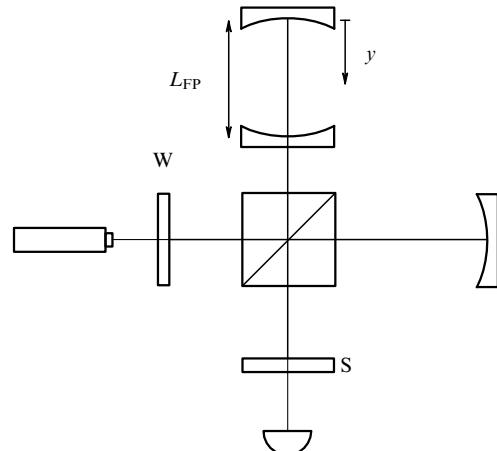


Рис. 10. Схема измерения "без взаимодействия" с резонатором Фабри–Перо вместо непрозрачного объекта.

<sup>2</sup> Это высказывание, как и любые словесные описания квантовых явлений, конечно же, условно: "контакт", безусловно, есть для априорной волновой функции объекта, и его столь же безусловно нет для апостериорной.

будет зависеть от координаты  $y$  заднего зеркала:

$$K_{\text{FP}} = \frac{i(\omega - \omega_0)}{\gamma - i(\omega - \omega_0)} = \frac{iy}{\pi T_{\text{FP}}\lambda - iy}, \quad (5.1)$$

где

$$\omega_0 = \frac{\pi cn}{L_{\text{FP}}} \quad (5.2)$$

— резонансная частота ( $n$  — целое число), а

$$\gamma = \frac{cT_{\text{FP}}}{2L_{\text{FP}}} \quad (5.3)$$

— полуширина полосы пропускания резонатора Фабри–Перо. Здесь начало координат выбрано так, что  $y = 0$  соответствует резонансу.

Мы видим, что при резонансе коэффициент отражения равен нулю, т.е. резонатор Фабри–Перо ведет себя как поглощающее тело. Наоборот, при отстройке, превышающей  $\gamma$ , т.е. при  $y \gg T_{\text{FP}}\lambda$ , коэффициент отражения от резонатора близок к единице и резонатор подобен хорошо отражающему зеркалу.

Таким образом, к рассмотренной схеме применима вся логика измерения "без взаимодействия" предыдущего раздела, однако шаг сканирования  $Y$  здесь ограничен снизу величиной  $T_{\text{FP}}\lambda$ , которая при использовании современных высококачественных зеркал может быть на 4–5 порядков меньше, чем длина световой волны.

## 5.2. Обнаружение "без взаимодействия"

### единичных атомов в резонаторе Фабри–Перо

В заключение отметим возможность использовать схему с резонатором Фабри–Перо для обнаружения "без взаимодействия" единичного атома внутри него. Известно, что если частота одного из переходов атома близка к собственной частоте резонатора Фабри–Перо, то этот атом, находясь внутри резонатора, расщепляет резонансную частоту последнего:

$$\omega_0 \Rightarrow \omega_0 \pm g, \quad (5.4)$$

где  $g$  — частота биений Раби. Если величина отстройки  $g$  превышает полосу пропускания резонатора Фабри–Перо  $\gamma$ , то в результате для квантов с частотой  $\omega_0$  этот резонатор будет вести себя как поглощающий объект при наличии атома внутри него, и как хорошо отражающее зеркало — при отсутствии атома. Для квантов с частотой  $\omega_0 \pm g$  ситуация будет противоположной.

Резонатор Фабри–Перо, удовлетворяющий условию  $g \gg \gamma$ , а также условию  $g \gg \gamma_{\perp}$  ( $\gamma_{\perp}$  — постоянная распада атома с верхнего уровня), также необходимому в такого рода экспериментах, был продемонстрирован в работе [16]. В этой работе использовался резонатор Фабри–Перо с резкостью (*finesse*)  $\mathcal{F}_{\text{FP}} = \pi/T_{\text{FP}} = 4,2 \times 10^5$ . При длине волны рабочего перехода  $\lambda_{\text{atom}} \simeq \lambda_{\text{FP}} = 852,4$  нм, длине резонатора  $L_{\text{FP}} = 44,6$  мкм и ширине луча  $w_0 = 29$  мкм частота биений Раби ридберговского атома цезия составляла

