

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

**Волны в плазме в магнитном поле
вблизи критической поверхности**

А.В. Тимофеев

Распространение электромагнитных волн в плазме в магнитном поле вблизи критической поверхности (КП), на которой электронная ленгмювская частота равна частоте волны, сопровождается усиленной рефракцией, изменением поляризации, перетеканием электромагнитной энергии от одной волновой ветви к другой. Предложена простая модель, позволяющая с единых позиций рассмотреть весь комплекс явлений, происходящих вблизи КП. В их основе лежит линейное взаимодействие электромагнитных волн с электронными ленгмювскими колебаниями, которые в холодной плазме локализованы на этой поверхности. Одним из ярких проявлений такого взаимодействия является прямой выход энергии электронных ленгмювских колебаний в виде электромагнитного излучения в вакуум.

PACS numbers: 41.20.Jb, 52.35.Hr, 52.55.Nc

Содержание

1. Введение (609).
 2. Общая картина волн в плотной плазме в магнитном поле (610).
 3. Волны плоскостной плазмы с волновым вектором, близким по направлению к вектору магнитного поля, вблизи критической поверхности (614).
3.1. Области прозрачности. 3.2. Поляризация волн. 3.3. Волны при малом угле между градиентом плотности плазмы и вектором магнитного поля. Общая картина распространения волн в плоскостной плазме вблизи критической поверхности.
 4. О выходе энергии электронных ленгмювских колебаний из замагниченной плазмы в вакуум (619).
 5. Волновой канал вблизи критической поверхности (620).
 6. Коэффициенты прохождения электромагнитных волн через критическую поверхность и отражения от нее (623).
6.1. Общий случай. 6.2. Малый угол между градиентом плотности плазмы и вектором магнитного поля.
 7. Лучевые траектории вблизи критической поверхности (627).
 8. Волновые пучки вблизи критической поверхности (629).
 9. Особенности СВЧ-нагрева плотной плазмы в магнитных ловушках (631).
9.1. Открытые ловушки. 9.2. Замкнутые ловушки.
 10. Приложения (633).
- Список литературы (636).

1. Введение

Как известно, электромагнитные волны не могут распространяться в плазме, плотность которой превышает критическую, определяемую из условия равенства электронной плазменной частоты ω_{pe} частоте колебаний ω . Если плазма неоднородна, то поверхность, на которой выполняется данное условие, называют критической поверхностью (КП). Присутствие магнитного поля позволяет волнам проникнуть за КП. Однако при этом в окрестности КП с волнами происходят сложные физические процессы: они испытывают сильную рефракцию, меняется их поляризация, происходит частичное отражение и трансформация в колебания другого типа.

Эти процессы начали изучаться более 50 лет назад в связи с проблемой распространения радиоволн в ионосфере [1–3]. Была выяснена общая картина распространения и взаимодействия волн в окрестности КП, рассчитаны коэффициенты прохождения, отражения и трансформации волн, падающих на КП вдоль градиента плотности плазмы. Численный анализ лучевых траекторий выявил наличие особенностей — заострений лучевых траекторий на КП (см. [5], а также, например, [1, 4]). В работе [6] было отмечено, что хотя в окрестности КП, вообще говоря, располагается зона непрозрачности, однако она исчезает для волн, которые подходят к КП с волновым вектором, параллельным вектору магнитного поля. Такие волны свободно проходят через КП. Данный эффект получил название "радиоокна". Через радиоокно электромагнитные волны проникают в плотную плазму ионосферы. В простейших плазменных конфигурациях типа плоского слоя с монотонно изменяющейся плотностью волны, проникшие через радиоокно, в результате довольно сложной эволюции замедляются и, в конце концов, поглощаются электронной компонентой плаз-

А.В. Тимофеев. Российский научный центр "Курчатовский институт",
Институт ядерного синтеза,
123182 Москва, пл. Курчатова 1, Российская Федерация
Тел. (095) 196-91-83
E-mail: avtim@nfi.kiae.ru

Статья поступила 21 июля 2003 г., после доработки 9 декабря 2003 г.

мы. В работе [7] было предложено использовать этот эффект для нагрева плотной плазмы в магнитных ловушках, применяя так называемую схему О-Х-В-нагрева (О — обыкновенные, Х — необыкновенные, В — бернштейновские волны).

В более сложных ситуациях, например при наличии в плазме нерегулярных неоднородностей, электромагнитные волны могут частично отражаться и выходить через радиоокно из плазмы. В этом случае радиосигнал, отраженный плазмой, утраивается (см. [1–4, 6], а также раздел 6.1).

Эти исследования получили новый импульс в связи с термоядерной проблемой, главным образом в связи с разработкой способов сверхвысокочастотного (СВЧ) нагрева плотной плазмы в магнитных ловушках (см., в частности, вышеупомянутую работу [7]). На новом этапе теории явлений, происходящих у КП, получила дальнейшее развитие. Коэффициенты прохождения, отражения и трансформации были рассчитаны для волн, падающих на КП под произвольным углом к градиенту плотности [8–11]. Рассмотрено прохождение не только плоских волн, но и пространственно-ограниченных волновых пучков [12]. Показано, что КП действует на волновые пучки как фильтр, пропускающий лишь часть фурье-спектра пучка из его разложения по волновым числам. Проанализирована поляризация волн и ее связь с особенностями лучевых траекторий вблизи КП [12]. В работе [13] рассматривалось прохождение через КП волн конечной амплитуды.

Исследования дали также ряд побочных результатов. Оказалось, что электромагнитные волны, подходя к КП, могут превращаться в электронные ленгмюровские колебания с продольной (вдоль основного направления магнитного поля) поляризацией электрического поля. Именно в этом случае на лучевых траекториях возникают заострения [12]. В силу обратимости уравнений Максвелла должна происходить и обратная трансформация электронных ленгмюровских колебаний в электромагнитные волны. Так как последние могут выходить в вакуум, то это приводит к превращению энергии электронных ленгмюровских колебаний в энергию электромагнитного излучения [14, 15]. Указанный механизм может проявиться как в космосе, так и в лабораторных экспериментах, в которых неоднократно наблюдалось достаточно интенсивное электромагнитное излучение в условиях, когда согласно теоретическим представлениям должна была развиваться ленгмювская турбулентность. Излучение обычно связывалось с нелинейными механизмами трансформации электронных ленгмюровских колебаний в электромагнитные (см., например, [16]). Рассматривался также линейный механизм трансформации коротковолновых потенциальных волн, которые могут распространяться в условиях плазменного резонанса в замагниченной плазме [1–3].

Электромагнитные волны в окрестности КП подвержены сильной рефракции. Если угол χ между градиентом плотности плазмы и направлением магнитного поля достаточно велик, то электромагнитные волны оказываются "привязанными" к КП. В результате в плазме с монотонно изменяющейся плотностью возникает волновой канал, прижатый к КП [17]. В неравновесной плазме волны, локализованные в этом канале, могут стать неустойчивыми, при этом их амплитуда достигнет значительных величин.

Цель настоящего обзора состоит в систематическом анализе явлений, возникающих при распространении электромагнитных волн вблизи КП. При анализе оказалось полезным представить волновое электрическое поле в виде суммы трех составляющих: параллельной вектору основного магнитного поля и двух перпендикулярных ему, вращающихся навстречу друг другу (в электронную — правую сторону и в ионную — левую). Такое представление обычно для теории циклотронных волн в плазме (см., например, [18]) и при анализе электромагнитных волн вблизи КП использовалось, например, в [7, 12, 13]. С его помощью удастся в рамках простой математической модели рассмотреть основной физический процесс, определяющий распространение электромагнитных волн замагниченной плазмы вблизи КП — их взаимодействие с собственно плазменными — электронными ленгмюровскими колебаниями. Это явление происходит и в незамагниченной плазме, однако в присутствии магнитного поля оно становится более эффективным.

2. Общая картина волн в плотной плазме в магнитном поле

Анализируя волны замагниченной плазмы, представим поперечную по отношению к вектору основного магнитного поля компоненту переменного электрического поля в виде суперпозиции циркулярно поляризованных полей $E_{\pm} = (E_x \pm iE_y)/\sqrt{2}$, где $E_{x,y}$ — компоненты электрического поля в правой декартовой системе координат, ось Z которой направлена вдоль основного магнитного поля. При временной зависимости переменных полей вида $\propto \exp(-i\omega t)$ составляющая E_+ описывает электрическое поле, вращающееся в ионную сторону, а E_- — в электронную. В дальнейшем в индексах сочетание знаков $\pm$, указывающее на поляризацию колебаний, будет обозначаться как σ , например, $E_{\pm} = E_{\sigma}$, а в математических выражениях $\sigma = \pm 1$. В терминах полей E_{σ} , $E_{\parallel} = E_z$ система уравнений Максвелла для однородной холодной плазмы сводится к алгебраической системе уравнений (см., например, [14])

$$\begin{pmatrix} N_{\parallel}^2 + N_+ N_- - \varepsilon_+ & -N_+^2 & -N_{\parallel} N_+ \\ -N_-^2 & N_{\parallel}^2 + N_+ N_- - \varepsilon_- & -N_{\parallel} N_- \\ -N_{\parallel} N_- & -N_{\parallel} N_+ & 2N_+ N_- - \varepsilon_{\parallel} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_+ \\ E_- \\ E_{\parallel} \end{pmatrix} = 0, \quad (2.1)$$

где $N = kc/\omega$ — показатель преломления,

$$N_{\sigma} = \frac{N_x + i\sigma N_y}{\sqrt{2}}, \quad \varepsilon_{\sigma} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega + \sigma\omega_c)}, \quad \varepsilon_{\parallel} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2},$$

ω_c — электронная циклотронная частота. Частота волн считается достаточно высокой, и поэтому ионный вклад в диэлектрический отклик плазмы не учитывается. Для анализа колебаний неоднородной плазмы в (2.1) следует произвести замену $N \rightarrow -i\partial/\partial r$. Здесь и в дальнейшем все величины размерности длины нормируются на c/ω .

Если длина волны мала по сравнению с характерным пространственным масштабом неоднородности плазмы, то система уравнений (2.1) определяет локальную поля-

ризацию электрического поля, при этом показатель преломления становится функцией координат. Решением системы уравнений (2.1) является вектор

$$\mathbf{E} = (E_+, E_-, E_{\parallel}) = \text{const} \left(\frac{N_+}{\varepsilon_+ - N^2}, \frac{N_-}{\varepsilon_- - N^2}, \frac{N_{\parallel}}{\varepsilon_{\parallel} - N^2} \right). \quad (2.2)$$

Решение существует, если выполняется условие разрешимости системы уравнений (2.1) — дисперсионное соотношение [18]

$$D = 1 + \frac{N_{\parallel}^2}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon_+ - N^2} + \frac{1}{\varepsilon_- - N^2} \right) + \frac{N_{\parallel}^2}{\varepsilon_{\parallel} - N^2} = 0, \quad (2.3)$$

которое можно также записать в привычном виде равенства нулю полинома по N^2 (см., например, [19])

$$D = N^4(\varepsilon_{\perp} \sin^2 \theta + \varepsilon_{\parallel} \cos^2 \theta) + N^2[(\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}) \sin^2 \theta - 2\varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel}] + \varepsilon_+ \varepsilon_- \varepsilon_{\parallel} = 0, \quad (2.4)$$

где $\varepsilon_{\perp} = (\varepsilon_+ + \varepsilon_-)/2$, θ — угол между волновым вектором и вектором магнитного поля.

Уравнения (2.3) и (2.4) эквивалентны. В зависимости от конкретной задачи использование какого-то из них может быть более удобным.

В отсутствие магнитного поля все составляющие тензора диэлектрической проницаемости, вне зависимости от их индекса, равны $\varepsilon = 1 - (\omega_{\text{pe}}/\omega)^2$, и дисперсионное соотношение (2.4) принимает вид

$$D = \varepsilon(N^2 - \varepsilon)^2 = 0.$$

Отсюда следует, что условие $\varepsilon = 0$ выполняет две функции. Во-первых, оно определяет максимальную плотность, выше которой плазма не может быть прозрачной для электромагнитных волн (условие отсечки). Во-вторых, это условие позволяет найти частоту собственно плазменных — электронных ленгмюровских колебаний. Для этих колебаний $\mathbf{E} \propto \mathbf{N}$, согласно (2.2), что отражает потенциальный характер электрического поля [1]. Отметим, что использование (2.2) для определения поляризации электромагнитных колебаний незамагниченной плазмы неудобно, так как при переходе к вакуумному пределу в (2.2) появляются расходящиеся выражения.

Плазма в магнитном поле анизотропна и гиротропна — ее диэлектрические свойства характеризуются тремя величинами: $\varepsilon_{\pm}$, $\varepsilon_{\parallel}$. Показатель преломления волн, распространяющихся в плазме, обращается в нуль вместе с одной из этих величин — условия отсечки (см. (2.4)). Следует отметить, что при $\omega < \omega_e$ отклик плазмы на правополяризованное поле ε_- положителен при любой плотности плазмы. Это указывает на возможность распространения правополяризованных волн (геликонов) в плазме с произвольно высокой плотностью (см. ниже).

Из соотношения (2.2) следует, что в плазме в магнитном поле собственно плазменные волны, электрическое поле которых потенциально, возможны только в пределе $N \rightarrow \infty$. Их частота в соответствии с (2.4) определяется условием

$$\varepsilon_{\perp} \sin^2 \theta + \varepsilon_{\parallel} \cos^2 \theta = 0. \quad (2.5)$$

В отличие от случая незамагниченной плазмы условие (2.5) совпадает с одним из условий отсечки $\varepsilon_{\parallel} = 0$

лишь для волн, распространяющихся вдоль направления магнитного поля. В дальнейшем мы увидим, что в неоднородной плазме с такими волнами, переходящими в ленгмюровские колебания, связаны интересные физические эффекты, анализ которых является одной из основных задач настоящего обзора.

Общее представление о свойствах волн плотной плазмы ($\omega_{\text{pe}} \geq \omega$) в магнитном поле можно составить на основе анализа зависимости $N^2(\omega_{\text{pe}}^2)$ при различных значениях угла θ между волновым вектором колебаний и вектором магнитного поля.

Матрица в левой части (2.1) при $\theta = 0$ ($N_{\perp} = 0$) становится диагональной, и система уравнений (2.1) распадается на три независимых уравнения, соответствующих различным ветвям волн,

$$(N^2 - \varepsilon_{\sigma})E_{\sigma} = 0, \quad (2.6)$$

$$\varepsilon_{\parallel}E_{\parallel} = 0. \quad (2.7)$$

Волны принято классифицировать по их поляризации при распространении поперек ($\theta = \pi/2$) направления магнитного поля (см., например, [19]). Волны с продольной поляризацией электрического вектора называются обыкновенными, а с поперечной — необыкновенными. В плазме с низкой плотностью, $q_e = (\omega_{\text{pe}}/\omega)^2 < 1$, первые при продолжении на значение $\theta = 0$ переходят в волны, электрический вектор которых вращается в ионную — левую сторону ($N^2 = \varepsilon_+$), у вторых — необыкновенных — при $\theta = 0$ направление вращения электрического вектора правое — электронное ($N^2 = \varepsilon_-$) (см. уравнение (2.6)). Если плотность плазмы превышает критическую ($q_e > 1$), то оказывается, что при $\theta = 0$ направление вращения электрического вектора необыкновенных волн меняется на противоположное — левое. Волны с правым (электронным) направлением вращения не могут быть классифицированы как обыкновенные или необыкновенные, поскольку их нельзя продолжить на значение угла $\theta = \pi/2$ — для данной ветви волн имеется предельный угол θ_s между векторами $\mathbf{N}$ и $\mathbf{B}_0$ (см. ниже).

В силу этих обстоятельств при анализе волн в окрестности КП, где $q_e \approx 1$, традиционная классификация их как обыкновенных и необыкновенных была бы неудобной. В дальнейшем основное внимание будет уделено волнам, распространяющимся под малым углом к вектору магнитного поля, для которых $N^2 \approx \varepsilon_+$ или $N^2 \approx \varepsilon_-$ и которые могут хорошо проникать через КП (см. ниже). Первые волны будем называть левополяризованными, вторые — правополяризованными. Эти названия в значительной степени условны, так как при $\theta \neq 0$ в окрестности КП электрическое поле обоих видов волн наряду с циркулярной составляющей может иметь значительную, а при определенных условиях даже преобладающую продольную составляющую.

Отметим, что, анализируя циркулярно поляризованные волны с помощью (2.2) и (2.3), случай $\theta = 0$ необходимо рассматривать как предельный при $\theta \rightarrow 0$. При этом, используя (2.3), находим $N^2 = \varepsilon_{\sigma} + O(\theta^2)$, и, как следует из (2.2), одна из циркулярных составляющих электрического вектора действительно становится преобладающей,

$$E_{\sigma} \propto \theta^{-1} \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} \infty.$$

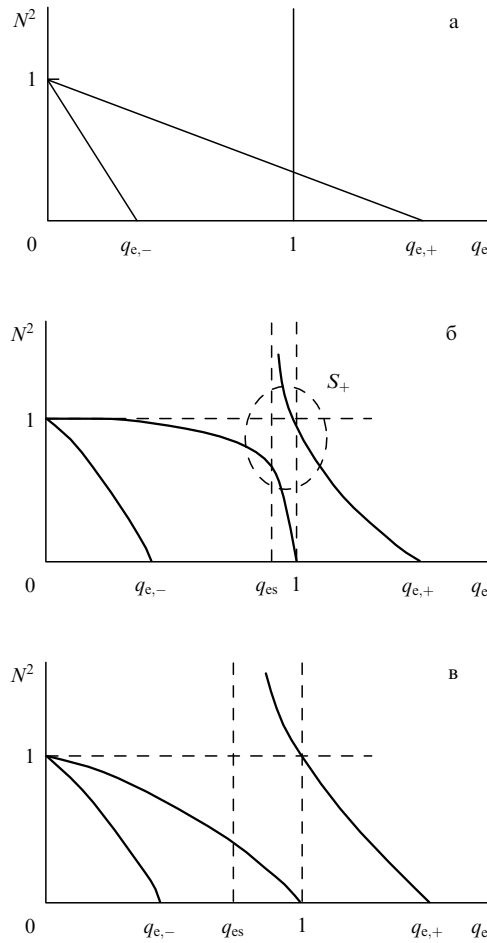


Рис. 1. Зависимость показателя преломления от плотности плазмы при $\Omega_e = \omega_e/\omega < 1$: (а) $\theta = 0$, (б) $\theta \leq 1$, (в) $\theta = \pi/2$; S_σ — области взаимодействия различных мод волн $q_{e,\sigma} = 1 + \sigma\Omega_e$.

Уравнение (2.7) показывает, что, как и в отсутствие магнитного поля, плазме присуща "собственная", резонансная частота — частота потенциальных электронных ленгмюровских колебаний, электрическое поле которых параллельно основному магнитному полю. Поскольку в приближении холодной плазмы их показатель преломления может принимать любые значения, на плоскости (q_e, N^2) дисперсионная зависимость электронных ленгмюровских колебаний имеет вид вертикальной прямой $q_e = 1$ (рис. 1а, 2а).

При пересечении электромагнитными волнами КП можно было бы ожидать их резонанса с плазмой аналогичного, например, циклотронному резонансу в неоднородном магнитном поле. Однако электрическое поле электронных ленгмюровских колебаний ортогонально электрическому полю электромагнитных волн, распространяющихся вдоль направления основного магнитного поля (см. выше). Поэтому электромагнитные волны при $\theta = 0$ свободно проходят через КП — на плоскости (q_e, N^2) их дисперсионные зависимости пересекают вертикальную прямую $q_e = 1$ (рис. 1а, 2а).

Ситуация в какой-то степени сходна с циклотронным резонансом ($\omega = \omega_j$, $j = e, i$) в холодной плазме в случае электромагнитных волн, распространяющихся под углом к магнитному полю ($\theta \neq 0$). Такие колебания "не замечают" резонансной поверхности, $\omega = \omega_j(\mathbf{r})$, поскольку

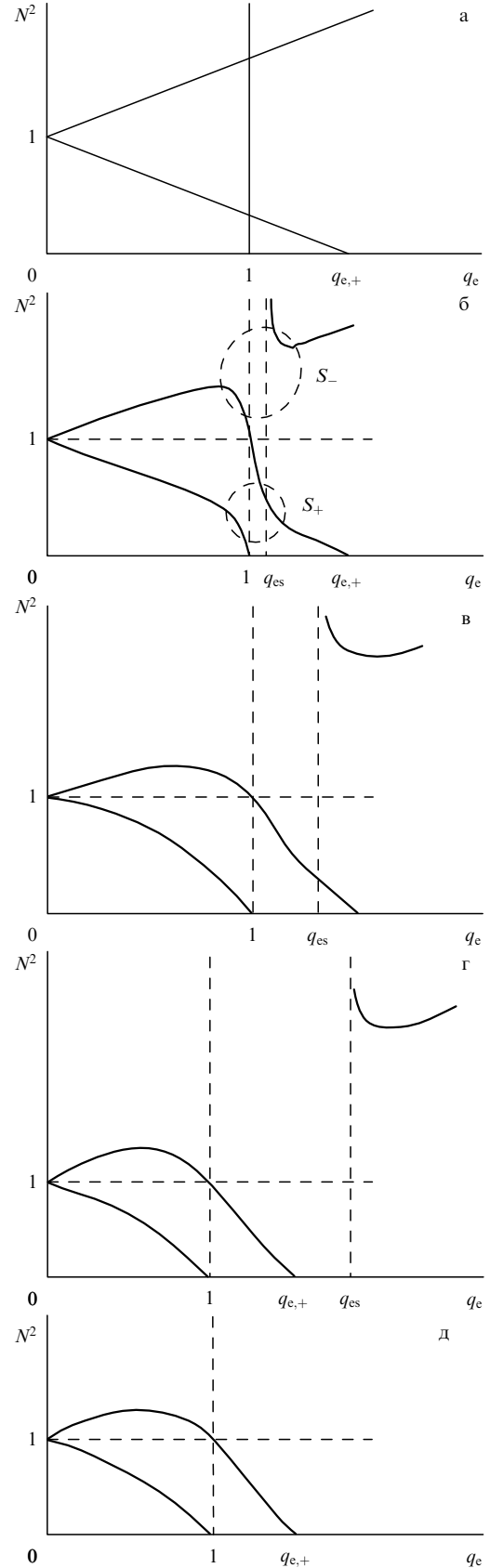


Рис. 2. Зависимость показателя преломления от плотности плазмы при $\Omega_e > 1$: (а) $\theta = 0$, (б) $\theta \leq 1$, (в) $\cos \theta > \Omega_e^{-1/2}$, (г) $\Omega_e^{-1/2} > \cos \theta > \Omega_e^{-1}$, (д) $\Omega_e^{-1} > \cos \theta$. Обозначения те же, что и на рис. 1.

ку на ней обращается в нуль циркулярная составляющая электрического поля, вращающаяся в ту же сторону, что и частицы вида j (см., например, [18]).

Другим аналогом является задача о падении электромагнитной S -волны на плоский слой немагнитной плазмы. Электрическое поле такой волны перпендикулярно градиенту плотности, и поэтому из соображений симметрии следует, что она не может возбудить электронных ленгмюровских колебаний (см., например, [1–3], а также раздел 4).

