

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Что такое левые среды и чем они интересны?

К.Ю. Блюх, Ю.П. Блюх

В работе представлен обзор интенсивно обсуждаемых в последние годы идей, связанных с распространением и преломлением волн в средах с одновременно отрицательными магнитной и диэлектрической проницаемостями. Рассмотрена критика отрицательного преломления в его связи с принципом причинности. Преломление лучей на границе левой среды проанализировано из исходных волновых уравнений. Описана физика идеальной линзы из плоского слоя левого материала.

PACS numbers: 41.20.Jb, 42.15.Dp, 78.20.Ci

Содержание

1. Введение (439).
 2. Среда с отрицательным показателем преломления (439).
 3. Распространение и преломление волн в левых средах (440).
 4. Отрицательное преломление и принцип причинности (442).
 5. Волновая и геометрическая оптика левой среды (442).
 6. Идеальная линза (444).
 7. Заключение (447).
- Список литературы (447).

1. Введение

Название "левые среды" было дано в работе В.Г. Веселаго [1] 1967 г. средам с отрицательным показателем преломления¹. В англоязычной литературе принято название Left-Handed Medium (LHM). В апреле 2003 г. во введении к специальному выпуску *Optical Express* [3] J.V. Pendry приводит таблицу (рис. 1), иллюстрирующую изменение со временем количества публикаций, связанных с левыми средами. Толчком, вызвавшим резкий всплеск работ, послужило создание в конце 90-х годов искусственных сред с отрицательным показателем преломления и их первые экспериментальные исследования. Чем же настолько интересны эти среды, что многие физики бросили свои текущие дела и занялись их изучением? На этот вопрос мы постараемся ответить в предлагаемой работе.

¹ Понятие отрицательного показателя преломления также впервые введено В.Г. Веселаго [2].

К.Ю. Блюх. Радиоастрономический институт НАН Украины, 61002 Харьков, Украина
E-mail: kostya@bliokh.kharkiv.com
Ю.П. Блюх. Department of Physics, Technion, 32000 Haifa, Israel
E-mail: bliokh@physics.technion.ac.il

Статья поступила 14 апреля 2003 г.,
после доработки 24 февраля 2004 г.

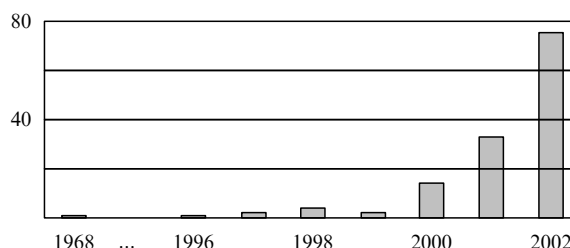


Рис. 1. Количество публикаций о средах с отрицательным показателем преломления (из [3]).

2. Среда с отрицательным показателем преломления

Знак показателя преломления среды напрямую связан с тем, параллельны или антипараллельны фазовая и групповая скорости волн в этой среде. В первом случае говорят о положительной, а во втором — об отрицательной групповой скорости. Здесь, нам кажется, уместно процитировать работу Л.И. Мандельштама 1945 г. [4].

"Может быть, стоит подчеркнуть то обстоятельство, что от знака групповой скорости существенно зависит характер таких явлений, при разборе которых о групповой скорости обыкновенно вообще не упоминают."

Я имею в виду, например, отражение и преломление плоской волны на плоскости раздела двух неабсорбирующих сред.

При выводе соответствующих соотношений — направления преломленного луча, величины амплитуд отраженной и преломленной волн — делается большей частью неупомянутое предположение, что направление фазовой скорости преломленной волны образует острый угол с нормалью к поверхности раздела, обращенной внутрь "второй" среды.

Между тем, по смыслу физической задачи это предположение должно быть отнесено к групповой скорости (к скорости распространения энергии). Правильный результат получается только потому, что, как упомянуто выше, мы в реальных случаях имеем дело с положительной групповой скоростью.

При отрицательной же групповой скорости требование ухода энергии от поверхности раздела равносильно требованию набегающей фазы на этой поверхности. В этом случае преломленный луч расположен не как обычно, а по направлению, симметричному относительно нормали к обычному направлению".

В этой же работе Л.И. Мандельштам указывает, что пространственно-периодическая среда (в данном случае имелась в виду кристаллическая решетка) является примером среды, показатель преломления которой в некотором диапазоне частот может быть отрицательным. Искусственные среды, созданные в конце 90-х годов [5, 6] и вызвавшие резкий всплеск интереса к левым средам, также являются пространственно-периодическими. Эти среды обладают отрицательным показателем преломления для волн СВЧ-диапазона с частотами порядка 10 ГГц.

В СВЧ-электронике периодические волноведущие системы — замедляющие структуры — хорошо и давно известны. Хорошо известны и волны с отрицательным показателем преломления: это обратные волны, или волны с отрицательной дисперсией. Чем же отличаются "старые" замедляющие структуры от "новых", левых? Принципиальное отличие заключается в том, что традиционные замедляющие структуры являются *одномерными*, а левые среды — *многомерными* (двух- или трехмерными) средами. Поэтому такое многомерное явление, как преломление волны на границе раздела двух сред, отсутствует в замедляющих структурах.

Исследования многомерных периодических структур начались давно (см. [7–9] и цитированную там литературу), однако в работах [5, 6] ссылки на предшественников отсутствуют. Возможно, это связано либо с незнанием русскоязычной литературы, либо же с тем, что авторы подошли к этой задаче совсем с другой стороны. В теоретической работе [5] рассматривается возможность создания периодической структуры, на поверхности которой могли бы существовать низкочастотные слаботухающие волны, аналогичные плазмонам — коллективным волнам в металлах. Для этого диэлектрическая проницаемость среды должна быть отрицательна. Авторы работы [5] показали, что периодическая решетка из тонких проволок обладает малым затуханием и отрицательной эффективной диэлектрической проницаемостью $\epsilon < 0$ для электромагнитных волн с частотой порядка 1–10 ГГц. Позже [6] была предложена периодическая решетка из кольцевых резонаторов, обладающая в этом же частотном диапазоне отрицательной магнитной восприимчивостью $\mu < 0$. Объединение двух решеток в одну и привело к созданию левой среды, обладающей отрицательным показателем преломления [10, 11].

Надо отдать должное зарубежным исследователям: они сумели очень быстро "раскрутить" свой успех как публикациями в престижных физических журналах, так и серией статей в научно-популярных журналах и даже газетных публикациях². Но оставим в стороне вопросы престижа и вернемся к физике.

Другим примером [12] левой среды являются фотонные кристаллы (photonic crystals), представляющие собой

среду с пространственно-периодическим показателем преломления $n(\mathbf{r})$.