$$g = 2\pi \times 32,2 \times 10^6 \text{ с}^{-1}, \quad (5.5)$$

а значения  $\gamma$  и  $\gamma_{\perp}$  были равны

$$\gamma_{\perp} = 2,6 \times 10^6 \text{ с}^{-1}, \quad (5.6)$$

$$\gamma = \frac{\pi c}{2\mathcal{F}_{\text{FP}}L_{\text{FP}}} \simeq 25,3 \times 10^6 \text{ с}^{-1}. \quad (5.7)$$

Коэффициент отражения, отстроенного на величину  $g$  резонатора Фабри–Перо, при этом лишь незначительно отличался от единицы:

$$|K_{\text{FP}}| = \frac{g}{\sqrt{\gamma^2 + g^2}} \simeq 0,992. \quad (5.8)$$

Этот пример демонстрирует, что современный технологический уровень позволяет обнаруживать "без взаимодействия" единичные атомы.

## 6. Заключение

Измерения "без взаимодействия" являются далеко не единственным примером квантовых измерительных процедур, где получение информации о координате объекта не сопровождается увеличением неопределенности его импульса. В работах [17, 18] было показано, например, что для некоторых начальных состояний объекта неопределенность импульса уменьшается даже после "обычного" измерения координаты. Что же касается собственно возмущения импульса, вычисленного по формуле (3.1), то оно в "обычном" измерении, как нетрудно показать, всегда удовлетворяет соотношению неопределенности  $\langle (\delta p)^2 \rangle / (\Delta x)^2 \geq \hbar^2 / 4$ , где  $(\Delta x)^2$  — ошибка измерения координаты.

Остановимся также кратко на вопросе о предельной точности измерения "без взаимодействия". Как видно из изложенного, если для измерения используется один квант, то эта точность такая же, как и при "обычном" измерении: порядка длины волны света  $\lambda$ , если не используется дополнительный оптический резонатор, и  $\lambda/\mathcal{F}_{\text{FP}}$ , если используется ( $\mathcal{F}_{\text{FP}}$  — резкость резонатора). В "обычных" измерениях точность может быть повышена за счет увеличения числа оптических квантов  $N$ ,  $\Delta x \propto 1/\sqrt{N}$  для когерентного состояния оптического поля и  $\Delta x \propto 1/N$  для оптимальным образом приготовленного неклассического состояния. В измерении "без взаимодействия" это тоже возможно, за счет усложнения протокола измерения. Однако мы хотели бы еще раз подчеркнуть, что ценность измерения "без взаимодействия" состоит не в каких-либо дополнительных преимуществах для конкретных экспериментов, а в том, что оно способствует более глубокому пониманию квантовой теории измерений и квантовой физики в целом.

Данная работа была поддержанна Институтом квантовой информации Калифорнийского технологического института, грантом РФФИ № 03-02-16975-а и государственными контрактами Министерства промышленности и науки РФ № 40.02.1.1.1137 и 40.700.12.0086.

Авторы выражают глубокую благодарность В.Б. Брагинскому и М.Б. Менскому за плодотворные дискуссии, приведшие к написанию данной работы. Один из авторов (Ф.Я. Халили) выражает также глубокую признательность Г. Вальтеру и Б.-Г. Энглерту за чрезвычайно интересные обсуждения оснований квантовой теории.

