Июнь 2004 г. **Том 174, № 6**

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ИЗ ИСТОРИИ ФИЗИКИ

Как были открыты уравнения Гильберта – Эйнштейна?

А.А. Логунов, М.А. Мествиришвили, В.А. Петров

В работе прослеживаются пути, которыми А. Эйнштейн и Д. Гильберт независимо пришли к уравнениям гравитационного поля. Дан критический анализ ряда работ, где выдвигается точка зрения, которая "радикально отличается от стандартной точки зрения" на историю вывода уравнений гравитационного поля. Показана полная несостоятельность выводов этих работ.

PACS numbers: **01.65.+g**, 04.20.Cv, 04.20.Fy

Содержание

1. Введение

После исследований Д. Ирмена и К. Глимура [1] стало ясно, что уравнения общей теории относительности А. Эйнштейна найдены почти одновременно, но разными методами, Д. Гильбертом и А. Эйнштейном.

В 1997 году в журнале *Science* появилась статья под названием "Запоздалое решение в споре Гильберта – Эйнштейна о приоритете" [2], авторы которой утверждают, "что сведения о результате Эйнштейна могли быть решающими для введения Гильбертом следового члена в свои полевые уравнения". На этом основании они выдвигают свою точку зрения "радикально иную, чем стандартная точка зрения", которую пространно излагают в работе [3]. Согласно стандартной точке зрения Эйнштейн и Гильберт независимо друг от друга и разными путями открыли уравнения гравитационного поля. Этому же вопросу посвящена опубликованная в *УФН* в 2001 г. статья [4]. О чем идет речь? В работе Эйнштейна [5] даны уравнения гравитационного поля

$$\sqrt{-g}R_{\mu\nu} = -\varkappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}T\right),$$

где $g_{\mu\nu}$ — метрический тензор, $R_{\mu\nu}$ — тензор Риччи, $T_{\mu\nu}$ — плотность тензора энергии-импульса вещества, T — след плотности тензора $T_{\mu\nu}$,

$$T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}\,.$$

Авторы статьи [2] утверждают, что Гильберт, познакомившись с этими уравнениями и увидев "следовый член" $(1/2)g_{\mu\nu}T$, якобы тоже "ввел" после этого в свои уравнения [6]

$$\sqrt{g}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}R\right) = -\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial g^{\mu\nu}} \qquad (1)$$

"следовый член" (в данном случае $(1/2)g_{\mu\nu}R$, где след $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$).

Посмотрим, в какие же полевые уравнения Гильберту, по мнению авторов [2], понадобилось "вводить следовый член". Авторы работы [2] не учитывают, что в подходе Гильберта в принципе ничего нельзя "вводить", поскольку все точно определено введенной им мировой функцией (лагранжианом)

$$H = R + L\,,$$

которая в рамках принципа наименьшего действия является ключевой для построения гравитационных уравнений. По существу, теория построена, если найдена мировая функция.

Свое открытие авторы [2] произвели на свет, познакомившись с гранками статьи Гильберта (в которых, кстати, недостает некоторых частей (см. [7], где, в частности, приведена сохранившаяся часть гранок)), и увидев, что уравнения гравитационного поля приведены там в форме вариационной производной от $[\sqrt{g}R]$ по $g^{\mu\nu}$:

$$\frac{\partial\sqrt{g}R}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_k\,\frac{\partial\sqrt{g}R}{\partial g^{\mu\nu}_k} + \partial_k\partial_\ell\,\frac{\partial\sqrt{g}R}{\partial g^{\mu\nu}_{k\ell}} = -\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial g^{\mu\nu}}\,, \qquad (2)$$

но нет уравнений в виде (1). Отсюда они сделали вывод, что Гильберт не имел уравнений гравитации в форме (1).

Но даже если это было и так, то все равно Гильберту ничего не нужно было "вводить" дополнительно, по-

А.А. Логунов, М.А. Мествиришвили, В.А. Петров. Государственный научный центр "Институт физики высоких энергий",
142281 Протвино, Московская обл., Российская Федерация
Тел. (0967) 742-259. Факс (0967) 745-824
E-mail: Anatoly.Logunov@mail.ihep.ru, Vladimir.Petrov@ihep.ru

Статья поступила 5 февраля 2004 г.

скольку (2) точно переходит в (1) после довольно тривиальных вычислений. *Все обстоит, однако, не так, как пишут авторы* [2]. Для того чтобы показать, что утверждение авторов [2] не имеет под собой никаких сколько-нибудь серьезных оснований, нам придется изложить суть работы Д. Гильберта (см. раздел 2).

На основе идеи Эйнштейна об эквивалентности ускоренного движения и гравитации в его совместной с М. Гроссманом статье 1913 г. [8] гравитационное поле было отождествлено с метрическим тензором псевдориманова (в дальнейшем риманова) пространства. Так было введено тензорное гравитационное поле. В этой статье А. Эйнштейн на основе простой модели формулирует общий закон сохранения энергии-импульса

$$\partial_\nu\left(\sqrt{-g}\,\Theta_\sigma^{\,\nu}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{-g}\,\Theta_{\mu\nu}\partial_\sigma g^{\mu\nu} = 0\,. \tag{3}$$

"Первые три из этих соотношений ($\sigma = 1, 2, 3$) выражают закон сохранения импульса, последнее ($\sigma = 4$) — закон сохранения энергии", — пишет Эйнштейн. Здесь $\Theta_{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса вещества. Необходимо отметить, что такой *закон сохранения энергии-импульса для любой материальной системы* здесь вводится Эйнштейном пока еще на уровне естественного физического предположения. В этой же статье М. Гроссман показывает, что выражение (3) ковариантно относительно произвольных преобразований и может быть записано в форме

$$\nabla_\nu \Theta_\sigma^{\,\nu} = 0\,, \tag{4}$$

здесь ∇_ν — ковариантная производная относительно метрики $g_{\mu\nu}$. В этой работе Эйнштейном была поставлена задача построения уравнений гравитации вида

$$\Gamma_{\mu\nu} = \varkappa\,\Theta_{\mu\nu}\,, \tag{5}$$

где $\Gamma_{\mu\nu}$ — тензор, составленный из метрики и ее производных. Из этих уравнений должно следовать соотношение (3). Отметим, что в части статьи, написанной Гроссманом, обсуждается вопрос об использовании в качестве $\Gamma_{\mu\nu}$ тензора Риччи $R_{\mu\nu}$, который мог бы входить в уравнение (5).

М. Гроссман пишет: "Однако в частном случае бесконечно слабого статического поля тяжести этот тензор *не сводится* к $\Delta\varphi$. Поэтому вопрос о том, как далеко простирается связь проблемы уравнений гравитационного поля и общей теории дифференциальных тензоров, связанных с гравитационным полем, остается открытым".

В дальнейшем Эйнштейн, следуя своим представлениям, ищет величину $\Gamma_{\mu\nu}$ как тензор, но только относительно произвольных *линейных преобразований*. По этому пути он будет идти до ноября 1915 г. В конце июня – начале июля 1915 г. Эйнштейн провел около недели в Геттингене и, как он вспоминал, "прочитал там шесть двухчасовых лекций". Очевидно, что после этой встречи Гильберт заинтересовался данной проблемой. Постановка задачи *Эйнштейном*, а также объявление *им* потенциалами гравитации метрического тензора риманова пространства $g_{\mu\nu}$ и явились ключевыми для Гильберта. Этого ему было достаточно для нахождения уравнений гравитационного поля исходя из принципа наименьшего действия (аксиома I Гильберта) и своих глубоких знаний в области теории инвариантов. Все это непосредственно видно из статьи Гильберта [6]. В разделе 2 мы изложим подход Гильберта к получению уравнений гравитационного поля, а также проведем критический анализ статей [2 – 4], посвященный этому же вопросу, а в разделе 3 изложим подход Эйнштейна к получению тех же уравнений поля.

2. Подход Гильберта

Рассмотрим внимательно его подход [6]. Гильберт формулирует аксиому I: "*Закон физического события определяется мировой функцией H, аргументы которой таковы*:

$$g_{\mu\nu},\, g_{\mu\nu\ell} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\ell}\,, \qquad g_{\mu\nu\ell k} = \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\ell \partial x^k}\,,$$

$$q_s,\, q_{s\ell} = \frac{\partial q_s}{\partial x^\ell} \qquad (\ell, k = 1, 2, 3, 4)\,,$$

причем вариация интеграла[1]

$$\int H\sqrt{g}\;\mathrm{d}\omega \tag{6}$$

$$\left(g = |g_{\mu\nu}|\,, \quad \mathrm{d}\omega = \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3\,\mathrm{d}x_4\right)$$

обращается в нуль для каждого из 14 потенциалов $g_{\mu\nu}$ и q_s". Далее он пишет: "Что же касается мировой функции H, то для ее однозначного определения требуются дополнительные аксиомы. Если в уравнения гравитации могут входить лишь вторые производные потенциалов $g^{\mu\nu}$, то функция H должна иметь вид

$$H = R + L\,, \tag{7}$$

где R — инвариант, следующий из тензора Римана (скалярная кривизна четырехмерного многообразия):

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\,, \tag{8}$$

$$R_{\mu\nu} = \partial_\nu\Gamma^\alpha_{\mu\alpha} - \partial_\alpha\Gamma^\alpha_{\mu\nu} + \Gamma^\lambda_{\mu\alpha}\Gamma^\alpha_{\lambda\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\lambda\alpha}\,, \tag{9}$$

а L — функция только переменных $g^{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}_\ell$, q_s и q_{sk}. В дальнейшем мы, кроме того, примем для простоты, что L не зависит от $g^{\mu\nu}_\ell$".

И в этой же работе Гильберт пишет: "Из аксиомы I при варьировании по 10 гравитационным потенциалам следуют 10 дифференциальных уравнений Лагранжа

$$\frac{\partial\sqrt{g}R}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_k\,\frac{\partial\sqrt{g}R}{\partial g^{\mu\nu}_k} + \partial_k\partial_\ell\,\frac{\partial\sqrt{g}R}{\partial g^{\mu\nu}_{k\ell}} = -\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial g^{\mu\nu}}\text{''}. \tag{10}$$

Из соотношений (8) и (9) легко увидеть, что *как в R, так и в $R_{\mu\nu}$ производные второго порядка входят только линейно. Тензорами второго ранга с такими свойствами являются*

$$R_{\mu\nu} \quad \text{и} \quad g_{\mu\nu}R\,. \tag{10a}$$

---

[1] Здесь и ниже (если это специально не оговорено) мы изменяем номера формул в цитатах в соответствии с нашей нумерацией. В работе [6] Гильберт пользуется для тензора Риччи и скалярной кривизны обозначениями $K_{\mu\nu}$ и K. Мы используем для них, а также для других величин современные обозначения. {*Примеч. А.А.Л., М.А.М., В.А.П.*)

Все другие тензоры с такими свойствами получаются только комбинацией из этих тензоров.

Это заключение в какой-то степени было уже известно Эйнштейну, и он, отмечая тензоры второго ранга, которые могут приводить к уравнениям гравитации с производными не выше второго порядка, в письме от 19 января 1916 г. к Г.А. Лоренцу писал, что "помимо тензоров

$$R_{\mu\nu} \quad \text{и} \quad g_{\mu\nu} R$$

нет (произвольных ковариантных) тензоров..." [9]. Гильберту как математику все это было просто очевидно.