Таким образом, левые среды представляют собой двух- или трехмерные периодические структуры. В таких анизотропных средах фазовая и групповая скорости волны могут быть направлены под разными углами друг к другу. Исключением являются только такие пространственно-периодические среды, которые в *длинноволновом* приближении, когда длина волны λ велика по сравнению с периодом среды d , $\lambda \gg d$, ведут себя как *изотропные* среды³. В этом случае можно характеризовать среду эффективными электрической и магнитной проницаемостями ϵ и μ , а волны разделить на прямые и обратные. В работе [12] показано, что в фотонных кристаллах, модуляция параметров которых достаточно велика, могут существовать такие частотные интервалы вблизи зон непропускания, в которых анизотропия среды становится очень слабой и ею можно пренебречь.

3. Распространение и преломление волн в левых средах

Рассмотрим плоскую электромагнитную волну, распространяющуюся в среде, характеризуемой скалярными диэлектрической и магнитной проницаемостями ϵ и μ . Если $\epsilon > 0$ и $\mu > 0$, то электрическое поле $\mathbf{E}$, магнитное поле $\mathbf{H}$ и волновой вектор $\mathbf{k}$ образуют *правую* тройку векторов, а при $\epsilon < 0$ и $\mu < 0$ — *левую* тройку. Отсюда и произошло разделение сред на правые и левые [1]. Поток энергии, переносимой волной, определяется вектором Пойнтинга

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}],$$

который всегда образует правую тройку с векторами $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Поэтому в правых средах групповая и фазовая скорости направлены в одну сторону (положительная групповая скорость), а в левых средах — противоположно друг к другу (отрицательная групповая скорость).

Необычно выглядит преломление плоской волны на границе раздела левых и правых сред. Для определенности рассмотрим волну, падающую из обычной, правой среды (далее всюду предполагается, что это вакуум) на плоскую границу с левой средой. Групповая скорость преломленной волны направлена от границы раздела, а фазовая скорость — к границе раздела. Это означает, что фазовые скорости обеих волн направлены к границе и, следовательно, фазы обеих волн набегают на границу раздела, что возможно только, если направления распространения волн (групповые скорости) лежат *по одну сторону от нормали* к поверхности раздела сред (рис. 2). Другими словами, показатель преломления n , фигурирующий в законе Снеллиуса, *отрицателен* для левой среды, $n = -\sqrt{\epsilon\mu}$.

Из того факта, что падающая и преломленная волны лежат по одну сторону от нормали к поверхности раздела сред, следует, что из левых материалов можно изготавливать весьма необычные оптические элементы.

² С большой и постоянно обновляемой подборкой ссылок можно ознакомиться на сайте http://physics.ucsd.edu/~drs/left_home.htm.

³ Пока статья готовилась к публикации, появилась работа [13], в которой преломление света на границе двух анизотропных сред с различной ориентацией осей ошибочно трактуется как проявление отрицательного показателя преломления (подробнее см. [14]).

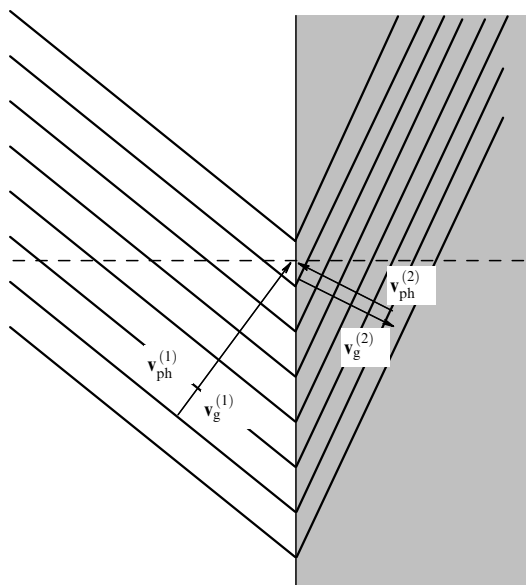


Рис. 2. Преломление плоской волны.

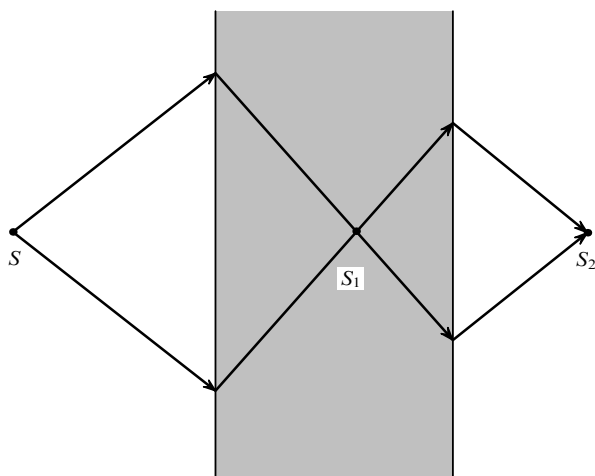


Рис. 3. Плоско-параллельная пластина из левого материала действует как собирающая линза.

Так, например, плоская пластинка из левого материала является собирающей линзой, что легко видеть из построения хода лучей на рис. 3. Такая линза обладает удивительным свойством — у нее отсутствует фокальная плоскость. Это означает, что линза создает *объемное* изображение предмета, что делает ее похожей на зеркало. Но, в отличие от зеркала, создаваемое изображение действительно, что открывает новые возможности для развития трехмерной фотографии. Правда, у такой плоской линзы есть и недостаток: она создает изображения предметов, которые расположены достаточно близко к ее поверхности. Так, например, линза из идеальной левой среды, у которой $\epsilon = \mu = -1$, создает действительное изображение всех точек предмета, расположенных в слое, ширина которого равна толщине пластины (рис. 4).

Мы не случайно назвали среду с $\epsilon = \mu = -1$ идеальной, поскольку она обладает рядом добавочных свойств. Во-первых, идеальная среда имеет нулевой коэффициент отражения, вся энергия падающей волны переходит в

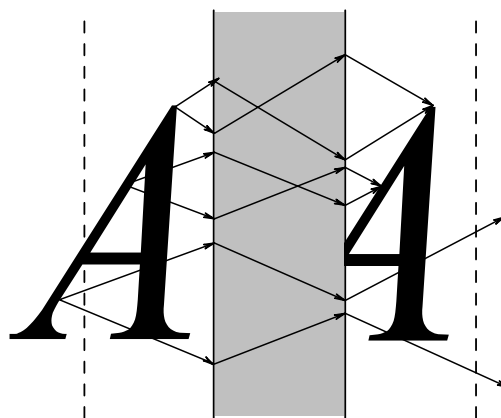


Рис. 4. Объемное изображение, получаемое с помощью плоско-параллельной пластины из левого материала.