## 7. Приложения

### 7.1. Схема измерения "без взаимодействия"

с квантовой эффективностью, близкой к единице

**7.1.1. Амплитуды поля.** Обозначим амплитуды полей, падающих на центральный светофильтр и отражающиеся от него, как показано на рис. 11 (по сторонам света). Пусть амплитудные коэффициенты отражения и пропускания светофильтра равны  $-r$  и  $it$ , а коэффициенты отражения и пропускания "западного" и "южного" зеркал  $-rw$ ,  $itw$  и  $-rs$ ,  $its$  соответственно. "Северное" и "восточное" зеркало будем предполагать идеально отражающими. Будем полагать, что в "восточном" плече в проходящий свет вносится сдвиг фазы  $\pi/2$  (умножение на  $i$ ), а в "южном" —  $-\pi/2$  (умножение на  $-i$ ). Это необходимо для обеспечения режима темного поля на фотодетекторе. Введем также обозначения

$$\mathcal{R}_W = -rw \exp(2i\omega\tau_1), \quad (7.1a)$$

$$\mathcal{R}_S = -rs \exp(2i\omega\tau_1), \quad (7.1b)$$

$$\mathcal{R}_N = -r_N \exp(2i\omega\tau_2), \quad (7.1c)$$

$$\mathcal{R}_E = -\exp(2i\omega\tau_2), \quad (7.1d)$$

где  $r_N = 0$  при наличии поглощающего объекта и  $r_N = 1$  при отсутствии,  $\omega$  — частота света,  $\tau_{1,2} = L_{1,2}/c$ ,  $L_1$  — длина "западного" и "южного" плеч, а  $L_2$  — "северного" и "восточного".

Уравнения для амплитуд полей в этом случае можно записать в виде

$$A_W = \mathcal{R}_W B_W + a_0, \quad B_W = -r A_N - t A_E, \quad (7.2a)$$

$$A_S = \mathcal{R}_S B_S, \quad B_S = -r A_E + t A_N, \quad (7.2b)$$

$$A_N = \mathcal{R}_N B_N, \quad B_N = -r A_W + t A_S, \quad (7.2c)$$

$$A_E = \mathcal{R}_E, \quad B_E = -r A_S - it A_W, \quad (7.2d)$$

$$B_0 = -rw A_0 + itw B_W \exp(i\omega\tau_1), \quad (7.2e)$$

$$B_D = its B_S \exp(i\omega\tau_1), \quad (7.2f)$$

где  $a_0 = itw \exp(i\omega L_1) A_0$ . Решение этой системы уравнений

$$A_W = \frac{a_0}{D} (1 - r^2 \mathcal{R}_S \mathcal{R}_E - t^2 \mathcal{R}_S \mathcal{R}_N), \quad (7.3a)$$

$$B_W = \frac{a_0}{D} (r^2 \mathcal{R}_N + t^2 \mathcal{R}_E - \mathcal{R}_S \mathcal{R}_N \mathcal{R}_E), \quad (7.3b)$$

$$\frac{A_S}{\mathcal{R}_S} = B_S = \frac{rta_0(\mathcal{R}_E - \mathcal{R}_N)}{D}, \quad (7.3c)$$

$$\frac{A_N}{\mathcal{R}_N} = B_N = \frac{ra_0(-1 + \mathcal{R}_S \mathcal{R}_E)}{D}, \quad (7.3d)$$

$$\frac{A_E}{\mathcal{R}_E} = B_E = \frac{ta_0(-1 + \mathcal{R}_S \mathcal{R}_N)}{D}, \quad (7.3e)$$

$$B_0 = \frac{A_0}{D} [-rw + (-r^2 \mathcal{R}_N - t^2 \mathcal{R}_E + \mathcal{R}_S \mathcal{R}_N \mathcal{R}_E) \exp(2i\omega\tau_1) + r_w \mathcal{R}_S (r^2 \mathcal{R}_E + t^2 \mathcal{R}_N)], \quad (7.3f)$$

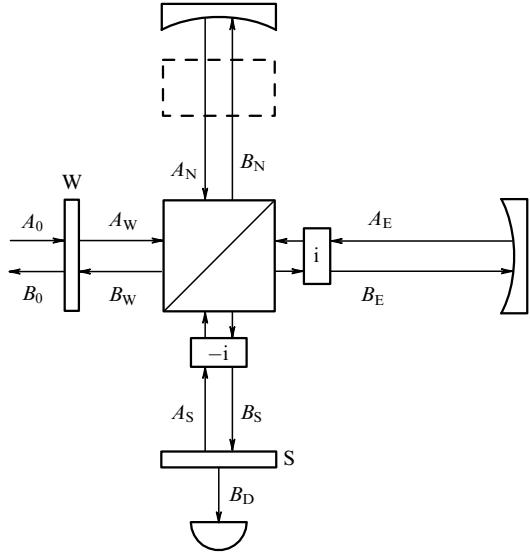


Рис. 11. К расчету минимальной поглощаемой энергии в измерении "без взаимодействия".