Для краткости, следуя Гильберту, обозначим левую часть уравнения символом

$$[\sqrt{g}R]_{\mu\nu} = \frac{\partial\sqrt{g}R}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_k \, \frac{\partial\sqrt{g}R}{\partial g^{\mu\nu}_k} + \partial_k \partial_\ell \, \frac{\partial\sqrt{g}R}{\partial g^{\mu\nu}_{k\ell}} \, . \tag{11}$$

Тогда уравнение (10) принимает вид

$$[\sqrt{g}R]_{\mu\nu} = -\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial g^{\mu\nu}} . \tag{12}$$

Заметим, что в методе Гильберта получения уравнений гравитации не требуется какая-либо конкретизация функции Лагранжа материальной системы. *Гильберт в статье* [6] *в теореме* II (*см. приложение*) *устанавливает тождество*:

$$\delta_{\mathrm{L}}(\sqrt{g}\,J) + \partial_\lambda(\delta x^\lambda \sqrt{g}\,J) = 0 \, , \tag{12a}$$

где δ_{L} — вариация Ли, J — произвольная инвариантная функция относительно преобразований координат. Это тождество он использует при получении уравнений (48).

Далее *Гильберт доказывает очень важную теорему* III (см. приложение): "Пусть J — инвариант, зависящий только от компонент $g^{\mu\nu}$ и их производных, а через $[\sqrt{g}\,J]_{\mu\nu}$, как и прежде, обозначены вариационные производные от $\sqrt{g}\,J$ по $g^{\mu\nu}$. Тогда, если $h^{\mu\nu}$ — любой контравариантный тензор, то величина

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \, [\sqrt{g}\,J]_{\mu\nu} \, h^{\mu\nu} \tag{13}$$

также будет инвариантом; если подставить в эту сумму вместо $h^{\mu\nu}$ стандартный тензор $p^{\mu\nu}$ и написать

$$[\sqrt{g}\,J]_{\mu\nu} \, p^{\mu\nu} = (i_s \, p^s + i_s^\ell \, p_\ell^s) \, , \tag{14}$$

где конструкции

$$i_s = [\sqrt{g}\,J]_{\mu\nu} \partial_s \, g^{\mu\nu} \, , \tag{15}$$

$$i_s^\ell = -2[\sqrt{g}\,J]_{\mu s} \, g^{\mu\ell} \tag{16}$$

зависят только от $g^{\mu\nu}$ и их производных, то

$$i_s = \frac{\partial i_s^\ell}{\partial x^\ell} \, , \tag{17}$$

причем данное уравнение выполняется тождественно для всех аргументов, а именно для $g^{\mu\nu}$ и их производных".

Гильберт применяет эту теорему к случаю, когда $J = R$. Тогда тождество (17) принимает вид

$$\partial_\ell \big\{ [\sqrt{g}R]_s^\ell \big\} + \frac{1}{2} [\sqrt{g}R]_{\mu\nu} \, \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^s} \equiv 0 \, . \tag{18}$$

Это тождество по виду аналогично выражению (3), а следовательно, его можно также записать в форме (4):

$$\nabla_\ell \, [\sqrt{g}R]_s^\ell \equiv 0 \, . \tag{19}$$

Отсюда мы видим, что ковариантная производная от вариационной производной $[\sqrt{g}R]_s^\ell$ равна нулю. Таким образом, на основании (12) имеем

$$\nabla^\ell \left\{ \frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial g^{s\ell}} \right\} = 0 \, . \tag{20}$$

Согласно Гильберту плотность тензора энергии-импульса материальной системы $T_{\mu\nu}$ определяется следующим образом:

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial g^{\mu\nu}} \, , \tag{21}$$

и равенство (20) записывается как закон ковариантного сохранения тензора энергии-импульса материальной системы

$$\nabla_\nu T_\mu^\nu = 0 \, . \tag{22}$$

Именно Гильберт впервые дал определение (21) плотности тензора энергии-импульса материальной системы и показал, что эта плотность удовлетворяет уравнению (22); тем самым он обосновал предположение Эйнштейна, сделанное в статье [8]. Таким образом, Гильберт *нашел уравнение гравитационного поля*[2]:

$$[\sqrt{g}R]_{\mu\nu} = -\varkappa \, T_{\mu\nu} \, , \tag{23}$$

из которого *точно следует ковариантный закон сохранения энергии-импульса* (22).

Умножая обе части уравнения (23) на $g^{\mu\nu}$ и суммируя по индексам μ и ν, получим

$$g^{\mu\nu} [\sqrt{g}R]_{\mu\nu} = -\varkappa \, T \, . \tag{24}$$

В левой части уравнения (24) образовался инвариант, в который вторые производные входят линейно. Но такой инвариант только один — R. Отсюда получим уравнение

$$\sqrt{g} \, \beta R = -\varkappa \, T \, , \tag{25}$$

где β — произвольная постоянная.

Таким образом, подводя итог, можно сказать, что *Гильбертом были найдены уравнения гравитационного поля и тем самым решена задача, которую поставил Эйнштейн в 1913 г.* Уравнения (23) тождественны уравнениям (1). Они отличаются только по форме. Ниже мы увидим, как, следуя Гильберту, уравнения (23) можно легко привести к форме (1). Гильберт как в гранках, так и в статье [6] пишет: "Ниже я хочу ... установить ... новую систему фундаментальных уравнений физики". И далее там же: "моих основных уравнений", "моей теории".

Гильберт не мог бы писать так, если бы не считал *себя* автором "фундаментальных уравнений физики".

[2] Оригинальная работа [6] Гильберта отвечает системе единиц, где $\varkappa = 1$.

Плотность тензора $[\sqrt{g}R]_{\mu\nu}$ в уравнении (23) по построению (11) также содержит производные второго порядка только линейно, а поэтому на основании (10а) эта плотность тензора имеет вид

$$[\sqrt{g}R]_{\mu\nu} = \sqrt{g}(R_{\mu\nu} + \alpha g_{\mu\nu}R)\,. \tag{26}$$

Для Гильберта выражение (26) было просто очевидно. Может быть, авторам [2–4] это трудно понять, но это уже их личное дело. На основании (26) для левой части уравнений (24) получим выражение

$$g^{\mu\nu}[\sqrt{g}R]_{\mu\nu} = \sqrt{g}(4\alpha + 1)R\,, \tag{27}$$

которое находится в полном соответствии с (25). Именно об этих общих рассуждениях и писал Гильберт: "...что ясно без вычислений, если учесть, что R единственный инвариант, а $R_{\mu\nu}$ — единственный (кроме $g_{\mu\nu}$) тензор второго порядка, который можно построить только из компонент $g_{\mu\nu}$ и их первых и вторых производных $g_k^{\mu\nu}$, $g_{k\ell}^{\mu\nu}$".

Авторы статьи [2] (см. также [3]) по этому поводу утверждают: "Аргумент этот, однако, не убедителен, поскольку есть много других тензоров второго порядка и много других инвариантов, которые могут быть построены из тензора Римана".

Это высказывание авторов [2, 3] *не имеет никакого отношения к точному аргументу Гильберта, поскольку авторы работ* [2, 3] *упустили из вида главное — речь шла о построении уравнений гравитации, в которые входят вторые производные от* $g^{\mu\nu}$ *и не выше*. Об этом Гильберт специально писал в своей работе [6]: "Если в уравнения гравитации могут входить лишь вторые производные потенциалов $g^{\mu\nu}$, то функция H должна иметь вид

$$H = R + L\text{"}.$$

Поэтому Гильберт *абсолютно прав*, что в этом случае имеется только *один инвариант* R и *два тензора* $R_{\mu\nu}$ *и* $g_{\mu\nu}R$, содержащие линейно вторые производные гравитационного потенциала $g^{\mu\nu}$. Все другие тензоры с такими свойствами являются комбинацией этих тензоров.

Такую же ошибку совершает и автор статьи [4, с. 1360], когда он пишет: "При этом, правда, вариационный вывод уравнений отсутствует, а правильная форма уравнений (с "половинным" членом) обосновывается (не вполне корректно!) единственностью тензора Риччи и скалярной кривизны, как общековариантных величин, зависящих только от $g^{\mu\nu}$ и их первых и вторых производных".

Удивляет также, когда автор статьи [4] пишет о работе Гильберта: "При этом, правда, вариационный вывод уравнений отсутствует...". Он, по-видимому, *запамятовал* хорошо известное обстоятельство, что уравнения Лагранжа, которые приведены Гильбертом, являются следствием вариационного принципа наименьшего действия (аксиома I Гильберта). Так что *в работе Гильберта* [6] *вариационный вывод уравнений гравитационного поля имеется*.

Как авторы [2–4] решаются вести анализ работы Д. Гильберта [6] и далее судить о ней, не понимая сути точных математических аргументов Гильберта? Далее авторы работ [2, 3] пишут: "Даже если требовать линейности по тензору Риччи, то критически важный коэффициент в следовом члене остается неопределенным". Это тоже *неправильно*. Он легко определяется. Гильберт доказал тождество (19):

$$\nabla_\sigma[\sqrt{g}R]^\sigma_\mu \equiv 0\,. \tag{28}$$

С учетом соотношения (26) в локальной римановой системе координат, где символы Кристоффеля равны нулю, тождество (28) принимает простой вид

$$\partial_\sigma(R^\sigma_\mu + \alpha\delta^\sigma_\mu R) \equiv 0\,. \tag{29}$$

На основании (8) и (9) находим

$$\partial_\mu R = K_\mu\,, \qquad \partial_\sigma R^\sigma_\mu = \frac{1}{2}\,K_\mu\,, \tag{30}$$

где

$$K_\mu = g^{\nu\sigma}g^{\lambda\rho}\partial_\sigma\partial_\nu\partial_\mu\,g_{\lambda\rho} - g^{\nu\sigma}g^{\alpha\lambda}\partial_\sigma\partial_\alpha\partial_\mu\,g_{\lambda\nu}\,. \tag{31}$$

Используя эти выражения, получим

$$\partial_\sigma(R^\sigma_\mu + \alpha\delta^\sigma_\mu R) = \left(\frac{1}{2} + \alpha\right)K_\mu \equiv 0\,.$$

Отсюда имеем

$$\alpha = -\frac{1}{2}\,, \tag{32}$$

а следовательно,

$$[\sqrt{g}R]_{\mu\nu} = \sqrt{g}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}R\right), \tag{33}$$

т.е.

$$\sqrt{g}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}R\right) = -\varkappa T_{\mu\nu}\,. \tag{34}$$

Таким образом, "критически важный коэффициент", о котором пишут авторы [2, 3], в подходе Гильберта определяется тривиальным образом обычным дифференцированием, вполне доступным студенту первого курса университета. Отсюда ясно также, что следовый член $(1/2)g_{\mu\nu}R$ не возникает путем какого-либо произвольного "введения" в уравнения поля, сформулированные Гильбертом, он органически *содержится* в них.

Позднее, в 1921 г. в работе (60) [10] Эйнштейн при написании уравнений гравитации будет строить геометрическую часть уравнений гравитации, используя тензор

$$R_{\mu\nu} + ag_{\mu\nu}R\,,$$

т.е. так же, как это ранее делал Гильберт при преобразовании уравнений гравитации (12) в форму (34).

Творческий поиск авторов статей [2, 3] венчает следующий глубокомысленный вывод: "В целом вся эта цепочка наводит на мысль, что сведения о результате Эйнштейна могли быть решающими для введения Гильбертом следового члена в свои уравнения". Как можно прийти после чтения работы Гильберта к таким мыслям? Но оказывается при желании — это возможно. Напомним авторам [2], что *в формализме Гильберта ничего не нужно вводить. Как только он написал мировую функцию* H *в виде*

$$H = R + L\,,$$

и установил теорему III, *все остальное — дело простой техники вычислений и ничего более*.

Таким образом, проведенный нами анализ суждений авторов [2] показывает, что *все их замечания относительно Гильберта или неправильны, или не имеют к нему никакого отношения. Поэтому все их аргументы в пользу "радикально иной" точки зрения, чем стандартная, несостоятельны*.

Гильберт ранее, еще до публикации статьи Эйнштейна со следовым членом, уже получил равенство (33). Используя (19) и (33), находим

$$\nabla_\nu \left(R_\mu^\nu - \frac{1}{2}\,\delta_\mu^\nu R \right) \equiv 0\,. \tag{35}$$

Но это есть тождество Бьянки.