преломленную волну. Во-вторых, плоско-параллельная пластина из идеального материала создает идеальное изображение, поскольку набег фазы по *любым* траекториям между объектом и изображением равен нулю. Это легко понять, если заметить, что любой луч между объектом и изображением половину пути проходит в обычной, а половину — в идеальной левой среде. Поскольку фазовые скорости в этих средах равны и противоположно направлены, то набег фаз вдоль участков траектории луча, расположенных в разных средах, компенсируют друг друга *точно*.

Но на этом удивительные свойства идеальной левой среды не заканчиваются. В 2000 г. J.B. Pendry опубликовал работу "Negative refraction makes a perfect lens" [15]. Под "совершенной" здесь понимается такая линза, разрешающая способность которой *превышает предел, обусловленный волновой природой света*. Чтобы понять, как, по мнению автора, это происходит, рассмотрим монохроматический источник света, расположенный в плоскости, параллельной границе пластины из идеального левого материала. Пусть распределение поля (например, магнитного) в плоскости источника задается функцией $H_0(x)$, которую представим в виде пространственного преобразования Фурье:

$$H_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} H_k(k_{\perp}) \exp(ik_{\perp}x) dk_{\perp}. \quad (1)$$

Поле волны, распространяющейся вдоль оси z от источника в сторону пластины, представимо в виде

$$H(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} H_k(k_{\perp}) \exp(ik_{\perp}x) \exp\left(i\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_{\perp}^2} z\right) dk_{\perp}. \quad (2)$$

Из представления (2) видно, что фурье-компоненты с $k_{\perp} > \omega/c$ экспоненциально быстро затухают при удалении от источника (нераспространяющиеся волны), и ими обычно пренебрегают. Отбрасывание гармоник с $k_{\perp} > \omega/c$ означает потерю информации о деталях изображения, меньших длины волны $\lambda = 2\pi c/\omega$.

В работе [15] обращается внимание на то, что экспоненциальное затухание нераспространяющихся волн затрагивает только их амплитуду, но не фазу. Поэтому, усилив эти волны, можно полностью восстановить информацию о пространственной структуре источника.

Таким "совершенным" усилителем, увеличивающим амплитуды нераспространяющихся волн ровно настолько, насколько они затухли, является, как показано в [15], плоская пластина из идеального левого материала.

Эти необычные (и весьма заманчивые с практической точки зрения) свойства левых материалов и вызвали бурный всплеск публикаций в последние годы. Но далеко не все участники дискуссии на страницах журналов согласны с оптимистичными выводами, кратко изложенными в этом разделе.

4. Отрицательное преломление и принцип причинности

В 2002 г. в *Physical Review Letters* появилась статья, озаглавленная "Wave refraction in negative-index media: always positive and very inhomogeneous" [16]. В ней авторы утверждают, что отрицательное преломление противоречит принципу причинности, а поэтому не существует. Аргументацию авторов проще всего пояснить с помощью рис. 5.

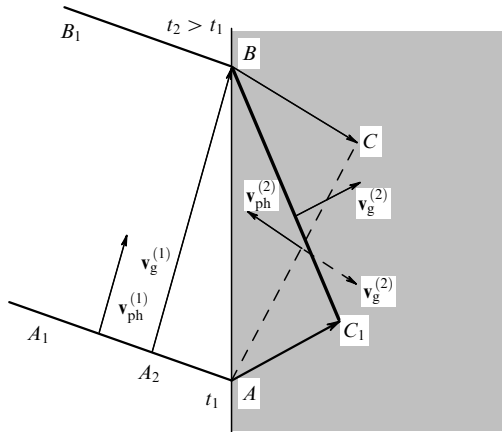


Рис. 5. Отрицательная рефракция и принцип причинности.

Пусть на границу раздела вакуума (слева) и левой изотропной среды (справа) падает волновой пакет. Групповая $\mathbf{v}_g^{(1)}$ и фазовая $\mathbf{v}_{ph}^{(1)}$ скорости пакета в вакууме совпадают. Пусть в момент времени t_1 фронт пакета расположен вдоль линии AA_1 , а в момент времени $t_2 > t_1$ — вдоль линии BB_1 . В левой среде фазовая скорость преломленной волны $\mathbf{v}_{ph}^{(2)}$ направлена к границе раздела. Если бы, рассуждают авторы, групповая скорость $\mathbf{v}_g^{(2)}$ преломленной волны была направлена против фазовой скорости, то фронт преломленного волнового пакета был бы ориентирован вдоль линии AC (штриховая линия на рис. 5) перпендикулярно направлению групповой скорости. Поскольку время, необходимое для перемещения фронта пакета по пути $AA_1 \rightarrow BB_1 \rightarrow AC$, одинаково для всех точек фронта, то, как следует из рис. 5, сигнал по пути A_2BC должен двигаться с бесконечной скоростью, что нарушает принцип причинности. Следовательно, заключают авторы, фронт пакета преломленной волны должен располагаться так, как это изображено жирной линией BC_1 , а групповая скорость должна быть перпендикулярна этой линии. Следует, утверждают авторы, различать фазовый и групповой показатели преломления. Первый описывает изменение

направления фазовой скорости, и он действительно отрицателен для левых сред, а групповой, описывающий направление распространения энергии, положителен. Поскольку лучевая диаграмма, используемая в геометрической оптике (как, например, на рис. 3), должна указывать на направление распространения энергии, а не фазы, то ни о каких фокусирующих свойствах пластины из левого материала не может быть и речи, не говоря уже о создании "совершенного" изображения.

Далее, сильное различие между фазовой и групповой скоростями преломленной волны означает наличие сильной дисперсии, поэтому волновой пакет, проходя через границу раздела двух сред, "расползается", его амплитуда быстро уменьшается, и вместо фокусировки мы имеем дело с затуханием волны.

Полное описание позиции авторов работы [16] с красочными иллюстрациями и фильмами можно посмотреть по адресу <http://www.utexas.edu/research/cemd/nim/>.

5. Волновая и геометрическая оптика левой среды

В приведенном выше доказательстве отсутствия "настоящей" (т.е. групповой) отрицательной рефракции обращают на себя внимание два обстоятельства. Во-первых, утверждается, что групповая и фазовая скорости в изотропной среде могут быть неколлинеарны. Во-вторых, для исследования, является оптическая система (в данном случае плоская пластина) фокусирующим элементом или нет, не требуется рассматривать многочастотный волновой пакет, и дисперсия среды не имеет никакого отношения к этому вопросу.