где

$$\begin{aligned} \mathcal{D} = 1 - r^2 (\mathcal{R}_W \mathcal{R}_N + \mathcal{R}_S \mathcal{R}_E) - t^2 (\mathcal{R}_W \mathcal{R}_E + \mathcal{R}_S \mathcal{R}_N) + \\ + \mathcal{R}_W \mathcal{R}_S \mathcal{R}_N \mathcal{R}_E. \end{aligned} \quad (7.4)$$

**7.1.2. Нет поглощающего объекта.** При отсутствии поглощающего объекта

$$\mathcal{R}_N = \mathcal{R}_E = -\exp(2i\omega\tau_2), \quad (7.5)$$

и, соответственно,

$$B_S = 0 \Rightarrow B_D = 0, \quad (7.5a)$$

$$B_0 = \frac{-rw + \exp(2i\omega\tau_{12})}{1 - rw \exp(2i\omega\tau_{12})} A_0, \quad (7.5b)$$

где  $\tau_{12} = \tau_1 + \tau_2$ . То есть в этом случае все кванты гарантированно отражаются обратно в лазер ( $|B_0|^2 = |A_0|^2$ ).

**7.1.3. Есть поглощающий объект.** При наличии поглощающего объекта ( $\mathcal{R}_N = 0$ ) для амплитуд  $B_N$ ,  $B_0$  и  $B_D$  будут справедливы следующие выражения:

$$K_N \equiv \frac{B_N}{A_0} = \frac{irtw[-1 + rs \exp(2i\omega\tau_{12})]}{1 - (r^2 rs + t^2 rw) \exp(2i\omega\tau_{12})}, \quad (7.6a)$$

$$K_0 \equiv \frac{B_0}{A_0} = \frac{-rw + (t^2 + r^2 rs rw) \exp(2i\omega\tau_{12})}{1 - (r^2 rs + t^2 rw) \exp(2i\omega\tau_{12})}, \quad (7.6b)$$

$$K_D \equiv \frac{B_D}{A_0} = \frac{rt tw \exp(2i\omega\tau_{12})}{1 - (r^2 rs + t^2 rw) \exp(2i\omega\tau_{12})}. \quad (7.6c)$$

Величина  $K_D$  максимальна, если выполняется условие согласования

$$r^2 = \frac{1 - rw}{2 - rw - rs} \Leftrightarrow t^2 = \frac{1 - rs}{2 - rw - rs}. \quad (7.7)$$

При этом будет:

$$|K_N|^2 = \frac{(1+r_W)(2-r_S-r_W)}{4\mathcal{D}_0} \left( 1 + \frac{4r_S}{(1-r_S)^2} \sin^2 \omega \tau_{12} \right), \quad (7.8a)$$

$$|K_0|^2 = \frac{1}{4\mathcal{D}_0} \left[ (1-r_W)^2 + 4r_W \left( \frac{1}{1-r_S} + \frac{1}{1-r_W} \right) \times \right. \\ \left. \times \left( \frac{1}{1-r_S} + \frac{r_S r_W}{1-r_W} \right) \sin^2 \omega \tau_{12} \right], \quad (7.8b)$$

$$|K_D|^2 = \frac{(1+r_S)(1+r_W)}{4\mathcal{D}_0}, \quad (7.8b)$$

где

$$\mathcal{D}_0 = 1 + \left( \frac{1}{1-r_S} + \frac{1}{1-r_W} \right) \left( \frac{r_S}{1-r_S} + \frac{r_S}{1-r_W} \right) \sin^2 \omega \tau_{12}. \quad (7.8c)$$

Положим, что коэффициенты отражения "западного" и "южного" зеркал близки к единице,

$$r_{S,W} \approx 1 - \frac{T_{S,W}}{2}, \quad T_{S,W} = t_{S,W}^2 \ll 1, \quad (7.9a)$$