Незнание содержания работы Гильберта встречается не только у авторов [2]. Так, например, А. Пайс в книге [11] в § 14.4 пишет: "Очевидно, и Гильберт не был знаком с тождеством Бьянки!" И далее: "Итак, я утверждаю, что ни Гильберт, ни Эйнштейн не знали тождества Бьянки в тот критический ноябрь 1915 г.".

"Как это ни странно, но в 1917 г. специалисты еще не знали, что вывод тождества, данный Вейлем вариационным методом, был новым способом получения давно известного результата", — считает А. Пайс [11].

А. Пайс прав в том, что Эйнштейн не знал тождества Бьянки "в тот критический ноябрь 1915 г.". *Все остальное, написанное в* [11] *в отношении Гильберта, неправильно. Дело в том, что Гильберт в самом деле не знал тождества Бьянки — он сам его получил.* Гильберт вариационным методом доказал общее тождество (см. теорему III Гильберта), из которого, полагая $J = R$, получил также тождество Бьянки. *Таким образом, не Вейль в 1917 г., а Гильберт в 1915 г. получил тождество Бьянки вариационным методом.* Пайс пишет в § 15.3 [11]: "Но в ноябре 1915 г. ни Гильберт, ни Эйнштейн не знали об этом королевском пути к законам сохранения, хотя Гильберт был довольно близок к цели".

Аналогичное утверждают и авторы [3]: "Гильберт не открыл королевского пути к формулировке полевых уравнений общей теории относительности. На самом деле он не сформулировал этих уравнений вовсе".

Все это неправильно. Именно Гильберт и нашел самый короткий и общий путь построения уравнений гравитации. Он нашел функцию Лагранжа гравитационного поля R, с помощью которой из вариационного принципа наименьшего действия уравнения гравитации получаются автоматически. *Именно так их получают и в настоящее время при изложении общей теории относительности Эйнштейна.* Досадно, что А. Пайс поверхностно познакомился со статьей Гильберта, этим же страдают и авторы [2, 3].

Позднее, в 1924 г. Гильберт написал в [12]: "Для того, чтобы определить выражение $[\sqrt{g}R]_{\mu\nu}$, сначала выбирают систему координат таким образом, чтобы все $g_s^{\mu\nu}$, будучи взятыми в мировой точке, исчезли. Находим, таким образом,

$$[\sqrt{g}R]_{\mu\nu} = \sqrt{g}\left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}R \right]\text{"}. \tag{36}$$

По поводу этих слов авторы [2] заключают: "Итак: поначалу Гильберт не приводил явного вида полевых уравнений; потом, после того, как Эйнштейн опубликовал свои полевые уравнения, Гильберт заявил, что нет необходимости в вычислении; в конце концов, он признал, что оно нужно".

Это высказывание — плод фантазии авторов [2]. Ниоткуда не следует, что Гильберт не получал явного вида полевых уравнений. Они выводятся из уравнений (23) и выражения (26) с использованием тождества (28) элементарным путем. *Неужели можно всерьез предполагать, что Гильберт не смог, исходя из* (28), *получить* (33)? Добавление, сделанное Гильбертом в [12], не означает какого-то "признания необходимости вычисления". Он внес его, чтобы напомнить простой метод нахождения тензора. Но это ни в какой степени не отменяло его точного высказывания ("что ясно без вычислений").

Авторы [2, 3] утверждают, ссылаясь на гранки, что Гильберт имел только уравнения гравитации в форме (23). Уравнение (23) содержит производные

$$\frac{\partial\sqrt{g}R}{\partial g^{\mu\nu}}\,, \quad \frac{\partial\sqrt{g}R}{\partial g_k^{\mu\nu}}\,, \quad \frac{\partial\sqrt{g}R}{\partial g_{k\ell}^{\mu\nu}}\,. \tag{37}$$

Невозможно себе представить физика-теоретика или математика, чтобы он на этом остановился и не вычислил этих производных, и не получил тем самым в явном виде дифференциальные уравнения, в которые входят только производные $g_k^{\mu\nu}$, $g_{k\ell}^{\mu\nu}$. Но Гильберту, как мы видели, и их не надо было вычислять, поскольку он из общих и строгих математических положений определил структуру выражения $[\sqrt{g}R]_{\mu\nu}$, после чего вычисление "критически важного коэффициента" стало тривиальным. *Именно поэтому вывод авторов статей* [2, 3], *что якобы Гильберт не имел "явного вида гравитационной части полевых уравнений", не может быть правильным.* Этот вывод также, как мы увидим в разделе 4, явно противоречит переписке Эйнштейна с Гильбертом.

Именно из переписки Эйнштейна и Гильберта все становится предельно ясным, и не требуется каких-либо дополнительных аргументов. Более точного аргумента, чем свидетельство Эйнштейна, просто не может быть. Почему-то *авторы* [2, 3] *оставили это важнейшее свидетельство Эйнштейна без внимания*, а в центр своего анализа положили неопубликованные материалы Гильберта, содержащие к тому же и пропуски.

Свидетельство Эйнштейна в письме от 18 ноября 1915 г. однозначно исключает всякие домыслы о работе [6] Гильберта. Так что "*архивная находка*" авторов [2] не может в принципе поколебать свидетельство самого Эйнштейна. На этом можно было бы в данном вопросе поставить точку. Но поскольку авторы [2–4] по ходу своей аргументации высказывают ошибочные заключения о работе [6] Гильберта, нам придется на этом специально остановиться.

Если даже не следовать общим положениям Гильберта, то, используя определение (11), можно провести простое дифференцирование и выразить плотность тензора $[\sqrt{g}R]_{\mu\nu}$ через плотность тензора Риччи и скалярную плотность $\sqrt{g}R$. Первый член в (11) записывается в форме

$$\frac{\partial\sqrt{g}R}{\partial g^{\mu\nu}} = \sqrt{g}\,R_{\mu\nu} + \frac{\partial\sqrt{g}}{\partial g^{\mu\nu}}\,R + \sqrt{g}\,g^{\alpha\beta}\,\frac{\partial R_{\alpha\beta}}{\partial g^{\mu\nu}}\,, \tag{38}$$

но так как

$$\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}\,\sqrt{g}\,g_{\mu\nu}\,, \tag{39}$$

получим

$$\frac{\partial\sqrt{g}R}{\partial g^{\mu\nu}} = \sqrt{g}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}R\right) + \sqrt{g}\,g^{\alpha\beta}\,\frac{\partial R_{\alpha\beta}}{\partial g^{\mu\nu}}\,. \tag{40}$$

На основании (11) и (40) имеем

$$[\sqrt{g}R]_{\mu\nu} = \sqrt{g}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}R\right) + \\ + \left\{\sqrt{g}\,g^{\alpha\beta}\,\frac{\partial R_{\alpha\beta}}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_k\,\frac{\partial\sqrt{g}R}{\partial g_k^{\mu\nu}} + \partial_k\partial_\ell\,\frac{\partial\sqrt{g}R}{\partial g_{k\ell}^{\mu\nu}}\right\}.$$

Легко убедиться, что сумма членов в фигурных скобках тождественно равна нулю. Это проще всего увидеть в локальной римановой системе координат, в которой символы Кристоффеля равны нулю. Таким простым, но не элегантным путем опять находим искомое выражение

$$[\sqrt{g}R]_{\mu\nu} = \sqrt{g}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}R\right).$$

Авторы статьи [3] пишут: "Как в гранках, так и в опубликованных версиях работы [6], Гильберт ошибочно утверждал, что можно рассматривать последние четыре уравнения (имеются в виду уравнения электромагнитного поля — *А.А.Л., М.А.М., В.А.П.*) как следствие четырех тождеств, которые должны иметь место, согласно его теореме I, между четырнадцатью дифференциальными уравнениями".

Все не совсем так, как полагают авторы [3]. Теоремы I и II сформулированы для инварианта J относительно произвольных преобразований четырех мировых параметров. Согласно этим теоремам для каждого инварианта существует *четыре тождества*. Гильберт рассматривает в своей статье два инварианта R и L. Общий инвариант H Гильберт составляет из этих двух инвариантов:

$$H = R + L\,.$$

Уравнения гравитации в обозначениях Гильберта имеют вид

$$[\sqrt{g}R]_{\mu\nu} = -\varkappa\,T_{\mu\nu}\,.$$

Инвариант L Гильберт выбирает в виде функции от переменных $g^{\mu\nu}$, q_σ, $\partial_\nu q_\sigma$, и поэтому он получает обобщенные уравнения Максвелла

$$[\sqrt{g}L]^{\nu} = 0\,, \tag{41}$$

где

$$[\sqrt{g}L]^{\nu} = \frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial q_\nu} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial(\partial_\mu q_\nu)}\right). \tag{42}$$

Далее на основании теоремы II Гильберт устанавливает, что функция Лагранжа L зависит от производных потенциала q_ν только в комбинации $F_{\mu\nu}$, т.е. L является функцией $F_{\mu\nu}$,

$$L(F_{\mu\nu})\,, \tag{43}$$

где

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu q_\nu - \partial_\nu q_\mu\,. \tag{44}$$

Это, конечно, не исключает непосредственной зависимости L от переменной q_ν. Именно на этом основании Гильберт выбирает лагранжиан в виде

$$L = \alpha Q + f(q)\,, \tag{45}$$

где

$$Q = F_{\mu\nu}F_{\lambda\sigma}\,g^{\mu\sigma}g^{\nu\lambda}\,, \qquad q = q_\mu q_\nu\,g^{\mu\nu}\,, \tag{46}$$

α — постоянная.

Гильберт далее отмечает, что уравнения электродинамики "можно рассматривать как следствия уравнений гравитации".

Для инварианта L согласно теореме II имеют место *четыре тождества*:

$$\nabla_\mu T^\mu_\nu = F_{\mu\nu}[\sqrt{g}L]^\mu + q_\nu\partial_\mu[\sqrt{g}L]^\mu\,. \tag{47}$$

Из тождества (47) следует, что если уравнения движения материальной системы (41) выполняются, то имеет место ковариантный закон сохранения

$$\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0$$

для материальной системы. Но если в тождестве (47) воспользоваться уравнениями гравитации (34), как это сделал Гильберт, то мы получим уравнения Гильберта

$$F_{\mu\nu}[\sqrt{g}L]^\mu + q_\nu\partial_\mu[\sqrt{g}L]^\mu = 0\,, \tag{48}$$

которые помечены в его статье [6] номером 28. Уравнения (48) должны быть *совместимы с уравнениями, которые следуют из принципа наименьшего действия с тем же лагранжианом* L. Но это возможно только в том случае, когда имеют место *обобщенные уравнения Максвелла*

$$[\sqrt{g}L]^{\nu} = 0\,. \tag{49}$$

Поэтому автор статьи [4, с. 1358] совершенно неправ, считая, что "в случае калибровочно неинвариантной теории Ми с лагранжианом типа (45) в общем надо пользоваться не обобщенными уравнениями Максвелла (49), а уравнениями (48)".

Это высказывание противоречит принципу наименьшего действия, т.е. аксиоме I Гильберта. Таким образом, *наличие согласно теореме* II *четырех тождеств* (47) *и уравнений гравитации* (34) *приводит к четырем уравнениям* (48), *которые совместны с обобщенными уравнениями Максвелла, полученными на основе аксиомы* I *Гильберта*. Это и подчеркивал Гильберт в работе [6]: "...т.е. из уравнений гравитации (10) действительно следуют 4 не зависящие друг от друга линейные комбинации (48) *уравнений электродинамики* (41) (выделено нами — *А.А.Л., М.А.М., В.А.П.*) вместе с их первыми производными". Следует особо подчеркнуть, что Гильберт пишет о линейной комбинации "*уравнений электродинамики* (41)", а не выражений (42). Именно здесь имеется путаница у авторов [3, 4].