Предположим теперь, что волновой вектор электромагнитных волн отклоняется от направления магнитного поля. В этом случае у переменного электрического поля появляется продольная составляющая, что приводит к взаимодействию с электронными ленгмюровскими колебаниями. Для его описания, считая, что $N_{\perp} \ll N_{\parallel}$, удержим в матрице (2.1) элементы, пропорциональные первой степени компонент показателя преломления ортогональных $\mathbf{B}_0$. В области значений $N^2 \approx \varepsilon_{\sigma}$, $q_e \approx 1$ из (2.1) получаем

$$\begin{pmatrix} -N_{\parallel}^2 + \varepsilon_{\sigma} & N_{\sigma} N_{\parallel} \\ N_{-\sigma} N_{\parallel} & \varepsilon_{\parallel} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{\sigma} \\ E_{\parallel} \end{pmatrix} = 0. \quad (2.8)$$

Условие разрешимости системы уравнений (2.8) имеет вид

$$\varepsilon_{\parallel} (N_{\parallel}^2 - \varepsilon_{\sigma}) + \frac{1}{2} N_{\perp}^2 \varepsilon_{\sigma} = 0. \quad (2.9)$$

Разумеется, при указанных выше условиях к (2.9) можно свести как (2.3), так и (2.4).

В дальнейшем мы увидим, что система уравнений (2.8) и дисперсионное соотношение (2.9) позволяют получить основную информацию о свойствах волн в окрестности КП (поляризация, вид лучевых траекторий, коэффициенты прохождения и отражения и т.д.).

При анализе волн однородной плазмы (2.9) удобно представить в виде

$$N^2 \approx \varepsilon_{\sigma} - \frac{\varepsilon_{\sigma}^2}{2\varepsilon_{\parallel}} \theta^2. \quad (2.10)$$

В соответствии со сказанным выше в выражении (2.10) КП, на которой $\varepsilon_{\parallel} = 0$, действительно выступает как резонансная поверхность. При приближении к ней разность $N^2 - \varepsilon_{\sigma}$ резко возрастает. В результате дисперсионные зависимости принимают характерный "резонансный" вид с разрывом при критическом значении $q_e = 1$ (рис. 1б, 2б). Отдельные части разорванной вертикальной прямой $q_e = 1$, описывающей на плоскости (q_e, N^2) волны, близкие к электронным ленгмюровским колебаниям, соединяются с дисперсионными зависимостями циркулярно поляризованных волн. Такое соединение отражает возможность радикального изменения природы волн — превращения электромагнитных циркулярно поляризованных волн, падающих на КП, в волны, близкие к электронным ленгмюровским (квазипотенциальные), основной составляющей электрического поля которых является продольная. Разумеется, процесс может идти и в обратном направлении.

Свойство точной потенциальности при $\theta \neq 0$ переходит к волнам с $N \rightarrow \infty$, частота которых в соответствии с (2.2) должна удовлетворять условию (2.5). О таких волнах говорят, что они испытывают плазменный (верхний гибридный) резонанс (ВГР).

При фиксированных значениях ω и θ уравнение (2.5) определяет резонансное значение q_e :

$$q_{es} = \frac{1 - \Omega_e^2}{1 - \Omega_e^2 \cos^2 \theta}, \quad (2.11)$$

где $\Omega_e = \omega_e/\omega$.

При условии $\theta \ll 1$ из (2.11) получаем

$$q_{es} \approx 1 + \frac{\Omega_e^2}{\Omega_e^2 - 1} \frac{\theta^2}{2}. \quad (2.12)$$

Поверхность, на которой в неоднородной плазме выполняется условие (2.5), называют поверхностью плазменного резонанса. При приближении к этой поверхности показатель преломления неограниченно возрастает — на плоскости (q_e, N^2) соответствующая дисперсионная кривая имеет вертикальную асимптоту (см. рис. 1, 2).

В другом предельном случае поперечного распространения ($\theta \rightarrow \pi/2$, $N_{\parallel} \rightarrow 0$) полное дисперсионное соотношение при $\omega > \omega_{pe}$ ($q_e < 1$) имеет два решения: $N^2 = \varepsilon_{\parallel} + O(\cos^2 \theta)$ и $N = \varepsilon_{+}\varepsilon_{-}/\varepsilon_{\perp}$ (рис. 1в, 2г). Первое решение характеризует обыкновенные волны, электрическое поле которых параллельно основному магнитному полю, второе — необыкновенные, у которых $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}_0$. В плотной плазме ($\omega < \omega_{pe}$) только необыкновенные волны могут распространяться поперек вектора магнитного поля. Дисперсионные зависимости для промежуточных углов $0 < \theta < \pi/2$ также показаны на рис. 1, 2. Они позволяют естественным образом связать предельные случаи продольного ($\theta = 0$) и поперечного ($\theta = \pi/2$) распространения.

Из рисунка 2 следует, что область прозрачности волн с $\omega < \omega_e$ не ограничена со стороны большой плотности. Такие волны называются геликонами или свистами. Их дисперсионная зависимость при $q_e \gg 1$, которую можно получить из (2.1), (2.2), имеет довольно простой вид (см., например, [19])

$$N^2 \approx \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega_e \cos \theta - \omega)}. \quad (2.13)$$

Отметим, что угол θ для геликонов не может быть слишком большим. Его предельное значение θ_s изменяется от нуля у критической поверхности до $\theta_s = \arccos(\omega/\omega_e)$ при $q_e \rightarrow \infty$ (см. (2.5) и (2.11)). Геликоны при $\theta = \theta_s$ испытывают плазменный резонанс (см. выше).

С помощью геликонов можно получать газовые разряды, плотность плазмы в которых существенно превышает критическую. Такие разряды, называемые геликонными, активно изучаются (см., например, [20]).

Наряду с геликонами за КП могут распространяться волны другого типа — необыкновенные (см. выше). Однако они проникают сравнительно неглубоко в плотную плазму, $q_e < q_{e,+} = 1 + \Omega_e$. Их показатель преломления на КП равен единице вне зависимости от значения угла θ . В этом легко убедиться с помощью дисперсионного соотношения в форме (2.4). Данное свойство сближает эти волны с электромагнитными волнами в вакууме, однако, как нетрудно показать, их поляризация отлична от вакуумной, а групповая скорость не совпадает с фазовой. При определенных условиях они включаются в довольно сложную цепочку процессов, приво-

дающую к поглощению электромагнитных волн, падающих на плотную плазму (О-Х-В-нагрев, см. раздел 9.2).

Весь набор зависимостей на рис. 1, 2 можно заменить одной диаграммой КМА (Клемов – Малэли – Аллис) (см., например, [19, 21]).

3. Волны плоскостойкой плазмы с волновым вектором, близким по направлению к вектору магнитного поля, вблизи критической поверхности

3.1. Области прозрачности

В неоднородной плазме наиболее сложные и интересные волновые явления разыгрываются в тонком слое плазмы, включающем КП. В пределах этого слоя кривизна КП часто оказывается несущественной, и поэтому разумной является модель плоского слоя, в котором плотность плазмы линейно зависит от координат. В системе координат (ξ, ζ) , показанной на рис. 3, ось 0ξ которой ориентирована вдоль градиента плотности, имеем $n_0(\mathbf{r}) = n_{00}(1 + \xi/L)$, где L — характерный масштаб изменения плотности плазмы, n_{00} — значение плотности плазмы при $\xi = 0$. Считается, что плоскость $\xi = 0$ совпадает с КП. При распространении волн по плоскостойкой плазме сохраняются компоненты показателя преломления, ортогональные градиенту плотности N_ξ, N_ζ .

Результаты, представленные в разделе 2, справедливы для волн, у которых $N_\zeta = N_y = 0$ ($\mathbf{N} \parallel \nabla n_0$). Однако волны с непараллельными векторами $\mathbf{N}, \nabla n_0$ также достаточно интересны. Наиболее существенно то, что такие волны могут свободно проходить через КП при значениях угла χ между ∇n_0 и $\mathbf{B}_0$, отличных от нуля [1, 6]. Из рассмотрения, приведенного в разделе 2, следует, что такая возможность осуществима, если на самой КП волновой вектор параллелен вектору магнитного поля, при этом $N^2 = \varepsilon_\sigma$, $N_\xi = \sqrt{\varepsilon_{\sigma,c}} \cos \chi$, $N_\zeta = \sqrt{\varepsilon_{\sigma,c}} \sin \chi$, $N_y = 0$, где $\varepsilon_{\sigma,c} = \Omega_e/(\Omega_e + \sigma)$ — значение диэлектрического отклика ε_σ на КП, т.е. при $q_e = 1$. Если перед критической поверхностью возбудить волны с указанными значениями N_y, N_ζ , которые будем называть оптимальными, то на ней в силу однозначности решений дисперсионного уравнения должно выполняться равенство $N_\xi = \sqrt{\varepsilon_{\sigma,c}} \cos \chi$, при этом $\mathbf{N} \parallel \mathbf{B}_0$.

Проанализируем волны, волновой вектор которых в окрестности КП слабо отклоняется от направления

магнитного поля и которые, как было отмечено выше, могут хорошо проникать через нее. Такие волны описываются приближенной системой уравнений (2.8), условие разрешимости которой имеет вид (2.9). Это уравнение, описывающее взаимодействие электронных ленгмюровских колебаний с циркулярно поляризованными волнами, позволяет выявить основные особенности волн вблизи КП.

Полагая в уравнении (2.9)

$$N_x = N_\xi \sin \chi - N_\zeta \cos \chi, \quad N_z = N_\xi \cos \chi + N_\zeta \sin \chi,$$

$$\varepsilon_{||} \approx \delta q_e, \quad \varepsilon_\sigma \approx \varepsilon_{\sigma,c} - \sigma \frac{\delta q_e}{\Omega_e + \sigma},$$

$$N_{||}^2 \approx \varepsilon_{\sigma,c} + 2\sqrt{\varepsilon_{\sigma,c}} (\delta N_\xi \cos \chi + \delta N_\zeta \sin \chi),$$

$$N_\perp^2 \approx (\delta N_\xi \sin \chi - \delta N_\zeta \cos \chi)^2 + N_y^2,$$

$$\delta N_\xi = N_\xi - \sqrt{\varepsilon_{\sigma,c}} \cos \chi, \quad \delta N_\zeta = N_\zeta - N_{\zeta,\sigma}^{\text{opt}},$$

$$N_{\zeta,\sigma}^{\text{opt}} = \sqrt{\varepsilon_{\sigma,c}} \sin \chi,$$

получаем квадратное уравнение для δN_ξ

$$(\delta N_\xi \sin \chi)^2 - 2\delta N_\xi \cos \chi \left(\frac{2\delta q_e}{\sqrt{\varepsilon_{\sigma,c}}} + \delta N_\zeta \sin \chi \right) - \sigma \frac{2\delta q_e^2}{\Omega_e} - 4\delta q_e \delta N_\zeta \frac{\sin \chi}{\sqrt{\varepsilon_{\sigma,c}}} + (\delta N_\zeta \cos \chi)^2 + N_y^2 = 0. \quad (3.1)$$

Полное дисперсионное соотношение, описывающее волны в плоскостойкой плазме имеет четвертую степень по N_ξ (квадрика Букера [22]). Оно заменялось упрощенным дисперсионным соотношением второй степени, например, в [23, 24].

Зона непрозрачности рассматриваемых волн определяется условием отрицательности дискриминанта G уравнения (3.1)

$$G = 2\delta q_e^2 \frac{1}{\Omega_e} g_\sigma(\Omega_e, \chi) + 4\delta q_e \sin \chi \frac{\delta N_\zeta}{\sqrt{\varepsilon_{\sigma,c}}} - N_y^2 \sin^2 \chi < 0, \quad (3.2)$$

где $g_\sigma(\Omega_e, \chi) = 2(\Omega_e + \sigma) \cos^2 \chi + \sigma \sin^2 \chi$.

Зона непрозрачности при $N_y \neq 0$ захватывает КП, и с уменьшением $|N_y|$ ее размер сокращается. В случае волн с $N_y = 0$ одной из границ зоны непрозрачности является КП. Другая ее граница лежит в области большей плотности ($\delta q_e > 0$) при $\delta N_\zeta < 0$ и в области меньшей плотности ($\delta q_e < 0$) при $\delta N_\zeta > 0$. В пределах зоны непрозрачности величина δq_e изменяется от нуля до $\delta q_{e,1}$,

$$\delta q_{e,1} = - \frac{2\delta N_\zeta \Omega_e^2}{\sqrt{\varepsilon_{\sigma,c}}} \frac{\sin \chi}{g_\sigma(\Omega_e, \chi)}. \quad (3.3)$$

Характерные дисперсионные зависимости в окрестности КП изображены на рис. 4, 5. Зона непрозрачности расширяется с увеличением угла χ . Для правополяризованных волн (геликонов) имеется максимальное значение угла χ

$$\chi_{\text{max}} = \arccos(2\Omega_e - 1)^{-1/2}, \quad (3.4)$$

при котором величина $g_\sigma(\Omega_e, \chi)$ обращается в нуль. В этом случае зона непрозрачности занимает все полупространство $\delta q_e \delta N_\zeta < 0$. Разумеется, это утверждение относится лишь к области применимости приближенного дисперсионного соотношения (3.1), ограниченной условием $|\delta q_e| \ll 1$.

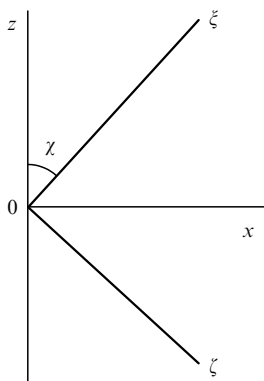


Рис. 3. Системы координат, используемые в настоящем обзоре.

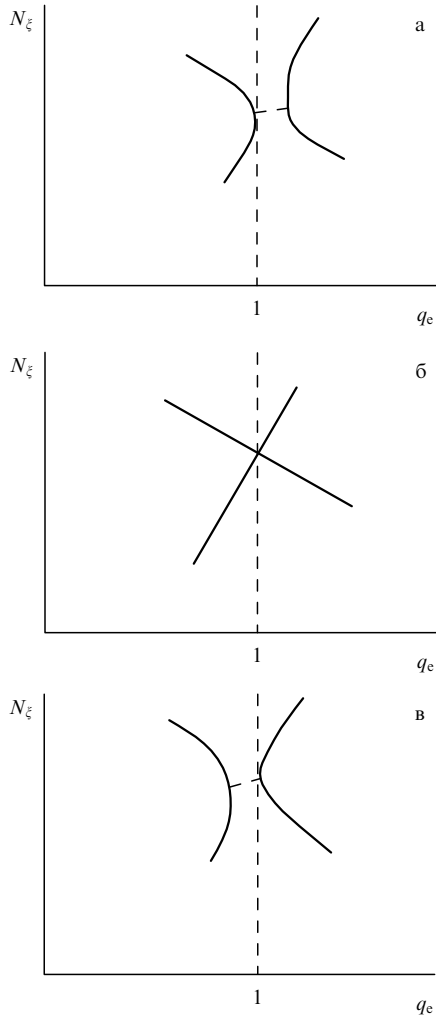


Рис. 4. Дисперсионная зависимость левополяризованных волн плоского слоя плазмы вблизи КП при $N^2 \approx \varepsilon_+$: (а) $\delta N_\xi < 0$, (б) $\delta N_\xi = 0$, (в) $\delta N_\xi > 0$.

Если угол $\chi > \chi_{\max}$, то для правополяризованных волн — геликонов ($\sigma = -$) ситуация меняется на обратную. А именно, области, далекие от КП, становятся непрозрачными, в то время как вблизи нее появляется волновой канал, по которому могут распространяться геликоны [19]. Одной из границ канала при $N_y = 0$ является КП. Ширина канала стремится к нулю, и он стягивается к КП при $\delta N_\xi = 0$ (рис. 6). Важно то, что волновой канал существует при монотонном изменении плотности.

В плоскостной плазме для правополяризованных волн имеется еще одно критическое значение угла

$$\chi_{\text{cr}} = \arccos(\Omega_e^{-1/2}) < \chi_{\max}.$$

Если угол $\chi > \chi_{\text{cr}}$, то $N_{\xi,-}^{\text{opt}} = \varepsilon_{\sigma,c}^{1/2} \sin \chi > 1$, и поэтому становится невозможным запуск из вакуума волн с $N_\xi = N_{\xi,-}^{\text{opt}}$, которые могли бы беспрепятственно проникнуть через КП. В случае левополяризованных волн ограничение на угол χ отсутствует.

3.2. Поляризация волн

Волны, для которых $N^2 \approx \varepsilon_{\sigma,c}$, $N_y \rightarrow 0$, способные хорошо проникать через критическую поверхность,

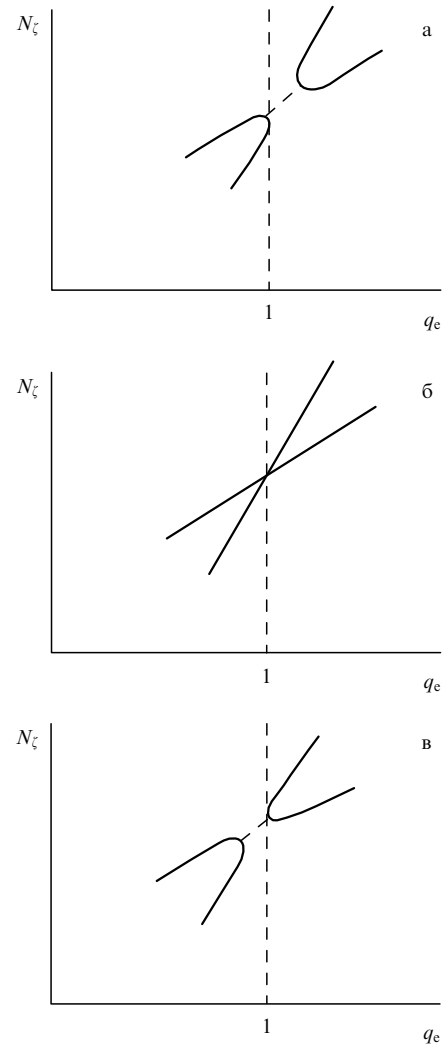


Рис. 5. Дисперсионная зависимость правополяризованных волн плоского слоя плазмы вблизи КП при $N^2 \approx \varepsilon_-$, $\chi < \chi_{\max}$: (а) $\delta N_\xi < 0$, (б) $\delta N_\xi = 0$, (в) $\delta N_\xi > 0$.

вблизи нее обладают довольно своеобразной поляризацией. В электрическом поле таких волн преобладают составляющие E_σ , $E_\parallel$. С помощью соотношений (2.2), (2.8) при $N_y = 0$ находим

$$\frac{E_\parallel}{E_\sigma} = \frac{N_x \varepsilon_{\sigma,c}^{1/2}}{2\delta q_e}. \quad (3.5)$$

Напомним, что координата x направлена перпендикулярно магнитному полю.

Для определения N_x воспользуемся дисперсионным соотношением (3.1), переписав его в виде

$$N_x^2 + N_y^2 - 4 \frac{\delta q_e}{\varepsilon_{\sigma,c}^{1/2}} \cot \chi N_x - 2\delta q_e \left(\frac{2\delta N_\xi}{\varepsilon_{\sigma,c}^{1/2} \sin \chi} + \frac{\sigma}{\Omega_e} \delta q_e \right) = 0. \quad (3.6)$$

Отсюда для волн с $N_y = \delta N_\xi = 0$, которые беспрепятственно проходят через КП, получаем

$$\frac{N_x}{\delta q_e} = \frac{2 \cot \chi}{\varepsilon_{\sigma,c}^{1/2}} \pm \left(\frac{4 \cot^2 \chi}{\varepsilon_{\sigma,c}} + \frac{2\sigma}{\Omega_e} \right)^{1/2} \quad (3.7)$$

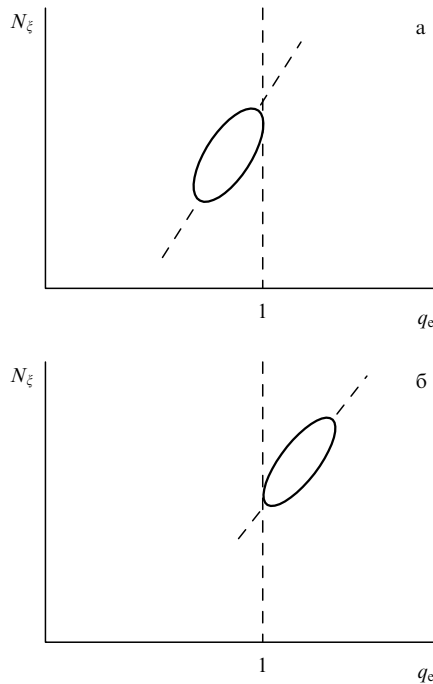


Рис. 6. Дисперсионная зависимость правополяризованных волн плоского слоя плазмы вблизи КП при $N^2 \approx \varepsilon_-$, $\chi > \chi_{\max}$: (а) $\delta N_\zeta < 0$, (б) $\delta N_\zeta > 0$.

и, следовательно,

$$\frac{E_{\parallel}}{E_{\sigma}} = \cot \chi \pm \left[\cot^2 \chi + \frac{\sigma}{2(\Omega_e + \sigma)} \right]^{1/2}. \quad (3.8)$$

Здесь знаки " $\pm$ " характеризуют направление распространения волн.

В частном случае при $\chi = \pi/2$, когда через КП могут проходить лишь левополяризованные волны ($\sigma = +$) (см. раздел 3.1) из (3.8) имеем $E_{\parallel}/E_{+} = [2(\Omega_e + 1)]^{-1/2}$ [12]. Таким образом, на самой КП волны представляют собой суперпозицию циркулярно поляризованных волн и электронных ленгмюровских колебаний. В соответствии с работами [1, 6] у этих волн показатель преломления на КП параллелен вектору магнитного поля и равен $N = \varepsilon_{\sigma}^{1/2}$. Электрическое поле таких волн всюду вне КП являлось бы циркулярно поляризованным, $E = E_{\sigma}$.

Как следует из (3.6), если $\delta N_\zeta \neq 0$, то при приближении к КП

$$N_x \rightarrow 2 \left(\frac{\delta q_e \delta N_\zeta}{\varepsilon_{\sigma,c}^{1/2} \sin \chi} \right)^{1/2}, \quad N_{\parallel} \rightarrow \sqrt{\varepsilon_{\sigma,c}} + \frac{\delta N_\zeta}{\sin \chi}.$$

На самой КП в соответствии с (3.5) электрическое поле становится чисто продольным. Такие волны следует считать электронными ленгмюровскими колебаниями. Действительно, только у электронных ленгмюровских колебаний вне зависимости от величины показателя преломления частота равна ω_{pe} , а электрическое поле является продольным.

Таким образом, мы приходим к заключению, что электромагнитные волны, распространяющиеся в неоднородной плазме в магнитном поле, на КП могут превращаться в электронные ленгмюровские колебания [12]. Разумеется, справедливо и обратное — уходя от КП,

электронные ленгмюровские колебания превращаются в электромагнитные волны. Напомним, что для электромагнитных волн с $N_y = 0$ КП является границей зоны непрозрачности. Распространение волн вблизи этой границы будет детально анализироваться в разделе 4.