средняя частота светового импульса  $\omega_0$  соответствует резонансу,

$$\sin \omega_0 \tau_{12} = 0, \quad (7.9b)$$

а длина светового импульса много больше, чем геометрический размер интерферометра,

$$|\Omega| \equiv |\omega - \omega_0| \ll \frac{1}{\tau_{12}}. \quad (7.9c)$$

В этом случае формулы (7.8) принимают вид:

$$|K_N|^2 \approx \frac{T_S + T_W}{4\mathcal{D}_0} \left( 1 + \frac{16\Omega^2 \tau_{12}^2}{T_S^2} \right), \quad (7.10a)$$

$$|K_0|^2 \approx \frac{\Omega^2 \tilde{\tau}^2}{\mathcal{D}_0}, \quad (7.10b)$$

$$|K_D|^2 \approx \frac{1}{\mathcal{D}_0}, \quad (7.10c)$$

$$\mathcal{D}_0 = 1 + \Omega^2 \tilde{\tau}^2, \quad (7.10d)$$

где

$$\tilde{\tau} = 2 \left( \frac{1}{T_S} + \frac{1}{T_W} \right) \tau_{12} \quad (7.11)$$

— обратная ширина полосы пропускания интерферометра.

Для того, чтобы вероятности нейтрального и отрицательного результата были малы, необходимо, чтобы ширина полосы частот светового импульса  $\tau^{-1}$  была много меньше, чем ширина полосы пропускания интерферометра:

$$\tau \gg \tilde{\tau} \Leftrightarrow \Omega \tilde{\tau} \ll 1. \quad (7.12)$$

При этом будет

$$|K_N|^2 \approx p_- \approx \frac{T_S + T_W}{4}, \quad (7.13a)$$

$$|K_0|^2 \approx \Omega^2 \tilde{\tau}^2 \Leftrightarrow p_0 \approx \frac{\tilde{\tau}^2}{\tau^2}. \quad (7.13b)$$

Средняя энергия, поглощаемая объектом в расчете на один использованный фотон, при этом будет равна

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \hbar \omega_0 p_- = \hbar \omega_0 \frac{T_S + T_W}{4}. \quad (7.14)$$

В силу формулы (7.12) и очевидного условия  $\omega_0 \tau_{12} \gg 1$  отсюда следует, что

$$\langle \mathcal{E} \rangle > \frac{\hbar}{\tau_{12}} \frac{(T_S + T_W)}{4} = \frac{\hbar}{\tilde{\tau}} \left( \frac{1}{T_S} + \frac{1}{T_W} \right) \frac{T_S + T_W}{4} > \frac{\hbar}{\tilde{\tau}} > \frac{\hbar}{\tau}. \quad (7.15)$$

## 7.2. Доказательство формул (3.8) и (3.12)

Если  $|\psi_{\text{apr}}\rangle$  — начальная волновая функция объекта, а  $|\psi_{\text{meter}}\rangle$  — измерителя, то формула (3.1) может быть записана в виде

$$\langle (\delta \hat{p})^2 \rangle = \langle \psi_{\text{apr}} | \langle \psi_{\text{meter}} | (\hat{\mathcal{U}}^+ \hat{p} \hat{\mathcal{U}} - \hat{p})^2 | \psi_{\text{meter}} \rangle | \psi_{\text{apr}} \rangle. \quad (7.16)$$

Пусть  $\hat{k}$  — оператор той наблюданной измерителя, которая непосредственно регистрируется в схемах, рассмотренных в разделе 3. Этот оператор имеет дискретный спектр собственных значений ( $k = 0, 1$  в схеме "да-нет" измерения раздела 3.1 и  $k = 0, 1, \dots$  в схеме измерения дискретизированной координаты раздела 3.2) и соответствующий дискретный набор собственных состояний  $\{|k\rangle\}$ , удовлетворяющий условию полноты