Чтобы выявить источник ошибки работы [16], рассмотрим в рамках волнового уравнения задачу о преломлении узкого монохроматического светового луча. Такой подход позволит нам, во-первых, обойтись без введения понятия групповой скорости как направления распространения энергии (поскольку направление луча и направление распространения энергии, очевидно, совпадают). Во-вторых, это позволит нам определить, применимо приближение геометрической оптики к левым средам или нет.

Выберем в качестве падающей волны следующее точное решение двумерных уравнений Максвелла в вакууме, представленное в виде интеграла Фурье:

$$\begin{aligned}
 E_x &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(k_{\perp} a)}{k_{\perp}} \frac{\sqrt{k_0^2 - k_{\perp}^2}}{k_0} \times \\
 &\times \exp\left(ik_{\perp} x + i\sqrt{k_0^2 - k_{\perp}^2} z\right) dk_{\perp}, \\
 E_z &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(k_{\perp} a)}{k_0} \exp\left(ik_{\perp} x + i\sqrt{k_0^2 - k_{\perp}^2} z\right) dk_{\perp}, \quad (3) \\
 H_y &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(k_{\perp} a)}{k_{\perp}} \exp\left(ik_{\perp} x + i\sqrt{k_0^2 - k_{\perp}^2} z\right) dk_{\perp}.
 \end{aligned}$$

Здесь $k_0 = \omega/c$. Двумерный случай рассматривается для упрощения записи формул. Электрическое и магнитное поля в (3) образуют монохроматическую волну (множитель $\exp(-i\omega t)$ всюду опущен), источник которой расположен в плоскости $z = 0$ и характеризуется распределе-

нием магнитного поля в нем⁴:

$$H_0(x) \equiv H_y(x, 0) = 1 \quad \text{при} \quad |x| < a,$$

$$H_0(x) = 0 \quad \text{при} \quad |x| > a.$$

Параметр a — размер источника в направлении оси x . Такая волна образует пучок, распространяющийся вдоль оси z . Угол расходимости пучка $\alpha \sim (k_0 a)^{-1}$ мал, если длина волны мала по сравнению с размером источника: $k_0 a \gg 1$. Далее будем предполагать это условие выполненным.

В произвольной точке (x, z) поле (3) состоит из распространяющихся ($|k_\perp| < k_0$) и затухающих ($|k_\perp| > k_0$) плоских волн. На большом расстоянии от источника затухающими волнами можно пренебречь (вопрос о возможности усиления этих волн в левой среде обсуждается ниже), и интегралы в (3) следует вычислять в пределах $-k_0 < k_\perp < k_0$. Для сокращения записи далее пределы интегрирования опущены.

Пусть плоская граница, отделяющая вакуум от среды, пересекает ось z в точке $z = z_0$ и нормаль к поверхности образует угол φ с осью z (рис. 6). Введем новые координаты x', z' с началом в точке $(0, z_0)$. Ось x' направлена вдоль границы, а ось z' — вдоль внутренней нормали. На границе $z' = 0$ магнитное поле падающей волны может быть записано в виде

$$H_y^{(\text{in})} = \frac{1}{\pi} \int \frac{\sqrt{k_0^2 - k_\perp'^2} \sin[k_\perp(k'_\perp)a]}{\sqrt{k_0^2 - k_\perp'^2}} \times$$

$$\times \exp \left[i k'_\perp x' + i z_0 \sqrt{k_0^2 - k_\perp'^2} \right] dk'_\perp, \quad (4)$$

где

$$k_\perp(k'_\perp) = k'_\perp \cos \varphi - \sin \varphi \sqrt{k_0^2 - k_\perp'^2}.$$

Фурье-компоненты электрического поля выражаются через компоненты магнитного поля, поэтому здесь и далее мы их не будем выписывать.

Используя граничные условия

$$E_t^{(\text{in})}(k'_\perp) + E_t^{(\text{ref})}(k'_\perp) = E_t^{(\text{tr})}(k'_\perp),$$

$$E_n^{(\text{in})}(k'_\perp) + E_n^{(\text{ref})}(k'_\perp) = \varepsilon E_n^{(\text{tr})}(k'_\perp),$$

$$H_t^{(\text{in})}(k'_\perp) + H_t^{(\text{ref})}(k'_\perp) = H_t^{(\text{tr})}(k'_\perp)$$

для фурье-компонент тангенциальных и нормальных проекций полей, можно вычислить амплитуды фурье-компонент отраженной (индекс ref) и преломленной (индекс tr) волн на границе и, следовательно, в любой точке пространства x', z' . Это стандартная процедура, и специфика левой среды состоит только в необычном выборе знака нормальной компоненты

$$k'_\parallel = \pm \sqrt{k_0^2 \varepsilon \mu - k_\perp'^2}$$

волнового вектора преломленной волны. Знак, как отмечалось выше, должен быть выбран таким образом, чтобы поток энергии в преломленной волне был направ-

лен от границы. В левой среде волновой вектор, электрическое и магнитное поля образуют левую тройку, поэтому $k'_\parallel < 0$.

Учитывая, что в произвольной точке среды (x', z') каждая фурье-компонента отличается от своего значения на границе множителем

$$\exp \left(i \operatorname{sgn} \varepsilon \sqrt{k_0^2 \varepsilon \mu - k_\perp'^2} z' \right),$$

легко получить следующее выражение для магнитного поля преломленной волны:

$$H_t^{(\text{tr})} = \frac{1}{\pi} \int f(k'_\perp) \frac{\sin[k_\perp(k'_\perp)a]}{k_\perp(k'_\perp)} \exp[i\Phi(k'_\perp)] dk'_\perp, \quad (5)$$

где

$$f(k'_\perp) = \frac{2|\varepsilon|(k'_\perp \sin \varphi + \sqrt{k_0^2 - k_\perp'^2} \cos \varphi)}{\sqrt{k_0^2 \varepsilon \mu - k_\perp'^2} + |\varepsilon| \sqrt{k_0^2 - k_\perp'^2}},$$

$$\Phi(k'_\perp) = z_0 \left(k'_\perp \sin \varphi + \sqrt{k_0^2 - k_\perp'^2} \cos \varphi \right) +$$

$$+ k'_\perp x' + \operatorname{sgn} \varepsilon \sqrt{k_0^2 \varepsilon \mu - k_\perp'^2} z'.$$

Выражение (5) справедливо как для правых, так и для левых сред. Все отличие содержится в множителе $\operatorname{sgn} \varepsilon$ в фазе $\Phi(k'_\perp)$.