Из соотношения (3.6) следует, что если $N_y = 0$, то величина $N_{\perp} = |N_x|$ обращается в нуль как на КП ($\delta q_e = 0$), так и на поверхности, где

$$\delta q_e(\zeta) = \delta q_{e,2} = - \frac{2\Omega_e \delta N_\zeta}{\sigma \varepsilon_{\sigma,c}^{1/2} \sin \chi}.$$

В соответствии с условием (3.4) (см. также исходное дисперсионное уравнение (2.9)), в окрестности этой поверхности $N_x \propto \delta q_e - \delta q_{e,2}$, $N^2 - \varepsilon_{\sigma} \propto N_x^2$. Поэтому при приближении к ней волны становятся циркулярно поляризованными (см. (2.2)). Принимая во внимание (3.3), нетрудно показать, что эта поверхность располагается в области прозрачности, выходя на ее границу при $\chi = \pi/2$. Другой границей области непрозрачности, как мы видели в разделе 3.1, является КП. Поэтому проникновение волн с $N_y = 0$ при $\chi = \pi/2$ через зону непрозрачности сопряжено с радикальным изменением их характера. Имея вид потенциальных электронных ленгмюровских колебаний на одной ее границе (КП), они возникают на другой границе как электромагнитные циркулярно поляризованные волны и наоборот.

Для геликонов при $\chi > \chi_{\max}$, где $\chi_{\max}$ определяется условием (3.4), область прозрачности имеет вид волнового канала вблизи КП (см. раздел 3.1). В случае $\chi = \pi/2$ геликоны, осциллируя между стенками канала, попеременно принимают вид электронных ленгмюровских волн и циркулярно поляризованных колебаний.

3.3. Волны при малом угле между градиентом плотности плазмы и вектором магнитного поля.

Общая картина распространения волн в плоскостной плазме вблизи критической поверхности

С уменьшением угла χ картина взаимодействия волн вблизи КП усложняется. Во-первых, при $\chi \rightarrow 0$ в соответствии с (3.3) сокращается размер области непрозрачности вблизи КП. Одновременно становятся малыми "оптимальные" значения $N_{\zeta,\sigma}^{\text{opt}}$ как для левополяризованных ($\sigma = +$), так и для правополяризованных ($\sigma = -$) волн. Поэтому через КП могут эффективно проникать волны обоих типов с одним и тем же значением $N_\zeta \ll 1$.

Во-вторых, к КП приближается поверхность плазменного резонанса, положение которой можно определить из следующих соображений. При распространении по плоскостной плазме изменяется лишь одна компонента показателя преломления N_ζ . Именно она неограниченно возрастает при приближении к поверхности плазменного резонанса, и, следовательно, при этом угол θ между векторами $\mathbf{N}$ и $\mathbf{B}_0$ стремится к χ . Поэтому резонансное значение плотности определяется соотношениями (2.11), (2.12), в которых следует положить $\theta = \chi$. Используя соотношение (2.12), находим, что критическая и резонансная поверхности близки друг к другу ($|q_{es} - 1| \ll 1$), если выполняется условие $L\chi^2 \ll 1$. Близость поверхности плазменного резонанса чрезвычайно сильно возмущает волны, что приводит к изменению их характера. Это сказывается, в частности, на виде дисперсионных зависимостей, определяемых из уравнения (3.1).

На плоскости $q_e N_\xi$ с удалением от КП ($q_e = 1$) они асимптотически стремятся к прямым. Одна из них при $\chi \ll 1$ почти вертикальна:

$$\delta N_\xi \approx \frac{4}{\varepsilon_{\sigma,c}^{1/2} \chi^2} \delta q_e.$$

Используя систему уравнений (2.8) и принимая во внимание также (3.8), находим, что для соответствующих волн $E_\parallel / E_\sigma \approx 2/\chi$, и, следовательно, они близки к электронным ленгмюровским колебаниям. Действительно, выше предполагалось, что $N_\parallel \gg N_\perp$, а $\omega_{pe} \approx \omega$. Напомним, что на плоскости $q_e N_\xi$ электронным ленгмюровским колебаниям соответствует вертикальная прямая $q_e = 1$. Обсуждаемые волны будем называть квазипотенциальными.

Наклон второй асимптоты, определяемой из уравнения (3.1), значительно меньше:

$$\delta N_\xi \approx -\sigma \frac{2\varepsilon_{\sigma,c}^{1/2}}{\Omega_e} \delta q_e.$$

Поляризация соответствующих волн близка к циркулярной, так как для них $N^2 \approx N_\parallel^2 \approx \varepsilon_\sigma(\xi)$.

Волнам, падающим на КП и отраженным от нее, соответствуют различные асимптоты на плоскости $q_e N_\xi$. Из вышесказанного следует, что при $\chi \ll 1$ отражение приводит к коренному изменению характера волн — трансформации циркулярно поляризованных волн в квазипотенциальные, и наоборот. Ниже мы увидим, что при $\omega_e > \omega$ циркулярно поляризованные волны с различным направлением вращения электрического вектора у КП могут трансформироваться друг в друга, проходя через промежуточную стадию квазипотенциальных.

Чтобы разобраться в процессах, происходящих в окрестности КП при $\chi \ll 1$, необходимо выйти за рамки приближения, использованного при выводе (3.1), а именно, учесть все три составляющие переменного электрического поля ($E_\pm, E_\parallel$). Для этого, как и выше, воспользуемся первым уравнением упрощенной системы уравнений (2.8) с обоими значениями σ . Однако последнее уравнение этой системы заменим последним уравнением исходной полной системы (2.1). Условие разрешимости модифицированной системы уравнений является обобщением дисперсионного соотношения (2.9):

$$(N_\parallel^2 - \varepsilon_+)(N_\parallel^2 - \varepsilon_-)\varepsilon_\parallel + N_\perp^2(N_\parallel^2 - 1)\varepsilon_\perp = 0. \quad (3.9)$$

С уменьшением угла χ размер областей $S_\sigma^\pm$ вблизи КП, в которых происходят интересующие нас процессы, сокращается. Это следует, в частности, из (3.1)–(3.3). В результате при $\chi \ll 1$ в соотношении (3.9) можно опустить слагаемые $\propto (\delta q_e)^2$, учитывающие зависимость ε_σ от координаты ξ . Положив в дисперсионном соотношении (3.9) $\varepsilon_\sigma = \varepsilon_{\sigma,c}$, $\varepsilon_{\perp,c} = \Omega_e^2/(\Omega_e^2 - 1)$, $\varepsilon_\parallel = 1 - q_e = -\delta q_e$, $\sin \chi \approx \chi$, $\cos \chi \approx 1$, приводим его к виду

$$\delta q_e \approx \varepsilon_{\perp,c} \frac{[(\chi N_\xi - N_\zeta)^2 + N_y^2](N_\xi^2 - 1)}{(N_\xi^2 - \varepsilon_{+,c})(N_\xi^2 - \varepsilon_{-,c})}. \quad (3.10)$$

Соотношение (3.10) определяет зависимость $\delta q_e(N_\xi)$, обратную дисперсионной зависимости $N_\xi(q_e)$. Если компоненты $N_\xi \approx \chi\sqrt{\varepsilon_{\sigma,c}}$, $N_y = 0$, то $N_\xi \approx \sqrt{\varepsilon_{\sigma,c}}$, и выражение

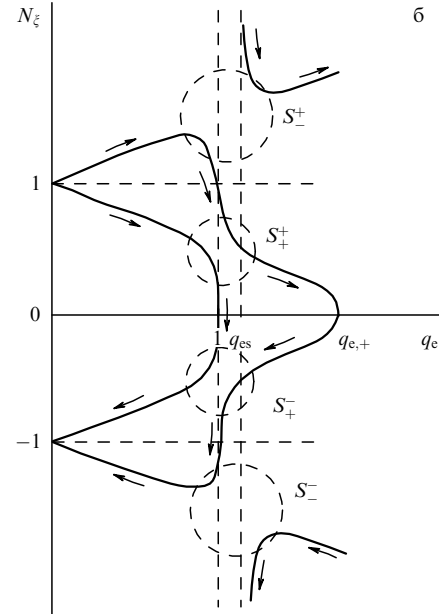
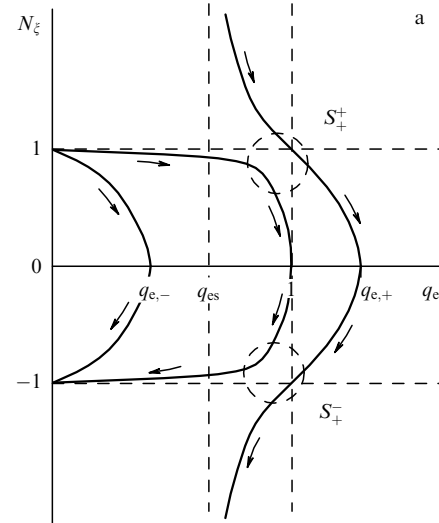


Рис. 7. Дисперсионные зависимости волн в плоском слое плазмы, распространяющихся вдоль градиента плотности при $\chi \ll 1$, стрелки показывают направление потока энергии, знак в верхнем индексе величин $S_\sigma^\pm$ совпадает со знаком N_ξ : (а) $\Omega_e < 1$, (б) $\Omega_e > 1$.

(3.10) принимает вид

$$\delta q_e \approx \frac{1}{4} \chi^2 \sqrt{\varepsilon_{\sigma,c}} \frac{(N_\xi - N_\zeta/\chi)^2}{N_\xi - \sqrt{\varepsilon_{\sigma,c}}}. \quad (3.11)$$

Нетрудно показать, что соотношение (3.11) совпадает с (3.1), если в последнем считать $\chi \ll 1$ и опустить слагаемое $\propto (\delta q_e)^2$.

С помощью зависимостей (3.10), (3.11) можно составить общую картину эволюции дисперсионных кривых на плоскости (q_e, N_ξ) при изменении N_ζ . Проанализируем ее подробно в более простом случае волн с $\omega > \omega_e$, когда через КП могут проходить лишь левополяризованные волны.

У волн, распространяющихся по градиенту плотности и против него, если $\mathbf{N} \parallel \nabla n_0$ ($N_y = N_\zeta = 0$), значения $|N_\xi|$ одинаковы. В этом случае дисперсионная зависимость $N_\xi(q_e)$ может быть получена с помощью рис. 1. Она показана на рис. 7а. На обоих рисунках к вертикаль-

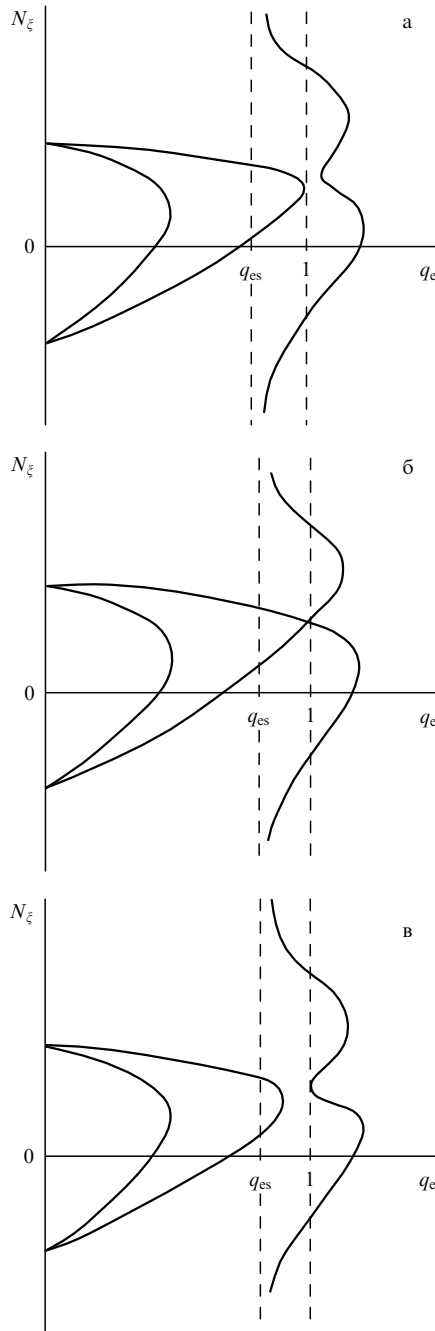


Рис. 8. Дисперсионные зависимости волн в плоском слое плазмы при $\Omega_e < 1$, $0 < \chi < \pi/2$, $N_\zeta \approx N_{\zeta,+}^{\text{opt}}$: (а) $\delta N_\zeta < 0$, (б) $\delta N_\zeta = 0$, (в) $\delta N_\zeta > 0$.

ной прямой $q_e = 1$ подходит (касается ее) дисперсионная кривая, соответствующая левополяризованным волнам. В области касания эти волны следует считать обыкновенными (см. раздел 2). С ростом значения N_ζ точка касания смещается с оси q_e вверх. Когда величина N_ζ становится близкой к $N_{\zeta,+}^{\text{opt}} = \chi\sqrt{\varepsilon_{+,\text{c}}}$, на другой кривой, соответствующей необыкновенным волнам, появляется деформация в виде отростка (рис. 8а). Если $N_\zeta = N_{\zeta,+}^{\text{opt}}$, то в окрестности значения $q_e = 1$ дисперсионные зависимости принимают вид пересекающихся прямых $N_\xi = \sqrt{\varepsilon_{+,\text{c}}}$, $N_\xi = \sqrt{\varepsilon_{+,\text{c}}} + 2\delta q_e / (\chi^2 \sqrt{\varepsilon_{+,\text{c}}})$ (рис. 8б). Соединение этих кривых, происходящее на КП при $N_\zeta = N_{\zeta,+}^{\text{opt}} = \varepsilon_{+,\text{c}}^{1/2} \sin \chi$, свидетельствует о возможности полной трансформации обыкновенных волн в необыкновенные (О-Х-трансфор-

мация). Дальнейший рост значения N_ζ ведет к расхождению дисперсионных зависимостей, причем при $N_\zeta > N_{\zeta,+}^{\text{opt}}$ точка касания вертикали $q_e = 1$, переходит на другую дисперсионную кривую, соответствующую необыкновенным волнам, которая примыкает к ней со стороны $q_e > 1$ (рис. 8в).

Увеличение угла χ вызывает уменьшение значения $N_\xi = \varepsilon_{\sigma,\text{c}}^{1/2} \cos \chi$, при котором волны беспрепятственно проходят через КП (дисперсионные кривые пересекаются на вертикали $q_e = 1$). В предельном случае $\chi = \pi/2$ при $N_\zeta = N_{\zeta,+}^{\text{opt}}$, $N_y = 0$ получаем картину, изображенную на рис. 9. Именно для такой конфигурации, характерной для замкнутых ловушек, рассматривалась схема О-Х-В-нагрева (см. [7] и раздел 9.2). В этой схеме нагрева проникновение электромагнитных волн через КП рассматривается как О-Х-трансформация. Появившаяся в результате этого процесса необыкновенная волна проникает сравнительно неглубоко за КП, где $q_e > 1$. После отражения от области плотной плазмы необыкновенная волна, двигаясь наружу, беспрепятственно проходит через КП. В момент перехода ее показатель преломления принимает единичное значение (см. раздел 2). В области $q_e < 1$ волна асимптотически приближается к поверхности плазменного резонанса. Рост значения показателя преломления в окрестности этой поверхности приводит к тому, что становятся существенными эффекты теплового движения заряженных частиц. Под их влиянием цепочка превращений волновой энергии удлиняется — необыкновенная волна трансформируется в бернштейнскую (Х-В-трансформация). Для последней предел по плотности, вообще говоря, отсутствует. В результате открывается принципиальная возможность ввода волновой энергии в плазму, плотность которой существенно превышает критическую. Эта возможность была осуществлена в экспериментах на стеллараторе W7-AS [25–27].

До критической поверхности в случае $\omega < \omega_e$ могут доходить как левополяризованные, так и правополяризованные волны — геликоны. В зависимости $N_\xi(q_e)$ левополяризованных волн не происходит существенных изменений по сравнению с зависимостью в случае

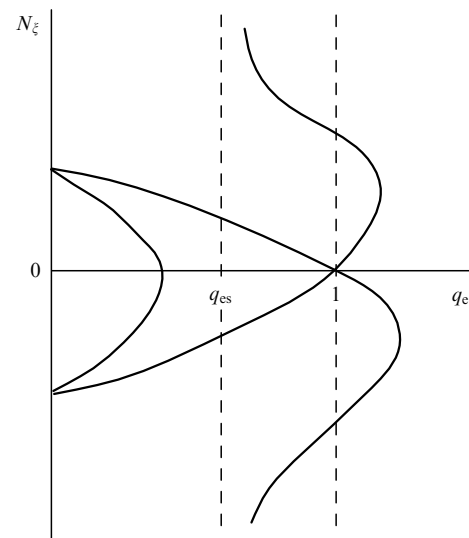


Рис. 9. Дисперсионные зависимости волн в плоском слое плазмы при $\Omega_e < 1$, $\chi = \pi/2$, $N_\zeta = N_{\zeta,+}^{\text{opt}}$.

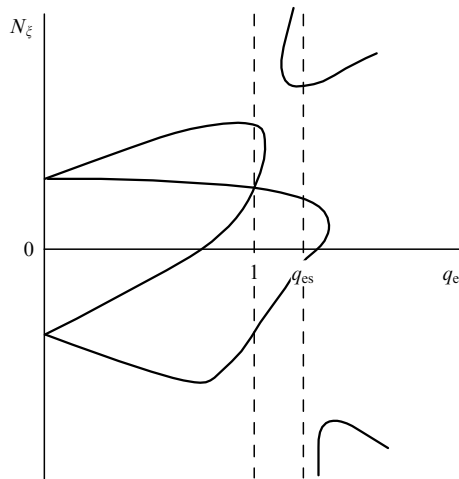


Рис. 10. Дисперсионные зависимости волн в плоском слое плазмы при $\Omega_e > 1$, $N_\xi = N_{\xi,+}^{\text{opt}}$.

$\omega > \omega_e$. Разница лишь в том, что если при $\omega > \omega_e$ квазипотенциальные волны, с которыми взаимодействовали левополяризованные волны, поглощаются у поверхности плазменного резонанса, то при $\omega < \omega_e$ квазипотенциальные волны в области $q_e < 1$ с удалением от КП переходят в правополяризованные, что можно увидеть, сравнив рис. 7а и 7б.

В окрестности КП при $N^2 \approx \varepsilon_\sigma$ дисперсионные зависимости имеют универсальный характер (см. рис. 4–6), поэтому, рассматривая при $\omega_e > \omega$ различные значения угла χ , мы приводим дисперсионные зависимости лишь при оптимальном для проникновения через КП значении $N_{\xi,c}^{\text{opt}} = \sqrt{\varepsilon_{\sigma,c}} \sin \chi$.

На рисунке 10 изображены характерные дисперсионные зависимости колебаний с $\omega < \omega_e$ при $N_\xi = N_{\xi,+}^{\text{opt}}$. Рисунок 11 позволяет составить представление об изменении дисперсионных зависимостей волн с $N_\xi = N_{\xi,-}^{\text{opt}}$ при увеличении угла χ . Если угол $\chi > \chi_{\text{cr}} = \arccos \Omega_e^{-1}$, то данная составляющая показателя преломления рассматриваемых волн в вакууме превышает единицу. В результате область малых значений плотности плазмы становится непрозрачной (рис. 11б). Дальнейшее увеличение χ ведет к расширению области непрозрачности. Если угол $\chi > \chi_{\text{max}}$, то область прозрачности правополяризованных волн с $N_\xi = N_{\xi,-}^{\text{opt}}$ в окрестности КП стягивается в точку, расположенную на этой поверхности ($q_e = 1$). Для волн с $N_\xi \neq N_{\xi,-}^{\text{opt}}$ при $\chi > \chi_{\text{max}}$ область прозрачности становится конечной — возникает волновой канал, примыкающий к КП (см. раздел 3.1).

4. О выходе энергии электронных ленгмюровских колебаний из замагниченной плазмы в вакуум

В разделе 3 было показано, что как левополяризованные, так и правополяризованные волны, подходя к КП, могут принимать вид электронных ленгмюровских колебаний. Отмечалось также, что в силу обратимости уравнений электродинамики потенциальные электронные ленгмюровские колебания, отходя от КП, должны превращаться в электромагнитные волны. Найдем условия, при которых данный процесс приводит к выходу энергии электронных ленгмюровских колебаний в вакуум [15]. Для

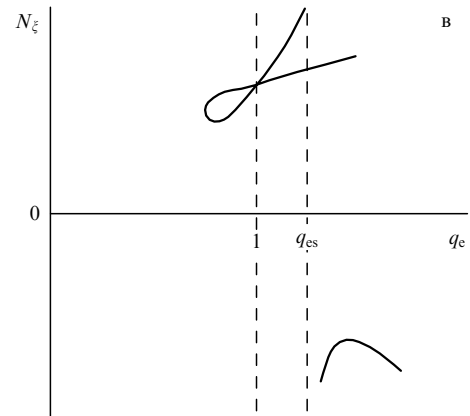
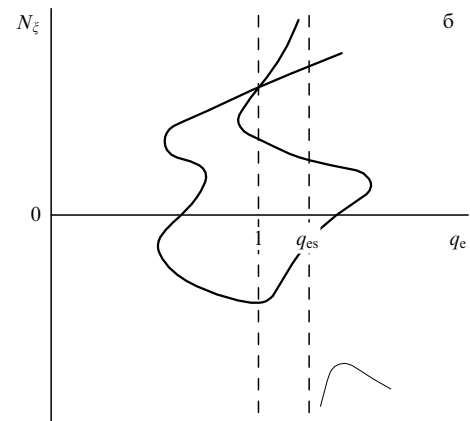
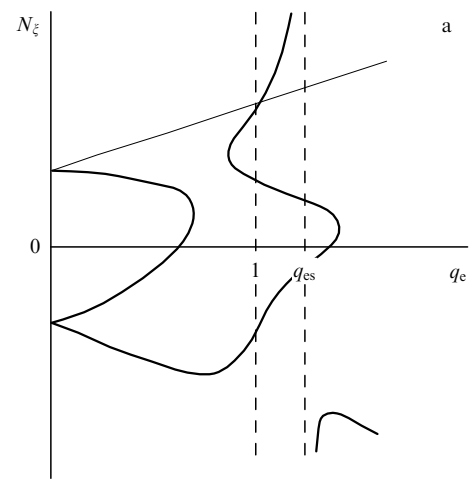


Рис. 11. Дисперсионные зависимости волн в плоском слое плазмы при $\Omega_e > 1$, $N_\xi = N_{\xi,-}^{\text{opt}}$: (а) $\chi < \chi_{\text{cr}} = \arccos \Omega_e^{-1}$, (б) $\chi_{\text{cr}} < \chi < \chi_{\text{max}} = \arccos (2\Omega_e - 1)^{-1/2}$, (в) $\chi < \chi_{\text{max}}$, $\chi \approx \chi_{\text{max}}$.

плоскостной плазмы этот вопрос может быть рассмотрен с помощью результатов, представленных в разделе 3.