Отметим, что в частном случае, когда лагранжиан L равен

$$L = \alpha Q\,, \tag{50}$$

второй член в уравнениях (48) тождественно обращается в нуль, и мы приходим к уравнениям

$$F_{\mu\nu}[\sqrt{g}L]^{\mu} = 0\,.$$

Отсюда следует, что если детерминант $|F_{\mu\nu}|$ не равен нулю, то выполняются уравнения Максвелла

$$[\sqrt{g}L]^{\mu} = 0\,,$$

что находится в полном соответствии с принципом наименьшего действия (аксиома I Гильберта). *Таким образом, уравнения Максвелла являются следствиями уравнений гравитации* (34) *и четырех тождеств* (47). Все приведенное выше следует из статьи Гильберта, если читать ее внимательно. Позднее Эйнштейн совместно с Инфельдом и Гоффманом в статье 117 [10], а также В.А. Фок в статье [13] получат уравнения движения материальной системы из уравнений гравитации.

Очень часто отмечается, что уравнение гравитационного поля Гильберт получил "не для произвольной материальной системы, а специально исходя из теории Ми" [14]. Это не совсем точно. Метод, которым пользовался Гильберт, — общий, и не накладывает никаких ограничений на вид функции L. Но поскольку из гравитационных уравнений следуют *четыре уравнения* для материальной системы, то Гильберту это обстоятельство показалось привлекательным, и он применил свои общие уравнения к теории Ми. Такое объединение гравитации и теории Ми не оказалось плодотворным. Но общий метод Гильберта, с помощью которого он получил гравитационные уравнения, оказался весьма перспективным.

Теперь несколько слов о дополнительных нековариантных уравнениях.

Для решения задач всегда необходимо иметь полную систему уравнений. Уравнений ОТО — только десять. Необходимо их дополнить еще четырьмя уравнениями, которые не могут быть общековариантными. Эти дополнительные условия называются координатными. Они могут быть разными. Именно это и понимал Гильберт, когда писал (см. текст гранок в [7]): "Как учит наша математическая теорема, предыдущие аксиомы I и II[3] могут дать для 14 потенциалов только 10 независимых друг от друга уравнений, с другой стороны, в силу общей инвариантности более чем 10 существенно независимых уравнений для 14 потенциалов $g_{\mu\nu}$, q_s невозможны, и, поскольку мы хотим придерживаться теории Коши для дифференциальных уравнений, и соответственно придать основным уравнениям физики определенный характер, то неизбежно добавление к (4) и (5) дополнительных неинвариантных уравнений"[4].

Это требование математическое, и оно обязательно для теории. Эти необходимые для полноты системы дополнительные уравнения Гильберт и пытался вывести непосредственно из самой теории. Но это ему не удалось, поэтому соответствующий материал из рукописи и не был включен в окончательный текст статьи.

Так что основная система ОТО (десять уравнений) общековариантна. Но полная система уравнений, которая необходима для решения задач, не общековариантна, поскольку четыре уравнения, выражающие координатные условия, не могут быть тензорными, они всегда не общековариантны. Решение полной системы уравнений гравитационного поля с помощью тензорных преобразований может быть записано в любой допустимой системе координат. Именно здесь возникает понятие атласа карт. *Поэтому утверждение авторов* [2–4], *что теория Гильберта не общековариантна в противоположность теории Эйнштейна, неправильно. Полная система уравнений как у Эйнштейна, так и у Гильберта не общековариантна.* Разница была только в том, что Гильберт пытался однозначно построить эти нековариантные уравнения в рамках самой теории. Однако это оказалось невозможным. Они стали достаточно произвольными, но не тензорными. При этом они определяют выбор системы координат.

По этому поводу Дж. Синг [15] пишет: "В работах по теории относительности можно найти целый ряд различных координатных условий, преследующих каждый раз особые цели. Чтобы подойти к этому вопросу единым образом, запишем координатные условия в виде

$$C_i = 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3)\,.$$

Этим уравнениям (возможно, дифференциальным) должен удовлетворять метрический тензор g_{ij}. Конечно, они *не могут быть* тензорными, так как они удовлетворяются лишь при специальном выборе координат".

На каком же материале сделали выводы авторы статьи [2]? В так называемых гранках работы Гильберта, из которых они исходили, использованы в разных частях инварианты H и K, но определение этих величин в сохранившихся частях гранок отсутствует. В гранках Гильберт пишет: "Я хотел бы в последующем, следуя аксиоматическому методу и исходя, по существу, из двух аксиом, составить новую систему основных уравнений физики". Очевидно, что для того чтобы осуществить это, Гильберту необходимо было задать вид инвариантов H и K.

Невозможно представить, чтобы Гильберт, поставив перед собой в статье такую цель, не определил эти фундаментальные величины. *Но это означает, что пропуски, имеющиеся в гранках, очень существенны и содержат важную информацию. Без учета этой ключевой информации не могут быть сделаны правильные заключения.*

Однако авторы [2] пренебрегли этим важным обстоятельством и поспешили сделать вывод, что Гильберт не имел уравнений гравитации в форме

$$\sqrt{g}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}R\right) = -\varkappa T_{\mu\nu}\,.$$

Этот вывод они представили широкой научной общественности в популярном и известном журнале *Science* [2]. При этом авторы [2] не информировали читателя о том, что в так называемых гранках, которые они использовали, имеются пропуски. Лишь позднее в препринте [3] они отметили это обстоятельство. Авторы [2] свой шаг объясняют тем, что гранки позволили им обосновать свою точку зрения "радикально иную, чем стандартная

---

[3] Согласно аксиоме II — мировая функция H является инвариантом по отношению к любому преобразованию координат. (*Примеч. А.А.Л., М.А.М., В.А.П.*)

[4] Под номерами (4) и (5) записаны соответственно уравнения гравитационного поля (10) и обобщенные уравнения Максвелла (41). (*Примеч. А.А.Л., М.А.М., В.А.П.*)

точка зрения". Но как можно сделать это на основании предварительного материала, в котором имеются пропуски?

Вот еще один из приемов "анализа", применяемых авторами работы [3]: "Замечательно, что, характеризуя свою систему уравнений, Гильберт вычеркнул слово «*новую*» — ясное указание на то, что он перед этим видел работу Эйнштейна и признал, что уравнения, вытекающие из его собственного вариационного принципа, формально эквивалентны уравнениям, которые Эйнштейн записал явно (из-за появления члена со следом), если тензор энергии-импульса Гильберта подставить вместо неопределенного тензора в правой части полевых уравнений Эйнштейна".

Но все написанное авторами препринта [3] теряет смысл, поскольку на самом деле их "*ясное указание*" исчезает, так как Гильберт в опубликованной статье [6] вполне ясно написал: "Ниже я хочу ... установить ... новую систему фундаментальных уравнений". Мягко говоря, крайне неделикатно делать выводы о мнении Гильберта, опираясь только на его черновые пометки, сделанные в предварительных неопубликованных материалах. Полученная Гильбертом система гравитационных уравнений действительно *новая*. Он получил ее не зная, что Эйнштейн пришел к таким же гравитационным уравнениям. Об этом Эйнштейн и писал Гильберту в письме от 18 ноября 1915 г. (см. раздел 4). Странный путь избран авторами [3], чтобы обосновать свою "*радикально иную*" точку зрения. Многостраничное сочинение авторов [3] изобилует как подобными сомнительными аргументами, так и ошибочными высказываниями. Такой подход авторов [2, 3] к изучению важнейших работ в физике едва ли можно считать профессиональным, основанным на глубоком анализе материала.

В заключение этого раздела отметим, что работы Гильберта под общим названием "Основания физики" очень важны и содержательны. И теоретикам, занимающимся близкими вопросами, их неплохо бы знать. Так, например, в *УФН* была опубликована статья [16]. Если бы авторы этой работы прочли статью Гильберта [17], опубликованную в 1917 г., они увидели бы, что критическая координатная скорость v_c, которую они приближенно вычислили, на самом деле равна

$$v_c = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{r-\alpha}{r}\right), \qquad \alpha = r_g = 2GM\,.$$

Именно при этой скорости ускорение точно равно нулю. Скорость v_c зависит от радиуса, тогда как соответствующая ей собственная скорость v не зависит от r и равна

$$v = \frac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

Для определения критической координатной скорости v_c в первом порядке по G необходимо в ускорении учитывать члены второго порядка по G. Гравитационное поле не оказывает воздействия на тело, если оно движется со скоростью v_c под действием внешней силы.

Гильберт в статье [17] получает уравнение

$$\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{3\alpha}{2r(r-\alpha)}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{\alpha(r-\alpha)}{2r^3} = 0$$

и приводит его интеграл:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(\frac{r-\alpha}{r}\right)^2 + A\left(\frac{r-\alpha}{r}\right)^3,$$

где A — постоянная; для света $A = 0$.

Отсюда, в частности, получим формулу (20) работы [15]

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^2\left(1 + \frac{2r_g}{r}\right).$$

Эта скорость отличается от критической скорости v_c. При этой скорости ускорение не будет точно равно нулю.

Гильберт далее пишет: "Согласно этому уравнению ускорение отрицательно или положительно, т.е. гравитация притягивает или отталкивает, в зависимости от того, удовлетворяет ли абсолютная величина скорости неравенству

$$\left|\frac{dr}{dt}\right| < \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{r-\alpha}{r}\right)$$

или неравенству

$$\left|\frac{dr}{dt}\right| > \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{r-\alpha}{r}\right)".$$

Для света Гильберт находит

$$\left|\frac{dr}{dt}\right| = \frac{r-\alpha}{r}\,,$$

и далее он отмечает: "Свет, распространяющийся по прямой к центру, в соответствии с последними неравенствами всегда испытывает отталкивание; его скорость возрастает от 0 при $r = \alpha$ до 1 при $r = \infty$".

Заметим, что локальная физическая скорость света равна c. Необходимо отметить, что скорость v_c не является решением исходного уравнения.

Еще об одном. Авторы [16] пишут: «Возможно, поэтому многие авторы выделяют собственное время: одни называют его "истинным", другие "физическим", не поясняя, какой смысл вкладывается в данном случае в эти термины». И далее: «В результате многие специалисты по общей теории относительности всегда рассматривают координатные величины (например, координатную скорость) как не физические, так сказать, "второсортные". Между тем ... координатное время t имеет не меньше физического смысла, чем собственное время τ».

Таким образом, как отмечают авторы [16] «говорить о собственной скорости как "истинной" или "физической" в противоположность координатной скорости нелогично».

Авторы [16] напрасно подумали, что специалисты по общей теории относительности (ОТО) не понимают значения координатных величин. Все описание в ОТО ведется в координатных величинах. Так что без них, в принципе, нельзя обойтись. Это хорошо известно уже давно.

В качестве примера физической величины возьмем собственное время, которое отличается от координатного тем, что не зависит от выбора координатного времени. Как видите, разница имеется, и она существенна. Другой пример: координатная скорость света равна

$$v = c\,\frac{\sqrt{g_{00}}}{1 - g_{0i}e^i/\sqrt{g_{00}}}\,,$$

здесь $i = 1, 2, 3$; e^i — единичный вектор в трехмерном римановом пространстве.

Координатная скорость v, конечно, измерима, но зависит от выбора координат и может быть любой, удовлетворяющей условию

$$0 < v < \infty\,,$$

тогда как физическая скорость света точно равна c. Как видите, и здесь разница есть, и она также существенна, поэтому никакой "нелогичности", о которой пишут авторы [16], в использовании понятий физической и координатной скоростей не было и нет.

3. Подход Эйнштейна

Эйнштейн в 1913 г. писал: "Излагаемая теория возникла на основе убеждения, что пропорциональность инертной и тяжелой масс является точным законом природы, который должен находить свое отражение уже в самих основах теоретической физики. Это убеждение я стремился отразить в ряде предыдущих работ (*Ann. Phys.*, 1911, **35**, 898; 1912, 38, 355: статьи 14 и 17 «Собрание научных трудов» I [10]), в которых делалась попытка свести *тяжелую* массу к *инертной*; это стремление привело меня к гипотезе о том, что поле тяжести (однородное в бесконечно малом объеме) физически можно полностью заменить ускоренной системой отсчета".