$$\sum_k |k\rangle \langle k| = 1. \quad (7.17)$$

С использованием этого условия формула (7.16) может быть переписана как

$$\begin{aligned} \langle (\delta \hat{p})^2 \rangle &= \sum_k \langle \psi_{\text{apr}} | (\langle \psi_{\text{meter}} | \hat{\mathcal{U}}^+ | k \rangle \hat{p}^2 \langle k | \hat{\mathcal{U}} | \psi_{\text{meter}} \rangle - \\ &- \langle \psi_{\text{meter}} | \hat{\mathcal{U}}^+ | k \rangle \hat{p} \langle k | \hat{\mathcal{U}} | \psi_{\text{meter}} \rangle \hat{p} - \\ &- \hat{p} \langle \psi_{\text{meter}} | \hat{\mathcal{U}}^+ | k \rangle \hat{p} \langle k | \hat{\mathcal{U}} | \psi_{\text{meter}} \rangle + \\ &+ \hat{p} \langle \psi_{\text{meter}} | \hat{\mathcal{U}}^+ | k \rangle \langle k | \hat{\mathcal{U}} | \psi_{\text{meter}} \rangle \hat{p}) | \psi_{\text{apr}} \rangle = \\ &= \sum_k \langle \psi_{\text{apr}} | (\hat{\Omega}_k^+ \hat{p}^2 \hat{\Omega}_k - \hat{p} \hat{\Omega}_k^+ \hat{p} \hat{\Omega}_k - \\ &- \hat{\Omega}_k^+ \hat{p} \hat{\Omega}_k \hat{p} + \hat{p} \hat{\Omega}_k^+ \hat{\Omega}_k \hat{p}) | \psi_{\text{apr}} \rangle, \end{aligned} \quad (7.18)$$

где

$$\hat{\Omega}_k \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |x\rangle \Omega_k(x) \langle x| dx = \langle k | \hat{\mathcal{U}} | \psi_{\text{meter}} \rangle \quad (7.19)$$

— операторы редукции для рассматриваемого измерения.

В координатном представлении формула (7.18) принимает вид:

$$\begin{aligned} \langle (\delta\hat{p})^2 \rangle &= \hbar^2 \sum_k \int_{-\infty}^{\infty} \left( \left| \frac{d\Omega_k(x)\psi_{\text{apr}}(x)}{dx} \right|^2 - \right. \\ &\quad - \psi_{\text{apr}}^*(x)\Omega_k^*(x) \frac{d\Omega_k(x)\psi_{\text{apr}}(x)}{dx} - \\ &\quad - \frac{d\Omega_k^*(x)\psi_{\text{apr}}^*(x)}{dx} \Omega_k(x)\psi_{\text{apr}}(x) + \\ &\quad \left. + |\Omega_k(x)|^2 \left| \frac{d\psi_{\text{apr}}(x)}{dx} \right|^2 \right) dx = \\ &= \hbar^2 \sum_k \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d\Omega_k(x)}{dx} \right|^2 |\psi_{\text{apr}}(x)|^2 dx. \end{aligned} \quad (7.20)$$

### 7.3. Координатная и импульсная волновые функции в дискретизированном состоянии

Рассмотрим состояние с волновой функцией, равной в координатном представлении

$$\psi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Psi_n \psi_1(x - nX) \approx \sqrt{X} \Psi(x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_1(x - nX), \quad (7.21)$$

где функция  $\psi_1(x - nX)$  отлична от нуля только при  $0 < x < X$ ,

$$\Psi_k = \sqrt{X} \Psi \left( kX + \frac{X}{2} \right), \quad (7.22)$$

а  $\Psi(x)$  — огибающая, мало изменяющаяся на интервале  $X$  (рис. 8а). Вычислим вид этой волновой функции в импульсном представлении

$$\begin{aligned} \phi(p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Psi_n \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(x - nX) \exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right) dx = \\ &= \phi_1(p) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Psi_n \exp\left(\frac{ipnX}{\hbar}\right), \end{aligned} \quad (7.23)$$

где

$$\phi_1(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(x) \exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right) dx. \quad (7.24)$$

Второй сомножитель в формуле (7.23) является периодической функцией с периодом  $P = 2\pi\hbar/X$ :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \Psi_n \exp\left(\frac{ipnX}{\hbar}\right) = \sqrt{P} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi(p - kP), \quad (7.25)$$