В разделе 3.2 показано, что для электромагнитных волн с $N_y = 0$, $N_\xi \neq N_{\xi,\sigma}^{\text{opt}}$, переходящих на КП в электронные ленгмюровские колебания, вблизи этой поверхности $N_x^2 \approx (N_\xi \sin \chi - N_\xi \cos \chi)^2 \approx \text{const} \cdot \xi$. Таким образом, на плоскости $q_e N_\xi$ электронным ленгмюровским колебаниям соответствуют точки касания дисперсионной кривой и вертикали $q_e = 1$. Энергия электронных ленгмюровских колебаний будет вытекать в вакуум, если дисперсионная кривая, касающаяся прямой $q_e = 1$, продолжается до оси ординат, на которой $q_e = 0$. Из обсужде-

ния, проведенного в разделе 3, следует, что если $N_y = 0$, то точки касания существуют при любых значениях N_ζ .

Рисунок 8 показывает, что если $\omega > \omega_e$, то вертикали $q_e = 1$ касается дисперсионная кривая левополяризованных (обыкновенных) волн с $N_\zeta < \varepsilon_{+,c}^{1/2} \sin \chi$, у которых на КП $N_\zeta < \varepsilon_{+,c}^{1/2} \cos \chi$ ($N < \varepsilon_{+,c}^{1/2}$). Именно такие колебания могут выходить в вакуум. Если $N_\zeta > \varepsilon_{+,c}^{1/2} \sin \chi$, то дисперсионная кривая подходит к вертикали $q_e = 1$ со стороны плотной плазмы (необыкновенные волны). На этой дисперсионной кривой плотность изменяется немонотонно, и при единичном значении полного показателя преломления она опять пересекает вертикаль $q_e = 1$ (см. раздел 3.3). В области $q_e < 1$ дисперсионная кривая асимптотически приближается к вертикали $q_e = q_{es}$ (поверхность плазменного резонанса). В плоскостойкой плазме поверхность плазменного резонанса располагается при значении плотности, определяемом условием (2.11). В окрестности резонансной поверхности волны поглощаются из-за резкого возрастания показателя преломления.

Следует отметить, что если $N_\zeta = \sin \chi$, то точка касания дисперсионной кривой вертикали $q_e = 1$ сливается с точкой их пересечения, соответствующей единичному значению показателя преломления, и дисперсионная кривая принимает вид кубической параболы. При дальнейшем увеличении N_ζ точки касания и пересечения опять разделяются, а дисперсионная кривая подходит к вертикали $q_e = 1$ в точке касания со стороны меньшей плотности.

Картина дисперсионных зависимостей на плоскости $q_e N_\zeta$ при $\omega < \omega_e$ значительно усложняется, так как к КП со стороны меньшей плотности могут подходить как обыкновенные (левополяризованные), так и необыкновенные (правополяризованные) волны (рис. 2, 76). У последних на КП $\varepsilon_{+,c}^{1/2} \sin \chi < N_\zeta < \varepsilon_{-,c}^{1/2} \sin \chi$. Соответственно, электронные ленгмюровские колебания с $N_\zeta < \varepsilon_{+,c}^{1/2} \sin \chi$ выходят в вакуум, пройдя стадию обыкновенных, а с $\varepsilon_{+,c}^{1/2} \sin \chi < N_\zeta < \varepsilon_{-,c}^{1/2} \sin \chi$ — необыкновенных волн. Волны с $N_\zeta > \varepsilon_{-,c}^{1/2} \sin \chi$ поглощаются у поверхности плазменного резонанса.

Если частота $\omega \rightarrow \omega_e$, то максимальное значение N_ζ , при котором энергия электронных ленгмюровских колебаний может выходить в вакуум, неограниченно возрастает. Однако, так как в вакууме $N = 1$, а при распространении по плоскостойкой плазме компонента показателя преломления N_ζ сохраняется, то интерес представляют лишь колебания при $N_\zeta < 1$. Отметим также, что если $\chi > \chi_{\max} = \arccos(2\Omega_e - 1)^{1/2}$, то область прозрачности необыкновенных волн ограничена со стороны меньшей плотности — вблизи КП образуется волновой канал (см. разделы 3.1, 5).

Обсуждаемый механизм выхода энергии электронных ленгмюровских колебаний в вакуум действует лишь в замагниченной плазме. Действительно, уменьшение магнитного поля имеет два следствия. Во-первых, резонансная поверхность, на которой выполняется условие $q_{es} = (1 - \Omega_e^2)/(1 - \Omega_e^2 \cos^2 \chi)$, сближается с КП. Это должно способствовать поглощению ленгмюровских колебаний. Во-вторых, вместе с величиной $\varepsilon_{\pm,c} = [\Omega_e/(\Omega_e \pm 1)]^{1/2}$ стремится к нулю интервал значений показателя преломления волн, которые могут выходить в вакуум.

Выход энергии электронных ленгмюровских колебаний из немагнитной плазмы осуществляется иным

способом. В отсутствие магнитного поля показатель преломления электромагнитных волн равен $N^2 = \varepsilon$. В плоскостойкой плазме ($\varepsilon = -\xi/L$) имеем $N_\xi^2 = -N_y^2 - \xi/L$. Если компонента показателя преломления $N_y = 0$, то электромагнитные волны подходят непосредственно к КП (отражаются от нее). Их электрическое поле ортогонально градиенту плотности, и поэтому они не могут взаимодействовать с электронными ленгмюровскими колебаниями. Действительно, в холодной плазме при отсутствии диссипативных эффектов электронные ленгмюровские колебания локализованы в плоскости $\xi = 0$, поэтому их электрическое поле сингулярно (см., например, [28]) и направлено по ξ .

Если компонента показателя преломления $N_y \neq 0$, то у волн с P -поляризацией (направление магнитного поля ортогонально плоскости падения) появляется ξ -компонента электрического поля. Таким волнам электронные ленгмюровские колебания могут отдавать свою энергию. Однако этот процесс затруднен из-за необходимости преодоления области непрозрачности (см., например, [1–3]).

Что касается волн с S -поляризацией (направление электрического поля перпендикулярно плоскости падения), то они, как и волны с $N_y = 0$, не взаимодействуют с ленгмюровскими колебаниями. Таким образом, выход энергии последних из немагнитной плазмы, по-видимому, будет менее эффективным, чем из замагниченной.

5. Волновой канал вблизи критической поверхности

В разделе 3 мы видели, что если $\chi < \chi_{\max}$, то как левополяризованные, так и правополяризованные волны при $N_\zeta = N_{\zeta,\sigma}^{\text{opt}}$, $N_y = 0$ беспрепятственно проходят через КП. Однако с ростом угла χ область прозрачности правополяризованных волн с "оптимальными" величинами N_ζ , N_y сокращается со стороны меньших значений плотности (см. рис. 11). Область прозрачности при $\chi \geq \chi_{\max}$ вырождается в поверхность, совпадающую с критической. Вырождение снимается (возникает волновой канал), если $N_\zeta \neq N_{\zeta,\sigma}^{\text{opt}}$. Положение границ волнового канала можно определить из условия $G > 0$ (см. (3.2)). Волновой канал примыкает к КП со стороны меньшей плотности, если $\delta N_\zeta < 0$, и со стороны большей, если $\delta N_\zeta > 0$ (см. рис. 6).

Рассмотрим более подробно конфигурации с $\chi = \pi/2$, характерные для наиболее распространенных — замкнутых магнитных ловушек. В этом случае поляризация волн, распространяющихся по волновому каналу, довольно своеобразна. Из рассмотренных в разделе 3.2 результатов следует, что при $N_y = 0$ волны на КП переходят в электронные ленгмюровские колебания с $E = E_{\parallel}$. В то же время на другой границе, где, как и на КП, величина N_x также обращается в нуль, а $\delta q_e \neq 0$, поляризация волн является чисто циркулярной. Таким образом, распространяясь по волновому каналу, рассматриваемые волны попеременно переходят из потенциальных электронных ленгмюровских колебаний в свою "противоположность" — электромагнитные волны с поперечной циркулярной поляризацией и обратно.

Эффекты дисперсии вызывают расплывание волновых пакетов вдоль лучевых траекторий, что ведет к

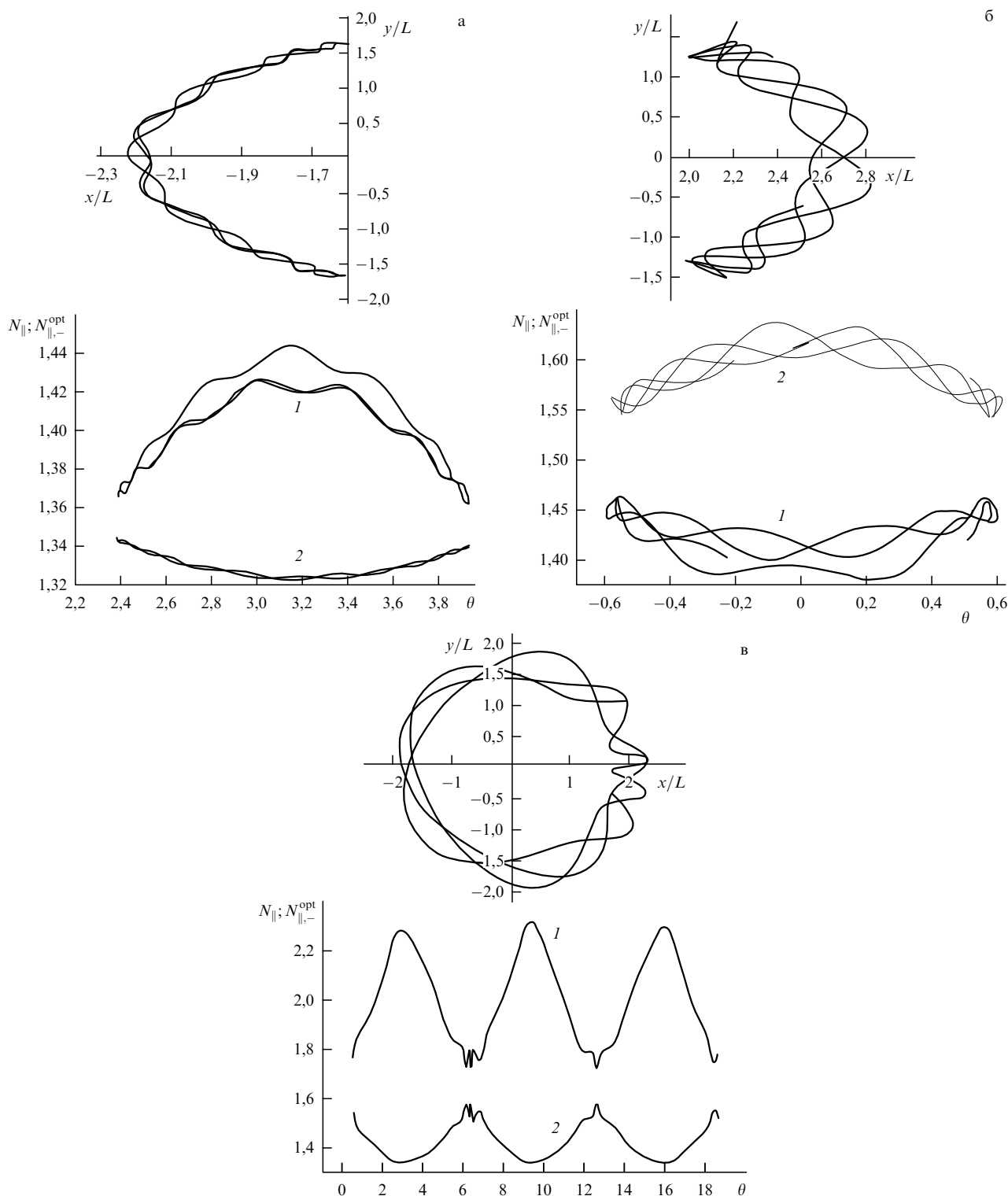


Рис. 12. Лучевые траектории (проекция на вертикальную плоскость вдоль окружностей большого радиуса) электромагнитных волн в плазме токамака вблизи КП и зависимости $N_{\parallel}$ (кривые 1) и $N_{\parallel}^{\text{opt}}$ (кривые 2) от полоидального угла на лучевых траекториях: (а) $N_{\parallel} > N_{\parallel}^{\text{opt}}$, (б) $N_{\parallel} < N_{\parallel}^{\text{opt}}$, (в) существенное превышение $N_{\parallel}$ над $N_{\parallel}^{\text{opt}}$.

установлению собственных колебаний. Спектр собственных колебаний определяется соотношением, связывающим величины ω , N_y , N_z . Это соотношение находится наиболее просто, если задачу о собственных колебаниях сформулировать как задачу отыскания собственных значений $\delta N_z = N_z - N_{z,-}^{\text{opt}}$ при фиксированных значениях ω , N_y .

В квазиклассическом приближении можно использовать приближенное дисперсионное соотношение (3.6), которое в рассматриваемом случае плоского слоя плазмы, $q_c(x) = 1 + x/L$, принимает вид

$$N_x^2 = -N_y^2 + \frac{2\omega}{\omega_c} \left[\frac{\omega_c(\omega_c - \omega)}{\omega^2} \delta N_z - \left(\frac{x'}{L} \right)^2 \right],$$

где

$$x' = x - \frac{\sqrt{\omega_c(\omega_c - \omega)}}{\omega} L \delta N_z, \quad \delta N_z = N_z - N_{z,-}^{\text{opt}}.$$

Условие "квантования"

$$\oint dx N_x = (2n + 1)\pi$$

приводит к следующему спектру собственных значений:

$$\delta N_z = \frac{\omega^{3/2}}{(2\omega_c\omega)^{1/2}(\omega_c - \omega)} \left[\left(\frac{\omega_c}{2\omega} \right)^{1/2} N_y^2 + \frac{2n + 1}{L} \right]^{1/2}.$$

В замкнутых ловушках плотность плазмы постоянна на вложенных друг в друга магнитных поверхностях тороидальной формы. Поэтому волновой канал имеет вид тороидального слоя вблизи КП. О его существовании в плазме токамака свидетельствуют расчеты лучевых траекторий, произведенные в [17]. Лучевые траектории, рассчитанные в этой работе, не выходят за пределы узкой области вблизи КП.

В работе [17] использовалась упрощенная модель плазмы в токамаке. Принималось, что $\mathbf{B} = (0, B_\theta, B_\phi)$, $B_\phi \approx B \approx B_0 R_0 / R \approx B_0 [1 - (r/R_0) \cos \theta]$, обратный "запас устойчивости" $\iota = R_0 B_\theta / (r B_\phi) = 3$, где R_0, r — "большой" и "малый" радиусы соответственно, θ — полоидальный угол, ϕ — тороидальный угол. Распределение плотности по малому радиусу определялось зависимостью $q_c(r) = 3 \exp[-(r/L)^2]$, где $R_0/L = 6\sqrt{5}$. Представление о типичных лучевых траекториях вблизи КП дает рис. 12, на котором изображены проекции траекторий на вертикальное сечение токамака (плоскость $\phi = \text{const}$). Центр декартовой системы координат xu совпадает с магнитной осью.

В силу симметрии токамака по тороидальному углу ϕ на лучевой траектории сохраняется величина N_ϕ , в то время как $N_\parallel$ становится функцией координат, $N_\parallel \approx N_\phi R_0 / R$. Вместе с магнитным полем зависит от координат и $N_{\parallel,-}^{\text{opt}} = [\omega_c/(\omega_c - \omega)]^{1/2}$. В пределах данной магнитной поверхности, к которой привязана КП, $N_\parallel$ принимает максимальное значение на внутреннем обводе тора, а $N_{\parallel,-}^{\text{opt}}$ — на внешнем. В токамаках, как и в других замкнутых ловушках, область прозрачности (волновой канал) имеет вид узкого тороидального слоя. Согласно результатам, приведенным в разделе 3.1, для колебаний с $N_\parallel > N_{\parallel,-}^{\text{opt}}$ в области прозрачности должно выполняться условие $q_c > 1$, а для волн с $N_\parallel < N_{\parallel,-}^{\text{opt}}$ — $q_c < 1$. Поэтому если волны с небольшим превышением $N_\parallel$ над $N_{\parallel,-}^{\text{opt}}$ запущены с внутренней стороны тора, то при своем распространении вдоль магнитной поверхности они должны отразиться от области, в которой $N_\parallel$ становится примерно равным $N_{\parallel,-}^{\text{opt}}$. Для проникновения через КП в область, где $q_c < 1$, потребовалась бы специальная точная подгонка начальных условий. Таким образом, мы приходим к заключению, что колебания с небольшим превышением $N_\parallel$ над $N_{\parallel,-}^{\text{opt}}$ должны быть локализованы на внутренней стороне тора. Аналогичные соображения показывают, что колебания, у которых $N_\parallel$ лишь несколько меньше $N_{\parallel,-}^{\text{opt}}$, будут локализованы на внешней стороне тора. В то же время при большом различии между $N_\parallel$ и $N_{\parallel,-}^{\text{opt}}$ лучевые траектории обходят весь тор (рис. 12в).

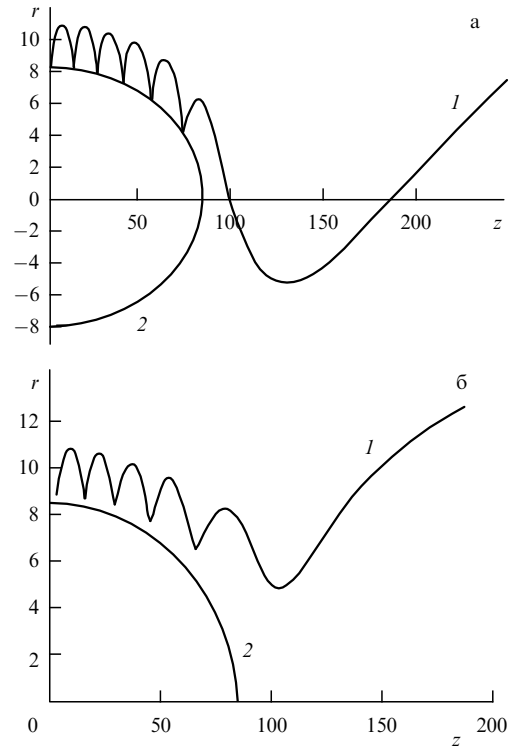


Рис. 13. Лучевые траектории электромагнитных волн в плазме открытой ловушки вблизи КП: (а) $N_\phi = 0$, (б) $N_\phi = 0,2 \sin 0,75$; 1 — лучевая траектория, 2 — КП.

Если плазма неравновесна, например, в ней имеются электронные пучки, движущиеся вдоль магнитного поля, или функция распределения электронов по скоростям анизотропна, что часто имеет место при электронном циклотронном резонансом (ЭЦР) нагреве, то рассматриваемые волны могут стать неустойчивыми. При этом их амплитуда может достигать значительных величин.

В открытых ловушках угол χ изменяется от значения $\chi = \pi/2$ в медианной плоскости ловушки до $\chi = 0$ на оси. При движении вдоль КП от данной плоскости к пробкам угол χ уменьшается. Это приводит к увеличению ширины канала. Когда угол χ переходит через значение χ_{max} , определяемое условием (3.4), канал "раскрывается" — в приближении тонкого слоя, использованном в разделе 3, его ширина обращается в бесконечность. Это означает, что колебания могут уходить от КП в вакуум.

Явление раскрытия волнового канала иллюстрируется расчетами лучевых траекторий, произведенными для плазмы в открытой магнитной ловушке [14]. В этих расчетах магнитное поле задавалось потенциалом

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_0(z) - \frac{r^2}{4} \Phi_0''(z),$$

где

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{2} \left[(R+1)z - (R-1) \frac{L_B}{\pi} \sin \left(\pi \frac{z}{L_B} \right) \right],$$

$$R = 2, \quad L_B = 200.$$

Использовалась цилиндрическая система координат с осью Z , совпадающей с осью ловушки. Предполагалось, что плазменное образование имеет вид эллип-

соида, вытянутого вдоль оси,

$$q_e(\mathbf{r}) = q_e(0) \exp \left[-\left(\frac{r}{L_r}\right)^2 - \left(\frac{z}{L_z}\right)^2 \right],$$

$$L_r = 10, \quad L_z = 100, \quad q_e(0) = 2, \quad \Omega_e(0) = 2.$$

Примеры лучевых траекторий, расположенных с внешней стороны КП, показаны на рис. 13. Обе траектории начинаются в одной и той же точке ($r = 10, z = 0,1$) при одном и том же значении $N_\perp = 0,2$, однако во втором случае волновой вектор отклонен от плоскости zr на угол, равный $0,75$ ($N_\varphi \neq 0$). Рассматриваемые траектории осциллируют по радиусу вблизи медианной плоскости, но монотонно удаляются от оси при приближении к пробкам, что свидетельствует о "раскрытии" волнового канала. В соответствии с результатами, представленными в разделе 3, если $N_\varphi \neq 0$, то при осцилляциях лучевая траектория не доходит до КП. Вне ловушки — в области малой плотности — "центробежная сила" отбрасывает такой луч от оси системы. Значение $N_\parallel$ изменяется на обеих траекториях незначительно: от $N_\parallel \approx 1,25$ внутри плазмы до $N_\parallel \approx 1$ вне ее. Поскольку в плазме проекция фазовой скорости волн на направление магнитного поля меньше скорости света, возможно черенковское взаимодействие рассматриваемых волн с пучками заряженных частиц, движущихся вдоль магнитного поля.

6. Коэффициенты прохождения электромагнитных волн через критическую поверхность и отражения от нее

6.1. Общий случай

Анализ, проведенный в разделе 3, показывает, что вблизи КП имеется зона непрозрачности. В квазиклассическом приближении коэффициент прохождения через зону непрозрачности ($\xi_1 < \xi < \xi_2$) дается выражением

$$T = \exp(-2\gamma), \quad (6.1)$$

где

$$\gamma = \int_{\xi_1}^{\xi_2} d\xi \operatorname{Im} N_\xi(\xi). \quad (6.2)$$

При этом коэффициент отражения равен

$$R = 1 - T. \quad (6.3)$$

Определяя δN_ξ из уравнения (3.1), получаем [8–10, 24]

$$\gamma = \frac{\pi L}{2\sqrt{2}} \left(\frac{\Omega_e}{g_\sigma(\Omega_e, \chi)} \right)^{1/2} \left(\frac{2\delta N_\xi^2(\sigma + \Omega_e)}{g_\sigma(\Omega_e, \chi)} + N_y^2 \right). \quad (6.4)$$

Выражение (6.4), в частности, показывает, что окрестность КП становится непрозрачной для правополяризованных волн ($\gamma \rightarrow \infty$) при стремлении угла χ к предельному значению, определяемому условием (3.4).