Именно этот путь и привел Эйнштейна к убеждению, что в общем случае гравитационное поле характеризуется десятью пространственно-временны́ми функциями (метрическими коэффициентами риманова пространства) $g_{\mu\nu}$

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}(x)\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu\,. \tag{51}$$

Позднее он публикует ряд исследований (статьи 21, 22, 23, 25, 28, 29, 32) [10] в этом направлении, относительно которых в статье 34 [10] пишет: "В последние годы я старался построить общую теорию относительности исходя из относительности также и неравномерных движений. Я думал, что на самом деле нашел единственный закон гравитации, который соответствует понятному по смыслу общему постулату относительности, и пытался доказать необходимость именно этого решения в работе, появившейся в прошлом году в этом журнале.

Однако заново проведенный анализ показал, что, следуя по предложенному пути, совершенно невозможно ничего доказать; то, что это казалось все же сделанным, было основано на заблуждении. Постулат относительности в той мере, в какой я требовал, выполняется всегда, когда в основу кладется принцип Гамильтона; однако фактически он не дает возможности определить гамильтонову функцию H гравитационного поля. На самом деле ограничивающее выбор H соотношение (77) статьи 29 [10] выражает не что иное, как то, что функция H должна быть инвариантна относительно линейных преобразований, а это требование не имеет ничего общего с относительностью ускорения. Кроме того, указанный соотношением (77) выбор нисколько не подтвержден уравнением (78) статьи 29 [10].

По этим причинам я полностью потерял доверие к полученным мной уравнениям поля и стал искать путь, который бы ограничивал возможности естественным образом. Так я вернулся к требованию более общей ковариантности уравнений поля, от которой я отказался с тяжелым сердцем, когда работал вместе с моим другом Гроссманом. Мы подошли тогда фактически очень близко к излагаемому ниже решению задачи.

Подобно тому, как частная теория относительности основана на постулате, что ее соотношения должны быть ковариантны относительно линейных ортогональных преобразований, излагаемая здесь теория основана на постулате *ковариантности всех систем уравнений относительно преобразований с определителем 1.* Прелесть этой теории едва ли может скрыться от того, кто действительно понимает ее; она означает истинный триумф метода абсолютного дифференциального исчисления, развитого Гауссом, Риманом, Кристоффелем, Риччи и Леви-Чивитой".

Эйнштейн выбирает уравнение гравитации в системе координат $\sqrt{-g} = 1$ в форме[5]

$$\partial_\alpha \Gamma^\alpha_{\mu\nu} + \Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\alpha} = -\varkappa T_{\mu\nu}\,, \tag{52}$$

где

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\,g^{\alpha\sigma}(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu})\,,$$

$T_{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса материальной системы. Здесь левая часть уравнения (52) получена из тензора Риччи при условии $\sqrt{-g} = 1$.

Для гравитационного поля Эйнштейн находит функцию Лагранжа

$$L = g^{\sigma\tau}\Gamma^\alpha_{\sigma\beta}\Gamma^\beta_{\tau\alpha}\,. \tag{53}$$

Если учесть соотношение

$$2\Gamma^\alpha_{\sigma\beta}\,\delta(g^{\sigma\tau}\Gamma^\beta_{\tau\alpha}) = \Gamma^\alpha_{\sigma\beta}\,\delta g^{\sigma\beta}_\alpha\,, \tag{54}$$

то легко получить

$$\delta L = -\Gamma^\alpha_{\sigma\beta}\Gamma^\beta_{\tau\alpha}\,\delta g^{\sigma\tau} + \Gamma^\alpha_{\sigma\beta}\,\delta g^{\sigma\beta}_\alpha\,. \tag{55}$$

Отсюда имеем

$$\frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}} = -\Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\alpha}\,, \qquad \frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}_\alpha} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\,. \tag{56}$$

С помощью этих формул уравнение гравитации (52) принимает вид

$$\partial_\alpha\left(\frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}} = -\varkappa T_{\mu\nu}\,. \tag{57}$$

Умножая (57) на $g^{\mu\nu}_\sigma$ и суммируя по индексам μ и ν, Эйнштейн получает

$$\partial_\lambda t^\lambda_\sigma = \frac{1}{2}\,T_{\mu\nu}\,\partial_\sigma g^{\mu\nu}\,, \tag{58}$$

[5] В этом разделе мы сохранили обозначения Эйнштейна.

где величина

$$t_\sigma^\lambda = \frac{1}{2\varkappa}\left(\delta_\sigma^\lambda L - g_\sigma^{\mu\nu}\,\frac{\partial L}{\partial g_\lambda^{\mu\nu}}\right) \tag{59}$$

характеризует гравитационное поле. Принимая во внимание равенство

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda\,\partial_\sigma g^{\mu\nu} = 2g^{\alpha\mu}\Gamma_{\alpha\sigma}^\nu\Gamma_{\mu\nu}^\lambda\,,$$

находим

$$t_\sigma^\lambda = \frac{1}{\varkappa}\left(\frac{1}{2}\,\delta_\sigma^\lambda g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\beta}^\alpha\Gamma_{\nu\alpha}^\beta - g^{\alpha\mu}\Gamma_{\alpha\sigma}^\nu\Gamma_{\mu\nu}^\lambda\right). \tag{60}$$

Все дальнейшие вычисления проводятся в системе координат, где $\sqrt{-g}=1$. Эйнштейн записывает основные уравнения гравитации (52) в форме

$$\partial_\alpha(g^{\nu\lambda}\Gamma_{\sigma\nu}^\alpha) - \frac{1}{2}\,\delta_\sigma^\lambda g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\beta}^\alpha\Gamma_{\nu\alpha}^\beta = -\varkappa(T_\sigma^\lambda + t_\sigma^\lambda)\,. \tag{61}$$

Ниже мы покажем, насколько близко к уравнениям гравитационного поля находился Эйнштейн при написании статьи 4 ноября 1915 г.

Эйнштейн, начиная с 1913 г., в той или иной форме отмечал, что *величина* t_σ^λ, характеризующая гравитационное поле, должна входить в уравнение гравитации *так же, как величина* T_σ^λ, характеризующая материальные системы. Вот, например, что он писал в 1913 г. в статье [8]: "...тензор гравитационного поля является источником поля наравне с тензором материальных систем $\Theta_{\mu\nu}$. Исключительное положение энергии гравитационного поля по сравнению со всеми другими видами энергии привело бы к недопустимым последствиям". При написании статьи 34 [10] Эйнштейн оставил, однако, это важное интуитивное соображение без внимания. Отмеченное выше соображение о симметрии между величинами T_σ^λ и t_σ^λ является, скорее всего, продуктом интуиции Эйнштейна, а не каким-либо общим физическим положением. Дело в том, что трансформационные свойства этих величин различны. Но интуиция — великая вещь, если она точно ведет к цели. В данном случае так и было. Надо отметить, что общие физические уравнения, как правило, не выводятся, они, скорее, угадываются на основе опытных данных, общих физических положений и интуиции. Поэтому иногда трудно логически объяснить, как они получены автором.

Используя (60), легко найти след величины t_σ^λ

$$t = t_\lambda^\lambda = \frac{1}{\varkappa}\,g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\beta}^\alpha\Gamma_{\nu\alpha}^\beta\,, \tag{62}$$

и переписать уравнение Эйнштейна (61) в форме

$$\partial_\alpha(g^{\nu\lambda}\Gamma_{\sigma\nu}^\alpha) = -\varkappa\left(T_\sigma^\lambda + t_\sigma^\lambda - \frac{1}{2}\,\delta_\sigma^\lambda t\right). \tag{63}$$

Отсюда видно, что в уравнении (63) отсутствует симметрия между величинами T_σ^λ и t_σ^λ. Легко увидеть, что эта симметрия очень просто восстанавливается. К этому мы приступим ниже. Определим на основании (63) законы сохранения. Для этой цели найдем след уравнений

$$\partial_\alpha(g^{\nu\beta}\Gamma_{\nu\beta}^\alpha) = -\varkappa(T-t)\,. \tag{64}$$

Умножим обе части уравнения (64) на $(1/2)\delta_\sigma^\lambda$ и полученное выражение вычтем из (63):

$$\partial_\alpha\left(g^{\nu\lambda}\Gamma_{\sigma\nu}^\alpha - \frac{1}{2}\,\delta_\sigma^\lambda g^{\nu\beta}\Gamma_{\nu\beta}^\alpha\right) = -\varkappa\left(T_\sigma^\lambda + t_\sigma^\lambda - \frac{1}{2}\,\delta_\sigma^\lambda T\right). \tag{65}$$

Нетрудно убедиться, что выполняются равенства

$$\partial_\lambda\partial_\alpha(g^{\nu\lambda}\Gamma_{\sigma\nu}^\alpha) = \frac{1}{2}\,\partial_\lambda\partial_\alpha\partial_\sigma g^{\alpha\lambda}\,, \tag{66}$$

$$\partial_\lambda\partial_\alpha\delta_\sigma^\lambda g^{\nu\beta}\Gamma_{\nu\beta}^\alpha = \partial_\lambda\partial_\alpha\partial_\sigma g^{\alpha\lambda}\,. \tag{67}$$

Используя эти равенства, из уравнения (65) находим

$$\partial_\lambda(T_\sigma^\lambda + t_\sigma^\lambda) = \frac{1}{2}\,\delta_\sigma^\lambda\partial_\lambda T\,, \tag{68}$$

аналогично можно найти, используя (58), соотношение

$$\partial_\lambda T_\sigma^\lambda + \frac{1}{2}\,T_{\mu\nu}\partial_\sigma g^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,\delta_\sigma^\lambda\partial_\lambda T\,. \tag{69}$$

Отсюда очевидно, что уравнение (63) не обеспечивает выполнение законов сохранения, и в соотношении (68) также отсутствует симметрия между T_σ^λ и t_σ^λ. Для восстановления симметрии в (63) и (68) и выполнения законов сохранения необходимо просто сделать замену

$$T_\sigma^\lambda \to T_\sigma^\lambda - \frac{1}{2}\,\delta_\sigma^\lambda T\,, \tag{70}$$

согласно (70) след тензора $T_{\mu\nu}$ изменяется следующим образом:

$$T \to -T\,. \tag{71}$$

Заметим, что осуществление симметризации не требует каких-либо предположений о строении вещества. Проведя эту операцию, мы получим новые гравитационные уравнения

$$\partial_\alpha(g^{\nu\lambda}\Gamma_{\sigma\nu}^\alpha) = -\varkappa\left\{(T_\sigma^\lambda + t_\sigma^\lambda) - \frac{1}{2}\,\delta_\sigma^\lambda(T+t)\right\}. \tag{72}$$

Такая же операция замены в (68) и (69) приводит к восстановлению законов сохранения

$$\partial_\lambda(T_\sigma^\lambda + t_\sigma^\lambda) = 0\,, \tag{73}$$

аналогично

$$\partial_\lambda T_\sigma^\lambda + \frac{1}{2}\,T_{\mu\nu}\,\partial_\sigma g^{\mu\nu} = 0\,. \tag{74}$$

Формулы (73) и (74) возникли именно из новых уравнений (72).