Проанализируем формулу (5). В простейшем случае идеальной левой среды ($\varepsilon = \mu = -1$) и $\varphi = 0$ имеем

$$H_t^{(\text{tr})}(x, z') = H_y(x, z_0 - z').$$

Это означает, что после пересечения границы расходящийся волновой пучок трансформируется в сходящийся пучок и восстанавливает изображение источника в плоскости $z = 2z_0$. В общем случае амплитуда магнитного поля достигает своего максимума, когда стационарная точка k_s , определяемая условием $d\Phi/dk'_\perp|_{k'_\perp=k_s} = 0$, совпадает с точкой $k_\perp(k'_\perp) = 0$, где максимальна функция $\sin(k_\perp a)/k_\perp$, т.е. при выполнении условия

$$k_\perp(k_s) = 0.$$

Это условие выполняется на линии

$$\frac{x'}{z'} \equiv \tan \varphi' = \frac{\operatorname{sgn} \varepsilon \sin \varphi}{\sqrt{\varepsilon \mu - \sin^2 \varphi}},$$

которую естественно считать центральным лучом преломленного волнового пучка. Амплитуда волны и, следовательно, поток энергии максимальны вдоль этого направления, поэтому и групповая скорость направлена вдоль него. Нетрудно получить, что углы φ и φ' связаны законом преломления Снеллиуса

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \varphi'} = \operatorname{sgn} \varepsilon \sqrt{\varepsilon \mu}, \quad (6)$$

где знак ε указывает, лежат падающий и преломленный лучи по одну сторону нормали к границе или нет. Можно также увидеть, что

$$\tan \varphi' = \frac{k'_\perp}{k'_\parallel} = \frac{\operatorname{sgn} \varepsilon k'_\perp}{\sqrt{\varepsilon \mu k_0^2 - k_\perp'^2}},$$

⁴ Такое граничное условие использовалось Кирхгофом при решении задачи дифракции на щели.

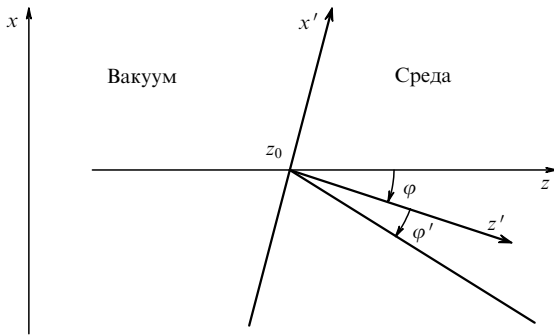


Рис. 6.

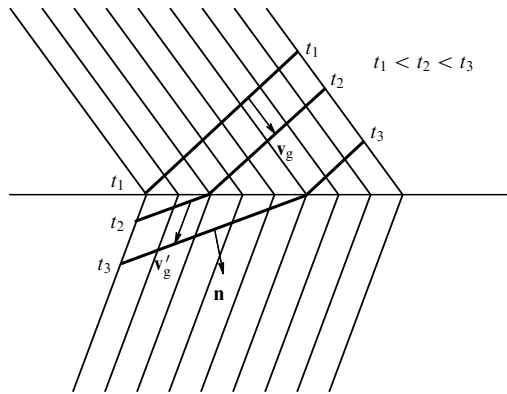


Рис. 7. Изменение формы волнового пакета на границе с левой средой.

т.е. закон преломления един как для групповой, так и для фазовой скоростей.

Таким образом, *точное* решение уравнений Максвелла показывает, что нет различия между фазовым и групповым показателями преломления, и показатель преломления отрицателен для левой среды.

Рассмотрим теперь противоречие между точными решениями уравнений Максвелла и содержащимся в работе [16] утверждением, что "причинность и конечная скорость распространения сигнала запрещают отрицательную рефракцию на границе с любой средой, включая и левую". Для этого вернемся к изображенной на рис. 6 картине преломления волнового пакета, но уже не будем ставить под сомнение отрицательную рефракцию. На рисунке 7 изображены позиции волнового пакета в три последовательных момента времени $t_1 < t_2 < t_3$, что позволяет реконструировать форму пакета в среде. Действительно, форма фронта преломленного пакета совпадает с изображенной на рис. 5 линией BC_1 , но нормаль к фронту в [16] ошибочно идентифицирована с направлением групповой скорости. Отсюда и ошибочный вывод, что фазовая и групповая скорости в левой среде неколлинеарны. На самом деле при пересечении границы с левой средой меняется форма пакета: "прямой" пакет превращается в "косой" (в работе [17] такое движение пакета названо *stab-like motion*). Естественно, никакого нарушения причинности не происходит.

В этом разделе мы выбрали в качестве тестового решения уравнений Максвелла узкий волновой пучок исходя только из двух целей: во-первых, чтобы разоблачить в парадоксе статьи [16] без привлечения понятия

групповой скорости и, во-вторых, чтобы формально показать применимость приближения геометрической оптики (понятия лучей) и для левых сред. На самом деле мы нигде не воспользовались неравенством $k_0 a \gg 1$, поэтому выписанные решения годятся и для описания других ситуаций.

В заключение заметим, что в ответ на работу [16] появился целый ряд статей, в которых авторы с помощью либо аналитических [17, 18], либо численных методов [19, 20] приходят к такому же выводу, который сформулирован в данном разделе. Однако во всех этих работах рассматривается *немонохроматическая* волна, что, на наш взгляд, совершенно не оправдано для решения данной задачи и может создать ошибочное впечатление, что методы традиционной оптики, рассматривающей *немонохроматичность* только как источник хроматической аберрации, неприменимы для левых сред.

6. Идеальная линза

Восстановление изображения источника внутри левой среды в простейшем случае ($\varepsilon = \mu = -1$, плоский источник, расположенный параллельно границе раздела сред) мы уже рассмотрели при анализе выражения (5). Эта же формула позволяет рассмотреть и более общий случай произвольной взаимной ориентации источника и границы. Выразив $k'_\perp$ через $k_\perp$, запишем (5) в виде

$$H_t^{(tr)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(k_\perp a)}{k_\perp} \exp[i\Phi(k_\perp)] dk_\perp, \quad (7)$$

где

$$\Phi(k_\perp) = k_\perp(x' \cos \varphi + z' \sin \varphi) + \sqrt{k_0^2 - k_\perp^2}(z_0 + x' \sin \varphi - z' \cos \varphi).$$

На линии $z_0 = z' \cos \varphi + x' \sin \varphi$ поле, задаваемое выражением (7), имеет тот же вид, что и поле источника $H_0(x)$:

$$H_t^{(tr)}\left(x', z' = \frac{z_0}{\cos \varphi} + x' \tan \varphi\right) = H_0\left(z_0 \tan \varphi + \frac{x'}{\cos \varphi}\right). \quad (8)$$

Выражение (8) означает, что источник и его изображение расположены симметрично относительно границы раздела двух сред. Аналогичным способом можно получить и более общие формулы для среды с произвольными ε и μ . Не приводя этих выражений, отметим только, что *точное* восстановление поля источника возможно только в случае идеальной левой среды. Во всех иных случаях изображение получается с изъянами. Монохроматической аберрации можно избежать, если в качестве линзы использовать пластину из анизотропной левой среды со специально подобранным законом дисперсии [21], но рассмотрение анизотропных сред выходит за рамки данной работы. С разнообразием свойств анизотропных левых сред можно ознакомиться в работе [9].