Квазиклассическое приближение часто дает результаты, которые оказываются справедливыми и за пределами его применимости. Это утверждение справедливо и по отношению к задаче о прохождении волн через КП. Приближенное волновое уравнение, описывающее этот процесс, можно получить из системы алгебраических

уравнений (2.8). Как и в предыдущих разделах, ограничимся рассмотрением колебаний с $N^2 \approx \varepsilon_\sigma$, которые могут хорошо проникать через зону непрозрачности в окрестности КП. Положим $N_\xi = \sqrt{\varepsilon_{\sigma,c}} \cos \chi + \delta N_\xi$, $N_\zeta = \sqrt{\varepsilon_{\sigma,c}} \sin \chi + \delta N_\zeta$, примем линейную зависимость плотности от координаты ξ ($q_e = 1 + \xi/L$) и произведем замену $\delta N_\xi \rightarrow -i\partial/\partial\xi$. В результате получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dE_\parallel}{d\xi_1} &= (B + iH)E_\parallel - (\sigma\xi_1 + A)F, \\ \frac{dF}{d\xi_1} &= -B^*F + \xi_1 E_\parallel, \end{aligned} \quad (6.5)$$

где

$$\begin{aligned} \xi_1 &= (L \sin \chi)^{-1/2} \left(\frac{2}{\Omega_e} \right)^{1/4} \xi, \quad F = -i(\Omega_e + \sigma)^{-1/2} E_\sigma, \\ A &= \frac{2^{5/4} L^{1/2}}{\sin^{3/2} \chi} \Omega_e^{1/4} (\Omega_e + \sigma)^{1/2} (\delta N_\zeta + iN_y \cos \chi), \\ B &= \left(\frac{L}{\sin \chi} \right)^{1/2} \left(\frac{\Omega_e}{2} \right)^{1/4} (N_y - i\delta N_\zeta \sin \chi), \\ H &= 2^{3/2} (\Omega_e + \sigma)^{1/2} \cot \chi. \end{aligned}$$

Следуя работе [8], введем новую неизвестную функцию Y , через которую величины F и $E_\parallel$ выражаются соотношениями

$$\begin{aligned} F &= (Y'_{\xi_1} + \alpha Y) \exp \left(\frac{\delta \xi_1^2}{2} \right), \\ E_\parallel &= (\beta Y'_{\xi_1} + \nu Y) \exp \left(\frac{\delta \xi_1^2}{2} \right). \end{aligned}$$

Константы $\alpha = -B$, $\beta_\pm = i(H \pm \sqrt{H^2 + 4\sigma})/2$, $\nu = \beta_+ B^* - A$, $\delta = \beta_-$ определяются из условия тождественности двух уравнений системы (6.5), принимающих вид

$$Y''_{\xi_1 \xi_1} - i(a + b\xi_1)Y'_{\xi_1} + (c + d\xi_1)Y = 0, \quad (6.6)$$

где

$$\begin{aligned} a &= -2i \operatorname{Im} B, \quad b = i(-\beta_+ + \beta_-), \\ c &= -|B|^2, \quad d = A - (\beta_+ B^* + \beta_- B). \end{aligned}$$

Уравнение (6.6) с помощью замен

$$\begin{aligned} Y &= \exp \left[i \left(\frac{a}{2} \xi_1 + \frac{b}{4} \xi_1^2 \right) \right] y, \\ \eta &= \left(\frac{b}{2} \right)^{1/2} \xi_1 + \left(\frac{2}{b} \right)^{1/2} \left(\frac{a}{2} + \frac{d}{b} \right) \end{aligned}$$

приводится к стандартному уравнению параболического цилиндра [29]

$$y''_{\eta\eta} + \left(\eta^2 - \frac{2\gamma}{\pi} + i \right) y = 0, \quad (6.7)$$

где

$$\gamma = \frac{\pi}{|b|} \left(\frac{d(d + ab)}{b^2} - c \right).$$

Линейно независимые решения уравнения (6.7) имеют вид

$$y = D_{iy/\pi} \left[\pm \sqrt{2} \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) \eta \right]. \quad (6.8)$$

В области $\eta \gg 1$ имеем $y \propto \exp(\pm i\eta^2/2)$, соответственно

$$E_\sigma, E_\parallel \propto \exp\left[\frac{i}{2}(H \pm \sqrt{H^2 + 4\sigma}) \xi_1^2\right].$$

Чтобы связать эти асимптотики с волнами, падающими на критическую поверхность и убегаящими от нее, проанализируем выражение для групповой скорости

$$\frac{d\omega}{dN_\xi} = -\frac{\partial D/\partial N_\xi}{\partial D/\partial \omega}, \quad (6.9)$$

где D — левая часть дисперсионного соотношения (3.1).

Используя уравнение (3.1), находим, что знак величины $\partial D/\partial \omega$, входящей в выражение для групповой скорости, совпадает со знаком δq_e :

$$\omega \frac{\partial D}{\partial \omega} = \frac{2 + 3\sigma\Omega_e + 2\Omega_e^2}{(1 + \sigma\Omega_e)^2} \delta q_e + \frac{\Omega_e}{\Omega_e + \sigma} \frac{N_\perp^2}{\delta q_e}. \quad (6.10)$$

Напомним, что при $\Omega_e < 1$ к КП могут подходить лишь левополяризованные волны ($\sigma = +1$).

Для величины $\partial D/\partial N_\xi$ получаем следующее выражение

$$\frac{\partial D}{\partial N_\xi} = \pm G^{1/2}, \quad (6.11)$$

где дискриминант квадратичного уравнения G дается (3.2).

Знаку плюс в (6.11) соответствует больший по модулю корень (3.1) в области за КП ($q_e > 1$) и меньший перед ней ($q_e < 1$). Для знака минус расположение корней (3.1) по отношению к КП обратное. В разделе 3.3 при анализе (3.1) отмечалось, что в случае $\chi \ll 1$ больший по модулю корень соответствует квазипотенциальным волнам, а меньший — циркулярно поляризованным. Поскольку рассматриваются волны с $N_\xi > 0$ (для определенности) и $N_\xi \gg |\delta N_\xi|$, то приходим к заключению, что в этом случае дисперсия нормальна у циркулярно поляризованных волн (проекции групповой и фазовой скоростей на ось ξ имеют одинаковые знаки) и аномальна у квазипотенциальных. На рисунке 7 направление групповой скорости показано стрелками.

В области за КП ($q_e > 1$) волны, распространяющиеся направо, описываются следующим решением уравнения (6.7):

$$y = D_{iy/\pi} \left[-\sqrt{2} \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) \eta \right]_{\eta \rightarrow -\infty} \approx (\sqrt{2}\eta)^{iy/\pi} \exp\left(-\frac{\gamma}{4}\right) \exp\left(-\frac{i\eta^2}{2}\right). \quad (6.12)$$

Это решение в области перед КП имеет асимптотику

$$y \approx (\sqrt{2}\eta)^{iy/\pi} \exp\left(-\frac{\gamma}{4}\right) \exp\left(-\frac{i\eta^2}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}\pi}{\Gamma(-iy/\pi)} \exp\left(-\frac{3\gamma}{4}\right) (\sqrt{2}\eta)^{-iy/\pi-1} \exp\left(\frac{i\eta^2}{2}\right). \quad (6.13)$$

Сопоставление первого слагаемого в (6.13) с (6.12) дает коэффициент прохождения (6.1). При определении коэффициента отражения следует учесть, что асимптотики падающей и отраженной волн выражаются через функцию Y по-разному. Так, в случае падающей волны

$$F \approx \left(-i\frac{d}{b} + \alpha\right) \exp\left(\frac{i\delta\xi_1^2}{2}\right) Y, \\ E_\parallel \approx \left(-i\beta\frac{d}{b} + v\right) \exp\left(\frac{i\delta\xi_1^2}{2}\right) Y,$$

в то время как для отраженной волны имеем

$$F \approx i b \xi_1 \exp\left(\frac{i\delta\xi_1^2}{2}\right) Y, \quad E_\parallel \approx i b \beta \xi_1 \exp\left(\frac{i\delta\xi_1^2}{2}\right) Y.$$

Учитывая также соотношение [29]

$$\frac{1}{|\Gamma(-iy)|^2} = \frac{\gamma}{\pi} \sinh(\pi\gamma),$$

находим, что в соответствии с законом сохранения энергии коэффициент отражения дается (6.3). Разумеется, те же самые соотношения (6.1)–(6.4) характеризуют также и волны, падающие на КП со стороны большей плотности.

Из-за частичного отражения волн, падающих на КП, может возникнуть явление утроения отраженного радиосигнала от магнитосферы Земли (см. [1–3, 6]). Газ атмосферы начинает ионизоваться на некотором расстоянии от поверхности Земли, и плотность плазмы возрастает до определенного предела с удалением от поверхности. Поэтому дисперсионные зависимости, приведенные на рис. 1, 2 (см. также раздел 6.2), позволяют составить общее представление о распространении радиоволн, излучаемых с Земли.

Если радиосигнал не поляризован, то в магнитном поле он делится на два, соответствующих обыкновенным (левополяризованным) и необыкновенным (правополяризованным) волнам. Поэтому должны наблюдаться два отраженных, разнесенных по времени сигнала. Однако, если радиосигнал подходит к КП с малыми значениями $\delta N_\xi = N_\xi - N_{\xi,\sigma}^{\text{opt}}$ и N_γ , то правополяризованные волны лишь частично отражаются от этой поверхности, и часть электромагнитной энергии пройдет за нее. По своей геометрии магнитосфера отличается от плоского слоя. Поэтому волны, прошедшие через КП, вообще говоря, имеют мало шансов после отражения от плотной плазмы вернуться к этой поверхности под углом, обеспечивающим их обратный выход к поверхности Земли. Однако, если в магнитном поле имеются неоднородности, то рассеяние на них может привести к выходу какой-то части волновой энергии. В результате в случае $\Omega_e < 1$ появится третий отраженный сигнал. Если $\Omega_e > 1$, то из-за значительного усложнения картины дисперсионных зависимостей число отраженных сигналов может достигать семи [1].

6.2. Малый угол между градиентом плотности плазмы и вектором магнитного поля

Дисперсионные кривые особенно близко подходят друг к другу (при $N_\xi = N_{\xi,\sigma}^{\text{opt}}$ пересекаются) в областях, которые на рис. 8а, 10а обозначены как $S_\sigma^\pm$. (У величин $S_\sigma^\pm$ верхний индекс "±" соответствует знаку N_ξ , который не связан со знаком поляризации волн, указанным в нижнем индексе.)

В этих областях волновая энергия "перетекает" от одной дисперсионной кривой к другой, что ведет к изменению поляризации колебаний, а если соответствующая дисперсионная кривая имеет вертикальную асимптоту $q_e = q_{es}$ (плазменный резонанс), то — к поглощению. Для коротковолновых — квазиклассических — волн процесс "перетекания" характеризуется коэффициентом прохождения (6.1) и отражения (6.3).

Волновая энергия, проникшая через область непрозрачности, должна уходить от ее границы. Чтобы выяснить по какой из дисперсионных кривых на плоскости $q_e N_\xi$ она будет "двигаться", необходимо определить знаки групповой скорости. Вдали от критической поверхности, где дисперсионные соотношения электромагнитных волн имеют вид $N^2 \approx \varepsilon_\sigma$, направления фазовой и групповой скоростей совпадают. Этого, вообще говоря, достаточно, для того чтобы с учетом непрерывности потока волновой энергии получить полную картину распространения волн на плоскости $q_e N_\xi$, представленную на рис. 7, на котором направление движения волновой энергии показано стрелками.

Эта картина подтверждается, в частности, прямым расчетом групповой скорости для другого предельного случая квазипотенциальных волн, близких к состоянию плазменного резонанса. Волны в холодной плазме становятся потенциальными при $N \rightarrow \infty$. Дисперсионное соотношение таких волн, эквивалентное (2.5), билинейно по показателю преломления

$$D = N_i N_k \varepsilon_{ik} = 0. \quad (6.14)$$

Используя его, можно найти групповую скорость

$$V_i = -\frac{\partial D / \partial N_i}{\partial D / \partial \omega} \propto N_k \varepsilon_{ik}. \quad (6.15)$$

Выражение (6.15) показывает, что у потенциальных волн групповая скорость ортогональна вектору $\mathbf{N}$ [30]:

$$N_i V_i \propto N_i N_k \varepsilon_{ik} = 0. \quad (6.16)$$

В окрестности поверхности плазменного резонанса $N_\xi \rightarrow \infty$ (см. раздел 3.1) и соответственно $V_\xi \rightarrow 0$. Поэтому, чтобы найти V_ξ , необходимо учесть конечность отношения N_ξ / N_ξ . Представляя соотношение (6.14) при $\chi \ll 1$ в виде

$$(\chi N_\xi - N_\xi)^2 \varepsilon_\perp + N_\xi^2 \varepsilon_\parallel = 0, \quad (6.17)$$

находим

$$V_\xi \approx -\frac{\omega \chi \varepsilon_\perp N_\xi}{N_\xi^2}. \quad (6.18)$$

Выражение (6.18) справедливо вблизи поверхности плазменного резонанса.

Расчет групповой скорости в окрестности КП при значениях угла χ порядка единицы был произведен в разделе 6.1. Все эти результаты укладываются в картину движения волновой энергии, показанную на рис. 7.

Основываясь на этой картине, рассмотрим сначала более простой случай $\omega > \omega_e$, когда до КП могут доходить лишь левополяризованные волны. Пусть на КП со стороны меньшей плотности падает единичный поток волновой энергии. В области S_+^+ его часть, равная T_+^+ (здесь нижний индекс характеризует поляризацию колебаний $\sigma = +$, верхний — знак N_ξ), пройдет через КП

и будет распространяться за ней в виде левополяризованных электромагнитных волн в том же направлении. Часть энергии, равная $1 - T_+^+$, после прохождения КП останется на первоначальной дисперсионной кривой на ее резко падающем участке, который соответствует квазипотенциальным волнам, близким к электронным ленгмюровским колебаниям. В области взаимодействия S_+^- часть энергии $(1 - T_+^+) T_+^-$ попадет на дисперсионную кривую, уходящую в область плазменного резонанса. Она поглотится, в то время как оставшаяся часть $(1 - T_+^+)(1 - T_+^-)$, двигаясь вдоль первоначальной дисперсионной кривой, принимает вид отраженных левополяризованных электромагнитных волн. Таким образом, коэффициенты прохождения, отражения и поглощения левополяризованных волн, падающих на КП со стороны меньшей плотности, даются выражениями

$$\begin{aligned} T_+^\uparrow &= T_+^+, \\ R_+^\uparrow &= (1 - T_+^+)(1 - T_+^-), \\ A_+^\uparrow &= (1 - T_+^+) T_+^-. \end{aligned} \quad (6.19)$$

При падении со стороны большей плотности, как следует из рис. 7, отражение колебаний невозможно (см. область S_+^+), в то время как для коэффициентов прохождения и поглощения получаем

$$\begin{aligned} T_+^\downarrow &= T_+^-, \\ A_+^\downarrow &= 1 - T_+^-. \end{aligned} \quad (6.20)$$

В приведенных коэффициентах стрелка, направленная вверх (вниз) означает, что волны распространяются в сторону возрастания (уменьшения) плотности плазмы.

Картина явлений, происходящих у КП, при $\omega < \omega_e$ усложняется из-за возможного изменения направления вращения электрического вектора. Применяя последовательно соотношения (6.1) и (6.3), в каждой из областей $S_\sigma^\pm$, через которые в соответствии с рис. 7б проходит волновая энергия, получаем выражения для коэффициентов, характеризующих взаимодействие волн с плазмой у КП и в этом случае. При частоте $\omega < \omega_e$ возможно изменение поляризации прошедших и отраженных колебаний, которую идентифицирует второй нижний индекс у соответствующих коэффициентов. Ниже приводится их список.

Правополяризованные волны, падающие со стороны меньшей плотности:

$$\begin{aligned} T_{-, -}^\uparrow &= T_-^+, \\ T_{-, +}^\uparrow &= (1 - T_-^+)(1 - T_+^+), \\ R_{-, +}^\uparrow &= (1 - T_-^+) T_+^+(1 - T_+^-), \\ R_{-, -}^\uparrow &= (1 - T_-^+) T_+^+ T_+^-(1 - T_-^-), \\ A_-^\uparrow &= (1 - T_-^+) T_+^+ T_+^- T_-^-. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Левополяризованные волны, падающие со стороны меньшей плотности:

$$\begin{aligned} T_{+, +}^\uparrow &= T_+^+, \\ R_{+, +}^\uparrow &= (1 - T_+^+)(1 - T_+^-), \\ R_{+, -}^\uparrow &= (1 - T_+^+) T_+^-(1 - T_-^-), \\ A_+^\uparrow &= (1 - T_+^+) T_+^- T_-^-. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Левополяризованные волны, падающие со стороны большей плотности:

$$\begin{aligned} T_{+,+}^{\downarrow} &= T_{+,+}^{\downarrow}, \\ R_{+,-}^{\downarrow} &= (1 - T_{+,+}^{\downarrow})(1 - T_{+,-}^{\downarrow}), \\ A_{+,+}^{\downarrow} &= (1 - T_{+,+}^{\downarrow}) T_{+,-}^{\downarrow}. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Правополяризованные волны, падающие со стороны большей плотности:

$$\begin{aligned} T_{+,-}^{\downarrow} &= T_{+,-}^{\downarrow}, \\ A_{+,-}^{\downarrow} &= 1 - T_{+,-}^{\downarrow}. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Остальные коэффициенты ($T_{+,-}^{\uparrow}$, $R_{+,+}^{\downarrow}$, $R_{+,-}^{\downarrow}$, $T_{-,+}^{\downarrow}$, $R_{-,+}^{\downarrow}$, $R_{-,-}^{\downarrow}$) обращаются в нуль.

Коэффициенты $T_{\sigma}^{\pm}$ характеризуют прохождение волн через одну из областей взаимодействия $S_{\sigma}^{\pm}$. Эти коэффициенты были приведены в разделе 6.1. Отметим, что верхний индекс коэффициентов $T_{\sigma}^{\pm}$ входит в выражение для $\delta N_{\xi}^{\pm} = N_{\xi} \mp \sin \chi \sqrt{\varepsilon_{\sigma}}$ (см. (6.1)–(6.4)).

Вычисление коэффициентов $T_{\sigma}^{\pm}$ в случае $\chi \ll 1$ может быть существенно упрощено. Из соотношения (3.3) следует, что с уменьшением угла χ сокращается размер области взаимодействия (непрозрачности), $\delta q_{e,1} \propto \sin \chi$. В пределах этой области при $\chi \ll 1$ величины ε_{σ} , $\varepsilon_{\perp}$ можно считать постоянными, как и при выводе (3.10), учитывая координатную зависимость лишь в выражении для $\varepsilon_{\parallel} = -\delta q_e = -\xi/L$. При этом в дисперсионном соотношении (3.1) пропадет слагаемое $\propto \delta q_e^2$, а в коэффициентах соответствующего волнового уравнения останется лишь линейная зависимость от координаты. Для его получения, как и в разделе 6.1, произведем замену $\delta N_{\xi} \rightarrow -i\partial/\partial \xi$. Из исходной системы уравнений (2.8) следует, что получившийся оператор должен быть применен к $E_{\parallel}(\xi)$:

$$\left\{ \chi^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2i \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{2\xi}{L\varepsilon_{\sigma,c}^{1/2}} + \chi \delta N_{\xi} \right) - (\delta N_{\xi})^2 - N_y^2 \right\} E_{\parallel} = 0. \quad (6.25)$$

В силу линейной зависимости коэффициентов уравнения от координаты его удобно решать методом комплексного преобразования Фурье (см. приложение 1). Анализ решений подтверждает справедливость выражений для коэффициентов прохождения (6.1) и отражения (6.3).

Коэффициенты (6.18)–(6.23) были получены последовательным применением соотношений (6.1)–(6.3), характеризующих прохождение волн через области взаимодействия $S_{\sigma}^{\pm}$. Однако при $\chi \ll 1$ возможен и более прямой путь, состоящий в использовании единого волнового уравнения, учитывающего сразу всю последовательность процессов, происходящих в окрестности как КП, так и поверхности плазменного резонанса. Такое уравнение получается с помощью замены $N_{\xi} \rightarrow -i\partial/\partial \xi$ в дисперсионном соотношении (3.9):

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \varepsilon_{+,c} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \varepsilon_{-,c} \right) \xi - \right. \\ & \left. - \varepsilon_{\perp,c} L \left[\left(\chi \frac{\partial}{\partial \xi} - iN_{\xi} \right)^2 - N_y^2 \right] \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 1 \right) \right\} E_{\parallel} = 0. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Уравнение (6.26) сингулярно. Особенность в точке $\xi_s = \varepsilon_{\perp,c} L \chi^2$ соответствует плазменному резонансу. Положение этой точки определяется уравнением (2.5), в котором следует положить $\theta = \chi$ (см. раздел 3.3). Для продолжения решения через эту точку воспользуемся правилом обхода Ландау, эффективно учитывающим диссипацию в окрестности резонансной точки. В соответствии с общим рецептом в уравнении $\varepsilon_{\parallel}(\omega, \xi) + \varepsilon_{\perp} \chi^2 = 0$, определяющем положение особой точки, добавим к частоте малую положительную мнимую часть. При этом, поскольку в рассматриваемом случае $d\omega_{pe}^2/d\xi > 0$, то особая точка сместится в комплексной плоскости с действительной оси вверх. Следовательно, при обобщении решения на комплексные значения особая точка должна обходитьсся снизу. Анализ решений, полученных с использованием данного правила, подтверждает результаты, приведенные выше (см. приложение 2).

Обратим внимание на сходство выражений (6.20), (6.24) с известными коэффициентами Баддена, характеризующими резонансное взаимодействие электромагнитных волн, падающих на область циклотронного резонансного взаимодействия со стороны большего магнитного поля (конфигурация магнитного берега) (см., например, [18]). Эти волны правополяризованы, и их показатель преломления дается выражением

$$N^2 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega - \omega_c)}.$$

По мере приближения к точке циклотронного резонанса длина волн сокращается, что ведет к их интенсивному поглощению. При этом отраженные волны отсутствуют. Прохождение волн через область непрозрачности в окрестности точки циклотронного резонанса, как и в рассматриваемом нами случае, обуславливается подбарьерным просачиванием (см. (6.1), а также [1, 4, 5]). Зависимость показателя преломления от координаты в окрестности точки циклотронного резонанса показана на рис. 14. В случае циркулярно поляризованных волн, падающих на КП, поглощение обусловлено плазменным резонансом (см. вертикальные асимптоты дисперсионных зависимостей на рис. 1, 2, 7).

Процессы, происходящие при падении электромагнитных волн на КП, более сложны ввиду их асимметрии по отношению к знаку N_{ξ} . Если $\Omega_c > 1$, то картина еще более усложняется из-за наличия двух ветвей волн, которые могут распространяться вблизи КП. В окрест-

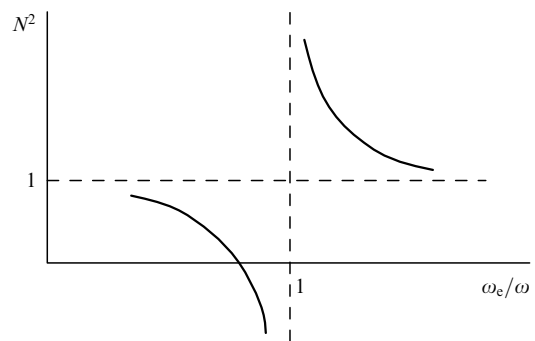


Рис. 14. Показатель преломления правополяризованных волн, распространяющихся вдоль неоднородного магнитного поля вблизи точки ЭЦР.