Эйнштейн в статье 35 [10], которая является дополнением к статье 34 [10], делает следующий шаг и выбирает уравнения гравитации в форме

$$R_{\mu\nu} = -\varkappa T_{\mu\nu}\,, \tag{75}$$

общековариантной относительно произвольных координатных преобразований. Он снимает требование $\sqrt{-g}=1$. В системе координат $\sqrt{-g}=1$ эти уравнения сводятся к уравнениям (52). Но поскольку, как было видно, уравнение (52) не обеспечивало симметрии между T_σ^λ и t_σ^λ, а также наличие законов сохранения, и для симметризации возникала операция замены (70) и (71), то естественно было бы осуществить эту операцию замены и в исходных уравнениях (75). Таким путем получим новые уравнения гравитации

$$R_{\mu\nu} = -\varkappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}T\right). \qquad (76)$$

Именно эти уравнения спустя несколько дней получит Эйнштейн и опубликует в статье 37 [10]. Отметим, что уравнение сохранения (73) Эйнштейн находил и при наличии уравнений гравитации (63). Именно это обстоятельство, по-видимому, его полностью удовлетворило, поэтому он не обратил внимания на нарушение симметрии между T_σ^λ и t_σ^λ в уравнениях (63). Однако его путь получения законов сохранения привел к тому, что выбор системы координат $\sqrt{-g}=1$ стал возможен только при обращении следа тензора материальных систем в нулевое значение. Эйнштейн вместо того, чтобы восстановить симметрию вышеуказанным путем (70), (71), в то время избирает другой, более радикальный, путь. В статье 35 [10] он выдвигает новую физическую идею, что "в действительности положительна лишь величина $T_\mu^\mu + t_\mu^\mu$, а T_μ^μ обращается в нуль". Такой подход также восстанавливал симметрию, однако, хотя он и был достаточно радикальным, но как оказалось, не плодотворным. Поэтому эта идея просуществовала недолго.

Несколько позднее Эйнштейн вернулся к своей старой идее о симметрии и получил в статье 37 [10] уравнения гравитационного поля (76). При этом он отмечает: "*Как нетрудно видеть, наш добавочный член приводит к тому, что тензоры энергии гравитационного поля и материи входят ... одинаковым образом*". В этом высказывании имеется *неточность. В общей теории относительности не существует тензора энергии гравитационного поля.* Однако как эвристическое понятие оно вело Эйнштейна прямо к цели.

Мы видим, что путь, которым шел Эйнштейн, неминуемо вел к тем же уравнениям, которые получал и Гильберт. Совершенно очевидно, что Эйнштейн получил их независимо и, более того, он их выстрадал, поскольку шел к ним несколько лет.

Для уяснения сказанного выше немаловажное значение может иметь весьма оживленная переписка между Гильбертом и Эйнштейном, происходившая как раз в период их работы над уравнениями гравитационного поля. Именно она свидетельствует, что никакой "*радикально иной*" точки зрения, чем стандартная, в принципе не может быть.

4. Переписка Эйнштейна с Гильбертом [6]

Берлин, 7 ноября 1915 г. Эйнштейн — Гильберту

"С ближайшей почтой посылаю Вам корректуру работы, в которой я модифицировал уравнения гравитации после того, как четыре недели назад обнаружил, что мои аргументы были обманчивы. Коллега Зоммерфельд писал мне, что Вы тоже нашли волос в моем супе, так что он стал Вам совершенно противен. Мне интересно, понравится ли Вам это новое решение. С сердечным приветом. Когда я могу надеяться на механико-историческую неделю в Геттингене? Я очень жду этого".

Берлин, 12 ноября 1915 г. Эйнштейн — Гильберту

"Сердечно благодарю Вас за Ваше дружеское письмо. В проблеме снова наметился прогресс. Именно, посредством постулата $\sqrt{-g}=1$ обеспечивается *общая* ковариантность; тензор Римана непосредственно дает уравнения гравитации. Если моя настоящая модификация (которая не меняет уравнений) оправдана, тогда гравитация должна играть фундаментальную роль в структуре материи. Любопытство мешает мне работать! Я посылаю Вам два экземпляра работы прошлого года. У меня самого — только два пригодных экземпляра. Если еще кто-нибудь хочет иметь эту работу, он может купить ее за 2 марки (как оттиск из Академии)".

Геттинген, 13 ноября 1915 г. Гильберт — Эйнштейну

"Собственно я хотел лишь дать приемлемое для физиков изложение связи между физическими константами прежде, чем давать мое аксиоматическое решение Ваших великих проблем. Но если Вы так заинтересованы, то я мог бы в следующий вторник, послезавтра (т.е. 16) изложить мою теорию во всех деталях. Я нахожу ее математически идеально красивой, хотя расчеты не вполне прозрачны, и, строго говоря, не соответствуют аксиоматическому методу. Вследствие одной общей математической теоремы электродинамические уравнения (в основном максвелловы) являются математическими следствиями уравнений гравитации, так что гравитация и электродинамика фактически неразделимы. Более того, мое выражение для энергии: $E = \Sigma(e_s T^s + e_{ih} t^{ih})$ дает основу для дальнейшего и является общим инвариантом, и отсюда из очень простой аксиомы следуют недостающие 4 "пространственно-временны́е" уравнения $e_s = 0$. В высшей степени приятным было уже обсуждавшееся с Зоммерфельдом открытие, что отсюда получается обычная электрическая энергия, если абсолютный инвариант дифференцировать по гравитационным потенциалам и потом положить $g = 0, 1$. Прошу Вас приехать, хотя бы только на вторник. Вы можете приехать сюда к 3 или 6 1/2 . Заседание Математического общества происходит в 6 часов в конференц-зале. Моя жена и я будем очень рады, если Вы разместитесь у нас. Будет еще лучше, если Вы приедете уже в понедельник, так как в понедельник в 6 часов мы проводим в Физическом институте физический коллоквиум. С наилучшими пожеланиями и в надежде на то, что скоро увидимся. Насколько я понимаю Вашу новую работу, Ваше решение совершенно отличается от моего, тем более, что у меня e_s должны также с необходимостью содержать электрический потенциал".

Берлин, 15 ноября 1915 г. Эйнштейн — Гильберту

"Ваше исследование меня очень интересует, тем более, что я часто ломал голову над тем, чтобы перебросить мост между гравитацией и электромагнетизмом. Замечания, которые Вы делаете в Ваших письмах, дают основания ожидать чего-то великого. Однако я должен сейчас отказаться от поездки в Геттинген и набраться терпения до той поры, пока смогу изучить Вашу систему

[6] Ниже приводятся цитаты из переписки Эйнштейна и Гильберта [9]. (Перевод наш. — *А.А.Л., М.А.М., В.А.П.*)

из напечатанной работы; я очень переутомился и, сверх того, измучен болями в желудке. Пошлите мне, пожалуйста, если можно, экземпляр корректуры Вашего исследования, дабы удовлетворить мое нетерпение. С наилучшими пожеланиями и сердечной благодарностью Вам и Вашей супруге".

16 ноября 1915 г. Гильберт сделал доклад. Об этом автор статьи [18] пишет: "В названии лекции Гильберта, прочитанной в Математическом обществе Геттингена 16 ноября стоял титул «Основные уравнения физики». Это было также название сообщения, с которым Гильберт сделал заявку на доклад в письменном приглашении, циркулирующем среди членов Академии в период с 15 ноября до заседания 20 ноября". Он также отмечает: "Приглашение на заседание 20 ноября было выпущено 15 ноября и, как всегда, было распространено среди участников, чтобы получить подтверждение об их участии и дать возможность сделать заявку на сообщение, которое они собираются представить на заседании. В это приглашение Гильберт вписал: «Hilbert lect. vor in die Nachrichten: Grundgleichungen der Physik»".

Как пишет автор статьи [18]: "*Д. Гильберт был вынужден сообщить о своих результатах в письме к Эйнштейну* (выделено нами — *А.А.Л., М.А.М., В.А.П.*), которое, к сожалению, потеряно. Он, вероятно, послал Эйнштейну рукопись своей лекции в Математическом обществе Геттингена или ее тезисы".

Берлин, 18 ноября 1915 г. Эйнштейн — Гильберту

"*Система, приведенная Вами, точно согласуется, насколько я могу видеть, с тем, что я получил в течение последних недель и направил в Академию* (выделено нами — *А.А.Л., М.А.М., В.А.П.*). Трудность состоит не в том, чтобы найти общековариантные уравнения для $g_{\mu\nu}$; это легко получается с помощью тензора Римана. Действительно же трудно было понять, что эти уравнения дают простое и естественное обобщение закона Ньютона. Это впервые мне удалось сделать в последние недели (я посылал Вам мое первое сообщение), тогда как единственно возможные общековариантные уравнения, которые теперь оказываются правильными, мы рассматривали уже 3 года назад вместе с моим другом Гроссманом. Только с тяжелым сердцем отказались мы тогда от них, так как физические соображения в пользу их несовместимости с законом Ньютона показались мне тогда убедительными. Самое главное, что эта трудность теперь преодолена. Я сегодня направляю в Академию работу, в которой исходя из общей теории относительности и без дополнительных гипотез получил количественно открытое Леверье смещение перигелия Меркурия. До сих пор это не удавалось ни одной теории гравитации. Желаю Вам всего наилучшего".

Таково содержание ответного письма А. Эйнштейна. Не существует аргументов более весомых в этом вопросе, чем слова в письме самого Эйнштейна: "*Система, приведенная Вами, точно согласуется, насколько я могу видеть, с тем, что я получил в течение последних недель и направил в Академию*". Более точного свидетельства в принципе не может быть, но именно это свидетельство, по существу, осталось в стороне у авторов [2–4]. А ведь *одного этого свидетельства Эйнштейна в письме от 18 ноября 1915 г. достаточно*, чтобы полностью и навсегда исключить всякие попытки установить "*радикально иную*" точку зрения, чем стандартная. Авторы [2, 3] допустили целый ряд других неправильных выводов о работе Гильберта, а поэтому нам пришлось в разделе 2 более детально рассмотреть их сочинение.

Предположим все же, что Эйнштейн получил от Гильберта уравнения гравитации в форме (12), т.е.

$$[\sqrt{g}R]_{\mu\nu} = -\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial g^{\mu\nu}}\,. \tag{77}$$

Невероятно, чтобы Эйнштейн согласился с тем, что *уравнения* (77) согласуются с *его уравнениями*

$$R_{\mu\nu} = -\varkappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}T\right), \tag{78}$$

в которые явно входит тензор Риччи. Чтобы согласиться с этим, Эйнштейну необходимо было бы вычислить производные

$$\frac{\partial\sqrt{g}R}{\partial g^{\mu\nu}}\,,\quad \frac{\partial\sqrt{g}R}{\partial g_k^{\mu\nu}}\,,\quad \frac{\partial\sqrt{g}R}{\partial g_{k\ell}^{\mu\nu}}\,.$$

Однако он их в то время не вычислял. Об этом позднее в письме к Г.А. Лоренцу от 19 января 1916 г. он писал [9]: "Я уклонился от несколько утомительного вычисления $\partial R/\partial g^{\mu\nu}$, $\partial R/\partial g_\sigma^{\mu\nu}$, установив тензорные уравнения непосредственно. Но другой способ, конечно, работает и даже более элегантен математически".

Невероятно также, чтобы Гильберт, зная, что в уравнения Эйнштейна входит тензор Риччи (*об этом он был извещен письмом Эйнштейна от 7 ноября*), *мог послать ему свои уравнения в форме* (77). *Несомненно, что Эйнштейн получил от Гильберта уравнения в форме*

$$\sqrt{g}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}R\right) = -\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial g^{\mu\nu}}\,, \tag{79}$$

поскольку Гильберту не представляло труда из общих соображений, практически без вычислений, как это мы ранее видели, найти равенство

$$[\sqrt{g}R]_{\mu\nu} = \sqrt{g}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}R\right).$$

В письме Гильберту от 18 ноября Эйнштейн пишет: "*Система, приведенная Вами, точно согласуется, насколько я могу видеть, с тем, что я получил*".