Напомним, что точность восстановления изображения внутри слоя идеальной левой среды ограничена длиной волны, как и в обычных оптических системах. Правда, это утверждение справедливо только в том случае, когда левая среда не усиливает нераспространяющиеся волны с $k_\perp > k_0$. Содержащееся в работе [15]

утверждение, что слой левой среды усиливает нераспространяющиеся волны и позволяет тем самым пре-
взойти предел точности восстановления изображения, обусловленный волновой природой света, выглядит на
первый взгляд ошибочным, поскольку левая среда яв-
ляется пассивной средой. Но не будем делать поспешных
выводов и попробуем разобраться в этом вопросе. В
силу линейности задачи можно ограничиться рассмотре-
нием поведения только одной фурье-компоненты поля
 $\sim \exp(ik_{\perp}x)$.

Начнем снова с задачи о падении плоской волны на
границу раздела правой и левой сред. Пусть магнитное
поле H_y падающей волны равно $H^{(in0)} \exp(ik_z z)$, границей
раздела сред является плоскость $z = z_1$.

На границе раздела возникают прошедшая и отра-
женная волны, магнитные поля которых представим в
виде

$$H^{(tr1)} \exp(iq_z z) \quad (z > z_1), \quad H^{(ref1)} \exp(-ik_z z) \quad (z < z_1)$$

соответственно. Здесь

$$k_z = \sqrt{k_0^2 - k_{\perp}^2}, \quad q_z = \sqrt{k_0^2 \varepsilon \mu - k_{\perp}^2}$$

— продольные компоненты волнового вектора волны в
правой и левой средах соответственно.

Выписанные выше граничные условия связывают
амплитуды трех волн уравнениями

$$\begin{aligned} H^{(in0)} \exp(ik_z z_1) + H^{(ref1)} \exp(-ik_z z_1) &= H^{(tr1)} \exp(iq_z z_1), \\ k_z H^{(in0)} \exp(ik_z z_1) - k_z H^{(ref1)} \exp(-ik_z z_1) &= \\ = \frac{q_z}{\varepsilon} H^{(tr1)} \exp(iq_z z_1). \end{aligned} \quad (9)$$

Из (9) следуют выражения для $H^{(ref1)}$ и $H^{(tr1)}$, решаю-
щие поставленную задачу:

$$\begin{aligned} H^{(tr1)} &= \frac{2\varepsilon k_z}{\varepsilon k_z + q_z} \exp[i(k_z - q_z)z_1] H^{(in0)}, \\ H^{(ref1)} &= \frac{\varepsilon k_z - q_z}{\varepsilon k_z + q_z} \exp(2ik_z z_1) H^{(in0)}. \end{aligned} \quad (10)$$

Обратим внимание на знаменатели в формулах (10).
Если падающая и прошедшая волны являются рас-
пространяющимися, то знаменатели не обращаются в
нуль ни при каких значениях $k_{\perp}$, так как $\text{sgn } \varepsilon = \text{sgn } q_z$.
Если же как падающая, так и прошедшая волны явля-
ются нераспространяющимися, для которых $k_{\perp}^2 > k_0^2$,
 $k_{\perp}^2 > k_0^2 \mu \varepsilon$, то знаменатели могут обратиться в нуль:

$$\varepsilon k_z + q_z \equiv \varepsilon \sqrt{k_0^2 - k_{\perp}^2} + \sqrt{k_0^2 \varepsilon \mu - k_{\perp}^2} = 0. \quad (11)$$

Здесь знаки перед корнями следует выбирать таким
образом, чтобы прошедшая и отраженная волны зату-
хали при удалении от границы, т.е. уравнение (11) можно
записать в виде

$$|\varepsilon| \sqrt{k_{\perp}^2 - k_0^2} - \sqrt{k_{\perp}^2 - k_0^2 \varepsilon \mu} = 0. \quad (12)$$

Уравнение (12) является дисперсионным уравнением
собственных поверхностных волн, которые могут су-
ществовать на границе раздела правой и левой сред
без наличия поля источника $H^{(in0)}$ [22].

Если волновой вектор $k_{\perp}$ поля источника совпадает с
корнем дисперсионного уравнения (12), то амплитуды
прошедшей и отраженной волн обращаются в бесконеч-
ность, поскольку внешнее поле является резонансной
силой, раскачивающей собственные незатухающие коле-
бания среды. Таким образом, уже одна граница пред-
ставляет собой резонансный "усилитель" нераспростра-
няющихся волн. Как и в обычном резонаторе, учет
потерь в среде приведет к ограничению амплитуды ре-
зонансной поверхностной волны и определит ширину
резонанса.

Прежде чем перейти к плоско-параллельной линзе,
обратим внимание на интересную особенность поверх-
ностных волн: поток энергии в них направлен вдоль
границы и меняет знак при переходе через нее. В случае
идеальной левой среды потоки слева и справа от границы
равны друг другу по величине, так что полный поток
энергии вдоль границы равен нулю.

Рассмотрим теперь падение плоской волны на пло-
ско-параллельную пластину из левого материала, вторая
граница которой совпадает с плоскостью $z = z_r$. К
рассмотренным перед этим волнам добавляются отра-
женная от второй границы и прошедшая через пластину
волны, магнитные поля которых обозначим

$$H^{(ref2)} \exp(-iq_z z), \quad H^{(tr2)} \exp(ik_z z)$$

соответственно. Записав граничные условия на двух
границах с учетом всех волн, получим следующие
выражения для их амплитуд:

$$\begin{aligned} H^{(tr1)} &= \frac{1}{2D(k_{\perp})} \left(1 + \frac{k_z \varepsilon}{q_z} \right) \exp(-iq_z z_r + ik_z z_1), \\ H^{(ref1)} &= -\frac{i}{2D(k_{\perp})} \left(\frac{k_z \varepsilon}{q_z} - \frac{q_z}{k_z \varepsilon} \right) \sin(q_z d), \\ H^{(tr2)} &= \frac{1}{D(k_{\perp})} \exp(-ik_z d), \\ H^{(ref2)} &= \frac{1}{2D(k_{\perp})} \left(1 - \frac{k_z \varepsilon}{q_z} \right) \exp(iq_z z_r + ik_z z_1), \end{aligned} \quad (13)$$

где $d = z_r - z_1$ — толщина пластины и

$$D(k_{\perp}) = \cos(q_z d) - \frac{i}{2} \left(\frac{k_z \varepsilon}{q_z} + \frac{q_z}{k_z \varepsilon} \right) \sin(q_z d). \quad (14)$$

Нули функции $D(k_{\perp})$, если таковые существуют,
указывают на наличие собственных незатухающих коле-
баний поля в пластине. Нетрудно видеть, что нули
функции $D(k_{\perp})$ заведомо отсутствуют, если волновой
вектор k_z веществен. Поэтому мы и не видели никакого
усиления в предыдущих разделах, где рассматривались
только распространяющиеся волны.