ности КП при $\Omega_e < 1$ могут распространяться только левополяризованные волны. Если асимметрия несущественна, $T_+^+ = T_+^-$, то коэффициенты (6.19), характеризующие в этом случае прохождение через КП левополяризованных волн, падающих со стороны меньшей плотности, также совпадают по виду с коэффициентами Баддена.

7. Лучевые траектории вблизи критической поверхности

В предыдущих разделах рассматривались плоские волны. Их длина, как правило, мала по сравнению с характерным пространственным масштабом плазмы. Такие волны обычно вводятся в плазму в виде ограниченных в поперечном направлении волновых пучков. Траектории пучков могут быть определены в приближении геометрической оптики.

Система уравнений геометрической оптики имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= -\frac{\partial D}{\partial \mathbf{N}} \left(\frac{\partial D}{\partial \omega} \right)^{-1}, \\ \dot{\mathbf{N}} &= \frac{\partial D}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{\partial D}{\partial \omega} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Так как нас интересует лишь вид лучевых траекторий, то можно заменить время t любой другой величиной t' , характеризующей расстояние вдоль траектории. Определяя новое "время" t' соотношением $dt'/dt = \partial D(\mathbf{r}(t), \mathbf{N}(t))/\partial \omega$, приводим систему уравнений (7.1) к более простому виду:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= -\frac{\partial D}{\partial \mathbf{N}}, \\ \dot{\mathbf{N}} &= \frac{\partial D}{\partial \mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

В окрестности КП показатель преломления является резко меняющейся функцией плотности (см. разделы 2, 5). Поэтому в данной области следует ожидать сильной рефракции волн и возникновения особенностей на лучевых траекториях. Эти особенности ярко проявляются на лучевых траекториях, лежащих в плоскости $\xi\zeta$ ($N_y = 0$).

Пользуясь свободой в выборе конкретного представления дисперсионного соотношения, запишем его в виде

$$\delta N_\xi - F(\xi, \delta N_\zeta) = 0. \quad (7.3)$$

Здесь функция $F(\xi, \delta N_\zeta)$ определяется соотношениями (3.1), (3.2):

$$F(\xi, \delta N_\zeta) = \frac{2\delta q_e \varepsilon_{\sigma,c}^{-1/2} \cos \chi + \delta N_\zeta \cos \chi \sin \chi \pm G^{1/2}(\xi, \delta N_\zeta)}{\sin^2 \chi}, \quad (7.4)$$

где $\delta q_e = \xi/L$.

На плоскости $\xi\zeta$ уравнение лучевой траектории в окрестности КП, как следует из (7.4), имеет вид

$$\frac{d\xi}{d\zeta} = -\frac{\partial F}{\partial(\delta N_\zeta)} = -\cot \chi \pm \frac{2\xi}{L\varepsilon_{\sigma,c}^{1/2} G^{1/2}(\xi, \delta N_\zeta) \sin \chi}. \quad (7.5)$$

Лучевая траектория при $N_y = 0$ может непосредственно подходить к КП. Вблизи нее ($\delta q_e \ll \delta N_\zeta$) из (7.5)

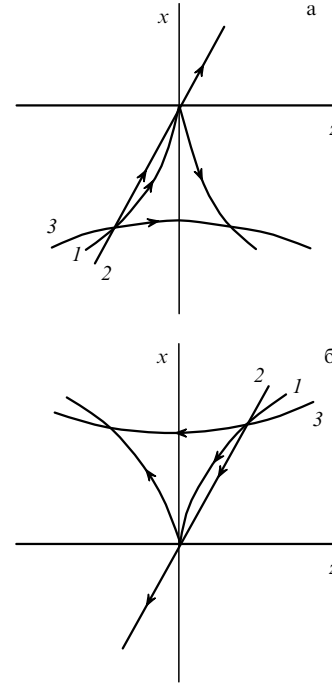


Рис. 15. Лучевые траектории волн, падающих на КП (а) со стороны меньшей плотности, (б) со стороны большей плотности; 1 — $N_\zeta < N_{\zeta,\sigma}^{\text{opt}}$, 2 — $N_\zeta = N_{\zeta,\sigma}^{\text{opt}}$, 3 — $N_\zeta > N_{\zeta,\sigma}^{\text{opt}}$.

получаем

$$\zeta \approx -\xi \cot \chi \pm \frac{2}{3} \left(\frac{\xi^3}{L\sqrt{\varepsilon_{\sigma,c}} \delta N_\zeta \sin^3 \chi} \right)^{1/2}. \quad (7.6)$$

Отметим, что область прозрачности прилегает к КП со стороны большей плотности ($\xi > 0$) при $\delta N_\zeta > 0$ и со стороны меньшей ($\xi < 0$) при $\delta N_\zeta < 0$, т.е. в ней знак ξ совпадает со знаком δN_ζ . Учитывая соотношения $z = \xi \cos \chi + \zeta \sin \chi$, $\xi = x \sin \chi + z \cos \chi$, приводим (7.6) к виду

$$z = \pm \frac{2}{3} \sin \chi \left(\frac{x^3}{L\sqrt{\varepsilon_{\sigma,c}} \delta N_\zeta} \right)^{1/2}. \quad (7.7)$$

Выражение (7.7) показывает, что лучевые траектории, подходящие к КП, имеют на ней заострения, причем лучевые траектории как подходят к данной поверхности, так и уходят от нее поперек магнитного поля (рис. 15) (см. также [1, 4, 5]). Эта особенность связана с превращением на КП электромагнитных волн в электронные ленгмюровские колебания с $N_\perp = 0$. Групповая скорость электронных ленгмюровских колебаний в холодной плазме равняется нулю. Именно поэтому лучевые траектории рассматриваемых колебаний, будучи ортогональными вектору магнитного поля, при отражении от КП образуют заострения.

Ортогональность групповой и фазовой скоростей — характерное свойство потенциальных волн холодной замагниченной плазмы (см. (6.16)). Волны становятся потенциальными также вблизи поверхности плазменного резонанса, где их показатель преломления неограниченно возрастает. В работе [30] рассмотрены лучевые траектории в этой области и показано, что они, как и лучевые траектории у КП, описываются полукубическими параболами. Отметим, что такие же заострения

имеют характеристики уравнения Эйлера–Трикоми на поверхности перехода скорости течения газа через скорость звука (см., например, [31]).

Вблизи другой границы области непрозрачности,

$$\xi_1 = L \delta q_{e,1} = -\frac{2L \sin \chi \delta N_{\zeta} \Omega_e^2}{\sqrt{\varepsilon_{\sigma,c}} g_{\sigma}(\Omega_e, \chi)},$$

из (7.5) имеем

$$\zeta \approx \text{const} \pm \frac{4\Omega_e^2}{g_{\sigma}(\Omega_e, \chi) \varepsilon_{\sigma,c}^{3/4}} \left(\frac{(\xi_1 - \xi) \delta N_{\zeta} L}{\sin \chi} \right)^{1/2}. \quad (7.8)$$

При отражении от этой границы пучок лучевых траекторий образует обычную каустику (см. рис. 15).

Рассматриваемые нами волны с $N_y = 0$, если $\delta N_{\zeta} = 0$, полностью проходят через КП (коэффициент прохождения равен единице, отражения — нулю). Соответственно, как следует из (7.5), (7.6), лучевая траектория имеет вид прямой, пересекающей КП.

В случае $\chi = \pi/2$ ($\xi = x, \zeta = z$) из (7.4) можно получить довольно компактное выражение, описывающее лучевые траектории по обе стороны от области непрозрачности [12],

$$z = \pm (2\Omega_e)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{\pm,c}}} \left[\sqrt{x(x+x_0)} - \text{sgn } x \frac{x_0}{2} \ln \left(\frac{|x+x_0/2| + \sqrt{x(x+x_0)}}{|x_0/2|} \right) \right], \quad (7.9)$$

где $x_0 = 2L\Omega_e \delta N_{\zeta} \varepsilon_{\pm,c}^{-1/2}$. Здесь постоянная интегрирования выбрана таким образом, чтобы отраженный и падающий лучи, которым соответствуют разные знаки перед правой частью (7.9), совпадали в точке отражения от зоны непрозрачности, т.е. при $x = 0$ или $x = -x_0$.

У волн, беспрепятственно проходящих через КП, на ней самой $\mathbf{N} \parallel \mathbf{B}_0$. Если угол $\chi = \pi/2$, что характерно для замкнутых ловушек, то волновой вектор таких волн ортогонален ∇n_0 . В этом случае прохождение электромагнитного луча через КП может показаться парадоксальным. Действительно, в величину D , через которую выражается групповая скорость, компоненты волнового вектора входят в сочетаниях $N_{\perp}^2, N_{\parallel}^2$ (см. (2.3), (2.4)). Поэтому на КП, где $N_{\perp} = 0$, следовало бы ожидать, что обратится в нуль и $\mathbf{V}_{\perp} \propto \partial D / \partial \mathbf{N}_{\perp} \propto \mathbf{N}_{\perp}$. Однако, как следует из соотношений (3.7), (6.10), на КП равна нулю и величина $\partial D / \partial \omega$. В результате поперечная составляющая групповой скорости остается конечной. Обращение в нуль величины $\partial D / \partial \omega$ свидетельствует о слиянии на критической поверхности при $N_{\parallel}^2 = \varepsilon_{\pm,c}$ зависимостей $\omega(\mathbf{N})$, соответствующих обыкновенным и необыкновенным волнам (см. рис. 8). Действительно, в этом случае в соответствии с (2.9) в окрестности критической поверхности имеем

$$\omega - \omega_{pe} \approx \pm \frac{|\mathbf{N}_{\perp}|}{2} \left(\frac{\omega_e \omega_{pe}}{2} \right)^{1/2},$$

где верхний знак соответствует обыкновенным волнам, нижний — необыкновенным. Из последнего выражения следует, что поперечная компонента групповой скорости отлична от нуля даже при $\mathbf{N}_{\perp} = 0$.

Полное проникновение СВЧ-колебаний через КП происходит при точном выполнении равенства $N_{\zeta} = N_{\zeta}^{\text{opt}}$.

Коэффициент прохождения, получаемый из анализа волнового уравнения, является плавной аналитической функцией разности $N_{\zeta} - N_{\zeta}^{\text{opt}}$. Он слабо отличается от единичного при малых отклонениях от оптимального значения (см. раздел 6). По-иному ведут себя лучевые траектории, получаемые в приближении геометрической оптики. Выше было показано, что достаточно любого, сколь угодно малого отклонения от траектории с $N_{\zeta} = N_{\zeta}^{\text{opt}}$, пересекающей КП, чтобы колебания отразились от этой поверхности ($N_{\zeta} < N_{\zeta}^{\text{opt}}$) или не доходя до нее ($N_{\zeta} > N_{\zeta}^{\text{opt}}$).

В заключение этого раздела рассмотрим влияние теплового движения электронов на лучевые траектории. В нерелятивистской плазме такое влияние значимо лишь в узкой области, прилегающей к КП, где волны близки по своему характеру к электронным ленгмюровским колебаниям. В этой области тепловые эффекты могут быть учтены переопределением $\varepsilon_{\parallel} \rightarrow \varepsilon_{\parallel} - 3q_e N_{\parallel}^2 \beta_e^2$, где $\beta_e = (T_e/m_e)^{1/2}/c$.

Из условия (2.9) находим

$$\omega \approx \omega_{pe} - \frac{\omega_{pe0} \varepsilon_{\perp,c}}{2} \frac{N_{\perp}^2 (N_{\parallel}^2 - 1)}{(N_{\parallel}^2 - \varepsilon_{+,c})(N_{\parallel}^2 - \varepsilon_{-,c})} + \frac{3\omega_{pe0}}{2} N_{\parallel}^2 \beta_e^2,$$

где $\omega_{pe} \approx \omega_{pe0}(1 + \xi/L)$, $\omega_{pe0} = \omega$. Данное выражение для частоты показывает, что под влиянием эффектов теплового движения электронов КП сдвигается в сторону меньшей плотности.

Используя уравнения лучевой оптики (7.1), получаем

$$\begin{aligned} \dot{N}_x &= A, \\ \dot{x} &= B N_x, \\ \dot{z} &= C_1 N_x^2 + C_2, \end{aligned} \quad (7.10)$$

где

$$\begin{aligned} A &= -\frac{\omega \sin \chi}{L}, \quad B = \frac{(N_{\parallel}^2 - 1) \omega \varepsilon_{\perp,c}}{(N_{\parallel}^2 - \varepsilon_{+,c})(N_{\parallel}^2 - \varepsilon_{-,c})}, \\ C_1 &= \frac{N_{\parallel}}{(N_{\parallel}^2 - \varepsilon_{+,c})^2 (N_{\parallel}^2 - \varepsilon_{-,c})^2} \left[(N_{\parallel}^2 - 1)^2 + \frac{\omega^2}{\omega_e^2 - \omega^2} \right] \omega \varepsilon_{\perp,c}, \\ C_2 &= 3\omega N_{\parallel} \beta_e^2; \end{aligned}$$

изменения продольной составляющей показателя преломления не учитываются, что справедливо на небольшом расстоянии от КП.

Из уравнений (7.10) находим

$$\begin{aligned} N_x &= At, \\ x &= \frac{Bt^2}{2}, \\ z &= \frac{C_1 t^3}{3} + C_2 t. \end{aligned}$$

На плоскости XZ лучевые траектории имеют вид

$$z = \pm \frac{C_1}{3} \left(\frac{2x}{B} \right)^{3/2} \pm C_2 \left(\frac{2x}{B} \right)^{1/2}.$$

При $C_2 = 0$, т.е. в холодной плазме, лучевые траектории представляют собой полукубические параболы (см. выше). Наличие заострений обусловлено равенством нулю групповой скорости электронных ленгмюровских колебаний. Влияние теплового движения приводит к

тому, что их групповая скорость становится отличной от нуля. В результате острия сглаживаются, при этом, если константы C_1 и C_2 имеют разные знаки, то в окрестности КП лучевые траектории образуют петли.

8. Волновые пучки вблизи критической поверхности

При СВЧ-нагреве плазмы электромагнитные волны вводятся в виде волновых пучков, причем часто распределение интенсивности в поперечном сечении близко к гауссову. Проникновение гауссовых волновых пучков через КП в наиболее интересном случае $\chi = \pi/2$ было рассмотрено в [12].

Лучевое приближение, использованное в разделе 7, становится непригодным вблизи точек отражения волн (границы области непрозрачности). Соответствующие участки лучевых траекторий на рис. 15 должны быть опущены, а связь лучевых траекторий падающих волн с лучевыми траекториями прошедших и отраженных волн должна определяться с помощью решения волнового уравнения. В работе [12] при решении этой проблемы лучевые траектории рассматривались как предел траекторий волновых пакетов (волновых пучков) при отношении размера пучка к характерному размеру неоднородности, стремящемся к нулю. Разумеется, то же самое справедливо и по отношению к лучевым траекториям волн, прошедших через зону непрозрачности.

Следуя работе [12], рассмотрим гауссов волновой пучок, падающий на КП со стороны меньшей плотности ($x < 0$),

$$E(\mathbf{r}) = \int dN_z F(N_z) E(\mathbf{r}, N_z), \quad (8.1)$$

где

$$F(N_z) = \exp[-(N_z - N_{z0})^2 l^2], \quad E(\mathbf{r}, N_z) = \exp[i\Phi(\mathbf{r}, N_z)], \\ \Phi(\mathbf{r}, N_z) = \int^x dx' N_x(x', N_z) + yN_y + zN_z.$$

В выражении для $E(\mathbf{r}, N_z)$ опущен несущественный медленно изменяющийся предэкспоненциальный множитель.

Вдали от критической поверхности ($|x/x_0| \gg 1$) из соотношения (3.6) имеем

$$N_x \approx -\frac{x}{\alpha^2} - \frac{A}{2\alpha} + \frac{1}{2x} \left(\frac{A^2}{4} + B_1^2 \right), \quad (8.2)$$

соответственно

$$\Phi(\mathbf{r}, N_z) \approx -\frac{x^2}{2\alpha^2} - \frac{Ax}{2\alpha} + \frac{1}{2} \left(\frac{A^2}{4} + B_1^2 \right) \ln x + \\ + yN_y + zN_z + \text{const}(N_z), \quad (8.3)$$

где $\alpha = L^{1/2}(\Omega_e/2)^{1/4}$, а коэффициенты

$$A = \frac{2^{5/4} \Omega_e^{3/4} L^{1/2} \delta N_z}{\varepsilon_{+,c}^{1/2}}, \quad B_1 = \text{Re } B = \frac{\Omega_e^{1/4} L^{1/2} N_y}{2^{1/4}}$$

(см. раздел 6.1). В соотношении (8.2) знак N_x выбран из условия $V_{gr,x} > 0$. Значение константы в (8.3) положим равным $\text{const}(N_z) = -(A^2/4 + B_1^2) \ln(-4|x_0|)/2$. При таком выборе траектория волнового пучка, фаза которого дается (8.3) (см. ниже), совпадает с асимптотикой

(7.9) при $|x/x_0| \gg 1$. Вместе с тем данный выбор облегчает анализ траекторий отраженного пучка.

Пространственную зависимость падающего волнового пучка находим, вычисляя интеграл (8.1) методом стационарной фазы:

$$E(\mathbf{r}) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{l_0} \exp \left\{ i\Phi(\mathbf{r}, N_{z0}) - \frac{1}{4l_0^2} [\Phi'_{N_{z0}}(\mathbf{r}, N_{z0})]^2 \right\}, \quad (8.4)$$

где

$$l_0^2 = l^2 - iA_2 \ln \left| \frac{4x}{x_0} \right|, \\ \Phi'_{N_z}(\mathbf{r}, N_z) \approx \frac{1}{2} A_1 \left(-\frac{x}{\alpha} + \frac{A}{2} \ln \left| \frac{4x}{x_0} \right| \right) + z, \\ A_1 = \frac{\partial A}{\partial N_z} = \frac{2^{5/4}}{N_{z0}} \left(\frac{\omega_e}{\omega} \right)^{3/4} L^{1/2}, \quad A_2 = \frac{1}{8} A_1^2.$$

В соотношении (8.4) считается, что $|x/x_0| \gg 1$, и выражение для $\Phi'_{N_z}(\mathbf{r}, N_z)$ имеет логарифмическую точность по этому параметру.

Лучевые траектории, рассматривавшиеся в разделе 7, естественно ассоциировать с центральной линией волновых пучков, на которой $\Phi'_{N_z}(\mathbf{r}) = 0$. Нетрудно видеть, что центральная линия волнового пучка, описываемая (8.4), совпадает с асимптотикой (7.9) при $|x/x_0| \gg 1$

$$z = \frac{A_1}{2} \left(x - \frac{A}{2} \ln \left| \frac{4x}{x_0} \right| \right). \quad (8.5)$$

Простые аналитические выражения для прошедшего волнового пучка можно получить в двух предельных случаях: $l \gg L^{1/2}$ (широкий волновой пучок) и $l \ll L^{1/2}$ (узкий пучок). Широкий пучок за КП описывается выражением (8.5) с дополнительным множителем $\exp[-\gamma(N_{z0})]$, учитывающим эффективность подбарьерного просачивания. Такой пучок при его соответствующей ориентировке ($\gamma(N_{z0}) \ll 1$) может практически полностью пройти через КП.

Пучок, узкий в обычном пространстве, имеет большую ширину в пространстве волновых чисел. Критическая поверхность действует на такой пучок как фильтр, вырезающий из него составляющую с $N_z \approx N_c$. В этом случае место множителя $\exp[-\gamma(N_{z0})]$, определяющего коэффициент прохождения широкого волнового пучка, занимает $\exp[-(N_{z0} - N_{z,+}^{\text{opt}})^2 l^2]$. Действительно, интегрирование методом перевала в (8.1) дает

$$E(\mathbf{r}) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{l_1} \exp \left\{ -(N_{z0} - N_{z,+}^{\text{opt}})^2 l^2 + i\Phi(\mathbf{r}, N_{z,+}^{\text{opt}}) - \right. \\ \left. - \frac{1}{4l_1^2} [\Phi'_{N_{z,+}^{\text{opt}}}(\mathbf{r}, N_{z,+}^{\text{opt}})]^2 \right\}, \quad (8.6)$$

где

$$l_1^2 = \left(\frac{\pi}{4} - i \ln \left| \frac{4x}{x_0} \right| \right) A_2, \quad \Phi'_{N_{z,+}^{\text{opt}}}(\mathbf{r}, N_{z,+}^{\text{opt}}) \approx -\frac{1}{2\alpha} (A_1 x + z).$$

Для эффективного коэффициента прохождения волнового пучка нетрудно получить выражение, справедливое, в отличие от (6.1), при произвольном соотношении между l и $L^{1/2}$ [9],

$$T_b = f^{1/2} \exp \left\{ -\pi \left[\frac{fA^2(N_{z0})}{4} + B^2 \right] \right\}, \quad (8.7)$$

где $f = l^2 / (l^2 + \pi A_2)$. Величина

$$A_2 = \frac{L}{2^{1/2} (N_{z,+}^{\text{opt}})^2} \left(\frac{\omega_e}{\omega} \right)^{3/2}$$

характеризует ширину радиоокна критической поверхности в пространстве волновых чисел. Выражение (8.7) при $l \gg L^{1/2}$, когда $f \approx 1$, совпадает с (6.1).

Как следует из проведенного рассмотрения, при $l \gg L^{1/2}$ (широкий пучок) лучевые траектории прошедшего и падающего волновых пучков описываются одним и тем же выражением (8.5).

Характерные лучевые траектории для различных значений $A \propto \delta N_z$ показаны на рис. 16. Они оборваны на некотором расстоянии от КП, так как поблизости от нее несправедливы квазиклассическое приближение и соответственно асимптотические представления (8.3), (8.4), (6.12), (6.13), учитывавшиеся при нахождении пространственной зависимости волновых пучков.

В случае узкого волнового пучка та его составляющая, которая прошла за КП, распространяется по прямой (8.5) с $A = 0$.