В этом легко убедиться, сравнивая уравнения (78) и (79). Слова Эйнштейна "*насколько я могу видеть*", по-видимому, были вызваны тем, что в статье Гильберта плотность тензора энергии-импульса была определена следующим образом:

$$\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial g^{\mu\nu}}\,,$$

где L — функция переменных $g^{\mu\nu}$, q_σ и $q_{\sigma\nu}$. Это определение было новым и для Эйнштейна еще неизвестным. Чтобы понять суть его, необходимо было время. Но ответ на письмо Гильберта Эйнштейн дал немедленно. Позднее в статье 42 [10] Эйнштейн будет пользоваться именно таким определением плотности тензора энергии-импульса. В этой статье он так же, как Гильберт, введет функцию $\mathfrak{M}$ от переменных g^{μ}, $q_{(\rho)}$, $q_{(\rho)\alpha}$ и запишет плотность тензора энергии-импульса в виде

$$\mathfrak{T}_{\mu\nu} = -\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial g^{\mu\nu}}\,.$$

Поэтому невозможно понять, на основании чего авторы [3] пытаются утверждать совсем обратное: "Новое выражение для энергии, которое Гильберт теперь перенял у Эйнштейна...".

Как мы только что видели, это совсем не так. Именно Эйнштейн перенял определение плотности тензора энергии-импульса у Гильберта и использовал его в статье 42 [9].

Далее авторы [3] заключают: "Эйнштейновское обобщение вывода Гильберта сделало возможным рассматривать последний просто как вывод, представляющий проблематичный специальный случай".

Все это неправильно. Метод Гильберта — общий, с его помощью можно получить уравнения гравитации, не предполагая конкретного вида функции Лагранжа материальной системы L. Поэтому никакого обобщения вывода Гильберта не было и не могло быть. Другое дело, что затем Гильберт свой метод применил к конкретному случаю теории Ми.

Как мы уже отмечали в разделе 2, преобразовать (77) к виду (79) для Гильберта не представляло никакого труда. Именно для этого и понадобилась доказанная Гильбертом теорема III. Поэтому гранки, в которых имеются пропуски, не могут свидетельствовать о том, что Гильберт не записал уравнения гравитационного поля в форме (79).

5. Заключение

Проведенный в разделах 2 и 3 анализ показывает, что Эйнштейн и Гильберт независимо открыли уравнения гравитационного поля. Их пути были различны, но эти пути вели к одной и той же цели. Так что никто ни у кого не подсмотрел. Поэтому никакого "*запоздалого решения в споре Гильберта — Эйнштейна*", о котором пишут авторы [2], в принципе не должно быть. Впрочем, и спора-то Гильберта с Эйнштейном никогда не было. Все предельно ясно: *оба автора сделали все для того, чтобы их имена были вместе в названии уравнений гравитационного поля*. Но общая теория относительности есть теория Эйнштейна.

Авторы выражают благодарность за ценные обсуждения работы С.С. Герштейну и Н.Е. Тюрину.

6. Приложение

Мы ниже в методических целях дадим подробное доказательство теорем Гильберта II и III.

Теорема II. Если H инвариант, зависящий от $g_{\mu\nu}$, $\partial_\lambda g_{\mu\nu}$, $\partial_\sigma\partial_\lambda g_{\mu\nu}$, A_ν, $\partial_\lambda A_\nu$, то для бесконечно малого произвольного контравариантного вектора δx^s выполняется тождество

$$\delta_{\mathrm{L}}(\sqrt{g}H) = \partial_s(\sqrt{g}H\,\delta x^s)\,, \tag{П.1}$$

здесь δ_{L} — вариация Ли.

Чтобы доказать эту теорему, рассмотрим интеграл

$$S = \int_\Omega \mathrm{d}^4x\,\sqrt{g}H\,. \tag{П.2}$$

Совершим бесконечно малое преобразование координат

$$x'^\nu = x^\nu + \delta x^\nu\,, \tag{П.3}$$

здесь δx^ν — бесконечно малый произвольный четырехвектор.

При этом преобразовании интеграл не изменяется, а поэтому вариация $\delta_c S$ равна нулю

$$\delta_c S = \int_{\Omega'} \mathrm{d}^4x'\,\sqrt{g'}H' - \int_\Omega \mathrm{d}^4x\,\sqrt{g}H = 0\,. \tag{П.4}$$

Первый интеграл можно записать в виде

$$\int_{\Omega'} \mathrm{d}^4x'\,\sqrt{g'}H' = \int_\Omega J\sqrt{g'}H'\,\mathrm{d}^4x\,. \tag{П.5}$$

Здесь J — якобиан преобразования

$$J = \frac{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}\,. \tag{П.6}$$

Якобиан J при преобразованиях (П.3) равен

$$J = 1 + \partial_\lambda \delta x^\lambda\,. \tag{П.7}$$

Разлагая $\sqrt{g'}H'$ в ряд Тейлора, находим

$$\sqrt{g'(x')}H'(x') = \sqrt{g'(x)}H'(x) + \delta x^\lambda\,\partial_\lambda(\sqrt{g}H)\,. \tag{П.8}$$

На основании (П.5), (П.7) и (П.8) равенство (П.4) принимает вид

$$\delta_c S = \int_\Omega \mathrm{d}^4x\,\left[\delta_{\mathrm{L}}(\sqrt{g}H) + \partial_\lambda(\sqrt{g}H\,\delta x^\lambda)\right] = 0\,. \tag{П.9}$$

Здесь мы обозначили через $\delta_{\mathrm{L}}(\sqrt{g}H)$ вариацию Ли

$$\delta_{\mathrm{L}}(\sqrt{g}H) = \sqrt{g'(x)}H'(x) - \sqrt{g(x)}H(x)\,. \tag{П.10}$$

Вариация Ли перестановочна с частным дифференцированием:

$$\delta_{\mathrm{L}}\partial_\lambda = \partial_\lambda\delta_{\mathrm{L}}\,. \tag{П.11}$$

Вариация Ли от функции $\sqrt{g}H$ равна

$$\delta_{\mathrm{L}}(\sqrt{g}H) = P_g(\sqrt{g}H) + P_q(\sqrt{g}H)\,, \tag{П.12}$$

здесь

$$P_g(\sqrt{g}H) = \frac{\partial\sqrt{g}H}{\partial g_{\mu\nu}}\,\delta_{\mathrm{L}}g_{\mu\nu} + \frac{\partial\sqrt{g}H}{\partial(\partial_\lambda g_{\mu\nu})}\,\partial_\lambda\delta_{\mathrm{L}}g_{\mu\nu} + \frac{\partial\sqrt{g}H}{\partial(\partial_\sigma\partial_\lambda g_{\mu\nu})}\,\partial_\sigma\partial_\lambda\delta_{\mathrm{L}}g_{\mu\nu}\,, \tag{П.13}$$

$$P_q(\sqrt{g}H) = \frac{\partial\sqrt{g}H}{\partial A_\lambda}\,\delta_{\mathrm{L}}A_\lambda + \frac{\partial\sqrt{g}H}{\partial(\partial_\sigma A_\lambda)}\,\partial_\sigma\delta_{\mathrm{L}}A_\lambda\,. \tag{П.14}$$

В силу произвольности объема Ω на основании (П.9) получим искомое тождество Гильберта

$$\delta_{\rm L}(\sqrt{g}H) + \partial_\lambda(\sqrt{g}H\,\delta x^\lambda) \equiv 0\,, \qquad (\text{П}.15)$$

здесь

$$\delta_{\rm L}(\sqrt{g}H) = P_g(\sqrt{g}H) + P_q(\sqrt{g}H)\,. \qquad (\text{П}.16)$$

Теорема III. Если инвариант H зависит только от $g_{\mu\nu}$, $\partial_\lambda g_{\mu\nu}$, $\partial_\sigma\partial_\lambda g_{\mu\nu}$, то вариационная производная

$$\frac{\delta\sqrt{g}H}{\delta g_{\mu\nu}} = \sqrt{g}\,G^{\mu\nu} = \frac{\partial\sqrt{g}H}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_\lambda\,\frac{\partial\sqrt{g}H}{\partial(\partial_\lambda g_{\mu\nu})} + \partial_\sigma\partial_\lambda\,\frac{\partial\sqrt{g}H}{\partial(\partial_\sigma\partial_\lambda g_{\mu\nu})} \qquad (\text{П}.17)$$

удовлетворяет тождеству

$$\nabla_\lambda G^{\lambda\nu} \equiv 0\,, \qquad (\text{П}.18)$$

или в другой форме

$$\partial_\lambda(\sqrt{g}\,G_\rho^\lambda) + \frac{1}{2}\,\sqrt{g}\,G_{\lambda\sigma}\partial_\rho g^{\lambda\sigma} \equiv 0\,, \qquad (\text{П}.19)$$

здесь ∇_λ — ковариантная производная в римановом пространстве.

Чтобы доказать эту теорему, рассмотрим интеграл

$$\int_\Omega \sqrt{g}H\,{\rm d}^4x$$

по конечной области четырехмерного мира. При этом вектор смещения δx^σ в (П.3) должен вместе со своими производными обращаться в нуль на трехмерной границе области Ω. Это приведет к тому, что вариации поля и их производные на границе области также будут равны нулю. На основании тождества Гильберта (П.15) находим

$$\int_\Omega \delta_{\rm L}(\sqrt{g}H)\,{\rm d}^4x = 0\,. \qquad (\text{П}.20)$$

В нашем случае

$$\delta_{\rm L}(\sqrt{g}H) = P_g(\sqrt{g}H)\,. \qquad (\text{П}.21)$$

Выражение (П.13) можно записать в форме

$$P_g(\sqrt{g}H) = \frac{\delta\sqrt{g}H}{\delta g_{\mu\nu}}\,\delta_{\rm L}\,g_{\mu\nu} + \partial_\lambda S^\lambda\,, \qquad (\text{П}.22)$$

здесь вектор S^λ равен

$$S^\lambda = \left[\frac{\partial\sqrt{g}H}{\partial(\partial_\lambda g_{\mu\nu})} - \partial_\sigma\left(\frac{\partial\sqrt{g}H}{\partial(\partial_\sigma\partial_\lambda g_{\mu\nu})}\right)\right]\delta_{\rm L}g_{\mu\nu} + \\ + \frac{\partial\sqrt{g}H}{\partial(\partial_\sigma\partial_\lambda g_{\mu\nu})}\,\partial_\sigma\delta_{\rm L}g_{\mu\nu}\,. \qquad (\text{П}.23)$$

Подставляя (П.22) в (П.20), находим

$$\int_\Omega \frac{\delta\sqrt{g}H}{\delta g_{\mu\nu}}\,\delta_{\rm L}g_{\mu\nu}\,{\rm d}^4x = 0\,. \qquad (\text{П}.24)$$

Определим теперь вариацию $\delta_{\rm L}g_{\mu\nu}$ при преобразованиях (П.3). Метрический тензор $g_{\mu\nu}$ преобразуется по правилу

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu}\,\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\,g_{\lambda\sigma}(x)\,.$$

Отсюда для преобразований (П.3) находим

$$\delta_{\rm L}g_{\mu\nu}(x) = -\delta x^\sigma\partial_\sigma g_{\mu\nu} - g_{\mu\sigma}\partial_\nu\delta x^\sigma - g_{\nu\sigma}\partial_\mu\delta x^\sigma \qquad (\text{П}.25)$$

или, учитывая равенство

$$\nabla_\sigma g_{\mu\nu} = \partial_\sigma g_{\mu\nu} - g_{\lambda\mu}\Gamma_{\sigma\nu}^\lambda - g_{\lambda\nu}\Gamma_{\sigma\mu}^\lambda = 0\,, \qquad (\text{П}.26)$$

вариацию Ли можно записать в ковариантной форме

$$\delta_{\rm L}g_{\mu\nu} = -g_{\mu\sigma}\nabla_\nu\delta x^\sigma - g_{\nu\sigma}\nabla_\mu\delta x^\sigma\,. \qquad (\text{П}.27)$$

Подставляя это выражение в интеграл (П.24), получим

$$\int_\Omega {\rm d}^4x\,\frac{\delta\sqrt{g}H}{\delta g_{\mu\nu}}\,g_{\mu\sigma}\nabla_\nu\delta x^\sigma = 0\,. \qquad (\text{П}.28)$$