При произвольном знаке ε заведомо есть решения
уравнения $D(k_{\perp}) = 0$ в случае вещественного q_z и мн-
мого k_z . Это собственные колебания прозрачной пла-
стины, помещенной в непрозрачную среду (но без дисси-
пации). "Усиление" нераспространяющегося поля источ-
ника происходит вблизи дискретного ряда резонансных
волновых векторов $k_{\perp}^{(n)}$, соответствующих собственным
модам пластины.

Но наиболее интересный результат получается, когда
оба волновых вектора, k_z и q_z , мнимые. В этом случае

функцию $D(k_{\perp})$ можно записать в виде [23]

$$D(k_{\perp}) = \frac{1}{2} \exp(-|q_z|d) \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{|k_z|\varepsilon}{|q_z|} + \frac{|q_z|}{|k_z|\varepsilon} \right) \right] + \frac{1}{2} \exp(|q_z|d) \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{|k_z|\varepsilon}{|q_z|} + \frac{|q_z|}{|k_z|\varepsilon} \right) \right]. \quad (15)$$

Чтобы избежать громоздких формул, проанализируем выражение (15), предполагая, что $\varepsilon\mu = 1$. В этом случае

$$|k_z| = |q_z| = \sqrt{k_{\perp}^2 - k_0^2},$$

и уравнение $D(k_{\perp}) = 0$ принимает вид

$$D(k_{\perp}) \equiv \frac{1}{2} \exp\left(-\sqrt{k_{\perp}^2 - k_0^2}d\right) \left[1 - \frac{1}{2} \left(\varepsilon + \varepsilon^{-1} \right) \right] + \frac{1}{2} \exp\left(\sqrt{k_{\perp}^2 - k_0^2}d\right) \left[1 + \frac{1}{2} \left(\varepsilon + \varepsilon^{-1} \right) \right] = 0. \quad (16)$$

Нетрудно видеть, что уравнение (16) имеет решение $k_{\perp} = k_{\perp}^{(\text{res})}$ только при отрицательных ε .

"Усиление" нераспространяющейся волны тем больше, чем ближе $k_{\perp}$ к своему резонансному значению $k_{\perp}^{(\text{res})}$. То есть чем меньше величина $D(k_{\perp})$, тем ближе к резонансу данная волна и, следовательно, тем больше ее амплитуда на выходе "резонатора". При $\varepsilon \rightarrow -1$ функция $D(k_{\perp})$ экспоненциально быстро убывает при приближении $k_{\perp} \rightarrow k_{\perp}^{(\text{res})}$ со стороны меньших значений и экспоненциально быстро растет за точкой резонанса. Поэтому условно можно считать область $k_0 < k_{\perp} < k_{\perp}^{(\text{res})}$ расположенной вблизи резонанса, а область $k_{\perp} > k_{\perp}^{(\text{res})}$ — далекой от резонанса.

Воспользовавшись выражениями (13), (16), получим выражение для поля нераспространяющейся фурье-гармоники за плоско-параллельной пластиной

$$H^{(\text{tr2})}(z) = \exp\left(\sqrt{k_{\perp}^2 - k_0^2}(d-z)\right) \times \left\{ \frac{1}{2} \exp\left(-\sqrt{k_{\perp}^2 - k_0^2}d\right) \left[1 - \frac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon^{-1}) \right] + \frac{1}{2} \exp\left(\sqrt{k_{\perp}^2 - k_0^2}d\right) \left[1 + \frac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon^{-1}) \right] \right\}^{-1}. \quad (17)$$

Из (17) следует, что поле фурье-гармоники в плоскости $z = 2d$ близко к единице, т.е. к его значению в плоскости источника $z = 0$, если волновой вектор $k_{\perp}$ лежит в "резонансной" области $k_0 < k_{\perp} < k_{\perp}^{(\text{res})}$, и экспоненциально мало в области $k_{\perp} > k_{\perp}^{(\text{res})}$ (рис. 8⁵). Таким образом, в плоскости $z = 2d$ не только распространяющиеся фурье-гармоники поля источника, но и часть нераспространяющихся гармоник с $k_{\perp} < k_{\perp}^{(\text{res})}$ имеют те же амплитуды и фазы, что и в плоскости источника, т.е. создают его изображение. Наименьшие детали, различимые на изображении, определяются величиной $2\pi/k_{\perp}^{(\text{res})}$, которая может быть намного меньше длины волны $\lambda = 2\pi/k_0$. При $\varepsilon \rightarrow -1$ величина $k_{\perp}^{(\text{res})} \rightarrow \infty$ и есть "идеальная" линза.

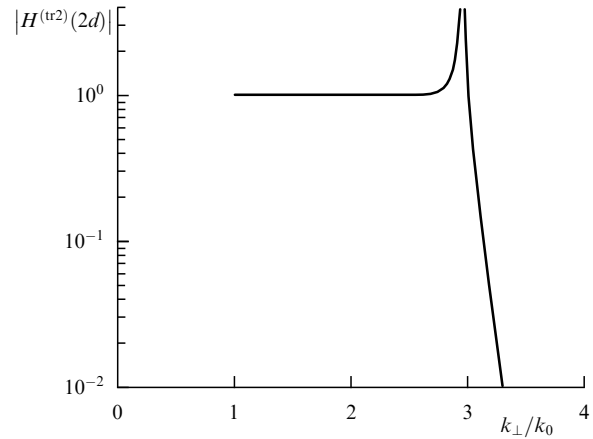


Рис. 8. Зависимость амплитуды нераспространяющихся волн в фокальной плоскости линзы из левого материала от величины волнового вектора (к формуле (17)).