Найдем теперь лучевые траектории отраженных волновых пучков. Чтобы связать отраженный волновой пучок с падающим, воспользуемся выражением (6.13), описывающим асимптотики падающей и отраженной плоских волн. Выше мы нашли, что траектория падающего волнового пучка дается (7.9) при вполне определенном значении множителя в первом слагаемом (6.13), с точностью до которого определено данное выражение. Тот же самый множитель должен присутствовать и во втором слагаемом, описывающем отраженную волну. Для упрощения вычислений предположим, что выполняется условие $\gamma \gg 1$, и воспользуемся асимптотическим представлением

$$\Gamma(\gamma) \underset{\gamma \gg 1}{\approx} \exp[\gamma \ln(\gamma)].$$

С учетом этого фаза отраженной волны приводится к выражению (8.3), в котором изменен знак трех первых слагаемых,

$$\Phi(\mathbf{r}, N_z) \approx \frac{x^2}{2\alpha^2} + \frac{Ax}{2\alpha} - \frac{1}{2} \left(\frac{A^2}{4} + B_1^2 \right) \ln \left| \frac{4x}{x_0} \right| + yN_y + zN_z.$$

Повторяя при вычислении отраженного волнового пучка ту же процедуру, что и выше, находим, что его траектория так же, как и траектория падающего пучка, совпадает с асимптотикой (7.9), а именно:

$$z = -\frac{A_1}{2} \left(\frac{x}{\alpha} - \frac{A}{2} \ln \left| \frac{4x}{x_0} \right| \right).$$

Знание асимптотик позволяет восстановить всю лучевую траекторию. При этом оказывается, что падающий и отраженный лучи переходят друг в друга в точке заострения ($x = 0, z = 0$) или в вершине "параболической" траектории ($x = -x_0, z = 0$) при $\delta N_z < 0$ и $\delta N_z > 0$ соответственно. Соединение траекторий обязано учету множителя $\Gamma^{-1}(-i\gamma/\pi)$ в слагаемом (6.13), описывающем отраженную волну. Этот множитель задает сдвиг отраженной лучевой траектории относительно падающей как целого по оси Z . Его учет также максимально сближает лучевую траекторию прошедших волн с объединенной

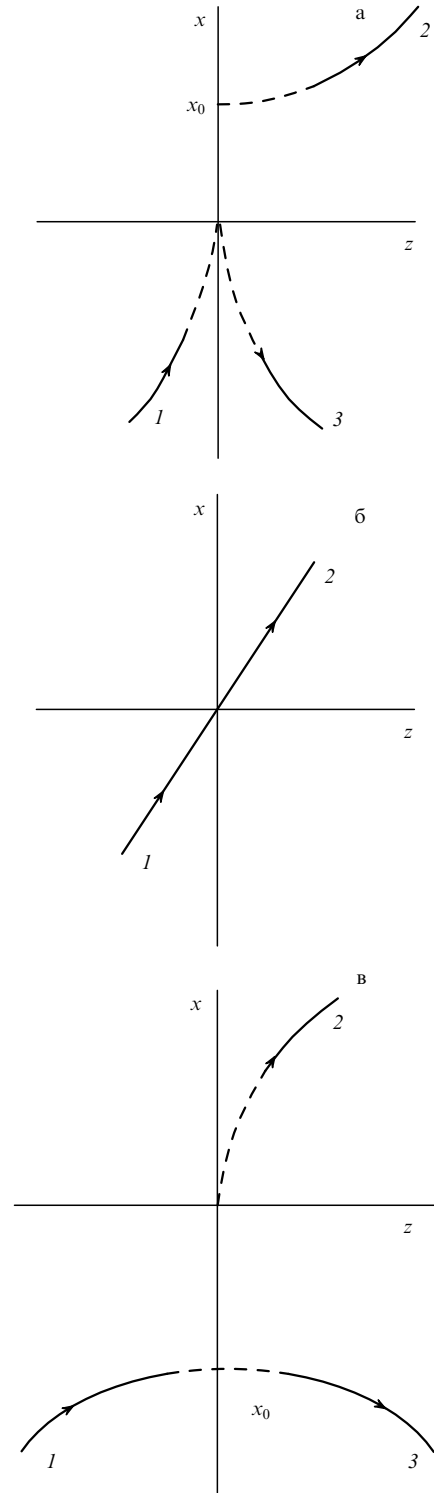


Рис. 16. Траектории волновых пучков, падающих на КП со стороны меньшей плотности: (а) $N_z < N_{z,+}^{\text{opt}}$, (б) $N_z = N_{z,+}^{\text{opt}}$, (в) $N_z > N_{z,+}^{\text{opt}}$, штриховая кривая — часть "траектории", на которой неприменимо квазиклассическое приближение, 1 — траектория падающего пучка, 2 — прошедшего, 3 — отраженного.

лучевой траекторией падающих и отраженных волн (см. рис. 16).

Узкий волновой пучок ($l \leq L^{1/2}$) при отражении от КП теряет часть фурье-спектра (область $N_z \approx N_{z,+}^{\text{opt}}$). В результате отраженный пучок становится негауссовым, и его пространственная структура не может быть описана выражениями вида (8.4), (8.6). Отраженное волновое

образование будет уширено до размера порядка $L^{1/2}$. Действительно, вырезание части фурье-спектра отраженного пучка можно рассматривать как возникновение другого пучка с более узким спектром и, следовательно, более широкого в обычном пространстве. Фаза дополнительного отраженного пучка сдвинута на π относительно фазы основного.

9. Особенности СВЧ-нагрева плотной плазмы в магнитных ловушках

9.1. Открытые ловушки

Нагрев плазмы с помощью СВЧ-волн широко вошел в практику термоядерных исследований. Если плотность плазмы превышает критическую, то при вводе СВЧ-волн в такую плазму возникает проблема прохождения через КП. В разделах 3, 6 отмечалось, что колебания беспрепятственно проходят через КП, если их волновой вектор параллелен вектору магнитного поля. Волны, называемые нами левополяризованными (обыкновенные в области $q_e < 1$ и необыкновенные в области $q_e > 1$), возможны при любом угле χ между ∇n_0 и $\mathbf{B}_0$. Для правополяризованных волн (необыкновенные в области $q_e < 1$, геликоны в области $q_e > 1$) данный угол должен быть меньше значения $\chi_{\max}$, определяемого условием (3.4). Это обстоятельство определяет разные сценарии СВЧ-нагрева плотной плазмы в открытых и замкнутых ловушках.

Правополяризованные волны интенсивно взаимодействуют с циклотронным вращением электронов, а их область прозрачности со стороны большего магнитного поля доходит до поверхности циклотронного резонанса вне зависимости от значения плотности плазмы. Поэтому правополяризованные волны естественно использовать для ЭЦР-нагрева по методу магнитного берега. Требуемые конфигурации магнитного поля характерны для открытых магнитных ловушек. В области пробок угол χ мал ($\chi \ll 1$) и, следовательно, при вводе волн через пробки условие $\chi < \chi_{\max}$ будет выполнено.

В замкнутых ловушках, а также в центральных секциях амбиполярных ловушек плотность плазмы изменяется в направлении поперек магнитного поля, $\chi = \pi/2$. В этом случае через КП могут проникать только левополяризованные волны, а для СВЧ-нагрева может использоваться схема О-Х-В-трансформации [7] (см. раздел 6.3).

Рассмотрим сначала нагрев плотной плазмы в открытых ловушках по методу магнитного берега. При вводе СВЧ-энергии через пробки оптимальна лучевая траектория, совпадающая с осью ловушки, на которой угол $\chi = 0$. В концепции магнитного берега предполагается, что волны должны подойти к поверхности циклотронного резонанса со стороны большего магнитного поля. Ниже мы покажем, что в этой области лучевые траектории, близкие к оси, неустойчивы — вследствие рефракции, обусловленной неоднородностью плазмы, малые отклонения траектории экспоненциально нарастают. В конце концов, лучевая траектория отбрасывается на периферию ловушки в область разреженной плазмы.

Рассмотрим это явление. Обычно в открытых магнитных ловушках плотность плазмы изменяется более резко, чем магнитное поле. Поэтому при приближенном рассмотрении будем считать $\mathbf{B}_0(\mathbf{r}) = \text{const}$ и учтем лишь

радиальную неоднородность плотности (спад от оси). Для описания геликонов используем приближенное дисперсионное соотношение (2.13). Считая также угол между волновым вектором и вектором магнитного поля достаточно малым, $\theta \ll 1$, представим указанное дисперсионное соотношение в виде

$$D = N_z^2(1 - \Omega_e) + N_r^2\left(1 - \frac{\Omega_e}{2}\right) + q_{e0} - r^2 q_{e1} = 0. \quad (9.1)$$

Здесь зависимость плотности от координат выбрана в виде $n_0(r) = n_0(0) - r^2 n_{01}$, соответственно $q_e(r) = q_{e0} - r^2 q_{e1}$.

Уравнения лучевой оптики (7.2) показывают, что величина D может рассматриваться как гамильтониан, сохраняющийся на лучевой траектории. В соотношении (9.1) роль импульса играет r -я компонента показателя преломления, а "массы частицы" — величина $2 - \Omega_e$. Эффективный потенциал имеет форму "горба", $U(r) = \text{const} - r^2 q_{e1}$. В зоне ЭЦР $\Omega_e \approx 1$, поэтому при подходе колебаний к ней "масса" становится положительной. Из проведенной аналогии следует, что малые отклонения лучевой траектории от оси должны нарастать.

Приведенные соображения подтверждаются расчетом лучевых траекторий [32] на основе полного дисперсионного соотношения (2.3), (2.4). В расчетах магнитное поле задавалось магнитным потенциалом (для сравнения см. раздел 5)

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_0(z) - \frac{r^2}{4} \Phi_0''(z) + \frac{r^4}{64} \Phi_0''''(z), \quad (9.2)$$

где

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{2} \left[(R+1)z - (R-1) \frac{L_B}{\pi} \sin \left(\pi \frac{z}{L_B} \right) \right],$$

$$R = 3, \quad L_B = 170.$$

Зависимость плотности от координаты выбиралась в виде

$$n_0(\mathbf{r}) = n_0(0) \exp \left[- \left(\frac{r}{L_n} \right)^2 \right], \quad L_n = 65.$$

Как и всюду в настоящем обзоре, все величины с размерностью длины нормированы на c/ω . Принималось, что $\omega_e(0) = \omega$, $\omega_{pe}^2(0) = 10\omega^2$. Указанные значения параметров примерно соответствуют параметрам открытой ловушки ОМЭ (опорный магнитный элемент), проектируемой в Российском научном центре "Курчатовский институт". На этой ловушке предполагается исследовать стабилизацию желобковой неустойчивости плазмы с помощью дивертора.

Пучок "оптимальных" лучевых траекторий, пересекающих КП при $N_{\perp} = 0$, изображен на рис. 17. Из рисунка следует, что лучевые траектории уходят от оси, причем по мере удаления векторы $\mathbf{N}$, $\mathbf{V}_{gr}$ разворачиваются в поперечном направлении.

Распространено представление, согласно которому рассматриваемые нами волны (геликоны, или свисты) привязаны к силовым линиям магнитного поля, являющимися своеобразными волноводами. Это представление в какой-то степени оправдано для однородной плазмы [4]. Однако, если плазма неоднородна, то, как

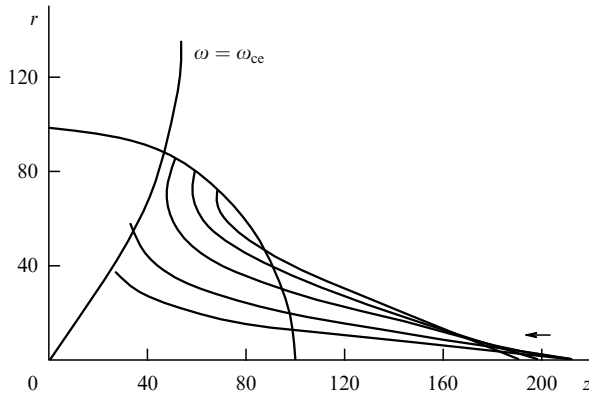


Рис. 17. Лучевые траектории волн с $N_z = N_{z,+}^{\text{opt}}$, проходящих через КП, в плазме открытой ловушки.

показывает проведенный анализ, лучевые траектории могут существенно отклоняться от силовых линий магнитного поля. Вредное влияние рефракции будет уменьшаться при уплощенных радиальных профилях плотности плазмы.

В тонких открытых ловушках, вытянутых вдоль магнитного поля, которое изменяется на расстояниях, существенно превышающих поперечный размер плазмы, эффекты дисперсии, вызывающие распыливание волновых пакетов, движущихся по лучевым траекториям, приводят к установлению радиальных собственных колебаний. Радиальное распределение электромагнитных полей и собственное значение продольного волнового числа адиабатически подстраиваются под параметры системы (магнитное поле, плотность плазмы). Для таких колебаний эффекты рефракции ведут к стягиванию колебаний к периферии плазменного шнура, где располагается КП [33].

9.2. Замкнутые ловушки

В замкнутых ловушках плотность плазмы постоянна вдоль силовых линий магнитного поля ($\chi = \pi/2$). В таких системах к КП могут подходить лишь обыкновенные колебания. Характерная картина дисперсионных зависимостей волн с $N_z = N_{z,+}^{\text{opt}}$ для плоского слоя плазмы при $\chi = \pi/2$ изображена на рис. 9. В соответствии с этим рисунком на КП обыкновенные волны с $N_z = N_{z,+}^{\text{opt}}$ трансформируются в необыкновенные (О-Х-трансформация). Последние проникают за КП сравнительно неглубоко ($\max q_e = 1 + \Omega_e$). После отражения от области плотной плазмы волны подходят к поверхности плазменного (верхнего гибридного) резонанса. Ее положение определяется условием $\omega_{pe}^2 = \omega^2 - \omega_e^2$. В окрестности данной поверхности необыкновенные волны трансформируются в потенциальные бернштейновские (Х-В-трансформация). Последние могут проникать в плазму с произвольно большой плотностью. В плотной плазме они, в конце концов, и поглощаются.

Часть лучевой траектории от точки запуска в вакууме до поверхности плазменного резонанса может рассматриваться в приближении холодной плазмы. Однако для описания как самих бернштейновских волн, так и процесса трансформации необыкновенных волн в бернштейновские, необходимо учитывать эффекты теплового движения электронов. Полный учет этих эффектов делает дисперсионное соотношение чрезвычайно про-

моздким. В работе [34] замечено, что оно может быть существенно упрощено, если принять во внимание потенциальность бернштейновских волн (их показатель преломления существенно превышает единицу), а также то обстоятельство, что бернштейновские волны распространяются почти поперек магнитного поля ($\theta \approx \pi/2$). По этим причинам для описания бернштейновских волн в дисперсионном соотношении холодной плазмы (2.4) достаточно модифицировать коэффициент при старшей — четвертой степени $N_{\perp}$:

$$\varepsilon_{\perp} \rightarrow \varepsilon_B = 1 - \sum_{n=1} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - n^2 \omega_e^2} \frac{2n^2}{\xi} I_n(\xi) \exp(-\xi),$$

где $\xi = k_{\perp}^2 \rho_e^2$, $\rho_e = \sqrt{T_e/m_e}/\omega_e$. При этом дисперсионное соотношение принимает вид

$$D = N_{\perp}^4 \varepsilon_B + N_{\perp}^2 [N_{\parallel}^2 (\varepsilon_{\perp} + \varepsilon_{\parallel}) - 2\varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp} + \varepsilon_{\parallel}] + \varepsilon_{\parallel} (N_{\parallel}^2 - \varepsilon_{+})(N_{\parallel}^2 - \varepsilon_{-}) = 0. \quad (9.3)$$

Чтобы включить в рассмотрение также и эффект ЭЦР-поглощения волн с частотой $\omega \approx \omega_e$, следует произвести замену

$$\frac{1}{\omega - \omega_e} \rightarrow -\frac{i\sqrt{\pi}}{k_{\parallel} v_{Te}} W\left(\frac{\omega - \omega_e}{k_{\parallel} v_{Te}}\right). \quad (9.4)$$

Здесь можно считать, что аргумент функции W намного превышает единицу, при этом

$$W(\zeta) \approx \frac{i}{\sqrt{\pi}\zeta} + \exp(-\zeta^2).$$

Действительно, в обратном случае ($\zeta \leq 1$) мнимая часть W была бы сравнима с действительной, а характерная длина затухания — с длиной волны. Расчет лучевой траектории в этом случае теряет смысл.

Имеются расчеты лучевых траекторий для данной схемы нагрева, выполненные в условиях токамака [35], стелларатора [36] и проектируемой замкнутой ловушки ЭПСИЛОН [34]. Последняя представляет собой совокупность открытых ловушек, соединенных участками криволинейного магнитного поля. Их магнитное поле можно описывать тем же выражением (7.9), которое использовалось выше. В нем для соответствия с проектом ЭПСИЛОН была изменена величина $L_B = 440$, а также ввиду вытянутости системы в продольном направлении в выражении для магнитного потенциала (9.2) было опущено последнее слагаемое, пропорциональное r^4 . В отличие от одиночных открытых ловушек в системе ЭПСИЛОН, как и в любой замкнутой ловушке, плотность плазмы постоянна вдоль силовых линий магнитного поля. С учетом этого распределение плотности плазмы выражалось через векторный потенциал

$$n_0(\mathbf{r}) = n_0(0) \exp\left(-\frac{rA_{\theta}}{L_n^2}\right),$$

где

$$A_{\theta} = \frac{r}{2} \left(\Phi_0' - \frac{r^2}{8} \Phi_0''' \right), \quad \mathbf{A} = (0, A_{\theta}, 0), \quad L_n = 20.$$

Лучевые траектории в случае, когда центральная плотность в ловушке в 10 раз превышает критическую,

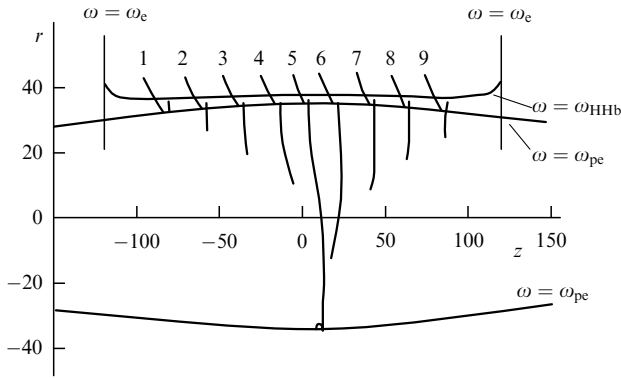


Рис. 18. Лучевые траектории волн с $N_{\parallel} = N_{\parallel}^{\text{opt}}$, проходящих через КП, в плазме проектируемой замкнутой ловушки ЭПСИЛОН.

изображены на рис. 18. Предполагалось, что в центре ловушки $\omega_c/\omega = 0,75$. Основные расчеты были произведены при $\beta = (v_{Te}/c)^2 = 3 \times 10^{-2}$, что соответствует температуре $T = 7,5$ кэВ.

Лучевые траектории, полученные с помощью (9.3), вполне соответствуют описанной выше картине распространения волн, показанной на рис. 18. Колебания с $N_{\parallel} = N_{\parallel}^{\text{opt}}$ после проникновения через КП отражаются от плотной плазмы. Двигаясь наружу, они пересекают вторично КП при единичном значении показателя преломления (см. раздел 2). В окрестности поверхности верхнего гибридного (плазменного) резонанса электромагнитные необыкновенные волны трансформируются в потенциальные бернштейновские, что сопровождается резким ростом показателя преломления. Лучевые траектории в окрестности поверхности плазменного резонанса напоминают лучевые траектории в окрестности КП. Это не удивительно, так как в обоих случаях волны близки к потенциальным. Поведение лучевых траекторий вблизи поверхности плазменного резонанса рассматривалось в [30]. Обнаружено, что лучевые траектории потенциальных волн при отражении от поверхности плазменного резонанса образуют заострения. Именно такие заострения видны на лучевых траекториях на рис. 18 (см. также [27, 33–36]). Однако на самом деле в окрестности точки отражения лучевые траектории образуют узкие петли, которые не различимы на рис. 18 из-за мелкого масштаба. Согласно работе [30] петли образуются под влиянием непотенциальности.

Приняв вид бернштейновских, волны осциллируют между поверхностями ВГР до полного поглощения. На рисунке 18 лучевые траектории обрываются, когда оптическая толщина достигает значения $\tau = 2,5$, где $\tau = \int ds \kappa$, κ — мнимая часть показателя преломления, s — расстояние вдоль луча. Исключение составляют лучевые траектории, располагающиеся поблизости от центральной плоскости ловушки. На них продольный показатель преломления мал, и поэтому до поглощения они совершают большое число радиальных осцилляций. Чтобы избежать заполнения центральной части рисунка многократно пересекающимися кривыми, мы оборвали соответствующие лучевые траектории после одной осцилляции по радиусу.

Поглощение сильно — экспоненциально — зависит от продольного показателя преломления (см. (9.4)). У бернштейновских волн рост плотности на лучевой траектории приводит к увеличению его поперечной компо-

ненты. Продольная компонента показателя преломления изменяется за счет поворота волнового вектора. Причиной рефракции является продольная неоднородность системы. В замкнутых ловушках плотность плазмы постоянна вдоль силовых линий магнитного поля, а в продольном направлении изменяется лишь магнитное поле. В системе ЭПСИЛОН оно возрастает в направлении от медианной плоскости (прямая $z = 0$ на рис. 18) к пробкам. Данное обстоятельство, а также приближение к поверхности ЭЦР приводят к тому, что с удалением от медианной плоскости волны поглощаются более интенсивно. В результате при вводе СВЧ-волн поблизости от пробки волновая энергия выделяется в окрестности КП. Таким образом, для прогрева всей плазмы волны следует вводить поблизости от медианной плоскости.

В токамаках магнитное поле изменяется в продольном направлении из-за вращательного преобразования. Причем величина $|\mathbf{B}_0 \nabla B_0|$ обращается в нуль в экваториальной плоскости и возрастает с удалением от нее. Именно по этой причине в токамаках наиболее глубоко проникают волны, запущенные в данной плоскости [35].

Ввиду обратимости уравнений Максвелла возможна последовательность трансформаций волновой энергии (В-Х-О), обратная происходящей при О-Х-В-нагреве плазмы. Потенциальные бернштейновские волны интенсивно взаимодействуют с плазмой и могут поглощаться на расстояниях, малых по сравнению с ее размером. В то же время для электромагнитных волн такой же частоты плазма может оставаться прозрачной. В этом случае тепловое излучение плазмы, выходящее через радиоокно в результате В-Х-О-процесса, будет увеличено по сравнению с излучением, направленным под другими углами. Усиленное излучение плазмы, выходящее через радиоокно, зафиксировано в работах [25–27].

10. Приложения

Приложение 1

Представим решение уравнения (6.25) в виде

$$E_{\parallel}(\xi) = \int_C dp \exp(p\xi) f(p). \quad (\text{П1.1})$$

На концах контура интегрирования функция $\exp(p\xi)$ должна обращаться в нуль. Это обеспечивает сходимость интеграла (П1.1). Подставляя (П1.1) в (6.25) и интегрируя по частям, находим, что функция $f(p)$ должна удовлетворять уравнению

$$i \frac{4}{L\epsilon_{\sigma,c}^{1/2}} p \frac{df}{dp} - (-p^2 \chi^2 + 2i \delta N_{\zeta} \chi p + (\delta N_{\zeta})^2 + N_y^2) f = 0,$$

решение которого имеет вид

$$f(p) = p^{-i\gamma/\pi} \exp \left[\frac{L\epsilon_{\sigma,c}^{1/2} \chi}{2} p \left(\frac{ip}{4} \chi - \delta N_{\zeta} \right) \right]. \quad (\text{П1.2})$$

Здесь $\gamma = \pi L\epsilon_{\sigma,c}^{1/2} [(\delta N_{\zeta})^2 + N_y^2]/4$ совпадает с пределом (6.3) при $\chi \ll 1$.