#### 'Interaction-free' measurement: its potentials and limitations

**S.P. Vyatchanin, F.Ya. Khalili**

*M.V. Lomonosov Moscow State University, Physics Department,  
Vorob'evy Gory, 119899 Moscow, Russian Federation  
Tel. (7-095) 939-44 28, (7-095) 939-12 24. Fax (7-095) 932-88 20  
E-mail: vyat@hbar.phys.msu.ru, farid@hbar.phys.msu.su*

The highly intriguing quantum effect called 'interaction-free' measurement allows detection of a light-absorbing object in a given region of space with the probability of photon absorption by the object being in principle arbitrarily small down to a value of order  $\omega\tau$  (with  $\omega$  the light frequency and  $\tau$  the measurement time). This value corresponds to the average absorbed energy of order  $\hbar/\tau$ . Using 'interaction-free' measurement, it is possible to measure the coordinate of the object, provided only that this latter is prepared in a special 'discretized' quantum state. Such a state is, for example, created automatically in the ponderomotive electromagnetic energy meter. Estimates show that with current experimental technology individual atoms inside Fabry-Pérot cavities can be detected in an 'interaction-free' way.

PACS numbers: 03.65.Ta, 03.67.-a, 42.50.Tv  
Bibliography — 19 references

где функция  $\Phi(p)$  отлична от нуля только на интервале  $|p| < P/2$ . Кроме того, поскольку значения коэффициентов  $\Psi_n$  при изменении индекса на единицу изменяются мало, суммирование в формуле (7.23) может быть заменено интегрированием:

$$\Phi(p) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x) \exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right) dx. \quad (7.26)$$

В итоге получим:

$$\phi(p) = \sqrt{P} \phi_1(p) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi(p - kP). \quad (7.27)$$

То есть волновая функция в импульсном представлении имеет такой же вид, как и в координатном, но роль медленно меняющейся огибающей теперь играет спектр  $\phi_1(p)$  узкой функции  $\psi_1(p)$ , а роль узкого пика, периодическим повторением которого образуется волновая функция — спектр  $\Phi(p)$  медленно меняющейся огибающей  $\Psi(y)$ .

#### Список литературы

1. Elitzur A, Vaidman L *Found. Phys.* **23** 987 (1993)
2. Баумейстер Д, Экерт А, Цайлингер А *Физика квантовой информации* (М.: Постмаркет, 2002)
3. White A G et al. *Phys. Rev. A* **58** 605 (1998)
4. Kwiat P G et al. *Phys. Rev. Lett.* **83** 4725 (1999)
5. Kwiat P G et al. *Phys. Rev. Lett.* **74** 4763 (1995)
6. du Marchie van Voorthuysen E H *Am. J. Phys.* **64** 1504 (1996)
7. Hafner M, Summhammer J *Phys. Lett. A* **235** 563 (1997)
8. Брагинский В Б, Воронцов Ю И, Халили Ф Я *ЖЭТФ* **73** 1340 (1977)
9. фон Нейман И *Математические основы квантовой механики* (М.: Наука, 1964)
10. Braginsky V B, Khalili F Ya *Quantum Measurement* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992)
11. Менский М Б *Квантовые измерения и декогеренция* (М.: Физматлит, 2001)
12. Braginsky V B et al. *Phys. Rev. D* **67** 082001 (2003)
13. Scully M O, Englert B-G, Walther H *Nature* **351** 111 (1991)
14. Luis A, Sánchez-Soto L L *Phys. Rev. Lett.* **81** 4031 (1998)
15. Englert B-G, Scully M O, Walther H *J. Mod. Opt.* **47** 2213 (2000)
16. Ye J, Vernooy D W, Kimble H J, quant-ph/9908007
17. Воронцов Ю И *Вестник Моск. унив. Сер. 3. Физ. Астрон.* (6) 7 (1998)
18. Воронцов Ю И *Вестник Моск. унив. Сер. 3. Физ. Астрон.* (1) 23 (1999)
19. Воронцов Ю Н *Теория и методы макроскопических измерений* (М.: Наука, 1989)