В заключение этого раздела заметим следующее. В области резонансных волновых векторов $k_0 < k_{\perp} < k_{\perp}^{(\text{res})}$ первое, экспоненциально малое слагаемое в выражении (16) мало по сравнению со вторым слагаемым, что возможно только при экспоненциально малом отклонении ε от -1 . Полагая $\varepsilon = -1 + \delta$, $|\delta| \ll 1$, получим из (16)

$$k_{\perp}^{(\text{res})} = k_0 \sqrt{1 + \frac{\ln^2(2/|\delta|)}{k_0^2 d^2}}. \quad (18)$$

Из (18) следует, что при заданном увеличении разрешающей способности линзы $k_{\perp}^{(\text{res})}/k_0$ величина δ экспоненциально быстро убывает с ростом толщины линзы d :

$$|\delta| = 2 \exp\left\{-k_0 d \sqrt{\left(\frac{k_{\perp}^{(\text{res})}}{k_0}\right)^2 - 1}\right\}.$$

Так, например, при $k_{\perp}^{(\text{res})}/k_0 = 3$ и $d = \lambda = 2\pi/k_0$ (приведенная на рис. 8 зависимость соответствует этим значениям параметров) величина δ должна быть меньше 10^{-7} . Поэтому, хотя формально возможно сколь угодно точное воспроизведение изображения источника, реально достижимо только небольшое улучшение качества изображения объекта, расположенного на малом ($z \approx \lambda$) расстоянии от тонкой ($d \approx \lambda$) линзы. Такую компоновку, когда все три компонента — объект, плоская пластина, изображение — расположены на расстоянии порядка или меньше длины волны, следует рассматривать скорее не как линзу, а как единый источник излучения в слоистой среде [25].

И еще одно замечание. Для того чтобы усилить слабый "входной сигнал" — нераспространяющуюся моду от источника — с помощью резонатора, образованного пластиной из левого материала, необходимо запастись в резонаторе большой энергией, что требует большого времени переходного процесса. Чем большее разрешение требуется от линзы, тем меньший "входной" уровень имеют соответствующие нераспространяющиеся моды и тем выше должен быть уровень поля в резонаторе и больше время переходного процесса. По-видимому, незнание этого обстоятельства не позволило авторам работы [20] наблюдать эффект "идеальной" линзы при численном моделировании прохождения

⁵ Во время подготовки статьи к публикации появилась работа [24], в которой изображенная на рис. 8 зависимость получена численным решением уравнений Максвелла. Поскольку в работе [24] рассмотрен случай диссипативной среды, то вместо разрыва при $k_{\perp} = k_{\perp}^{(\text{res})}$ на приведенном там рисунке расположен острый максимум.

ограниченного во времени волнового импульса через плоско-параллельную пластину из левого материала.

7. Заключение

В данной работе мы попытались рассказать, что такое левые среды и какие необычные волновые эффекты с ними связаны. Конечно, мы не смогли отметить большинство работ, связанных с этой тематикой (см. рис. 1), но упомянули, на наш взгляд, основные из них. Хотя поток новых статей еще велик (в 2003 г. уже появилось несколько десятков публикаций), но накал страстей стих. Если раньше (1999–2002 гг.) практически на каждое новое утверждение появлялись опровергающие его аргументы, то сейчас дискуссия вошла в обычные, рабочие рамки. Уже мало кто сомневается в существовании левых сред. Экспериментальные работы разных авторов, использовавших различные реализации левых материалов, подтвердили как необычный закон преломления на границе раздела сред, так и (с той или иной степенью точности) фокусирующие свойства плоско-параллельной пластины. Хуже дело обстоит с эффектом совершенной линзы, поскольку наблюдаемость этого эффекта предъявляет жесткие требования к параметрам левой среды.

Вне поля зрения данной работы остались такие вопросы, как нелинейные эффекты на поверхности раздела правых и левых сред, одномерные периодические волноведущие структуры, содержащие левые элементы и т.д. Все эти вопросы связаны уже с развитием данного направления, а мы ставили своей целью познакомить читателя только с основами физики левых сред.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке INTAS (грант № 03-55-1921).

Список литературы

1. Веселаго В Г *УФН* **92** 517 (1967)
2. Веселаго В Г *ФТТ* **8** 3571 (1966)
3. Focus Issue: Negative Refraction and Metamaterials *Opt. Express* **11** (7) (2003)
4. Мандельштам Л И *ЖЭТФ* **15** 475 (1945)
5. Pendry J B et al. *Phys. Rev. Lett.* **76** 4773 (1996)
6. Pendry J B et al. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* **47** 2075 (1999)
7. Силян П А *Необычные законы преломления и отражения* (М.: Фазис, 1999)
8. Силян П А, Чепурных И П *Радиотехника и электроника* **46** 1212 (2001)
9. Силян П А *Радиотехника и электроника* **47** 186 (2002)
10. Smith D R et al. *Phys. Rev. Lett.* **84** 4184 (2000)
11. Shelby R A, Smith D R, Schultz S *Science* **292** 77 (2001)
12. Notomi M *Phys. Rev. B* **62** 10696 (2000)
13. Zhang Y, Fluegel B, Mascarenhas A *Phys. Rev. Lett.* **91** 157404 (2003)
14. Bliokh Yu P, Felsteiner J, physics/0311066
15. Pendry J B *Phys. Rev. Lett.* **85** 3966 (2000)
16. Valanju P M, Walser R M, Valanju A P *Phys. Rev. Lett.* **88** 187401 (2002)
17. Pendry J B, Smith D R *Phys. Rev. Lett.* **90** 029703 (2003)
18. Pacheco J (R) et al. *Phys. Rev. Lett.* **89** 257401 (2002)
19. Foteinopoulou S, Economou E N, Soukoulis C M *Phys. Rev. Lett.* **90** 107402 (2003)
20. Loschiavo P F et al. *Phys. Rev. E* **67** 025602(R) (2003)
21. Силян П А *Оптика и спектроскоп.* **44** 189 (1978)
22. Ruppin R J. *Phys.: Condens. Matter* **13** 1811 (2001)
23. Smith D R et al. *Appl. Phys. Lett.* **82** 1506 (2003)
24. Rao X S, Ong C K *Phys. Rev. E* **68** 067601 (2003)
25. Веселаго В Г, частное сообщение

What are left-handed media and what is interesting about them?

K.Yu. Bliokh

Institute of Radio Astronomy, 61002 Kharkov, Ukraine

E-mail: kostya@bliokh.kharkiv.com

Yu.P. Bliokh

Department of Physics, Technion, 32000 Haifa, Israel

E-mail: bliokh@physics.technion.ac.il

Ideas related to the recently much discussed theme of wave propagation and refraction in media with permittivity and permeability simultaneously negative are reviewed. The causality-related criticism of negative refraction is discussed. Refraction at the boundary of a left-handed medium is analyzed based on the wave equation. The physics of a flat "perfect lens" made of a left-handed material is described.

PACS numbers: 41.20.Jb, 42.15.Dp, 78.20.Ci

Bibliography — 25 references

Received 14 April 2003, revised 24 February 2004