Для определенности рассмотрим волны, падающие на КП со стороны меньшей плотности. На рисунке 19а изображен контур интегрирования, соответствующий волнам, убегающим от КП в сторону большей плотно-

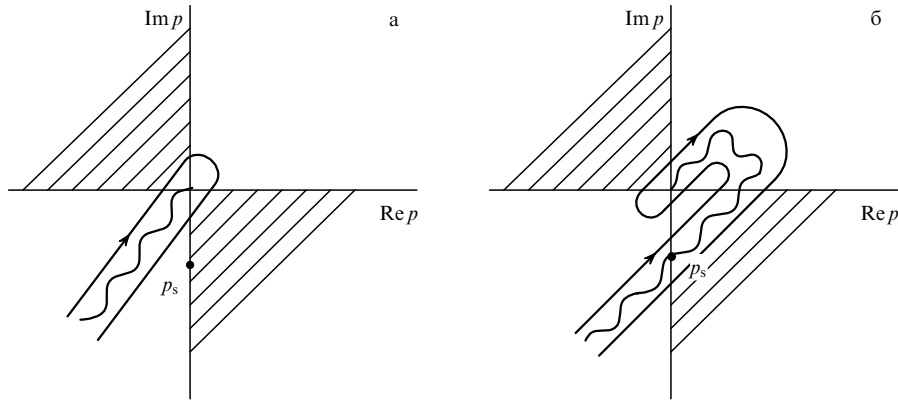


Рис. 19. Контурны интегрирования, соответствующие волнам, падающим на КП со стороны меньшей плотности: (а) $\xi > 0$, (б) $\xi < 0$.

сти. Штриховкой показаны области, в которых не могут располагаться концы контура интегрирования из-за расходимости интеграла (П1.1). Точка $p_s = 4i\xi/(L\epsilon_{\sigma,c}\chi^2)$ — точка перевала.

Асимптотика (П1.1) при $\xi > 0$ определяется точкой ветвления $p = 0$:

$$E_{\parallel}(\xi) \approx \frac{2\pi i}{\Gamma(-i\gamma/\pi)} \xi^{-1+i\gamma/\pi}. \quad (\text{П1.3})$$

Уравнение (6.25) описывает взаимодействие циркулярно поляризованных и квазипотенциальных волн. Если бы нас интересовали только первые, то в (6.25) можно было опустить слагаемое со второй производной, а получившееся сингулярное уравнение первого порядка дополнить правилом обхода Ландау (см. раздел 6.2). Согласно этому правилу особая точка

$$\xi_s = \frac{1}{2} L\epsilon_{\sigma,c}^{1/2} \chi \delta N_{\xi}$$

должна обходиться в нижней полуплоскости комплексного переменного ξ . Полное уравнение (6.25) аналитическое, поэтому переход к отрицательным значениям ξ можно совершить как через нижнюю полуплоскость комплексного переменного (правило обхода Ландау), так и через верхнюю. Первый способ оказывается более простым, так как, следуя ему, сразу приходим к контуру интегрирования, изображенному на рис. 19б. При втором способе в связи с тем, что концы контура интегрирования закреплены в третьей четверти комплексного переменного p , вид контура интегрирования оказывается более сложным. Однако его можно свести к изображенному на рис. 19а. При этом оказывается, что как и в первом случае, вычисляя вклад точки ветвления, необходимо считать, что $\arg \xi = -\pi$. Учитывая вклад как точки ветвления, так и точки перевала, получаем

$$E_{\parallel}(\xi) \approx \frac{2\pi i}{\Gamma(-i\gamma/\pi)} \xi^{-1+i\gamma/\pi} + \frac{2}{\chi} \left(\frac{2\pi i}{L\epsilon_{\sigma,c}^{1/2}} \right)^{1/2} \left(\frac{4\xi}{L\epsilon_{\sigma,c}^{1/2} \chi^2} \right)^{-i\gamma/\pi} \times \\ \times \exp\left(\frac{\gamma}{2}\right) [1 - \exp(2\gamma)] \exp\left(\frac{2i\xi^2}{L\epsilon_{\sigma,c}^{1/2} \chi^2}\right). \quad (\text{П1.4})$$

Выражение (П1.3) и первое слагаемое в (П1.4) описывают циркулярно поляризованные волны. Учитывая вышесказанное, приходим к выводу, что их коэффициент прохождения дается (6.1).

Второе слагаемое в (П1.4) соответствует отраженным квазипотенциальным волнам. Чтобы определить коэффициент отражения, обратимся к выражениям для потока энергии. В случае циркулярно поляризованных волн, распространяющихся под малым углом к магнитному полю, он дается выражением

$$S_{\xi} \approx \frac{cN_{\xi}}{4\pi} |E_{\sigma}|^2, \quad (\text{П1.5})$$

где

$$E_{\sigma} \approx \frac{N_{\xi} N_{\sigma}}{N_{\xi}^2 - \epsilon_{\sigma,c}} E_{\parallel}.$$

Из соотношения (П1.5) получаем

$$S_{\xi} \approx \frac{c}{2\pi} \left(\frac{\xi}{L} \right)^2 \frac{1}{\epsilon_{\sigma,c}^{3/4} (\delta N_{\xi})^2 + N_y^2} |E_{\parallel}|^2. \quad (\text{П1.6})$$

Отметим, что $|E_{\parallel}| \propto |\xi|^{-1}$ (см. (П1.4) и первое слагаемое в (П1.5)), поэтому выражение для потока энергии не зависит от координаты.

Для квазипотенциальных волн используем общее выражение

$$S_{\xi} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{n}_{\xi} [\mathbf{E}\mathbf{B}]) \approx \frac{c}{4\pi} (2E_x - \chi E_{\parallel}) \frac{\partial E_x}{\partial z}.$$

Учитывая асимптотические соотношения

$$E_x \approx \frac{\epsilon_{\sigma,c}^{1/2}}{4\delta N_{\xi}} E_{\parallel}, \quad \delta N_z \approx \frac{4\xi}{L\epsilon_{\sigma,c}^{1/2} \chi^2}, \quad N_x \approx \chi \delta N_{\xi}, \quad N_x \gg N_y,$$

находим

$$S_{\xi} \approx -\frac{c}{64\pi} \chi^2 |E_{\parallel}|^2. \quad (\text{П1.7})$$

Отрицательный знак в (П1.7) соответствует картине движения волновой энергии, показанной на рис. 8, 11. Подставляя в выражения (П1.6), (П1.7) соответственно первое и второе слагаемое (П1.4), приходим к выводу о справедливости соотношения (6.2).

Приложение 2

Для решения уравнения (6.26), как и в Приложении 1, используем метод комплексного преобразования Фурье (см. (П1.1)). В этом выражении функция $f(p)$ должна

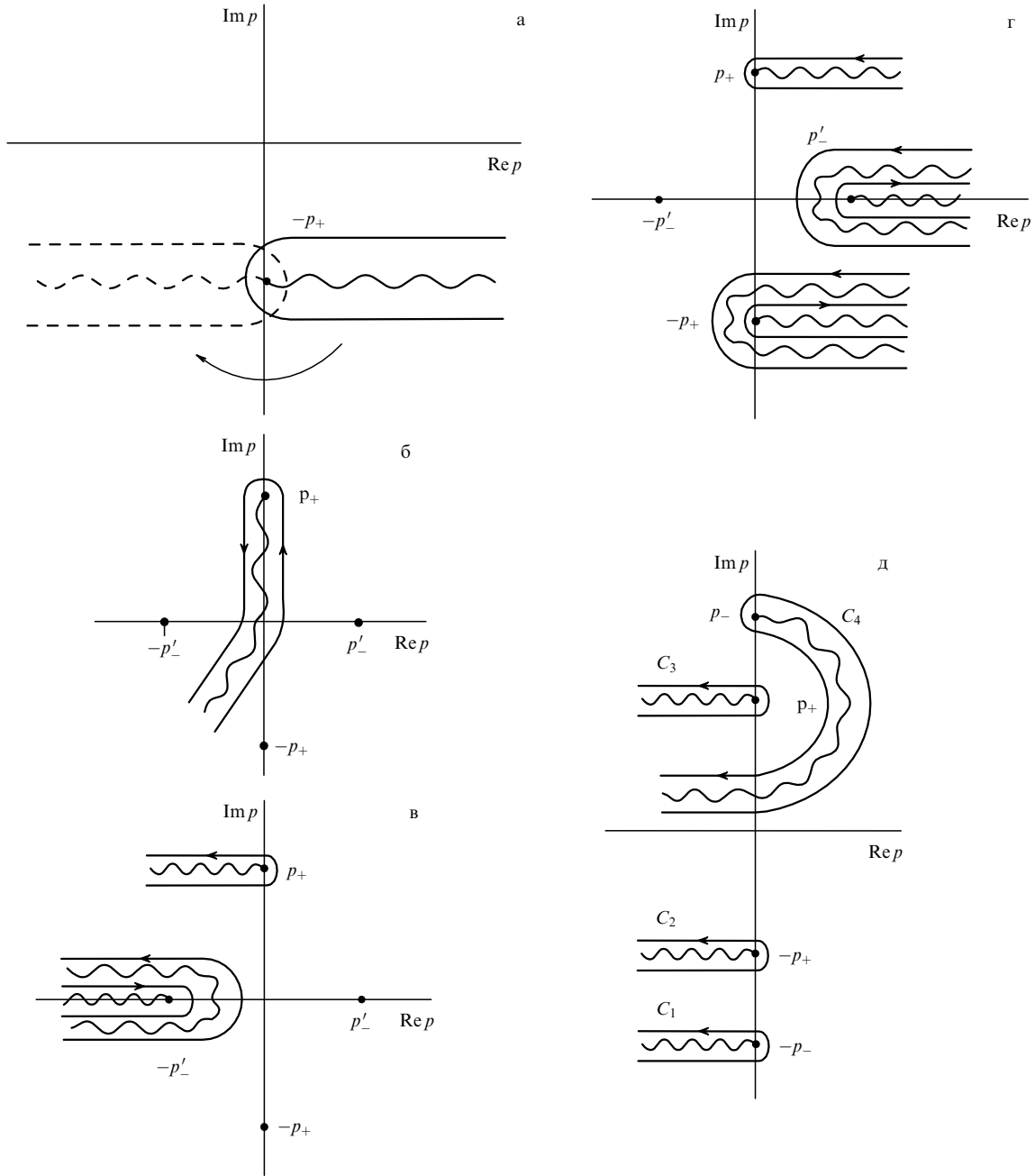


Рис. 20. Контуры интегрирования в (П1.1) для функции, определяемой (П2.1); $p_\sigma = i\varepsilon_{\sigma,c}^{1/2}$: (а) левополяризованная волна с $\omega > \omega_e$, падающая на КП со стороны большей плотности, сплошная кривая — $\xi < 0$, штриховая кривая — $\xi > 0$; (б) левополяризованная волна с $\omega > \omega_e$, падающая на КП со стороны меньшей плотности при $\xi > 0$; (в) деформированный контур, остальные условия те же, что и на рис. б; (г) $\xi < 0$, остальные условия те же, что и на рис. б, в, $p'_- = |\varepsilon_{-,c}|^{1/2}$; (д) волны с $\omega < \omega_e$ при $\xi > 0$, C_1, C_2 — падающие со стороны большей плотности правополяризованная и левополяризованная волны соответственно, C_3, C_4 — падающие со стороны меньшей плотности правополяризованная и левополяризованная волны соответственно.

удовлетворять уравнению

$$\left\{ (p^2 + \varepsilon_{+,c})(p^2 + \varepsilon_{-,c}) \frac{d}{dp} + \varepsilon_{\perp,c} L(p^2 + 1) [(\chi p + iN_\zeta)^2 + N_y^2] \right\} f(p) = 0,$$

решение которого имеет вид

$$f(p) = (p + i\varepsilon_{+,c}^{1/2})^{i\gamma_+^\perp/\pi} (p - i\varepsilon_{+,c}^{1/2})^{-i\gamma_+^\perp/\pi} \times (p + i\varepsilon_{-,c}^{1/2})^{i\gamma_-^\perp/\pi} (p - i\varepsilon_{-,c}^{1/2})^{-i\gamma_-^\perp/\pi} \exp(-\varepsilon_{\perp,c} L \chi^2 p). \quad (\text{П2.1})$$

где

$$\gamma_\sigma^{\uparrow,\downarrow} = \frac{1}{4} L \varepsilon_{\sigma,c}^{1/2} \pi [(\chi \varepsilon_{\sigma,c}^{1/2} \pm N_\zeta)^2 + N_y^2],$$

значки $\uparrow\downarrow$ имеют тот же смысл, что и в разделе 6 — характеризуют направление распространения колебаний.

Рассмотрим подробно более простой случай волн с $\omega > \omega_e$, когда к КП могут подходить лишь левополяризованные волны. Пусть волна падает на КП справа — со стороны большей плотности. В области слева

от КП должна распространяться прошедшая волна $\propto \exp(-i\varepsilon_{+,c}^{1/2}\xi)$. Соответствующий контур интегрирования изображен на рис. 20а. Асимптотика интеграла (П1.1) при $|\xi| \gg \varepsilon_{\sigma,c}^{-1/2}$, $|\varepsilon_{+,c}^{1/2} - \varepsilon_{-,c}^{1/2}|^{-1}$ определяется малой окрестностью точки $p = -i\varepsilon_{+,c}^{1/2}$, поэтому при его вычислении можно положить

$$f(p) = \text{const} (p + i\varepsilon_{+,c}^{1/2})^{i\gamma_+^{\perp}/\pi}. \quad (\text{П2.2})$$

В результате получаем

$$E_{\parallel}(\xi) \approx \text{const} \frac{2\pi i}{\Gamma(-i\gamma_+^{\perp}/\pi)} \xi^{-1-i\gamma_+^{\perp}/\pi} \exp(-i\varepsilon_{+,c}^{1/2}\xi). \quad (\text{П2.3})$$

Для продолжения решения на область $\xi > 0$ используем правило обхода Ландау. Согласно этому правилу продолжение должно осуществляться через нижнюю полуплоскость переменной ξ , и, следовательно, контур интегрирования должен поворачиваться по часовой стрелке, оставаясь в нижней полуплоскости переменной p (рис. 20а). В результате для $f(p)$ получаем то же самое выражение (П2.2), в котором $\arg(p + i\varepsilon_{+,c}^{1/2})$ уменьшается на π . Следовательно, в соответствии с результатами, приведенными в разделе 6, амплитуда падающей волны превышает амплитуду прошедшей в $\exp(\gamma_+^{\perp})$ раз, а отраженная волна отсутствует.

Контур интегрирования, соответствующий волнам, падающим со стороны меньшей плотности, изображен на рис. 20б. Такой выбор $E_{\parallel}(\xi)$, как мы увидим ниже, позволяет избежать в асимптотике $E_{\parallel}(\xi)$ выражений, экспоненциально возрастающих с удалением от КП. Контур при $\xi > 0$ удобно деформировать, как показано на рис. 20в. Асимптотика интеграла определяется двумя точками ветвления $p = i\varepsilon_{+,c}^{1/2}$, $|\varepsilon_{-,c}|^{1/2}$. Вклад первой дает выражение, описывающее волну, убегающую от КП, второй — стоячую волну, амплитуда которой спадает от данной поверхности,

$$\begin{aligned} E_{\parallel}(\xi) \approx & \frac{2\pi i}{\Gamma(-i\gamma_+^{\perp}/\pi)} \xi^{-1-i\gamma_+^{\perp}/\pi} \exp\left(-\frac{\gamma_+^{\perp}}{2}\right) \times \\ & \times (2\varepsilon_{+,c}^{1/2})^{i\gamma_+^{\perp}/\pi} \exp(i\varepsilon_{+,c}^{1/2}\xi) C_1 + \\ & + \frac{2\pi i}{\Gamma(-\gamma_-^{(1)}/\pi)} \xi^{-1-\gamma_-^{(1)}/\pi} \exp(-|\varepsilon_{-,c}|^{1/2}\xi) C_2, \end{aligned}$$

где

$$C_1 = (i\varepsilon_{+,c}^{1/2} - |\varepsilon_{-,c}|^{1/2})^{-\gamma_-^{(1)}/\pi} (i\varepsilon_{+,c}^{1/2} + |\varepsilon_{-,c}|^{1/2})^{\gamma_-^{(2)}/\pi},$$

$$\gamma_-^{(1,2)} = \frac{1}{4} L\pi |\varepsilon_{-,c}|^{1/2} [(i\chi |\varepsilon_{-,c}|^{1/2} \mp N_c)^2 + N_y^2],$$

C_2 — несущественная константа, определяющая амплитуду стоячей волны.

Продолжая решение на область $\xi < 0$, получаем контуры интегрирования, изображенные на рис. 20г. Учитывая, что на внутреннем контуре вблизи точки $p = i\varepsilon_{+,c}^{1/2}$ выполняется равенство $\arg(p - i\varepsilon_{+,c}^{1/2}) \approx -\pi/2$, а на внешнем — $\arg(p - i\varepsilon_{+,c}^{1/2}) \approx 3\pi/2$, получаем

$$\begin{aligned} E_{\parallel}(\xi) \approx & \frac{2\pi i}{\Gamma(-i\gamma_+^{\perp}/\pi)} \xi^{-1+i\gamma_+^{\perp}/\pi} \exp\left(-\frac{\gamma_+^{\perp}}{2}\right) \times \\ & \times (2\varepsilon_{+,c}^{1/2})^{i\gamma_+^{\perp}/\pi} \exp(i\varepsilon_{+,c}^{1/2}\xi) C_1 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \frac{2\pi i}{\Gamma(-i\gamma_+^{\perp}/\pi)} \xi^{-1-i\gamma_+^{\perp}/\pi} \exp\left(-\frac{\gamma_+^{\perp}}{2}\right) \times \\ & \times (2\varepsilon_{+,c}^{1/2})^{i\gamma_+^{\perp}/\pi} [\exp(2\gamma_+^{\perp}) - 1] \exp(-i\varepsilon_{+,c}^{1/2}\xi) C_1 + \\ & + \frac{2\pi i}{\Gamma(\gamma_-^{(2)}/\pi)} \xi^{-1-i\gamma_-^{(2)}/\pi} \exp(-|\varepsilon_{-,c}|^{1/2}\xi) C_3. \end{aligned}$$

В последнем выражении два первых слагаемых описывают циркулярно поляризованную волну, падающую на КП и отраженную от нее, третье слагаемое — поверхностную волну, экспоненциально спадающую от КП.

Чтобы найти коэффициент отражения необходимо сопоставить выражения для потоков энергии на достаточном удалении от КП. Используя выражение (П1.6) и учитывая, что в соответствии с правилом обхода Ландау при $\xi < 0$ необходимо считать $\arg \xi = -\pi$, находим, что коэффициенты отражения и прохождения совпадают с приведенными в разделе 6.

Анализ волн с $\omega < \omega_e$ вполне аналогичен проведенному выше и также подтверждает результаты раздела 6. Здесь мы приведем лишь контуры интегрирования, использованные нами для нахождения четырех линейно независимых решений, описывающих циркулярно поляризованные волны, падающие на КП как со стороны большей, так и со стороны меньшей плотности (рис. 20д). Отметим особый вид контура C_4 , описывающего падение правополяризованной волны на КП со стороны меньшей плотности. При таком его выборе в области $\xi < 0$ будут отсутствовать выражения, соответствующие падающей левополяризованной волне.

Список литературы

1. Гинзбург В Л *Распространение электромагнитных волн в плазме* (М.: Наука, 1967)
2. Железняков В В *Радиоизлучение Солнца и планет* (М.: Наука, 1964)
3. Железняков В В *Электромагнитные волны в космической плазме* (М.: Наука, 1977)
4. Дэвис К *Радиоволны в ионосфере* (М.: Мир, 1973)
5. Roeverlein H Z. *Phys.* **2** 152 (1950)
6. Ginzburg V J. *Phys. USSR* **7** 289 (1943)
7. Preinhalter J, Kopecky V J. *Plasma Phys.* **10** 1 (1973)
8. Жаров А А *Физика плазмы* **10** 1109 (1984)
9. Mjølhus J J. *Plasma Phys.* **31** 7 (1984)
10. Токман М Д *Физика плазмы* **11** 1205 (1985)
11. Тимофеев А В *Физика плазмы* **26** 874 (2000)
12. Тимофеев А В *Физика плазмы* **27** 978 (2001)
13. Жаров А А, Сергеев М Д, Токман М Д *Физика плазмы* **12** 1074 (1986)
14. Тимофеев А В *Физика плазмы* **27** 1046 (2001)
15. Тимофеев А В *Физика плазмы* **29** 742 (2003)
16. Цытович В Н *Нелинейные эффекты в плазме* (М.: Наука, 1967)
17. Тимофеев А В *Физика плазмы* **27** 282 (2001)
18. Тимофеев А В *Резонансные явления в колебаниях плазмы* (М.: Физматлит, 2000)
19. Стикс Т *Теория плазменных волн* (М.: Атомиздат, 1965)
20. Chen F F *Phys. Plasmas* **3** 1783 (1996)
21. Эллис В, Буксбаум С, Берс А *Волны в анизотропной плазме* (М.: Атомиздат, 1966)
22. Booker H G *Philos. Trans. R. Soc. London Ser. A* **237** 411 (1939)
23. Melrose D B *Aust. J. Phys.* **33** 121 (1980)
24. Budden K G J. *Atmos. Terr. Phys.* **42** 287 (1980)
25. Laqua H P et al. *Phys. Rev. Lett.* **78** 3467 (1997)
26. Laqua H P, Hartfuß H J, W7-AS Team *Phys. Rev. Lett.* **81** 2060 (1998)

27. Laqua H P, the W7-AS Team, the ECRH Group *Plasma Phys. Control. Fusion* **41** A273 (1999)
28. Barston E M *Ann. Phys. (New York)* **29** 282 (1964)
29. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами* (Под ред. М Абрамовица, И Стиган) (М.: Наука, 1979)
30. Пилия А Д, Федоров В И, в сб. *Высокочастотный нагрев плазмы: Материалы Всесоюз. совещ.* (Под ред. А Г Литвака) (Горький: ИПФ, 1983) с. 281
31. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Гидродинамика* (М.: Наука, 1986)
32. Тимофеев А В *Физика плазмы* **27** 131 (2001)
33. Тимофеев А В *Физика плазмы* **28** 984 (2002)
34. Timofeev A V (unpublished)
35. Смолякова О Б, Токман М Д *Физика плазмы* **26** 833 (2000)
36. Nagasaki K, Yanagi N *Plasma Phys. Control. Fusion* **44** 409 (2002)

Electromagnetic waves in a magnetized plasma near the critical surface

A.V. Timofeev

*Institute of Nuclear Fusion, Russian Research Centre "Kurchatov Institute",
pl. Kurchatova 1, 123182 Moscow, Russian Federation
Tel. (7-095) 196-91 83
E-mail: avtim@nfi.kiae.ru*

Electromagnetic waves in a plasma in a magnetic field give rise to enhanced refraction, produce a change in polarization, and cause an electromagnetic energy to flow from one wave mode to another when propagating near the critical surface (CS), the one where the electron Langmuir frequency is equal to the wave frequency. A simple unified model of all phenomena taking place near the CS is proposed. These phenomena are due to electromagnetic waves interacting with electron Langmuir oscillations, which are localized at the CS in a cold plasma. This interaction manifests itself most strikingly in electron Langmuir oscillations energy escaping directly to vacuum in the form of electromagnetic radiation.

PACS numbers: 41.20.Jb, 52.35.Hr, 52.55.Hc

Bibliography — 36 references

Received 21 July 2003, revised 9 December 2003