Выражение (П.28) запишем в форме

$$\int_\Omega\left[\nabla_\nu\left(\frac{\delta\sqrt{g}H}{\delta g_{\mu\nu}}\,g_{\mu\sigma}\delta x^\sigma\right) - \delta x^\sigma\nabla_\nu\left(\frac{\delta\sqrt{g}H}{\delta g_{\mu\nu}}\,g_{\mu\sigma}\right)\right]{\rm d}^4x = 0\,. \qquad (\text{П}.29)$$

Заметим, что

$$\nabla_\nu\left(\frac{\delta\sqrt{g}H}{\delta g_{\mu\nu}}\,g_{\mu\sigma}\delta x^\sigma\right) = \partial_\nu\left(\frac{\delta\sqrt{g}H}{\delta g_{\mu\nu}}\,g_{\mu\sigma}\delta x^\sigma\right). \qquad (\text{П}.30)$$

На основании (П.30) интеграл от первого члена в (П.29) обращается в нуль, и выражение (П.29) принимает вид

$$\int_\Omega \delta x^\sigma\,\nabla_\nu G_\sigma^\nu\,{\rm d}^4x = 0\,. \qquad (\text{П}.31)$$

Здесь мы в соответствии с определением (П.17) ввели смешанный тензор

$$\sqrt{g}G_\sigma^\nu = \frac{\delta\sqrt{g}H}{\delta g_{\mu\nu}}\,g_{\mu\sigma}\,.$$

В силу произвольности вектора δx^σ находим из (П.31) искомое тождество Гильберта

$$\nabla_\nu G_\sigma^\nu \equiv 0\,. \qquad (\text{П}.32)$$

Представим (П.32) в развернутом виде:

$$\nabla_\nu G_\sigma^\nu = \partial_\nu G_\sigma^\nu - \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda G_\lambda^\nu + \Gamma_{\nu\lambda}^\nu G_\sigma^\lambda \equiv 0\,. \qquad (\text{П}.33)$$

Учитывая выражения

$$\Gamma_{\sigma\nu}^\lambda = \frac{1}{2}\,g^{\lambda\rho}(\partial_\sigma g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\sigma\rho} - \partial_\rho g_{\sigma\nu})\,, \qquad \partial_\lambda\sqrt{g} = \sqrt{g}\,\Gamma_{\nu\lambda}^\nu\,, \qquad (\text{П}.34)$$

находим

$$\nabla_\rho(\sqrt{g}\,G_\rho^\rho) = \partial_\rho(\sqrt{g}\,G_\rho^\rho) + \frac{1}{2}\sqrt{g}\,G_{\lambda\sigma}\partial_\rho g^{\lambda\sigma} \equiv 0\,. \qquad (\text{П}.35)$$

Это тождество впервые было получено Гильбертом в 1915 г.

Применяя тождество (П.35) к инварианту $H = R$, где R — скалярная кривизна, Гильберт получил тождество Бьянки

$$\nabla_\nu \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g^{\mu\nu} R\right) \equiv 0\,. \tag{П.36}$$

Об этом подробно написано в основном тексте настоящей статьи.

Применим теперь теорему II к инварианту L, который зависит от $A_\nu, \partial_\lambda A_\nu, g_{\mu\nu}, \partial_\lambda g_{\mu\nu}$. На основании (П.22) имеем

$$P_g(\sqrt{g}L) = \frac{\delta\sqrt{g}L}{\delta g_{\mu\nu}}\, \delta_{\mathrm{L}}\, g_{\mu\nu} + \partial_\lambda S_1^\lambda\,, \tag{П.37}$$

где

$$S_1^\lambda = \frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial(\partial_\lambda g_{\mu\nu})}\, \delta_{\mathrm{L}} g_{\mu\nu}\,. \tag{П.38}$$

Аналогично

$$P_q(\sqrt{g}L) = \frac{\delta\sqrt{g}L}{\delta A_\lambda}\, \delta_{\mathrm{L}} A_\lambda + \partial_\lambda S_2^\lambda\,, \tag{П.39}$$

где

$$S_2^\lambda = \frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial(\partial_\lambda A_\sigma)}\, \delta_{\mathrm{L}} A_\sigma\,. \tag{П.40}$$

На основании (П.15), (П.37) и (П.39) находим

$$\int_\Omega \left[\frac{\delta\sqrt{g}L}{\delta g_{\mu\nu}}\, \delta_{\mathrm{L}} g_{\mu\nu} + \frac{\delta\sqrt{g}L}{\delta A_\lambda}\, \delta_{\mathrm{L}} A_\lambda\right] \mathrm{d}^4 x = 0\,. \tag{П.41}$$

Найдем теперь вариацию Ли от полевой переменной A_λ. Согласно правилу преобразования вектора A_λ имеем

$$A'_\lambda(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\lambda}\, A_\nu(x)\,. \tag{П.42}$$

Отсюда для преобразования (П.3) находим

$$A'_\lambda(x + \delta x) = A_\lambda(x) - A_\nu(x)\partial_\lambda \delta x^\nu\,. \tag{П.43}$$

Разлагая левую часть равенства в ряд Тейлора, получим

$$\delta_{\mathrm{L}} A_\lambda = A'_\lambda(x) - A_\lambda(x) = -\delta x^\nu\, \partial_\nu A_\lambda - A_\nu(x)\, \partial_\lambda \delta x^\nu\,, \tag{П.44}$$

или в ковариантной форме

$$\delta_{\mathrm{L}} A_\lambda = -\delta x^\sigma \nabla_\sigma A_\lambda - A_\sigma \nabla_\lambda \delta x^\sigma\,. \tag{П.45}$$

Подставляя (П.27) и (П.45) в (П.41), находим

$$\int_\Omega \mathrm{d}^4 x \left[2\nabla_\nu\left(\frac{\delta\sqrt{g}L}{\delta g_{\mu\nu}}\, g_{\mu\sigma}\right) - \frac{\delta\sqrt{g}L}{\delta A_\lambda}\, \nabla_\sigma A_\lambda + {} + \nabla_\lambda\left(\frac{\delta\sqrt{g}L}{\delta A_\lambda}\, A_\sigma\right)\right] \delta x^\sigma = 0\,. \tag{П.46}$$

В силу произвольности вектора смещения δx^σ получим тождество

$$2\nabla_\nu\left(\frac{\delta\sqrt{g}L}{\delta g_{\mu\nu}}\, g_{\mu\sigma}\right) = (\nabla_\sigma A_\lambda - \nabla_\lambda A_\sigma)\, \frac{\delta\sqrt{g}L}{\delta A_\lambda} - {} - A_\sigma \nabla_\lambda\left(\frac{\delta\sqrt{g}L}{\delta A_\lambda}\right). \tag{П.47}$$

Согласно Гильберту плотность тензора энергии-импульса вещества определяется выражением

$$T^{\mu\nu} = -2\, \frac{\delta\sqrt{g}L}{\delta g_{\mu\nu}}\,. \tag{П.48}$$

Тождество (П.47) принимает вид

$$\nabla_\nu T^\nu_\sigma = A_\sigma \nabla_\lambda\left(\frac{\delta\sqrt{g}L}{\delta A_\lambda}\right) + (\nabla_\lambda A_\sigma - \nabla_\sigma A_\lambda)\, \frac{\delta\sqrt{g}L}{\delta A_\lambda}\,, \tag{П.49}$$

или

$$\nabla_\nu T^\nu_\sigma = A_\sigma \partial_\lambda\left(\frac{\delta\sqrt{g}L}{\delta A_\lambda}\right) + (\partial_\lambda A_\sigma - \partial_\sigma A_\lambda)\, \frac{\delta\sqrt{g}L}{\delta A_\lambda}\,. \tag{П.50}$$

При выполнении уравнений гравитации в силу теоремы III имеет место равенство

$$\nabla_\nu T^\nu_\sigma = 0\,, \tag{П.51}$$

а следовательно, тождество (П.50) превращается в уравнение, которое Гильберт обозначил в работе [6] номером (28),

$$A_\sigma \partial_\lambda\left(\frac{\delta\sqrt{g}L}{\delta A_\lambda}\right) + (\partial_\lambda A_\sigma - \partial_\sigma A_\lambda)\, \frac{\delta\sqrt{g}L}{\delta A_\lambda} = 0\,. \tag{П.52}$$

Но это уравнение в силу аксиомы I Гильберта всегда выполняется, поскольку

$$\frac{\delta\sqrt{g}L}{\delta A_\lambda} = 0\,. \tag{П.53}$$

Список литературы

1. Earman J, Glymour C "Einstein and Hilbert: two months in the history of general relativity" *Arch. Hist. Exact Sci.* **19** 291 (1978)
2. Corry L, Renn J, Stachel J "Belated decision in the Hilbert – Einstein priority dispute" *Science* **278** 1270 (1997)
3. Renn J, Stachel J, Preprint No. 118 (Berlin: Max-Planck Institut für Wissenschaftsgeschichte, 1999)
4. Визгин В П "Об открытии уравнений гравитационного поля Эйнштейном и Гильбертом (новые материалы)" *УФН* **171** 1347 (2001)
5. Einstein A "Die Feldgleichungen der Gravitation" *Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss.* **48** 844 (1915)
6. Hilbert D "Die Grundlagen der Physik (Erste Mitteilung)" *Göttingen Nachr.* **3** 395 (1915) [Перевод на русский язык в сб. *Альберт Эйнштейн и теория гравитации* (М.: Мир, 1979) с. 133]
7. Bjerknes C J *Anticipations of Einstein in the General Theory of Relativity* (Downers Grove, Ill.: XTX Inc., 2003)
8. Einstein A, Grossmann M "Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation" *Z. Math. Phys.* **62** 225 (1913)
9. Einstein A *The Collected Papers of Albert Einstein* Vol. 8 *The Berlin Years, Correspondence, 1914 – 1918* (Eds R Schulmann et al.) (Princenton, N.J.: Princenton Univ. Press, 1998)
10. Эйнштейн А *Собрание научных трудов* Т. I, II (М.: Наука, 1965 – 1966)
11. Пайс А *Научная деятельность и жизнь Альберта Эйнштейна* (Под ред. А А Логунова) (М.: Наука, 1989) [Pais A "*Subtle is the Lord...*": *The Science and the Life of Albert Einstein* (Oxford: Oxford Univ. Press, 1982)]
12. Hilbert D "Die Grundlagen der Physik" *Math. Ann.* **92** 1 (1924)
13. Фок В А "О движении конечных масс в общей теории относительности" *ЖЭТФ* **9** 375 (1939)

14. Паули В *Теория относительности* (М.: Наука, 1983)
15. Синг Дж Л *Общая теория относительности* (М.: ИЛ, 1963) с. 164 [Synge J L *Relativity*: *The General Theory* (Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1960)]
16. Блинников С И, Высоцкий М И, Окунь Л Б "Скорости $c/\sqrt{3}$ и $c/\sqrt{2}$ в общей теории относительности" *УФН* **173** 1131 (2003)
17. Hilbert D "Die Grundlagen der Physik (Zweite Mitteilung)" *Göttingen Nachr*. **1** 53 (1917)
18. Sauer T "The relativity of discovery: Hilbert's first note on the foundations of physics" *Arch. Hist. Exact Sci.* **53** 529 (1999)

How were the Hilbert – Einstein equations discovered?

A.A. Logunov, M.A. Mestvirishvili, V.A. Petrov
Russian State Research Center "Institute for High Energy Physics",
142281 Protvino, Moscow Region, Russian Federation
Tel. (*7-0967*) *742-259*. *Fax* (*7-0967*) *745-824*
E-mail: *Anatoly.Logunov@mail.ihep.ru*, *Vladimir.Petrov@ihep.ru*

The ways in which A Einstein and D Hilbert independently arrived at the gravitational field equations are traced. A critical analysis is presented of a number of papers in which the history of the derivation of the equations is viewed in a way "that radically differs from the standard point of view". The conclusions of these papers are shown to be totally unfounded.

PACS numbers: **01.65. + g**, 04.20.Cv, 04.20.Fy

Bibliography — 18 references

Received 5 February 2004